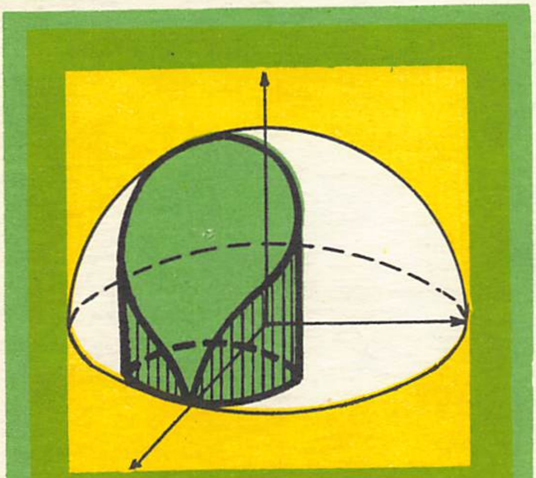
CULEGERI DE PROBLEME DE MATEMATICĂ ŞI FIZICĂ

SERIE

M. ROŞCULEŢ
G. TOMA
V. MASGRAS
V. STANCIU
E. BRĂILEANU
N. DIMCEVICI

Probleme de analiză matematică



MATHEMATICAL ANALYSIS EXERCISES

This selection of exercises has been especially conceived for the first year university students; it is useful for both those who are preparing themselves for the entrance examination as well as for highschool teachers.

The first chapters deal with the basic concepts of the mathematical analysis : sets, figures, lattices, functions etc., including a lot of graphs clearly exposing every notion in detail. These chapters are also very useful to the odvanced highschool pupils in terminal grades. This part of the book refers to computers or other general fields.

Approximate and numerical methods are comprised in the chapter on integral calculus and differential equations. These chapters also include physics exercises, strength of materials exercises, exercises of mechanichs, electrotechnics etc.

There are also more complicated, more comptex exercises, whose key is explained at length, meant as training for entrance examinations.

CONTENTS

Prof. ing. dr. doc. MARCEL N. ROŞCULEŢ
lector GALINA TOMA • conf. dr. VASILE MASGRAS
lector VICTORIA STANCIU • lector EMIL BRĂILEANU
lector NICOLETA DIMCEVICI-POESINA

Probleme de analiză matematică

Calcul diferențial. Calcul integral. Ecuații diferențiale.
Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întîi

Coordonator: prof. dr. doc. ing. Marcel N. Resculeț

Editura Tehnică
București 1993

Adresa: EDITURA TEHNICĂ
Piața Presei Libere, 1
33 București, România
cod 79738

Această culegere de probleme este adresată studenților din primii ani de învățămînt superior, putînd fi foarte utilă atît celor ce se pregătesc pentru examenul de admitere în învățămîntul superior, cît și profesorilor de liceu.

Primele capitole conțin probleme de bazele analizei matematice: mulțimi, numere, structuri, șiruri, funcții ș.a. cu multe grafice, care prezintă clar subtilitatea noțiunilor. Aceste capitole sînt foarte utile și elevilor avansați din ultimii ani de liceu, deoarece sunt prezentate legat de calculatoare sau cu noțiuni definite pe spații mai generale.

Metode aproximative și numerice se găsesc în capitolele de calcul integral și ecuații diferențiale. În aceste capitole sînt cuprinse și probleme practice de fizică, rezistența materialelor, mecanică, electrotehnică etc.

Problemele de examen, de obicei mai complexe, cu rezolvări detaliate, sînt presărate pe tot parcursul culegerii.

Redactor: ing. **VASILE BUZATU**
Tehnoredactor: **OLIMPIADA NISTOR**
Coperta: **SIMONA DUMITRESCU**

Bun de tipar: 20.08.1993 Coli de tipar: 23,25
C.Z.: 517 (076.3)
ISBN—973-31-0231-8

Tiparul executat la Imprimeria „ARDEALUL" Cluj
B-dul 22 Decembrie nr. 146. Com. 605

CAPITOLUL 1

MULŢIMI. NUMERE. STRUCTURI

1.1. Fie E o mulţime oarecare nevidă, $P(E)$ mulţimea părţilor sale şi A, $B \in P(E)$ nevide. Să se arate că:

1) $A \subseteq B$ implică $P(A) \subseteq P(B)$.
2) $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$.
3) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.
4) $P(A \setminus B) \subseteq P(A) \setminus P(B)$.
5) $P(A \setminus B) \cup P(B \setminus A) \subseteq P(A \Delta B) \subseteq P(A \cup B)$,
$P(A \setminus B) \cup P(B \setminus A) \subseteq P(A) \Delta P(B) \subseteq P(A) \cup P(B)$:

unde

$X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ este diferenţa simetrică dintre X şi Y.

6. $P(A) \times P(B)$, $P(A \times B)$ nu sînt comparabile.
7. $A \cap B \neq \emptyset$ implică $P(A \times B) \cap (P(A) \times P(B)) \neq \emptyset$

Să se precizeze cînd are loc egalitatea la 3), 4) şi 5) şi să se generalizeze 2), 3) pentru $\bigcap_{A \in S} A$ (intersecţia tuturor mulţimilor din S), respectiv $\bigcup_{A \in S} A$ (reuniunea tuturor mulţimilor din S), unde $S \subset P(E)$.

R. 1) Se consideră $X \in P(A)$, adică $X \subseteq A$. Cum $A \subseteq B$, rezultă $X \subseteq B$ şi deci $X \in P(B)$.

2) Se demonstrează prin dublă incluziune. Se aplică 1) pentru $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$. Se obţine $P(A \cap B) \subseteq P(A)$, $P(A \cap B) \subseteq P(B)$. Urmează să $P(A \cap B) \subseteq P(A) \cap P(B)$.

Cealaltă incluziune se demonstrează. luînd $X \in P(A) \cap P(B)$. Prin definiţie avem $X \subseteq A$ şi $X \subseteq B$. Rezultă $X \subseteq A \cap B$ şi deci $X \in P(A \cap B)$. Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$. Pentru $\bigcap_{A \in S} A$, $S \subset P(E)$ avem $P(\bigcap_{A \in S} A) = \bigcap_{A \in S} P(A)$, care se obţine analog.

3) Se aplică 1) pentru $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$. Se obţine

$$P(A) \subseteq P(A \cup B), \; P(B) \subseteq P(A \cup B).$$

Urmează că $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.

În general incluziunea $P(A \cup B) \subseteq P(A) \cup P(B)$ nu este adevărată. Într-adevăr, dacă $X \in P(A \cup B)$, adică $X \subseteq A \cup B$, există $X_1 \neq \emptyset$, $X_1 \subseteq A$, $X_2 \neq \emptyset$, $X_2 \subseteq B$ astfel încît $X = X_1 \cup X_2$. Cum $X \nsubseteq A$, $X \nsubseteq B$, rezultă că $X \notin P(A)$, $X \notin P(B)$ şi deci $X \notin P(A) \cup P(B)$. Are loc egalitatea în cazul particular $A \subseteq B$ sau $B \subseteq A$, deoarece $P(A \cup B) = P(B)$

sau $P(A \cup B) = P(A)$, iar conform 1), $P(A) \cup P(B) = P(B)$ sau $P(A) \cup \cup P(B) = P(A)$.

Pentru $\bigcup_{A \in S} A$, $S \subset P(E)$ avem $\bigcup_{A \in S} P(A) \subseteq P(\bigcup_{A \in S} A)$, care se obține analog.

4) *Observație*. Avem $X \subseteq A \setminus B$ ddacă $X \setminus (A \setminus B) = \emptyset$.

Se demonstrează în prealabil egalitatea

i) $X \setminus (A \setminus B) = (X \setminus A) \cup (X \cap B)$.

Avem $x \in X \setminus (A \setminus B)$ ddacă $x \in X$ și $x \notin A \setminus B$ ddacă $x \in X$ și ($x \notin A$ sau $x \in B$). dacă ($x \in X$ și $x \notin A$) sau ($x \in X$ și $x \in B$) ddacă $x \in (X \setminus A) \cup (X \cap B)$.

Egalitatea se mai poate demonstra exprimînd diferența în funcție de intersecție și complementară și aplicînd relațiile lui De Morgan. Fie $X \in P(A \setminus B)$, adică $X \subseteq A \setminus B$. Conform i) și observației care o precede, avem $X \setminus (A \setminus B) = \emptyset$, $X \setminus A = \emptyset$, $X \cap B = \emptyset$; $X \subseteq A$, $X \nsubseteq B$.

Rezultă $X \in P(A) \setminus P(B)$ și incluziunea este demonstrată. În general, incluziunea $P(A) \setminus P(B) \subseteq P(A \setminus B)$ nu este adevărată. Într-adevăr, dacă $X \in P(A) \setminus P(B)$, adică $X \subseteq A$ și $X \nsubseteq B$ (dar $X \cap B \neq \emptyset$) avem $(X \setminus A) \cup \cup (X \cap B) \neq \emptyset$ deoarece $X \setminus A = \emptyset$, $X \cap B \neq \emptyset$. Conform (i) și observației care o precede avem $X \setminus (A \setminus B) \neq \emptyset$, $X \nsubseteq A \setminus B$. Deci $X \notin P(A \setminus B)$.

Pe de altă parte, în cazul particular $A \cap B = \emptyset$, dacă $X \subseteq A$, atunci $X \cap B = \emptyset$ și are loc egalitatea.

5. Se aplică 1), 3) pentru $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B$ și se obține prima dublă incluziune. În continuare se aplică 4) pentru $P(A) \Delta P(B) = (P(A) \setminus P(B)) \cup P(B) \setminus P(A))$ și se obține incluziunea $P(A \setminus B) \cup P(B \setminus A) \subseteq P(A) \Delta P(B)$.

Incluziunea din dreapta celei de-a doua duble incluziuni este evidentă. În cazul particular $A \cap B = \emptyset$, deoarece $A \Delta B = A \cup B$ are loc egalitatea $P(A \Delta B) = P(A \cup B)$. Conform 4) are loc și egalitatea $P(A) \Delta P(B) = P(A \setminus B) \cup P(B \setminus A)$.

Se observă că $P(A) \Delta P(B) \subseteq P(A \Delta B)$.

În cazul particular $A \subseteq B$ sau $B \subseteq A$, avem $P(A \Delta B) \subseteq P(A) \Delta P(B)$.

6) În general mulțimile $P(A) \times P(B)$, $P(A \times B)$ nu sînt comparabile deoarece au elemente diferite. Într-adevăr, dacă $(X, Y) \in P(A) \times P(B)$, atunci $X \times Y \in P(A \times B)$, deoarece pentru $(a, b) \in X \times Y$, cum $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, avem $(a, b) \in A \times B$.

Reciproc, fie $R \in P(A \times B)$, adică $R \subseteq A \times B$. Se consideră mulțimile

$$X = \{a \in A / \text{există } b \in B \text{ astfel încît } (a, b) \in R\},$$

$$Y = \{b \in B / \text{există } a \in A \text{ astfel încît } (a, b) \in R\}.$$

Avem $X \in P(A)$, $Y \in P(B)$, $(X, Y) \in P(A) \times P(B)$, $R \subseteq X \times Y$, $X \times Y \in P(A \times B)$.

Primele trei relații sînt evidente. Dacă $r \in R$, atunci există $a \in A$, $b \in B$ astfel încît $r = (a, b)$. Prin definiție $a \in X$, $b \in Y$ și deci $r \in X \times Y$. În general incluziunea $X \times Y \subseteq R$ nu este adevărată.

Dacă $(a, b) \in X \times Y$, atunci $a \in X$, $b \in Y$. Cum $X \subseteq A$, $Y \subseteq B$, rezultă $(a, b) \in A \times B$. Deci $X \times Y \subseteq A \times B$, adică $X \times Y \in P(A \times B)$. În general, $(X, Y) \neq X \times Y$ și $(X, Y) \neq R$.

Observație. 1) R se numește relație binară pe mulțimile A, B, X, Y se numesc domeniul, respectiv codomeniul relației R.

Dacă $R = A \times B$, relația R se numește universală.

2) Aplicația $F: P(A) \times P(B) \to P(A \times B)$, $(X, Y) \to X \times Y$ este injectivă, deoarece $X_1 \times Y_1 = X_2 \times Y_2$ implică $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$ implică $(X_1, Y_1) = (X_2, Y_2)$. Rezultă că $|P(A) \times P(B)| \leqslant |P(A \times B)|$ unde $|X|$ este cardinalul mulțimii X. Dacă mulțimea X este finită, $|X|$ este numărul elementelor lui X. $P(A \times B)$, $P(A) \times P(B)$ sînt mulțimi finite dacă A, B sînt finite.

7) În particular, dacă $A \cap B \neq \emptyset$, atunci există $a \in A \cap B$. Prin definiție $(a, a) = \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}\}$, $(\{a\}, \{a\}) = \{\{\{a\}\}, \{\{a\}, \{a\}\}\} = \{\{\{a\}\}\}$.

Avem $\{(a, a)\} \in P(A \times B)$, $(\{a\}, \{a\}) \in P(A) \times P(B)$,

$$\{(a, a)\} = (\{a\}, \{a\}) = \{\{\{a\}\}\},$$

deci $P(A \times B) \cap (P(A) \times P(B)) \neq \emptyset$.

1.2. Fie E o mulțime oarecare nevidă și $P(E)$ mulțimea părților sale.

Să se arate că aplicația $C_E: P(E) \to P(E)$, $X \to E \setminus X$ ($C_E(X)$ este complementara submulțimii X în raport cu E) are proprietățile:

1) $C_E(X \cup Y) = C_E(X) \cap C_E(Y)$, $C_E(X \cap Y) = C_E(X) \cup C_E(Y)$ (relațiile De Morgan).

Să se generalizeze pentru $\bigcup_{X \in S} X$, $\bigcap_{X \in S} X$ (reuniunea, respectiv intersecția tuturor mulțimilor din S), unde $S \subset P(E)$.

2) $C_E \circ C_E = 1_{P(E)}$, unde $1_{P(E)}: P(E) \to P(E)$ este aplicația identică.

3) C_E este bijectivă.

R. *Observație.* C_E este corect definită deoarece, orice element din algebra Boole $P(E)$ are complement unic.

1) Relațiile De Morgan se pot demonstra direct, folosind definițiile operațiilor de diferență, reuniune, intersecție. De exemplu, pentru prima relație avem $x \in C_E(X \cup Y)$ ddacă $x \in E$ și $x \notin X \cup Y$ ddacă $x \in E$ și $x \notin X$ și $x \notin Y$ ddacă ($x \in E$ și $x \notin X$) și ($x \in E$ și $x \notin Y$) ddacă $x \in C_E(X) \cap C_E(Y)$. Relațiile de Morgan generalizate, respectiv $C_E(\bigcup_{X \in S} X) = \bigcap_{X \in S} C_E(X)$, $C_E(\bigcap_{X \in S} X) = \bigcup_{X \in S} C_E(X)$ se demonstrează analog. O altă metodă de demonstrație (pe care o ilustrăm pentru relațiile De Morgan) rezultă din observația de mai sus și din relațiile $(X \cup Y) \cup (C_E(X) \cap C_E(Y)) = E$, $(X \cup Y) \cap (C_E(X) \cap C_E(Y)) = \emptyset$, respectiv $(X \cap Y) \cup (C_E(X) \cup C_E(Y)) = E$, $(X \cap Y) \cap (C_E(X) \cup C_E(Y)) = \emptyset$, care se obțin aplicînd proprietățile de comutativitate, asociativitate, distribuitivitate, mărginire ale algebrei Boole $P(E)$.

2) Pentru $X \in P(E)$ arbitrar fixat, egalitatea $C_E \circ C_E = 1_{P(E)}$ revine la egalitatea $E \setminus (E \setminus X) = X$ care rezultă din echivalențele:

$$x \in (E \setminus (E \setminus X)) \text{ ddacă } x \in E \text{ și } x \notin E \setminus X \text{ ddacă } x \in E \text{ și}$$

$$(x \notin E \text{ sau } x \in X) \text{ ddacă } x \in E \text{ și } x \in X \text{ ddacă } x \in X.$$

3) Din relația 2) rezultă că aplicația C_E este inversabilă (și egală cu inversa sa), deci bijectivă.

1.3. Fie E o mulţime oarecare nevidă, $P(E)$ mulţimea părţilor sale şi $F \in P(E) \setminus \{\emptyset, E\}$ fixată. Să se arate că aplicaţia $U_F : P(E) \to P(F)$, $X \to F \cap X$ ($U_F(X)$ este urma pe F a submulţimii X) are proprietăţile:

1) $U_F(X \cap Y) = U_F(X) \cap U_F(Y)$, $U_F(X \cup Y) = U_F(X) \cup U_F(Y)$.

Să se generalizeze pentru $\bigcap_{X \in S} X$, $\bigcup_{X \in S} X$ (intersecţia, respectiv reuniunea tuturor mulţimilor din S, unde $S \subset P(E)$.

2) $U_F(X \setminus Y) = U_F(X) \setminus U_F(Y)$.

3) $U_F(X \Delta Y) = U_F(X) \Delta U_F(Y)$, unde $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ este diferenţa simetrică dintre X şi Y.

4) U_F este surjectivă, dar nu este injectivă.

5) $R \subset P(E) \times P(E)$, $X \mathrel{R} Y$ dacă $U_F(X) = U_F(Y)$ este relaţie de echivalenţă şi există o aplicaţie bijectivă de la $P(E)/R$ (mulţimea claselor de echivalenţă) la $P(F)$.

R. 1) Relaţiile 1) revin la egalităţile

$$F \cap (X \cap Y) = (F \cap X) \cap (F \cap Y),$$

$$F \cap (X \cup Y) = (F \cap X) \cup (F \cap Y),$$

care rezultă conform proprietăţilor de idempotenţă, asociativitate, distributivitate ale operaţiilor de intersecţie şi reuniune.

Relaţiile 1) generalizate, respectiv

$$U_F(\bigcap_{X \in S} X) = \bigcap_{X \in S} U_F(X), \quad U_F(\bigcup_{X \in S} X) = \bigcup_{X \in S} U_F(X)$$

se demonstrează analog.

2) Relaţia 2) revine la egalitatea $F \cap (X \setminus Y) = (F \cap X) \setminus (F \cap Y)$ care reprezintă proprietatea de distributivitate a intersecţiei faţă de diferenţă. Prin exprimarea diferenţei în funcţie de complementară şi intersecţie şi conform proprietăţilor de asociativitate şi distributivitate ale operaţiilor de intersecţie şi reuniune, definiţiei complementarei şi unei relaţii De Morgan, avem: $(F \cap X) \setminus (F \cap Y) = (F \cap X) \cap C(F \cap Y) = (F \cap X) \cap (CF \cup CY) = (F \cap X \cap CF) \cup (F \cap X \cap CY) = F \cap (X \setminus Y)$.

3) Relaţia 3) rezultă din definiţia diferenţei simetrice şi egalităţile 1), 2).

4) Se observă că $P(F) \subset P(E)$ (vezi problema 1). Folosim egalitatea $X = (X \cap F) \cup (X \setminus F)$ care se obţine uşor conform exprimării diferenţei în funcţie de complementară şi intersecţie şi proprietăţilor operaţiilor de intersecţie, reuniune şi complementare. Urmează că pentru orice $Y \in P(F)$, există $X \cap P(F)$, $X = Y$, astfel încît $U_F(X) = Y$, deci U_F este surjectivă. U_F nu este injectivă deoarece propoziţia

$X_1 \neq X_2$ implică $U_F(X_1) \neq U_F(X_2)$. este adevărată doar pentru $X_1, X_2 \in P(F)$.

5) Evident R este relaţie de echivalenţă (reflexivă, tranzitivă, simetrică) deoarece $= \subset P(F) \times PF)$ este relaţie de echivalenţă. Aplicaţia $\hat{U}_F : P(E)/_R \to P(E)$, $\hat{X} \to U_F(X)$, unde $\hat{X}$ este clasa de echivalenţă a submulţimii $X \in P(E)$ este injectivă; în plus, este şi surjectivă deoarece $U_F = \hat{U}_F \circ s_R$, unde $s_R : P(E) \to P(E)/R$, $X \to \hat{X}$ este surjecţia canonică şi U_F este surjectivă conform 4).

1.4. Fie E o mulţime oarecare nevidă. Pentru orice $A \in P(E)$ (mulţimea părţilor lui E) se defineşte $f_A: E \to \{0, 1\}$ (funcţia caracteristică a submulţimii A) prin $f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in E \setminus A. \end{cases}$

Să se arate că:

1) $A \subseteq B$ ddacă $f_A \leqslant f_B$, unde $f_A \leqslant f_B$ ddacă pentru orice $x \in E$, $f_A(x) \leqslant f_B(x)$. Să se deducă echivalenţa $A = B$ ddacă $f_A = f_B$.

2) Aplicaţia $F: P(E) \to \{0, 1\}^E$, $A \to f_A$ este bijectivă, unde $\{0, 1\}^E = \{f: E \to \{0, 1\}\}$ este mulţimea funcţiilor de la E la $\{0, 1\}$.

3) Există submulţimi pentru care funcţia caracteristică este constantă.

4) $f_{A \cap B} = f_A f_B$.

5) $f_{CA} = 1 - f_A$, unde CA este complementara submulţimii A în raport cu E.

6) $f_{A \setminus B} = f_A - f_A f_B$.

7) $f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_A f_B$. Să se generalizeze pentru $R = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ şi să se precizeze cînd are loc egalitatea $f_R = \sum_{k=1}^{n} f_{A_k}$.

8) $f_{A \Delta B} = |f_A - f_B|$, unde $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ este diferenţa simetrică dintre A şi B.

R. 1) Fie $A \subseteq B$; dacă $f_A(x) = 1$, avem prin definiţie $x \in A$. Rezultă $x \in B$, $f_B(x) = 1$ şi deci $f_A \leqslant f_B$, deoarece nu este posibilă situaţia $f_A(x) = 1$; $f_B(x) = 0$.

Reciproc, se presupune $f_A \leqslant f_B$. Avem $A \setminus B = \emptyset$. Cum $A \setminus B = \emptyset$, ddacă $A \subseteq B$, urmează că $A \subseteq B$. Echivalenţa $A = B$ ddacă $f_A = f_B$, rezultă din echivalenţa precedentă folosind proprietatea de antisimetrie a relaţiilor de ordine parţială $\subseteq \subset P(E) \times P(E)$, $\leqslant \subset \{0, 1\} \times \{0, 1\}$.

2) Aplicaţia F este injectivă conform echivalenţei $A = B$ dacă $f_A = f_B$ de la 1). În plus, F este surjectivă, deoarece pentru orice $f: E \to \{0, 1\}$ se poate lua $A = f^{-1}(\{1\})$ (preimaginea prin f a mulţimii $\{1\}$) şi $f_A = f$. Cu menţiunea că două mulţimi X, Y se zic *echipotenţe* ($X \sim Y$) ddacă există o aplicaţie bijectivă de la X la Y, astfel ca $P(E) \sim \{0, 1\}^E$.

3) Prin definiţie, $f_A = 1$ pentru $E \setminus A = \emptyset$, adică $A = E$ şi $f_A = 0$ pentru $A = \emptyset$, unde $1, 0 \in \{0, 1\}^E$ sînt funcţiile constante.

Conform 2) submulţimile $\emptyset$, E sînt singurele cu această proprietate. Se remarcă relaţiile:

$$f_\emptyset = \min \{0, 1\}^E, \ \emptyset = \min P(E) \text{ (cel mai mic element al mulţimii)},$$

$$f_E = \max \{0, 1\}^E, \ E = \max P(E) \text{ (cel mai mare element al mulţimii)}.$$

4) Prin definiţie se obţine

$$f_{A \cap B}(x) = 1, \ (f_A f_B)(x) = f_A(x) f_B(x) = 1, \text{ pentru } x \in A \cap B.$$

$$f_{A \cap B}(x) = 0, \ (f_A f_B)(x) = 0, \text{ pentru } x \in E \setminus (A \cap B) = (E \setminus A) \cup (E \setminus B)$$

(relaţie De Morgan).

5) Se demonstrează în prealabil egalitatea

i) $f_{A\cup B} = f_A + f_B$, unde $A \cap B = \emptyset$.

Avem $f_{A\cup B}(x) = 1$, $(f_A + f_B)(x) = f_A(x) + f_B(x) = 1$ pentru $x \in A \cup B$, $f_{A\cup B}(x) = 0$, $(f_A + f_B)(x) = 0$, pentru $x \in E\setminus(A\cup B) = (E\setminus A)\cap(E\setminus B)$ (relaţie De Morgan).

Se aplică i) pentru $B = CA$ şi se obţine $f_E = f_A + f_{CA}$ unde $f_E = 1$ (conform 3).

6) Se foloseşte exprimarea diferenţei în funcţie de intersecţie şi complementară. Avem $A\setminus B = A \cap CB$, $f_{A\setminus B} = f_A(1 - f_B) = f_A - f_A f_B$.

7) Folosim succesiv egalitatea imediată $A \cup B = A \cup (B\setminus A)$, i) şi 6). Rezultă $f_{A\cup B} = f_A + f_{B\setminus A}$, $f_{A\cup B} = f_A + f_B - f_A f_B$.

Reuniunea $R = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ se mai scrie ca reuniune de mulţimi disjuncte două cîte două

$$R = A_1 \cup (A_2\setminus A_1) \cup (A_3\setminus(A_1\cup A_2)) \cup \ldots \cup (A_n\setminus(A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_{n-1}))$$

sau $R = A_1 \cup (CA_1 \cap A_2) \cup (CA_1 \cap CA_2 \cap A_3) \cup \ldots \cup (CA_1 \cap CA_2 \cap$

$$\cap \ldots \cap CA_{n-1} \cap A_n)$$

folosind asociativitatea reuniunii şi a intersecţiei şi o relaţie De Morgan generalizată.

Se aplică i) sub forma i') $f_R = \sum_{k=1}^{n} f_{B_k}$

unde $R = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$, $B_k = CA_1 \cap \ldots \cap CA_{k-1} \cap A_k$, $B_i \cap B_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, obţinută prin inducţie matematică. Avem

$$f_R = f_{A_1} + (1 - f_{A_1})f_{A_2} + (1 - f_{A_1})(1 - f_{A_2})f_{A_3} + \ldots +$$
$$+ (1 - f_{A_1})(1 - f_{A_2}) \ldots (1 - f_{A_{n-1}})f_{A_n}$$

(folosind şi 5)). Evident $f_R = \sum_{k=1}^{n} f_{A_k}$ dacă $A_i \cap A_j = \emptyset$, pentru $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

8) Folosind egalităţile i) şi 6) se obţine $f_{A\Delta B} = f_{A\setminus B} + f_{B\setminus A}$; $f_{A\Delta B} = (f_A - f_B)^2$; $f_{A\Delta B} = |f_A - f_B|$, deoarece $y^2 = y$ pentru $y \in \{0, 1\}$.

1.5. Fie E o mulţime oarecare nevidă. Să se arate că dacă $A \cup B = A \cup C$ şi $A \cap B = A \cap C$, atunci $B = C$, unde $A, B, C \in P(E)$ (mulţimea părţilor lui E).

R. *Soluţia 1.* Se folosesc succesiv egalităţile din enunţ (Ip) şi proprietăţile de absorbţie (Ab), comutativitate (C), distributivitate (D) pe care le au operaţiile $\cap$, $\cup$ în algebra Boole $P(E)$. Avem

$$B \overset{\text{Ab}}{=} B \cap (B \cup A) \overset{\text{C}}{=} B \cap (A \cup B) \overset{\text{Ip}}{=} B \cap (A \cup C) =$$
$$\overset{\text{D}}{=} (B \cap A) \cup (B \cap C) \overset{\text{C}}{=} (A \cap B) \cup (B \cap C) \overset{\text{Ip}}{=} (A \cap C) \cup (B \cap C) =$$
$$\overset{\text{D}}{=} (A \cup B) \cap C \overset{\text{Ip}}{=} (A \cup C) \cap C \overset{\text{C}}{=} C \cap (A \cup C) \overset{\text{C}}{=} C \cap (C \cup A) \overset{\text{Ab}}{=} C.$$

Soluția 2. Se folosesc pe rînd următoarele proprietăți ale funcției caracteristice asociate unei submulțimi:

i) $X = Y$ ddacă $f_X = f_Y$,

ii) $f_{X \cup Y} = f_X + f_Y - f_{X \cap Y}$, unde $X, Y \in P(E)$.

Avem

$$f_{A \cup B} = f_{A \cup C},\ f_{A \cap B} = f_{A \cap C} \text{ (i)},$$

$$f_{A \cup B} = f_A + f_B - f_{A \cap B},\ f_{A \cup C} = f_A + f_C - f_{A \cap C} \text{ (ii)},$$

$$B = C \text{ (i)}.$$

1.6. Fie E o mulțime oarecare nevidă, $P(E)$ mulțimea părților sale, $A, I, B, R \in P(E)$ fixate și sistemul de ecuații $A \cap X = I$ și $B \cup X = R$.

Să se găsească condițiile de compatibilitate ale sistemului, o soluție $X \in P(E)$ și cazuri cînd aceasta este unică.

R. Din definițiile operațiilor $\cap$, $\cup$ rezultă incluziunile

i) $I \subseteq X \subseteq R$, $I \subseteq A$, $B \subseteq R$,

care conduc la incluziunile și egalitățile

i′) $B \cap I \subseteq A \cap R$, $B \cup I \subseteq B \cup X = R$, $A \cap I = I$, $A \cup I = A$.

Pentru a găsi alte condiții de compatibilitate se folosesc succesiv următoarele proprietăți ale funcției caracteristice asociate unei submulțimi (vezi problema 4.):

a) $Y = Z$ ddacă $f_Y = f_Z$,

b) $f_{Y \cap Z} = f_Y f_Z$,

c) $f_{Y \cup Z} = f_Y + f_Z - f_Y f_Z$,

unde $Y, Z \in P(E)$ și proprietăți ale operațiilor de adunare și înmulțire ale funcțiilor de la E la $\{0, 1\}$. Avem

$$f_{A \cap X} = f_I,\ f_{B \cup X} = f_R \qquad \text{(a)},$$

$$f_A f_X = f_I \qquad \text{(b)},$$

$$f_B + f_X - f_B f_X = f_R \qquad \text{(c)},$$

$$f_A f_B f_X = f_B f_I,$$

$$f_A f_B + f_A f_X - f_A f_B f_X = f_A f_R,$$

$$f_A f_B + f_I - f_B f_I = f_A f_R,$$

$$f_{A \cap B} + f_I - f_{B \cap I} = f_{A \cap R} \qquad \text{(b)}.$$

Conform proprietăților operației de intersecție și relațiilor i′) se obține $(A \cap B) \cap I = (A \cap I) \cap B = B \cap I$. Rezultă

$$f_{(A \cap B) \cup I} = f_{A \cap R} \qquad \text{(c)},$$

ii) $$(A \cap B) \cup I = A \cap R \qquad \text{(a)}.$$

Conform proprietăţilor operaţiilor de intersecţie, reuniune şi diferenţă şi relaţiilor i') avem

$$(A \cap B) \cup I = (A \cup I) \cap (B \cup I) = A \cap (B \cup I),$$
$$R = (B \cup I) \cup (R \setminus (B \cup I)),$$
$$A \cap R = (A \cap (B \cup I)) \cup (A \cap (R \setminus (B \cup I))),$$
$$(B \cup I) \cap (R \setminus (B \cup I)) = \emptyset,$$
$$(A \cap (B \cup I)) \cap (A \cap (R \setminus (B \cup I))) = \emptyset.$$

Deci egalitatea ii) este echivalentă cu oricare din egalităţile

ii') $A \cap (B \cup I) = A \cap R$,

ii'') $A \cap (R \setminus (B \cup I)) = \emptyset$.

Se observă că din relaţiile i') rezultă doar incluziunea $A \cap (B \cup I) \subseteq \subseteq A \cap R$.

Se poate demonstra în mod direct că în condiţiile i), dacă există $X \in P(E)$ astfel încît $A \cap X = I$, $B \cup X = R$, atunci are loc egalitatea ii). Într-adevăr, conform proprietăţilor operaţiilor de intersecţie şi reuniune avem

$$A \cap R = A \cap (B \cup X) = (A \cap B) \cup (A \cap X) = (A \cap B) \cup I.$$

În continuare se construieşte o submulţime $X \in P(E)$ care satisface egalităţile din enunţ în condiţiile i). Folosim egalităţile

d) $Y = (Y \cap Z) \cup (Y \setminus Z)$,

e) $(Y \cup Z) \setminus V = (Y \setminus V) \cup (Z \setminus V)$,

unde $Y, Z, V \in P(E)$, care se obţin uşor conform exprimării diferenţei în funcţie de complementară şi intersecţie şi proprietăţilor operaţiilor de intersecţie, reuniune şi complementare. Avem

$$X = (X \cap A) \cup (X \setminus A) \quad \text{(d)},$$
$$X = I \cup (X \setminus A),$$
$$R \setminus A = (B \cup X) \setminus A,$$
$$R \setminus A = (B \setminus A) \cup (X \setminus A) \quad \text{(e)}.$$

În cazul particular $B \subseteq A$ se obţine

iii) $X = I \cup (R \setminus A)$.

Remarcăm că submulţimea X este unică. Într-adevăr, în caz contrar ($Y \in P(E)$ este o altă soluţie), pentru $A = B$, din egalităţile $A \cap X = A \cap Y = I$, $A \cup X = A \cup Y = R$, rezultă $X = Y$ (vezi 1.5), iar pentru $B \subset A$, avem $X \cup A = X \cup (B \cup (A \setminus B)) = (X \cup B) \cup (A \setminus B) = (Y \cup B) \cup (A \setminus B) = Y \cup (B \cup (A \setminus B)) = Y \cup A$ şi din nou rezultă că $X = Y$.

Reciproc, se arată că în condiţiile i), dacă are loc egalitatea ii), atunci submulţimea $X \in P(E)$ dată de iii) verifică egalităţile din enunţ. Conform proprietăților operațiilor de intersecție, reuniune și diferență, relațiilor i'), ii') și egalității d) avem $A \cap X = A \cap (I \cup (R \setminus A)) = (A \cap I) \cup \cup (A \cap (R \setminus A)) = A \cap I = I$,

$$R = (R \cap A) \cup (R \setminus A) = (A \cap (B \cup I)) \cup (R \setminus A) =$$
$$= (A \cup (R \setminus A)) \cap (B \cup I \cup (R \setminus A)) =$$
$$= (A \cup R) \cap (B \cup X) = B \cup X.$$

Observație. 1) Dacă $A \subseteq B$ conform relațiilor i), i') avem $A \cap R = A$, $(A \cap B) \cup I = A \cup I = A$, deci egalitatea ii) este satisfăcută. Submulțimea $X \in P(E)$ dată de iii) verifică egalitățile din enunț în condițiile de compatibilitate i).

2) Dacă $B \subset A$ avem $(A \cap B) \cup I = B \cup I$, deci egalitatea ii) devine $B \cup I = A \cap R$.

3) Dacă $A \cap B = \emptyset$ avem $(A \cap B) \cup I = I$, deci egalitatea ii) devine $I = A \cap R$.

1.7. Fie E o mulțime oarecare nevidă, $P(E)$ mulțimea părților sale, $A, S, B, D \in P(E)$ fixate și sistemul de ecuații $X \setminus A = S$ și $B \setminus X = D$.

Să se găsească condițiile de compatibilitate ale sistemului, o soluție $X \in P(E)$ și cazuri cînd aceasta este unică.

R. Se exprimă diferența în funcție de complementară și intersecție și se folosește o relație De Morgan. Se obțin egalitățile

$CA \cap X = S$ și $CB \cup X = CD$, care intervin în problema 6. Relațiile de referință sînt

i) $S \subseteq X \subseteq CD,\ S \subseteq CA,\ CB \subseteq CD,$

ii) $(CA \cap CB) \cup S = CA \cap CD,$

ii') $CA \cap (CB \cup S) = CA \cap CD,$

iii) $X = S \cup (CD \setminus CA).$

Dacă se înlocuiește complementara cu diferența folosind relațiile De Morgan și proprietăți ale complementarei, se obțin relațiile echivalente

I) $S \subseteq X,\ D \cap X = \emptyset,\ A \cap S = \emptyset,\ D \subseteq B,$

II) $(A \cup B) \setminus S = A \cup D,$

II') $A \cup (B \setminus S) = A \cup D,$

III) $X = S \cup (A \setminus D).$

Se mențin adevărate propozițiile:

În condițiile I), dacă există $X \in P(E)$ care verifică egalitățile din enunț, atunci are loc egalitatea II) și X este unic dacă $A \subseteq B$.

În condițiile I), dacă are loc egalitatea II), atunci submulțimea $X \in P(E)$ dată de III) verifică egalitățile din enunț.

În cazurile particulare $B \subseteq A$, $A \subset B$, $A \cup B = E$ (echivalente cu $CA \subseteq CB$, $CB \subset CA$, $CA \cap CB = \emptyset$) egalitatea II) este satisfăcută, respectiv devine $B \setminus S = A \cup D$, $E \setminus S = A \cup D$.

1.8. Să se arate că ecuația $X \cup Y = A$, are 3^n soluții (X, Y), unde A este o mulțime nevidă formată cu n elemente, $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

R. Din definiția operației de reuniune rezultă incluziunile

i) $X \subseteq A,\ Y \subseteq A.$

Pentru $0 \leqslant k \leqslant n$ există C_n^k submulțimi X ale lui A formate cu k elemente. $P(A)$, mulțimea părților lui A, are cardinalul (numărul de elemente, A fiind finită): $|P(A)| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.

Folosim egalitățile

ii) $(X \cup Y) \setminus X = Y \setminus X$, $Y = (Y \setminus X) \cup (Y \cap X)$, care se obțin ușor conform exprimării diferenței în funcție de complementară și intersecție și proprietăților operațiilor de intersecție, reuniune și complementare. Perechea (X, Y) cu Y dat de

iii) $Y = (A \setminus X) \cup Z$, unde $Z \in P(X)$ constituie o soluție a ecuației din enunț. Pentru X fixat cu $|X| = k$ există 2^k asemenea soluții deoarece $|P(X)| = 2^k$. În total avem $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^n = 3^n$ soluții.

1.9. Fie E o mulțime oarecare nevidă, $P(E)$ mulțimea părților sale și A, B, C, $D \in P(E)$ nevide. Să se arate că:

1) $A \subseteq C$ și $B \subseteq D$ ddacă $A \times B \subseteq C \times D$.

2) $(A \cap C) \times (B \cap D) = (A \times B) \cap (A \times D) \cap (C \times B) \cap (C \times D)$.

3) $(A \cup C) \times (B \cup D) = (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$.

4) $(E \times E) \setminus (A \times B) = ((E \setminus A) \times E) \cup (E \times (E \setminus B))$.

Să se generalizeze 1) — 4) respectiv pentru

1') $\mathop{\mathrm{X}}_{A \in R} A$ (produsul cartezian al tuturor mulțimilor din R), $\mathop{\mathrm{X}}_{A \in R} f(A)$, unde $f: R \to CR$ este o aplicație injectivă, $R \subset P(E)$, R finită dacă conține ca elemente numai mulțimi finite, iar CR este complementara lui R în raport cu $P(E)$.

2') $\bigcap_{A \in R} A$ (intersecția tuturor mulțimilor din R), $\bigcap_{B \in S} B$, unde $R, S \subset P(E)$.

3') $\bigcup_{A \in R} A$ (reuniunea tuturor mulțimilor din R), $\bigcup_{B \in S} B$, unde $R, S \subset P(E)$.

4') $E^{|R|}$ (produsul cartezian de $|R|$ ori al mulțimii E), $\mathop{\mathrm{X}}_{A \in R} A$, unde $R \subset P(E)$ este finită, iar $|R|$ este cardinalul mulțimii R.

R. 1) Presupunem $A \subseteq C$ și $B \subseteq D$. Dacă $(x, y) \in A \times B$, atunci prin definiție $x \in A$ și $y \in B$. Conform ipotezei, $x \in C$ și $y \in D$ și deci $(x, y) \in C \times D$. Urmează că $A \times B \subseteq C \times D$.

Reciproc, presupunem $A \times B \subseteq C \times D$. Dacă $x \in A$ și $y \in B$, atunci $(x, y) \in A \times B$ și deci $(x, y) \in C \times D$. Prin definiție avem că $x \in C$ și $y \in D$. Rezultă că $A \subseteq C$ și $B \subseteq D$.

Pentru mulțimea $R \subset P(E)$ care satisface inegalitatea $|R| \leqslant |CR|$ (datorită existenței aplicației f), 1) devine

1') $A \subseteq f(A)$. $A \in R$ ddacă $\mathop{\mathrm{X}}_{A \in R} A \subseteq \mathop{\mathrm{X}}_{A \in R} f(A)$

și se demonstrează în mod analog, cu observația că pentru orice $|R|$-uplu (x_A), avem $(x_A) \in \mathop{\mathrm{X}}_{A \in R} A$ ddacă pentru orice $A \in R$, $x_A \in A$.

2) Se observă că incluziunea $(A \cap C) \times (B \cap D) \subseteq (A \times B) \cap (A \times D) \cap (C \times B) \cap (C \times D)$ rezultă conform 1). Folosind definițiile

operațiilor de intersecție și produs cartezian, demonstrăm chiar egalitatea. Avem:

$(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$ ddacă $x \in A \cap C$ și $y \in B \cap D$ ddacă $x \in A$ și $x \in C$ și $y \in B$ și $y \in D$ ddacă ($x \in A$ și $y \in B$) și ($x \in A$ și $y \in D$) și ($x \in C$ și $y \in B$) și ($x \in C$ și $y \in D$) ddacă $(x, y) \in (A \times B) \cap (A \times D) \cap (C \times B) \cap (C \times D)$. Din egalitatea 2) rezultă că în particular produsul cartezian este distributiv la stînga și la dreapta față de intersecție.

Reciproc, egalitatea 2) rezultă și prin aplicarea succesivă a proprietății de distributivitate la stînga și la dreapta a produsului cartezian față de intersecție, care se demonstrează în prealabil. Pentru mulțimile $R, S \subset (P(E)$, 2) devine

$$2') \quad (\bigcap_{A \in R} A) \times (\bigcap_{B \in S} B) = \bigcap_{A \in R} \bigcap_{B \in S} (A \times B)$$

și se demonstrează în mod analog.

3) Se observă că incluziunea

$$(A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D) \subseteq (A \cup C) \times (B \cup D)$$

rezultă conform 1). Folosind definițiile operațiilor de reuniune și produs cartezian, demonstrăm chiar egalitatea. Avem:

$(x, y) \in (A \cup C) \times (B \cup D)$ ddacă $x \in A \cup C$ și $y \in B \cup D$ ddacă ($x \in A$ sau $x \in C$) și ($y \in B$ sau $y \in D$) ddacă ($x \in A$ și $y \in B$) sau ($x \in A$ și $y \in D$) sau ($x \in C$) și $y \in B$) sau ($x \in C$ și $y \in D$) ddacă $(x, y) \in (A \times B) \cup (A \times D) \cup (C \times B) \cup (C \times D)$.

Din egalitatea 3) rezultă că în particular produsul cartezian este distributiv la stînga și la dreapta față de reuniune.

Reciproc, egalitatea 3) rezultă și prin aplicarea succesivă a proprietății de distributivitate la stînga și la dreapta a produsului cartezian față de reuniune, care se demonstrează în prealabil.

Pentru mulțimile $R, S \subset P(E)$, 3) devine

$$3') \quad (\bigcup_{A \in R} A) \times (\bigcup_{B \in S} B) = \bigcup_{A \in R} \bigcup_{B \in S} (A \times B)$$

și se demonstrează în mod analog.

4) Prin definiție avem $(x, y) \in (E \times E) \setminus (A \times B)$ ddacă $(x, y) \in E \times E$ și $(x, y) \notin A \times B$ ddacă $x \in E$ și $y \in E$ și ($x \notin A$ sau $y \notin B$)

ddacă ($x \in E$ și $x \notin A$ și $y \in E$) sau ($x \in E$ și $y \in E$ și $y \notin B$)

ddacă $(x, y) \in ((E \setminus A) \times E) \cup (E \times (E \setminus B))$.

Pentru mulțimea finită $R \subset P(E)$, 4) devine

$$4') \quad E^{|R|} \setminus (\bigtimes_{A \in R} A) = \bigcup (E^a \times (E \setminus A) \times E^b),$$

unde $a + b + 1 = |R|$, $a \in \{0, 1, \ldots, |R| - 1\}$ este numărul de ordine al mulțimii A în R, iar $E^0 = \emptyset$. Dacă se exprimă diferența în funcție de complementară și intersecție, egalitățile 4), 4') se mai scriu $C(A \times B) = (CA \times E) \cup (E \times CB)$, $C(\bigtimes_{A \in R} A) = \bigcup_{A \in R} (E^a \times CA \times E^b)$.

1.10. Fie $R \subset A \times B$ o relație binară și pentru o submulțime $X \subseteq A$, X — secțiunea relației R,

$$R(X) = \{y \in B / \text{ există } x \in X \text{ astfel încît } x R y\} \subseteq B.$$

Pentru $X, Y \subseteq A$ să se arate că
1) $X \subseteq Y$ implică $R(X) \subseteq R(Y)$.
2) $R(X \cup Y) = R(X) \cup R(Y)$.
3) $R(X \cap Y) \subseteq R(X) \cap R(Y)$.
În general nu are loc egalitate.
4) Dacă la 3) avem egalitate, atunci

$$R(X \setminus Y) = R(X) \setminus R(Y), \quad R(X \Delta Y) = R(X) \Delta R(Y),$$

unde $X \Delta Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ este diferența simetrică dintre X și Y.

5) Dacă R este relație funcțională, atunci R este injectivă ddacă are loc egalitate la 3).

Să se generalizeze 2), 3) pentru $\bigcup_{X \in S} X$ (reuniunea tuturor mulțimilor din S), respectiv $\bigcap_{X \in S} X$ (intersecția tuturor mulțimilor din S), unde $S \subset P(A)$ (mulțimea părților lui A).

R. 1) Dacă $y \in R(X)$, atunci prin definiție există $x \in X$ astfel încît $x R y$. Cum $X \subseteq Y$, urmează că $x \in Y$ și deci $y \in R(Y)$.

2) Deoarece $X \subseteq X \cup Y$ și $Y \subseteq X \cup Y$, incluziunea $R(X) \cup R(Y) \subseteq R(X \cup Y)$ rezultă conform 1). Pentru a demonstra incluziunea $R(X \cup Y) \subseteq R(X) \cup R(Y)$ presupunem că $y \in R(X \cup Y)$. Prin definiție există $x \in X \cup Y$ astfel încît xRy. Cum $x \in X$ sau $x \in Y$, rezultă că $y \in R(X)$ sau $y \in R(Y)$, adică $y \in R(X) \cup R(Y)$. Pentru mulțimea $S \subset P(A)$ egalitatea 2) devine $R(\bigcup_{X \in S} X) = \bigcup_{X \in S} R(X)$ și se demonstrează în mod analog.

3) Deoarece $X \cap Y \subseteq X$ și $X \cap Y \subseteq Y$, incluziunea 3) rezultă conform 1). Pentru a arăta că în general incluziunea $R(X) \cap R(Y) \subseteq R(X \cap Y)$ nu este adevărată, folosim egalitățile $X = (X \cap Y) \cup (X \setminus Y)$, $Y = (X \cap Y) \cup (Y \setminus X)$, care se obțin prin exprimarea diferenței în funcție de complementară și intersecție și aplicarea proprietăților operațiilor de reuniune, intersecție și complementară. Conform 2) avem

$$R(X) \cap R(Y) = R(X \cap Y) \cup (R(X \setminus Y) \cap R(Y \setminus X)),$$

iar pentru submulțimile $X, Y \in P(A)$ arbitrare, $R(X \setminus Y) \cap R(Y \setminus X) \neq \emptyset$.

Pentru mulțimea $S \subset P(A)$ incluziunea 3) devine

$$R(\bigcap_{X \in S} X) \subseteq \bigcap_{X \in S} R(X) \text{ și se demonstrează în mod analog.}$$

4) Conform 1) există $CR(X)$, complementara lui $R(X)$ în raport cu $R(A)$. Din relațiile 2) și 3) (cu egalitate) avem
$R(A) = R(X) \cup R(CX)$, $R(X) \cap R(CX) = \emptyset$, unde $Y = CX$ este complementara lui X în raport cu A. Din unicitatea complementarei în algebra Boole $P(R(A))$ rezultă egalitatea $R(CX) = CR(X)$. În continuare

egalitățile 4) se obțin ușor prin exprimarea diferenței în funcție de complementară și intersecție și respectiv folosirea egalității 2).

5) Presupunem R relație funcțională injectivă și fie $y \in R(X) \cap \cap R(Y)$. Prin definiție există $x_1 \in X$, $x_2 \in Y$ astfel încît $y = R(x_1) = R(x_2)$. Cum R este injectivă rezultă că $x_1 = x_2$ și deci $y \in R(X \cap Y)$. Reciproc, dacă la 3) are loc egalitate se presupune pentru $x_1, x_2 \in A$, $y = R(x_1) = R(x_2)$. Urmează $y \in R(\{x_1\}) \cap R(\{x_2\})$ și deci $y \in R(\{x_1\} \cap \{x_2\})$; dar $R(\{x_1\} \cap \{x_2\}) \neq \emptyset$ dacă $\{x_1\} \cap \{x_2\} \neq \emptyset$. Rezultă $x_1 = x_2$ și deci R injectivă.

1.11. Fie $R \subset A \times B$ o relație binară, $R^{-1} \subset B \times A$ inversa sa definită prin $y\, R^{-1}\, x$ ddacă $x\, R\, y$ și pentru o submulțime $Y \subseteq B$, Y — secțiunea relației R^{-1},

$$R^{-1}(Y) = \{x \in A / \text{există } y \in Y \text{ astfel încît } y\, R^{-1}\, x\} \subseteq A.$$

Pentru $X, Y \subseteq B$ să se arate că R este relație funcțională ddacă

i) $R^{-1}(X \cap Y) = R^{-1}(X) \cap R^{-1}(Y)$.

R. *Observație.* 1) $R^{-1} \subset B \times A$ fiind o relație binară verifică relațiile 1) — 4) din problema 10., iar proprietatea 5) capătă forma „mai slabă" a echivalenței de demonstrat.

2) Pentru $X \subseteq A$, X — secțiunea relației $R \subset A \times B$ este $R(X) = \{y \in B \mid \text{există } x \in X \text{ astfel încît } x\, R\, y\} \subseteq B$.

Presupunem R relație funcțională. Conform Observației 1) rămîne de demonstrat incluziunea $R^{-1}(X) \cap R^{-1}(Y) \subseteq R^{-1}(X \cap Y)$.
Dacă $x \in R^{-1}(X) \cap R^{-1}(Y)$ atunci prin definiție există $y_1 \in X$, $y_2 \in Y$ astfel încît $y_1\, R^{-1}\, x$, $y_2\, R^{-1}\, x$. Urmează că $y_1 = y_2 = R(x)$ și deci $x \in R^{-1}(X \cap Y)$. Reciproc, se presupune că are loc egalitatea i) și se consideră $x \in A$, $y_1, y_2 \in B$ astfel încît $x\, R\, y_1$, $x\, R\, y_2$.

Se obține $y_1\, R^{-1}\, x$, $y_2\, R^{-1}\, x$, $x \in R^{-1}(\{y_1\}) \cap R^{-1}(\{y_2\})$ și deci $x \in R^{-1}(\{y_1\} \cap \{y_2\})$; dar $R^{-1}(\{y_1\} \cap \{y_2\}) \neq \emptyset$ dacă $\{y_1\} \cap \{y_2\} \neq \emptyset$. Rezultă $y_1 = y_2$ și deci R relație funcțională

1.12. Fie A o mulțime finită și $f: A \to A$ o funcție. Să se arate că f este injectivă, ddacă f este surjectivă, ddacă f este bijectivă.

R. Presupunem că f este injectivă, deci corestricția $f: A \to f(A)$ este bijectivă. Urmează că $A \sim f(A)$ (mulțimea A este echipotentă cu $f(A)$, imaginea prin f a lui A). Cum mulțimea A este finită și $f(A) \subseteq A$ rezultă că $f(A) = A$ și deci f este surjectivă.

Dacă funcția f este surjectivă, atunci există o funcție $g: A \to A$ injectivă astfel încît $f \circ g = 1_A$, unde $1_A : A \to A$ este aplicația identică. Din implicația demonstrată mai sus urmează că g este și surjectivă, deci bijectivă. Avem $g \circ f = g \circ (f \circ g) \circ g^{-1} = 1_A$, unde $g^{-1}: A \to A$ este inversa lui g. Din egalitățile $f \circ g = g \circ f = 1_A$ rezultă că f este bijectivă.

1.13. Fie E o mulțime oarecare nevidă, $P(E)$ mulțimea părților sale și $A, B \in P(E)$. Să se arate că dacă $A \sim B$ (A este echipotentă cu B), atunci $P(A) \sim P(B)$.

R. Prin ipoteză există o bijecție $f: A \to B$. Se definește aplicația $F: P(A) \to P(B)$, $X \to f(X)$, unde $f(X)$ este imaginea prin f a lui X. F este injectivă, edoarece dacă $F(X_1) = F(X_2)$, atunci se obține succesiv $X_1 = 1_{P(A)}(X_1) = (f^{-1} \circ f)(X_1) = f^{-1}(f(X_1)) = (f^{-1}(f(X_2)) = (f^{-1} \circ f)(X_2) = 1_{P(A)}(X_2) = X_2$, unde $1_{P(A)}: P(A) \to P(A)$, $X \to X$ este aplicația identică. În plus, F este surjectivă, deoarece pentru orice $Y \in P(B)$, există $X \in P(A)$, $X = f^{-1}(Y)$, astfel încît $F(X) = f(f^{-1}(Y)) = (f \circ f^{-1})(Y) = 1_{P(B)}(Y) = Y$, unde $1_{P(B)} : P(B) \to P(B)$, $Y \to Y$ este aplicaţia identică. Aplicaţia F fiind bijectivă, rezultă că $P(A) \sim P(B)$.

1.14. Fie E o mulţime oarecare nevidă, $P(E)$ mulţimea părţilor sale şi $A, B, C \in P(E)$. Să se arate că $A \sim B$ implică $C^A \sim C^B$ (mulţimea funcţiilor de la A la C este echipotentă cu mulţimea funcţiilor de la B la C) şi $A^C \sim B^C$ (mulţimea funcţiilor de la C la A este echipotentă cu mulţimea funcţiilor de la C la B).

R. Prin definiţie există o bijecţie $f_0 : A \to B$. Se defineşte aplicaţia $F : C^A \to C^B$, $f \to f \circ f_0^{-1}$. Dacă $F(f_1) = F(f_2)$, adică $f_1 \circ f_0^{-1} = f_2 \circ f_0^{-1}$, atunci prin compunere la dreapta cu f_0 se obţine $f_1 = f_2$, deci F este injectivă. În plus, F este surjectivă deoarece, pentru orice $g \in C^B$, există $f = gf_0$, $f \in C^A$, astfel încît $F(f) = g$. Rezultă că $C^A \sim C^B$. Pentru a demonstra echipotenţa $A^C \sim B^C$ se defineşte aplicaţia $G : A^C \to B^C$, $f \to f_0 \circ f$ şi se procedează analog.

1.15. Să se determine mulţimile

a) $A_k = \{n \in \mathbf{N},\ n \geqslant k / 2^n > n^3\}$;

b) $B_l = \{n \in \mathbf{N},\ n \geqslant l / 3^n > n^4\}$, unde $k, l \in \mathbf{N}$ sînt fixate.

R. a) *Soluţia 1.*

Se observă că pentru $n = 10$, $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$.

Se presupune adevărată inegalitate de la 10 pînă la $n - 1$ şi se arată că este adevărată pentru n. Conform ipotezei, $2^n = 2 \cdot 2^{n-1} > 2(n-1)^3$, încît revine la a arăta că $2(n-1)^3 > n^3$ sau $\sqrt[3]{2}(n-1) > n$, $(\sqrt[3]{2}-1)n > \sqrt[3]{2}$. Pentru $n \geqslant 10 + 1$, deoarece $\sqrt[3]{2} > 1{,}1$ avem $(\sqrt[3]{2}-1)n \geqslant (10+1) \times (\sqrt[3]{2}-1) > \sqrt[3]{2}$ (deoarece $10(\sqrt[3]{2}-1) > 1$). Rezultă (prin inducţie matematică) $A_{10} = \mathbf{N} \setminus \{0, 1, \ldots, 9\}$.

Soluţia 2.

Se arată că funcţia $f : \mathbf{N} \to \mathbf{Z}$, $f(n) = 2^n - n^3$ ia valori în $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ pentru $n \geqslant 10$. Se consideră extensia $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = 2^x - x^3$ şi i se studiază monotonia cu ajutorul derivatelor. Se calculează derivata de ordinul k, $f^{(k)}(x) = 2^x(\ln 2)^k - A_3^k x^{3-k}$, unde $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $f^{(0)} = f$, $A_3^0 = 1$, $A_3^4 = 0$. Se observă că $f^{(4)} > 0$ pe $\mathbf{R}_+$, iar din proprietatea : „Dacă $f^{(k)} > 0$ pe $(10, \infty)$, atunci $f^{(k-1)}$ este strict crescătoare pe $(10, \infty)$", rezultă în final aceeaşi mulţime $A_{10} = \mathbf{N} \setminus \{0, 1, \ldots, 9\}$.

b) Analog $B_8 = \mathbf{N} \setminus \{0, 1, \ldots, 7\}$ cu observaţia că pentru prima soluţie $3^8 = 81^2 = 6561 > 4096 = 64^2 = 8^4$, $\sqrt[4]{3} > 1{,}3$.

La a doua soluţie se calculează $f^{(k)}$, $k \in \{0, 1, \ldots, 5\}$.

1.16. Pentru orice $n \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$, dacă $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbf{R}$, unde $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, atunci are loc inegalitatea $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$ (inegalitatea lui Schwarz-Buniakovski).

R. *Observaţie.* 1) Egalitatea are loc pentru $a_k/b_k = c$ (constant).

2) În spaţiul vectorial euclidian $\mathbf{R}^n$ inegalitatea se scrie $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 \leqslant \|\mathbf{a}\|^2 \|\mathbf{b}\|^2$, unde $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Soluția 1. Se procedează prin inducție matematică.

Pentru $n = 1$, evident $a_1^2b_1^2 \geqslant (a_1b_1)^2$. Se presupune adevărată inegalitatea de la 1 la $n-1$ și se arată că este adevărată pentru n. Conform ipotezei,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2 + a_n^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k^2 + b_n^2\right) =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n-1} b_k^2\right) + \sum_{k=1}^{n-1} a_n^2b_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2b_n^2 + a_n^2b_n^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^2b_k^2\right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_n^2b_k^2 +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2b_n^2 + a_n^2b_n^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_kb_k + a_nb_n\right)^2 - 2a_nb_n\sum_{k=1}^{n-1} a_kb_k + \sum_{k=1}^{n-1} a_n^2b_k^2 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k^2b_n^2 =$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} (a_nb_k - a_kb_n)^2 \geqslant \left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2.$$

Soluția **2.**

Se consideră funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_kx - b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$. Inegalitatea rezultă din condiția ca discriminantul ecuației $f(x) = 0$ să fie negativ, adică $\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \leqslant 0$.

1.17. Fie $\mathbf{N} = \{0, 1, \ldots\}$ mulțimea numerelor naturale unde conform definiției lui Neumann 0 este $\varnothing$, 1 este $\{0\}$, ..., în general $n + 1$ este $n \cup \{n\}$ și sînt satisfăcute axiomele lui Peano (P):

1. Există o funcție $s: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, injectivă (de exemplu funcția succesor definită prin $s(n) = n + 1$).
2. Există un unic element $0 \in \mathbf{N}$, astfel încît $0 \notin s(\mathbf{N})$.
3. Dacă $A \subset \mathbf{N}$ este o submulțime astfel încît $0 \in A$ și $S(A) \subset A$, atunci $A = \mathbf{N}$.

Să se arate că din sistemul (N, P) decurge principiul inducției.

R. Principiul de demonstrat este următorul: „Dacă $P(n)$ este o proprietate relativ la numărul n astfel încît $P(0)$ să fie adevărată și să aibă loc implicația $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ pentru orice $k \in \mathbf{N}$, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}$". Fie $A = \{n \in \mathbf{N} \mid P(n)$ este adevărată$\}$ o submulțime a lui $\mathbf{N}$. Din ipoteză avem $0 \in A$. Conform 3., pentru ca $A = \mathbf{N}$ ($P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}$) rămîne de arătat incluziunea $S(A) \subset A$. Se consideră $k \in S(A)$ ($k \neq 0$ conform 2.). Conform 1., există (în mod unic) $n \in A$ astfel încît $k = n + 1$. Prin modus ponens, din $P(n)$ este adevărată și $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ este adevărată rezultă $P(n + 1)$ este adevărată. adică $k \in A$.

1.18. Fie mulțimea $A = \{a_n \in \mathbf{R}$ / pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + 1}$, $a_0 \in \mathbf{N}\}$. Să se arate că $A \setminus \mathbf{Q} \neq \varnothing$.

R. Se presupune prin reducere la absurd că $A \setminus \mathbf{Q} = \emptyset$. Cum $A \subset \mathbf{R}_+$ şi $\{a_0\} \subseteq A \cap \mathbf{N} \subset A \cap \mathbf{Q}$, rezultă că $A \subseteq (\mathbf{Q}_+ \setminus \mathbf{N}) \cup \mathbf{N}$ cu $(\mathbf{Q} \setminus \mathbf{N}) \cap \mathbf{N} = \emptyset$. Avem că $B = \{a_n^2 / a_n \in A\} \subseteq \mathbf{N}$, deoarece a_n^2 se obţine prin aplicarea funcţiei succesor $s: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, $s(n) = n + 1$; de asemenea $A \subseteq \mathbf{N}$. Relaţia $a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + 1}$ pusă sub forma $(a_n - a_{n-1})(a_n + a_{n-1}) = 1$ conduce la $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Se obţine imediat $a_2 = \sqrt{2}$. Avem $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$ (din construcţia lui $\mathbf{R}$ prin tăieturi (Dedekind)), deci $a_2 \notin \mathbf{N}$, contradicţie.

Să observă că $B = \mathbf{N}$ conform definirii lui $\mathbf{N}$ cu axiomele lui Peano.

1.19. Să se calculeze

1) $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left[0, \frac{a}{n}\right]$, unde $a \in \mathbf{R}_+^*$ fixat;

2) $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left(0, \frac{a}{n}\right]$, unde $a \in \mathbf{R}_+^*$ fixat;

3) $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left[b - \frac{a}{n}, b\right)$, unde $a, b \in \mathbf{R}_+^*$ fixaţi, $b > a$;

4) $\bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$;

5) $\bigcup\limits_{n \in \mathbf{N}} [-n, n]$.

R. *Observaţie.* În cîmpul total ordonat al numerelor reale $\mathbf{R}$ folosim axiomele:

Axioma lui Arhimede (AA): Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}_+^*$, există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $ny > x$.

Axioma lui Cantor—Dedekind (ACD): Orice şir de intervale nevide, închise, mărginite compacte), strict descrescător are intersecţia nevidă.

1) Se observă că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $\left[0, \frac{a}{n}\right] \supset \left[0, \frac{a}{n+1}\right]$ astfel încît conform ACD rezultă că $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left[0, \frac{a}{n}\right] \neq \emptyset$.

De asemenea, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $0 \in \left[0, \frac{a}{n}\right]$, deci $0 \in \bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left[0, \frac{a}{n}\right]$.

Dacă mai există un element $x \in \left(\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left[0, \frac{a}{n}\right]\right) \setminus \{0\}$, atunci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $0 < x < \frac{a}{n}$.

Dar conform AA pentru x, $a \in \mathbf{R}_+^*$ există $m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $mx > a$, contradicţie. Rezultă că $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left[0, \frac{a}{n}\right] = \{0\}$.

2) Conform punctului 1) rezultă că $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left(0, \frac{a}{n}\right] = \emptyset$. Rezultatul se poate demonstra direct prin reducere la absurd.

Se presupune că $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left(0, \frac{a}{n}\right] \neq \emptyset$, adică există $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left(0, \frac{a}{n}\right]$. Deci pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $nx \leqslant a$. Dar conform AA pentru x, $a \in \mathbf{R}_+^*$ există $m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $mx > a$, contradicţie.

3) Ca la punctul 2) se demonstrează că $\bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left[b - \frac{a}{n}, b\right) = \emptyset$.

4) Se observă că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $\left[0, \frac{n}{n+1}\right] \subset [0, 1)$ deoarece $\frac{n}{n+1} < 1$, deci $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[0, \frac{n}{n+1}\right] \subset [0, 1)$. Pentru a demonstra incluziunea inversă se consideră un element $x \in [0, 1)$ şi se arată că există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $x \in \left[0, \frac{n}{n+1}\right]$, fapt care rezultă simplu din AA aplicată elementelor x, $1 - x \in \mathbf{R}_+^*$.

5) Se demonstrează prin dublă incluziune că $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} [-n, n] = \mathbf{Z}$.

1.20. Dacă E este o mulţime de numere reale nevidă şi mărginită, să se demonstreze următoarele propoziţii

1) $(\lambda = \sup E) \Leftrightarrow$ (S1 şi S2);

2) $(\mu = \inf E) \Leftrightarrow$ (i1 şi i2), unde S1: $\forall x \in E$, $x \leqslant \lambda$,
i1: $\forall x \in E$, $\mu \leqslant x$, S2: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in E$, $\lambda - \varepsilon < x_0 \leqslant \lambda$,
i2: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_0 \in E$, $\mu \leqslant x_0 < \mu + \varepsilon$.

R. *Observaţie.* 1) În cîmpul total ordonat al numerelor reale se folosesc axiomele:
Axioma marginii superioare (AMS): Orice mulţime de numere reale nevidă, mărginită superior are supremum.
Axioma marginii inferioare (AMI): Orice mulţime de numere reale nevidă, mărginită inferior are infimum.

2) Conform AMS, AMI există în mod unic $\lambda = \sup E = E^s \cap (E^s)^i$, $\mu = \inf E = E^i \cap (E^i)^s$, unde E^s, E^i sînt mulţimea majoranţilor, respectiv mulţimea minoranţilor lui E.

1) Implicaţia $(\lambda = \sup E) \Rightarrow$ (S1 şi S2) este echivalentă cu $(\lambda = \sup E) \Rightarrow$ S1 şi $(\lambda = \sup E) \Rightarrow$ S2. Implicaţia $(\lambda = \sup E) \Rightarrow$ S1 este imediată, deoarece $\lambda \in E^s$. Implicaţia $(\lambda = \sup E) \Rightarrow$ S2 se demonstrează prin reducere la absurd. Dacă există $\varepsilon_0 > 0$, astfel încît pentru orice $x \in E$, $x \leqslant \lambda - \varepsilon_0$, rezultă că $\lambda - \varepsilon_0 \in E^s$, contradicţie.

Pentru a demonstra implicaţia inversă se observă că (S1) $\Rightarrow \lambda \in E^s$. Se arată că $\lambda = \sup E$ prin reducere la absurd.

Fie $\alpha = \sup E$, $\alpha \neq \lambda$; conform AA pentru $\lambda - \alpha$, $1 \in \mathbf{R}_+^*$ există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $n(\lambda - \alpha) > 1$, adică $\lambda - \alpha > 1/n$. Deci pentru orice $x \in E$, $\lambda - 1/n > \alpha \geqslant x$, ceea ce contrazice, pentru $\varepsilon = 1/n$, propoziţia S2.

2) Echivalenţa se demonstrează ca mai sus, urmărind şi observaţia iniţială.

1.21. Să se arate că $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ nu poate fi cîmp (corp comutativ) total ordonat, unde $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$, $+, \cdot : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ (adunarea şi înmulţirea) sînt definite prin

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2),$$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

R. Se verifică, folosind structura de cîmp a mulţimii $\mathbf{R}$ faţă de adunare şi înmulţire că $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ este cîmp. Presupunem că există o relaţie de ordine totală $\leqslant \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ compatibilă cu operaţiile „+", „·". Dacă avem $(0, 0) \leqslant (0, 1)$, atunci $(0, 0) = (0, 0) \cdot (0, 1) \leqslant (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -(1, 0)$, $(0, 0) \leqslant [(0, 1) \cdot (0, 1)]^2 = (1, 0)$. Am obţinut că pentru $(0, 0) \neq (1, 0)$, $(0, 0) \leqslant -(1, 0)$ şi $(0, 0) \leqslant (1, 0)$, ceea ce contrazice faptul că relaţia $\leqslant$ este totală. Analog se ajunge la o contradicţie în ipoteza $(0, 1) \leqslant (0, 0)$. Cum $(0, 0) \neq (0, 1)$, rezultă că relaţia $\leqslant$ nu este totală, deci $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ nu poate fi cîmp total ordonat.

1.22. Să se arate că mulţimea

$\mathbf{F} = \{f \in \mathbf{R}/f = r + s\sqrt{2}$, unde $r, s \in \mathbf{Q}\}$ este cîmp (corp comutativ) total ordonat cu mai mult de o relaţie de ordine totală.

R. $\mathbf{F}$ este cîmp total ordonat în raport cu operaţiile de adunare şi înmulţire şi relaţia de ordine din $\mathbf{R}$. În continuare se defineşte relaţia binară $R \subset \mathbf{F} \times \mathbf{F}$, $f_1 R f_2$ dacă $(r_2 - r_1) + (s_1 - s_2)\sqrt{2} \geqslant 0$, unde $f_i = r_i + s_i\sqrt{2}$, $i = 1, 2$. Deoarece $\leqslant$ este relaţia de ordine totală avem

1) R este reflexivă;

2) R este tranzitivă, deoarece dacă $f_1 R f_2$ şi $f_2 R f_3$, adică $(r_2 - r_1) + (s_1 - s_2)\sqrt{2} \geqslant 0$, $(r_3 - r_2) + (s_2 - s_3)\sqrt{2} \geqslant 0$, atunci $(r_3 - r_1) + (s_1 - s_3)\sqrt{2} \geqslant 0$, adică $f_1 R f_3$;

3) R este antisimetrică, deoarece dacă $f_1 R f_2$ şi $f_2 R f_1$, adică $(r_2 - r_1) + (s_1 - s_2)\sqrt{2} \geqslant 0$, $(r_1 - r_2) + (s_2 - s_1)\sqrt{2} \geqslant 0$, atunci $(r_2 - r_1) + (s_1 - s_2)\sqrt{2} = 0$, adică $f_1 = f_2$;

4) R este totală deoarece pentru orice $f \in \mathbf{F}$, $f \geqslant 0$ sau $f \leqslant 0$. Rezultă că mulţimea $\mathbf{F}$ este total ordonată şi în raport cu relaţia R.

1.23. Să se arate că între două numere reale diferite din cîmpul total ordonat arhimedian $\mathbf{R}$ există o infinitate de numere raţionale.

R. Mulţimea $\mathbf{R}$ verifică

1) Axiomele de cîmp în raport cu operaţiile $+, \cdot$ (AC).

2) Axiomele de ordonare în raport cu relaţia $\leqslant$ (AO).

3) Axioma lui Arhimede (AA): Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}_+^*$, există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $ny > x$. Se consideră $a, b \in \mathbf{R}$, $0 \leqslant a < b$. Conform AA pentru 1, $b - a \in \mathbf{R}_+^*$ există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $n(b - a) > 1$, adică $1/n < b - a$. Se aplică încă o dată AA pentru b, $1/n \in \mathbf{R}_+^*$ şi se obţine că există $k \in \mathbf{N}$ astfel încît $k\frac{1}{n} \geqslant b$. Fie $h = \min\{k \in \mathbf{N} \mid b \leqslant k/n\}$. Avem $a < \frac{h-1}{n} < b$ deoarece, dacă $\frac{h-1}{n} \leqslant a$, atunci $b - a \leqslant \frac{h}{n} - \frac{h-1}{n} = \frac{1}{n}$. Urmează că există $c = \frac{h-1}{n} \in \mathbf{Q}$, $c \in (a, b)$. În continuare se repetă raţionamentul pentru perechile (a, c), (c, b) ş.a.m.d. şi se obţine că între $a, b \in \mathbf{R}$ cu $0 \leqslant a < b$ există o infinitate de numere raţionale. Cazul $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b \leqslant 0$ se tratează analog.

1.24. Să se arate că între două numere reale diferite din cîmpul total ordonat arhimedian $\mathbf{R}$ există o infinitate de numere iraţionale.

R. Mulţimea **R** verifică

1) Axiomele de cîmp în raport cu operaţiile $+, \cdot$ (AC).
2) Axiomele de ordonare în raport cu relaţia $\leqslant$ (AO).
3) Axioma lui Arhimede (AA).

Se consideră $a, b \in \mathbf{R}$ cu $a < b$ şi $z \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Conform problemei 23. pentru $a - z, b - z \in \mathbf{R}$ cu $a - z < b - z$ există $c \in \mathbf{Q}$ astfel încît $a - z < c < b - z$ sau $a < c + z < b$. Cum $c \in \mathbf{Q}$ şi $z \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ rezultă că $c + z \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$. Se obţine apoi, prin repetarea raţionamentului că între a şi b se află chiar o infinitate de numere iraţionale.

Observaţie. 1) Un cîmp total ordonat F (care verifică AC, AO) se spune că este dens ordonat dacă $\forall x, y \in F$, $\exists z \in F$ astfel încît $x < z < y$.

2) Conform problemelor 23. şi 24. avem:

Cîmpul total ordonat arhimedian-**R** este dens ordonat.

1.25. În cîmpul total ordonat R al numerelor reale să se demonstreze echivalenţa (Axioma marginii superioare (AMS)) $\Leftrightarrow$ (Axioma marginii inferioare (AMI)).

R. Mulţimea **R** verifică

1) Axiomele de cîmp în raport cu operaţiile $+, \cdot$ (AC).
2) Axiomele de ordonare în raport cu relaţia $\leqslant$ (AO).

În cîmpul total ordonat **R** folosim

Axioma marginii superioare (AMS): Orice mulţime de numere reale nevidă, mărginită superior are supremum.

Axioma marginii inferioare (AMI): Orice mulţime de numere reale nevidă, mărginită inferior are infimum.

Pentru a demonstra implicaţia (AMS) $\Rightarrow$ (AMI) se consideră mulţimea $E \subset \mathbf{R}$, $E \neq \emptyset$ mărginită inferior. Avem

$$E^i = \{r \in \mathbf{R} \mid \text{pentru orice } x \in E,\ r \leqslant x\} \neq \emptyset,$$

unde E^i este mulţimea minoranţilor lui E. Cum E^i este mărginită superior, conform AMS rezultă că există $\sup E^i$. Prin definiţie $\inf E = \sup E^i$. Pentru implicaţia (AMI) $\Rightarrow$ (AMS) se procedează în mod analog.

1.26. În cîmpul total ordonat **R** al numerelor reale să se demonstreze implicaţia (Axioma marginii superioare (AMS)) $\Rightarrow$ (Axioma lui Arhimede (AA)).

R. Mulţimea **R** verifică

1) Axiomele de cîmp, în raport cu operaţiile $+, \cdot$ (AC).
2) Axiomele de ordonare în raport cu relaţia $\leqslant$ (AO).

În cîmpul total ordonat **R** folosim

Axioma marginii superioare (AMS): Orice mulţime de numere reale nevidă, mărginită superior are supremum.

Axioma lui Arhimede (AA): Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}_+^*$, există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $ny > x$.

Presupunem prin reducere la absurd că nu este îndeplinită AA, adică există $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}_+^*$, astfel încît pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $ny \leqslant x$. Atunci mulţimea $A = \{ny \mid n \in \mathbf{N}\}$ este nevidă şi mărginită superior. Conform

AMS există $a = \sup A$. Dar $a - y \in \mathbf{R}$ cu $a - y < a$ este un majorant al mulţimii A, deoarece $n y = (n + 1)y - y \leqslant a - y$, ceea ce contrazice definiţia elementului a.

1.27. În cîmpul total ordonat $\mathbf{R}$ al numerelor reale să se demonstreze implicaţia din propoziţia
(Axioma marginii superioare (AMS)) $\Leftrightarrow$ (Axioma marginii inferioare (AMI)) $\Rightarrow$ (Axioma lui Cantor-Dedekind (ACD)). (lema lui G. Cantor).

R. Mulţimea $\mathbf{R}$ verifică
1) Axiomele de cîmp în raport cu operaţiile $+, \cdot$ (AC).
2) Axiomele de ordonare în raport cu relaţia $\leqslant$ (AO).
În cîmpul total ordonat $\mathbf{R}$ folosim:
Axioma marginii superioare (AMS): Orice mulţime de numere reale nevidă, mărginită superior are supremum;
Axioma marginii inferioare (AMI): Orice mulţime de numere reale nevidă, mărginită inferior are infimum;
Axioma lui Cantor—Dedekind (ACD): Orice şir de intervale nevide, închise, mărginite (compacte), strict descrescător are intersecţia nevidă.
Fie $([x_n, y_n])$ un şir de compacte strict descrescător, adică $\forall n \in \mathbf{N}$, $[x_n, y_n] \supset [x_{n+1}, y_{n+1}]$. Se observă că $\{x_n\} \neq \emptyset$, $\{x_n\}^s \subseteq \{y_n\}$, $\{y_n\} \neq \emptyset$, $\{y_n\}^i \subseteq \{x_n\}$, unde $\{x_n\}^s$, $\{y_n\}^i$ reprezintă mulţimea majoranţilor mulţimii $\{x_n\}$, respectiv mulţimea minoranţilor mulţimii $\{y_n\}^i$. Conform AMS, AMI rezultă că există $x = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} \{x_n\}$, $y = \inf\limits_{n \in \mathbf{N}} \{y_n\}$, iar $\emptyset \neq [x, y] \subset \bigcap\limits_{n \in \mathbf{N}} [x_n, y_n]$.

Observaţie. Conform problemelor 26., 27. în cîmpul total ordonat $\mathbf{R}$ avem implicaţia (AMS) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ ((AA) şi (ACD)).

1.28. În cîmpul total ordonat $\mathbf{R}$ al numerelor reale să se demonstreze implicaţia (Axioma lui Arhimede (AA) şi Axioma lui Cantor—Dedekind (ACD)) $\Rightarrow$ (Axioma marginii superioare (AMS)).

R. Mulţimea $\mathbf{R}$ verifică
1) Axiomele de cîmp în raport cu operaţiile $+, \cdot$ (AC).
2) Axiomele de ordonare în raport cu relaţia $\leqslant$ (AO).
În cîmpul total ordonat $\mathbf{R}$ folosim:
Axioma lui Arhimede (AA): Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{R}_+^*$, există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $ny > x$.
Axioma lui Cantor—Dedekind (ACD): Orice şir de intervale nevide, închise, mărginite (compacte), strict descrescător are intersecţia nevidă.
Axioma marginii superioare (AMS): Orice mulţime de numere reale nevidă, mărginită superior are supremum.
Se consideră mulţimea $E \subset \mathbf{R}$, $E \neq \emptyset$ majorată, adică mulţimea majoranţilor lui E, $E^s = \{b \in \mathbf{R} / \text{ pentru orice } x \in E,\ x \leqslant b\} \neq \emptyset$.
Pentru $a \in CE^s$, complementara în raport cu $\mathbf{R}$ a lui E^s şi $b \in E^s$, există cel puţin un element $x \in E$, astfel încît $a \leqslant x \leqslant b$, $b - a = 1 > 0$. Dacă $a, b \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$, conform problemei 23., există $a_0 \in CE^s \cap \mathbf{Q}$, $b_0 \in E^s \cap \mathbf{Q}$, astfel încît $a_0 \leqslant x \leqslant b_0$, $b_0 - a_0 = l_0 > 0$, $l_0 \in \mathbf{Q}$.
Analog, dacă numai unul din elementele a, b este iraţional, cu menţiunea că la celălalt se adaugă indicele 0.

Se demonstrează prin inducţie matematică propoziţia

$P(m)$: Există $([a_n, b_n])_{n\in\{1,2,\ldots,m\}}$, $[a_n, b_n] \subset \mathbf{R}$, $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$ şir de intervale nevide, închise, mărginite (compacte) care verifică:

1) Pentru orice $n \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ (şir strict descrescător).

2) Pentru orice $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $a_n \in CE^s \cap \mathbf{Q}$, $b_n \in E^s \cap \mathbf{Q}$, $b_n - a_n = l_n = l_0/2^n$, $l_n \in \mathbf{Q}$.

Pentru a verifica propoziţia $P(1)$, fie $c_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \in \mathbf{Q}$ (centrul intervalului $[a_0, b_0]$, $c_0 - a_0 = b_0 - a_0 = l_0/2$) care împarte intervalul $[a_0, b_0]$ în două intervale. Dintre acestea se notează cu $[a_1, b_1]$ compactul cu proprietatea $a_1 \in CE^s \cap \mathbf{Q}$, $b_1 \in E^s \cap \mathbf{Q}$ ($a_1 = a_0$, $b_1 = c_0$ saz $a_1 = c_0$, $b_1 = b_0$).

Se observă că $[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1]$, $b_1 - a_1 = l_1 = l_0/2$, $l_1 \in \mathbf{Q}$.

Se presupune adevărată propoziţia $P(m)$ şi fie $c_m = \frac{a_m + b_m}{2} \in \mathbf{Q}$ (centrul intervalului $[a_m, b_m]$, $c_m - a_m = b_m - c_m = l_m = l_0/2^m$) care împarte intervalul $[a_m, b_m]$ în două intervale. Dintre acestea se notează cu $[a_{m+1}, b_{m+1}]$ compactul cu proprietatea $a_{m+1} \in CE^s \cap \mathbf{Q}$, $b_{m+1} \in E^s \cap \mathbf{Q}$ ($a_{m+1} = a_m$, $b_{m+1} = c_m$ sau $a_{m+1} = c_m$, $b_{m+1} = b_m$). Se observă că $[a_m, b_m] \supset [a_{m+1}, b_{m+1}]$, $b_{m+1} - a_{m+1} = l_{m+1} = l_m/2 = l_0/2^{m+1}$, $l_{m+1} \in \mathbf{Q}$. În continuare se demonstrează că există în mod unic $c \in \mathbf{R}$, astfel încît, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $P(n)$ implică $c \in [a_n, b_n]$.

Propoziţia „pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $P(n)$" are forma:

Există $([a_n, b_n])_{n\in\mathbf{N}}$, $[a_n, b_n] \subset \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$ şir de compacte care verifică

1) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ (şir strict descrescător).

2) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $a_n \in CE^s \cap \mathbf{Q}$, $b_n \in E^s \cap \mathbf{Q}$, $b_n - a_n = l_n = l_0/2^n$, $l_n \in \mathbf{Q}$.

Conform ACD rezultă că $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n] \neq \emptyset$, deci există $c \in \bigcap_{n\in\mathbf{N}} [a_n, b_n]$, adică pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $c \in [a_n, b_n]$. Mai rămîne de demonstrat că elementul $c \in \mathbf{R}$ este unic. Se procedează prin reducere la absurd. Presupunem că mai există un element $c' \in \mathbf{R}$ astfel încît pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $c' \in [a_n, b_n]$. În cîmpul total ordonat $\mathbf{R}$, pentru $c \neq c'$ avem $c < c'$ sau $c' < c$; fie $c < c'$, adică $c' - c \in \mathbf{R}^*_+$. Din demonstraţia propoziţiei $P(m)$ avem: Pentru orice $n \in N$, $c, c' \in [a_n, b_n]$ ceea ce implică: Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $2^n(c' - c) \leqslant l_0$. Totodată, conform AA, pentru $c' - c$, $l_0 \in \mathbf{R}^*_+$, rezultă că există $m \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $m(c' - c) > l_0$. Folosind inegalitatea lui Bernoulli $(1 + a)^n \geqslant 1 + na$, $a \in \mathbf{R}$, $a \geqslant -1$, $n \in \mathbf{N}$, se stabileşte uşor inegalitatea $2^n \geqslant n + 1$, $n \in \mathbf{N}$. Atunci $2^m(c' - c) > m(c' - c) > l_0$, adică am găsit că există $m \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $2^m(c' - c) > l_0$, contradicţie. Analog se procedează în cazul $c - c' > 0$.

În final se arată că $c = \sup E$. Dacă $c \notin E^s$, atunci există $x_0 \in E$, astfel încît $c < x_0$. Conform AA pentru $x_0 - c$, $l_0 \in \mathbf{R}^*_+$ şi inegalităţii $2^n \geqslant n + 1$, $n \in \mathbf{N}$ rezultă că există $m \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $2^m(x_0 - c) > m(x_0 - c) > l_0$. Avem

$$b_m - a_m = l_0/2^m < x_0 - c, \quad b_m < a_m - c + x_0.$$

Cum $a_m - c \leqslant 0$, rezultă $b_m < x_0$ şi deci $b_m \notin E^s$, ceea ce contrazice condiţia 2) din propoziţia $P(m)$.

Urmează că $c \in E^s$. Dacă $c \neq \min E^s$, fie $c' \in E^s$, $c' < c$.

Conform AA pentru $c - c'$, $l_0 \in \mathbf{R}_+^*$ şi inegalităţii $2^n \geqslant n + 1$, $n \in \mathbf{N}$ rezultă că există $m \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $2^m(c - c') > m(c - c') > l_0$. Avem $b_m - a_m = l_0/2^m < c - c'$, $a_m > b_m - c + c'$. Deoarece $b_m - c \geqslant 0$ urmează că $a_m > c'$, deci $a_m \in E^s$. Cum $CE^s \cap E^s = \emptyset$, rezultă $a_m \notin CE^s$, ceea ce contrazice condiţia 2) din propoziţia $P(m)$. Am obţinut că există în mod unic $c = \sup E \in \mathbf{R}$.

1.29. În cîmpul total ordonat $\mathbf{R}$ al numerelor reale să se demonstreze implicaţia (Axioma marginii superioare (AMS)) $\Rightarrow$ ((Teorema lui Dedekind (TD)).

R. Mulţimea $\mathbf{R}$ verifică

1) Axiomele de cîmp în raport cu operaţiile $+, \cdot$ (AC).

2) Axiomele de ordonare în raport cu relaţia $\leqslant$ (AO).

În cîmpul total ordonat $\mathbf{R}$ folosim

Axioma marginii superioare (AMS): Orice mulţime de numere reale nevidă, mărginită superior are supremum.

Teorema lui Dedekind (TD): Orice tăietură în $\mathbf{R}$ are un element de închidere, unde *o tăietură în* $\mathbf{R}$ este o pereche (A, B) de mulţimi de elemente din $\mathbf{R}$ care verifică

I) $\mathbf{R} = A \cup B$,

II) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,

III) $A \cap B = \emptyset$,

IV) Pentru orice $a \in A$, $b \in B$ avem $a < b$, iar

Un element de închidere al tăieturii (A, B) este un element $c \in \mathbf{R}$ unic care verifică

i) Pentru orice $a \in A$, $b \in B$, $a \leqslant c \leqslant b$,

ii) Dacă $x > c$, atunci $x \in B$ şi dacă $x < c$, atunci $x \in A$.

Se arată că o tăietură (A, B) în $\mathbf{R}$ posedă un element de închidere. Din II), IV) urmează că A este nevidă, şi mărginită superior. Conform AMS, există $c = \sup A$. Arătăm că c este element de închidere al tăieturii (A, B). Din IV) rezultă i). Dacă $x > c$, atunci $x \in B$, deoarece din III), $x \notin B$ implică $x \in A$, i.e. $x \leqslant c$, contradicţie. Analog, dacă $x < c$, atunci $x \in A$, deci proprietatea ii) este demonstrată. În final se arată că c este unic prin reducere la absurd. Dacă mai există $c' \in \mathbf{R}$, $c' \neq c$ care verifică i), ii), cum $\mathbf{R}$ este dens ordonat deoarece (AMS) $\Rightarrow$ (AA) (vezi problemele 23., 24., 26.) avem că există $c'' \in \mathbf{R}$ cuprins între c, c'. În cazul $c < c'$, avem $c'' > c$, ceea ce implică $c'' \in B$ iar $c'' < c'$, implică $c'' \in A$.

Rezultă $c'' \in A \cap B$, ceea ce contrazice III). Analog se procedează în cazul $c' < c$ (singurul care mai este posibil în $\mathbf{R}$).

1.30. În cîmpul total ordonat $\mathbf{R}$ al numerelor reale să se demonstreze implicaţia (Teorema lui Dedekind (TD)) $\Rightarrow$ (Axioma marginii superioare (AMS)).

R. Mulţimea **R** verifică

1) Axiomele de cîmp în raport cu operaţiile $+, \cdot$ (AC).

2) Axiomele de ordonare în raport cu relaţia $\leqslant$ (AO).

În cîmpul total ordonat **R** folosim

Teorema lui Dedekind (TD): Orice tăietură în **R** are un element de închidere, unde *o tăietură în* **R** este o pereche (A, B) de mulţimi de elemente din **R** care verifică

I) $\mathbf{R} = A \cup B$,

II) $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$,

III) $A \cap B = \emptyset$,

IV) Pentru orice $a \in A$, $b \in B$ avem $a < b$, iar un *element de închidere al tăieturii* (A, B) este un element $c \in \mathbf{R}$ unic care verifică

i) Pentru orice $a \in A$, $b \in B$, $a \leqslant c \leqslant b$,

ii) Dacă $x > c$ atunci $x \in B$ şi dacă $x < c$ atunci $x \in A$.

Axioma marginii superioare (AMS): Orice mulţime de numere reale nevidă, mărginită superior are supremum.

Se consideră o mulţime $E \subset \mathbf{R}$ nevidă şi mărginită superior (mulţimea majoranţilor $E^s \neq \emptyset$) şi mulţimile $B = E^s$, $A = CE^s$, unde CE^s este complementara în raport cu **R** a lui E^s. Se verifică uşor că (A, B) este o tăietură în **R**. Conform TD există în mod unic $c \in \mathbf{R}$ care verifică proprietăţile i), ii), ceea ce arată că c este cel mai mic majorant al mulţimii E, adică $c = \sup E$.

Observaţie. Conform problemelor 25. — 30. avem: În cîmpul total ordonat **R** există echivalenţele de axiome (AMS) $\Leftrightarrow$ (AMI) $\Leftrightarrow$ ((AA) şi (ACD)) $\Leftrightarrow$ (TD).

1.31. Fie $\mathbf{R}[x] = \{p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \ a_k \in \mathbf{R}, \ k \in \{0, 1, \ldots, n\}, n \in \mathbf{N}\}$ mulţimea polinoamelor de coeficienţi şi variabilă reală şi $\mathbf{F} = \{f, f = p/q$ cu $p, q \in \mathbf{R}[x]$, $f : \mathbf{R} \setminus \{x \in \mathbf{R}/q(x) = 0\} \to \mathbf{R}$ mulţimea funcţiilor raţionale.

1) Să se structureze **F** ca un cîmp nearhimedian.

2) Să se arate că **F** de la 1) nu este complet, iar **Q** nu este densă în **F**.

3) Să se deducă existenţa unei infinităţi de cîmpuri nearhimediene.

R. 1) Se definesc în mod natural operaţiile $\oplus, \odot : \mathbf{F} \times \mathbf{F} \to \mathbf{F}$,

$$(f_1 \oplus f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \ (f_1 \odot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x).$$

Cum $\mathbf{R} \subset \mathbf{F}$ este cîmp, avem că **F** este cîmp. Pentru $p \in \mathbf{R}[x]$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$ se va numi coeficient dominant al polinomului p. Se consideră mulţimea $\mathbf{F}^* \subset \mathbf{F}$, $\mathbf{F}^*_+ = \{f \in \mathbf{F}, f = p/q$, unde $p, q \in \mathbf{R}[x]$ au coeficienţii dominanţi de acelaşi semn$\}$ care satisface proprietăţile:

i) Este închisă faţă de operaţiile $\oplus$, $\odot$, adică pentru orice $f_1, f_2 \in \mathbf{F}^*_+$, avem $f_1 \oplus f_2$, $f_1 \odot f_2 \in \mathbf{F}^*$.

ii) Pentru orice $f \in \mathbf{F}$, avem $f \in \mathbf{R}^*_+$, sau $f = 0$, sau $-f \in \mathbf{R}^*_+$ (în sens exclusiv).

Se verifică uşor că relaţia binară $\leqslant \subset \mathbf{F} \times \mathbf{F}$, $f_1 \leqslant f_2$ ddacă $-f_1 + f_2 \in \mathbf{F}^*_+$ sau $f_1 = f_2$ este o relaţie de ordine totală pe **F**. Deci **F** este cîmp total ordonat. Deoarece pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $f \in \mathbf{R}[x]$, $n = n/1$, $f = f/1$, rezultă că $\mathbf{N}^* \subset \mathbf{F}^*_+$, $\mathbf{R}[x] \subset \mathbf{F}$.

Urmează că pentru orice polinom $f \in \mathbf{R}[x]$ de coeficient dominant pozitiv și pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, avem $n \leqslant f$, deoarece $-n + f \in F^*_+$ și deci $\mathbf{F}$ nu este arhimedian.

2) Conform implicației (AMS) $\Rightarrow$ (AA) (vezi problema 26.) rezultă că $\mathbf{F}$ nu poate fi complet. Se demonstrează că mulțimea $\mathbf{Q}$ nu este densă în $\mathbf{F}$ prin reducere la absurd, adică presupunem $\mathbf{Q}$ densă în $\mathbf{F}$. Atunci pentru $f \in \mathbf{F}^*_+$ arbitrar fixat, există $r \in \mathbf{Q}$, $r = m/n$, astfel încît $0 < r < 1/f$. Avem $0 < 1/n \leqslant m/n < 1/f$, de unde rezultă $n > f$, ceea ce contrazice faptul că $\mathbf{F}$ nu este arhimedian.

3) Conform 1) arătăm că orice cîmp total ordonat $\mathbf{F}$ ce-l conține pe $\mathbf{R}$ ca sub cîmp propriu nu este arhimedian prin reducere la absurd, adică presupunem $\mathbf{F}$ arhimedian. Cum $\mathbf{R} \subset \mathbf{F}$, să alegem $f_0 \in \mathbf{F} \setminus \mathbf{R}$. Deoarece $\mathbf{F}$ este arhimedian rezultă că există $n \in N^*$ astfel încît $|f_0| < n$. Pentru mulțimea $\mathbf{E} = \{x \in \mathbf{R} \mid x < |f_0|\}$, avem $\mathbf{E} \neq \emptyset$ și $\mathbf{E}$ este majorată superior în $\mathbf{R}$, deoarece $0 \in \mathbf{E}$, $f_0 \notin \mathbf{R}$ implică $|f_0| \in \mathbf{F}^*_+$ și n este majorant al lui $\mathbf{E}$. Urmează că există $\lambda = \sup \mathbf{E} \in \mathbf{R}$. Cum $\lambda - |f_0| \neq 0$ și $\mathbf{F}$ este arhimedian rezultă că există $m \in \mathbf{N}^*$ cu $m > \dfrac{1}{|\lambda - |f_0||} > 0$. Avem $|\lambda - |f_0|| > 1/m$, $\lambda > |f_0| + 1/m$ sau $|f_0| > \lambda + 1/m$.

În primul caz rezultă că $\lambda - 1/m$ este majorant al lui $\mathbf{E}$, contradicție; în al doilea caz rezultă că $\lambda + 1/m \in \mathbf{E}$, ceea ce contrazice din nou că $\lambda = \sup \mathbf{E}$. Deci $\mathbf{F}$ nu este arhimedian.

1.32. Fie funcțiile $f, g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f|_\mathbf{Q}, g|_\mathbf{Q}: \mathbf{Q} \to \mathbf{R}$, unde f este continuă pe $\mathbf{R}$, g este monotonă pe $\mathbf{R}$, $f|_\mathbf{Q}(x) = f(x)$, $g|_\mathbf{Q}(x) = g(x)$ pentru $x \in \mathbf{Q}$ ($f|_\mathbf{Q}$, $g|_\mathbf{Q}$ sînt restricțiile lui f, respectiv g la $\mathbf{Q}$) și $f|_\mathbf{Q} = g|_\mathbf{Q}$. Să se arate că $f = g$.

R. Fie $x_0 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ arbitrar fixat și g crescătoare. Deoarece $\mathbf{Q}$ este densă în $\mathbf{R}$ (vezi problema 31.), i.e. $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$, unde $\bar{\mathbf{Q}} = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall V_x,\ V_x \cap \mathbf{Q} \neq \emptyset\}$ este închiderea (mulțimea punctelor aderente) pentru $\mathbf{Q}$ rezultă că există un șir (x_n) cu $\{x_n\} \subset \mathbf{Q}$, $x_n \leqslant x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Conform enunțului (cu g crescătoare) și unor proprietăți ale limitei avem $f(x_0) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) \leqslant g(x_0)$.

În mod analog există un șir (y_n) cu $\{y_n\} \subset \mathbf{Q}$, $x_0 \leqslant y_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$ astfel încît $g(x_0) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} g(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(x_0)$. Urmează că $f(x_0) = g(x_0)$ și deci $f = g$. Se procedează în mod analog în cazul g descrescătoare.

1.33. Fie $\mathbf{R}$ cîmp total ordonat arhimedian (verifică axiomele de cîmp, de ordine și axioma lui Arhimede. Să se arate că:

1) Orice mulțime de intervale deschise din $\mathbf{R}$, disjuncte două cîte două este cel mult numărabilă.

2) Mulțimea tuturor intervalelor din $\mathbf{R}$ cu capetele raționale este numărabilă.

R. 1) $\mathbf{R}$ fiind cîmp total ordonat arhimedian este dens ordonat (vezi problema 24.). Urmează că din fiecare interval al unei mulțimi de intervale $\mathfrak{J}$ deschise din $\mathbf{R}$, disjuncte două cîte două se poate extrage (fiindcă există) cîte un număr rațional. Prin acest procedeu se definește o aplicație injectivă de la $\mathfrak{J}$ la $\mathbf{Q}$. Cum $\mathbf{Q}$ este numărabilă, rezultă că $\mathfrak{J}$ este cel mult numărabilă.

2. Fie $\mathfrak{I} = \{J\}$ mulțimea tuturor intervalelor din $\mathbf{R}$ cu capetele raționale, unde $J = \langle a, b\rangle$ sau $J = (-\infty, a\rangle$ sau $J = \langle b, \infty)$ cu $< : =$ $= (, [, > : =) ,]$ și $a, b \in \mathbf{Q}$, $a<b$. Se definește aplicația $f: \mathfrak{I} \to \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ prin $\langle a, b\rangle \mapsto (a, b)$, $(-\infty, a\rangle \mapsto (-a, a)$, $\langle b, \infty) \mapsto (-b, b)$ și se observă că este injectivă. Deci mulțimea $\mathfrak{I}$ este cel mult numărabilă. Cum corestricția lui f, $f: \mathfrak{I} \to f(\mathfrak{I})$ este bijectivă, iar $f(\mathfrak{I})$ este infinită, urmează că $\mathfrak{I}$ este numărabilă.

1.34. L. Dacă $A \subseteq B \subseteq C$ și $A \sim C$ (mulțimile A și C sînt echipotente), atunci $B \sim C$.

T. Relația binară $\preccurlyeq$ definită prin „$A \preccurlyeq B$ ddacă există o funcție de la A la B injectivă" este antisimetrică *Lema și teorema lui Cantor—Bernstein*).

R. *Observație.* 1) Dacă $B \sim C$ se mai spune că B și C au același cardinal și se scrie $|B| = |C|$.
2) Relația binară $\preccurlyeq$ este o parte a produsului cartezian $U \times U$, unde U este un univers de mulțimi care apar în descrierile matematice. Se demonstrează că $\preccurlyeq$ este o relație de ordine totală (reflexivă, tranzitivă, antisimetică, totală).

L. Prin ipoteză există o bijecție $f: C \to A$. Se demonstrează echipotența $B \sim C$ în două moduri:

1) Se construiesc pentru B și C două reuniuni numărabile de mulțimi disjuncte care sînt egale sau echipotente. Pentru aceasta se definește șirul de mulțimi (C_n) prin relațiile de recurență $C_0 = C$, $C_1 = B$, $C_{n+2} = f(C_n)$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Prin inducție se obține imediat că șirul (C_n) este descrescător, deoarece $C_0 \supseteq C_1$ și $C_n = f(C_{n-2}) \supseteq f(C_{n-1}) = C_{n+1}$. Se mai definește șirul de mulțimi (D_n), $D_n = C_{n-1} \setminus C_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, disjuncte două cîte două. Se notează $E = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} C_n$, mulțimea E fiind disjunctă cu orice mulțime D_n. Se observă că

$$B = \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*\setminus\{1\}} D_n\Big) \cup E = \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} D_{2n+1}\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} D_{2n}\Big) \cup E,$$

$$C = \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} D_n\Big) \cup E = \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}} D_{2n+1}\Big) \cup \Big(\bigcup_{n\in\mathbf{N}^*} D_{2n}\Big) \cup E.$$

Folosind proprietățile imaginii printr-o funcție injectivă se obține succesiv $D_{2n+3} = C_{2n+2} \setminus C_{2n+3} = f(C_{2n}) \setminus f(C_{2n+1}) = f(C_{2n} \setminus C_{2n+1}) = f(D_{2n+1})$. Deci $D_{2n+1} \sim D_{2n+3}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$, așa încît $B \sim C$.

2) Se construiește o funcție $g: C \to B$ bijectivă. În acest scop se definește șirul de mulțimi (C_n) prin relațiile de recurență $C_0 = C \setminus B$, $C_n = f(C_{n-1}) \subseteq A$, pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Se ia $D = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} C_n$ și se observă

că D, $B \setminus D$ formează o partiție a mulțimii C, adică $C = D \cup (B \setminus D)$, $D \cap (B \setminus D) = \emptyset$. Se definește funcția $g: C \to B$ prin

$$g(c) = \begin{cases} f(c), & c \in D \\ c, & c \in B \setminus D, \end{cases} \quad \text{unde } g(C) \subseteq B \text{ deoarece } f(C_0) \subseteq A.$$

Pentru a arăta că g este injectivă se iau elementele distincte c_1 și c_2 din C și se consideră cazurile:

a) $c_1 \in D$, $c_2 \in D$, în care $g(c_1) = f(c_1) \neq f(c_2) = g(c_2)$;
b) $c_1 \notin D$, $c_2 \notin D$, în care $g(c_1) = c_1 \neq c_2 = g(c_2)$;
c) $c_1 \in D$, $c_2 \notin D$, în care $g(c_1) = f(c_1) \in D$, $g(c_2) = c_2 \notin D$;
d) $c_1 \notin D$, $c_2 \in D$, analog cu c).

Funcția g este surjectivă dacă $B \subseteq g(C)$. Se ia $b \in B$. Dacă $b \in B \setminus D$, atunci $g(b) = b$, deci $b \in g(C)$. În cazul $b \in D$, există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $b \in D_n$, deoarece $C_0 \cap B = \emptyset$. Din relația $C_n = f(C_{n-1})$ rezultă că există $c \in C_{n-1}$ astfel încît $b = f(c)$. Urmează că $g(c) = f(c) = b$ deoarece $c \in D$ și deci $b \in g(C)$. Funcția g fiind bijectivă rezultă că $B \sim C$.

T. Trebuie de arătat că dacă $X \preccurlyeq Y$ și $Y \preccurlyeq X$, atunci $X \sim Y$. Prin ipoteză există funcțiile injective $f: X \to Y$, $g: Y \to X$. Conform proprietăților imaginii prin f, g rezultă $(f \circ g)(Y) = f(g(Y)) \subseteq f(X) \subseteq Y$, deoarece $g(Y) \subseteq X$. Cum $f \circ g$ este injectivă, urmează că $f \circ g: Y \to (f \circ g)(Y)$ (corestricția lui $f \circ g$) este bijectivă, deci $(f \circ g)(Y) \sim Y$. Conform L. (lema lui Cantor—Bernstein) aplicată pentru $A = (f \circ g)(Y)$, $B = f(X)$, $C = Y$ rezultă că $f(X) \sim Y$. Corestricția lui f, $f: X \to f(X)$ fiind bijectivă, avem că $X \sim f(X)$. Relația $\sim$ fiind tranzitivă (deoarece compunerea a două bijecții dă o bijecție) rezultă că $X \sim Y$.

1.35. Să se arate că $P(N) \sim \mathbf{R}$ (mulțimea părților mulțimii numerelor naturale este echipotentă cu mulțimea numerelor reale).

R. Se face observația că $\mathbf{R} \sim (0, 1)$, deoarece există cel puțin o bijecție $\theta: \mathbf{R} \to (0, 1)$ (de ex. $\theta(x) = \frac{1}{2}(1 + x/(1 + |x|))$.

Este suficient de demonstrat echipotența $P(N) \sim (0, 1)$ folosind teorema lui Cantor—Bernstein (vezi problema 34.). Se definește aplicația $F: P(N) \to (0, 1)$, $X \mapsto 0 \cdot c_0 c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$ unde $c_n = 0$ dacă $n \notin X$ și $c_n = 1$ dacă $n \in X$. Cu observația că dacă două părți zecimale sînt egale, atunci una din ele se sfîrșește cu un șir infinit de 9 se obține că F este injectivă și deci $P(\mathbf{N}) \preccurlyeq (0, 1)$. Se mai definește aplicația

$$G: (0, 1) \to P(\mathbf{N}),\ x \mapsto \{10^{n-1} + x_n,\ n \in \mathbf{N}^*\},$$

unde $0 \cdot x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots$ este reprezentarea zecimală a lui x. Se arată ușor că G este injectivă și deci $\mathbf{R} \preccurlyeq P(\mathbf{N})$.

1.36. Să se arate că $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} = \{f: \mathbf{N} \to \mathbf{R},\ f \text{ (funcție)}\}$ (mulțimea tuturor șirurilor de numere reale) este de puterea continuului ($\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ echipotentă cu $\mathbf{R}$).

R. Se arată că $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ este echipotentă cu $\mathbf{R}$) folosind teorema lui Cantor—Bernstein (vezi problema 34.). Inegalitatea $\mathbf{R} \preccurlyeq \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ este imediată, deoarece aplicația $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $c \mapsto f$ este injectivă, unde $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(n) = c$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ este șirul constant $\{c\}$.

Pentru a demonstra inegalitatea $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \preccurlyeq \mathbf{R}$ se construiește o aplicație $G : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$ folosind o bijecție $\theta : \mathbf{R} \to [0, 1)$. Se consideră un șir $f \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ și se notează $\theta(f(n)) = 0, c_{n0}c_{n1} \ldots c_{nk} \ldots$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Se definește aplicația $G' : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to [0, 1)$, $f \mapsto 0, s_1 s_2 \ldots s_i \ldots$, unde $s_i = c_{nk}$ dacă $i = 2^n 3^k$ și $s_i = 0$ dacă $i \neq 2^n 3^k$, cu $n, k \in \mathbf{N}$. Se observă că G' este injectivă. Urmează că și aplicația $G = \theta^{-1}G'$, $G : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$ este injectivă și deci $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \leqslant \mathbf{R}$.

1.37. Să se arate că $C_I^0 = \{f : I \to \mathbf{R} / I \subseteq \mathbf{R}$ interval închis; f continuă pe $I\}$ (mulțimea funcțiilor continue pe intervalul închis I din $\mathbf{R}$) este de puterea continuului (C_I^0 este echipotentă cu $\mathbf{R}$).

R. Se arată că $C_I^0 \sim \mathbf{R}$ (C_I^0 este echipotentă cu $\mathbf{R}$ folosind teorema lui Cantor—Bernstein (vezi problema 34.). Inegalitatea $\mathbf{R} \preccurlyeq C_I^0$ este imediată, deoarece aplicația $F : \mathbf{R} \to C_I^0$, $c \mapsto f$ este injectivă, unde $f(x) = c$ pentru orice $x \in I$. Cum $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$ (vezi problema 36.) este suficient de demonstrat inegalitatea $C_I^0 \preccurlyeq \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Mulțimea $\mathbf{Q} \cap I$ este numărabilă ($\mathbf{Q}$ fiind numărabilă), deci se poate scrie ca mulțmiea termenilor unui șir, fie $\mathbf{Q} \cap I = \{q_n\}$. Se definește aplicația $G : C_I^0 \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, $f \mapsto (f(q_n))$ și se arată că este injectivă. Se presupune $G(f) = G(g)$ și se demonstrează că $f = g$ pe $I \setminus \mathbf{Q}$. Fie $x \in I \setminus \mathbf{Q}$, arbitrar fixat. Deoarece $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$ ($\mathbf{Q}$ este densă în $\mathbf{R}$ — vezi problema 31.) și deci $\overline{\mathbf{Q} \cap I} = I$ rezultă că există un șir (r_n), $r_n \in \{q_n\}$ avînd limita x. Cum f și g sînt continue în x, urmează că $f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f(r_n) = \lim\limits_{n \to \infty} g(r_n) = g(x)$.

În final se face observația că dacă I nu este interval închis (de ex. I este interval semideschis sau o mulțime care conține puncte izolate) există puncte în care funcțiile f și g nu sînt egale (capătul în care I este deschis sau punctele izolate), deoarece în general $\overline{\mathbf{Q} \cap I} \supseteq (\mathbf{Q} \cap I)'$ (mulțimea punctelor de acumulare).

1.38. Fie A o mulțime nevidă oarecare, $P(A)$ mulțimea părților sale și relațiile binare $\preccurlyeq$, $\prec$ definite prin

„$X \preccurlyeq Y$ ddacă există o funcție de la X la Y injectivă”, respectiv „$X \prec Y$ ddacă $X \preccurlyeq Y$ și $X \nsim Y$ (mulțimile X, Y nu sînt echipotente)”.

Să se arate că $A \prec P(A)$. Să se deducă de aici că $\mathbf{N} \preccurlyeq \mathbf{R}$ și totodată nu există un cel mai mare cardinal.

R. Se observă că aplicația $\{\cdot\}: A \to P(A)$, $a \mapsto \{a\}$ este injectivă și deci $A \preccurlyeq P(A)$. $A \nsim P(A)$ dacă nu există o bijecție între A și $P(A)$. Se arată prin reducere la absurd că nu există nici o surjecție de la A la $P(A)$ (și cu atît mai mult nici o bijecție). Se presupune că există o aplicație surjectivă $F : A \to P(A)$. Se consideră $B = \{x \in A / x \notin F(x)\}$, $B \in P(A)$. Urmează că există $a \in A$, astfel încît $B = F(a)$, deoarece $F(A) = P(A)$. Se cercetează dacă $a \in B$. În cazul $a \in B$, din definiția lui B, rezultă $a \notin F(a) = B$, contradicție. Dacă $a \notin B$, atunci $a \notin F(a)$ și iarăși din definiţia lui B rezultă $a \in B$, contradicţie. Deoarece ambele presupuneri $a \in B$ şi $a \notin B$ conduc la contradicţii, presupunerea că F este surjectivă este falsă.

Observaţia 1. Procedeul folosit mai sus poate fi numit „pe diagonală", denumire care se justifică în cazul particular $A = \mathbf{N}$.

Aplicaţia F se reprezintă printr-o matrice infinită de linie $F(i) = (a_{ij})$, unde $i, j \in \mathbf{N}$, iar $a_{ij} = 0$ dacă $j \notin F(i)$ şi $a_{ij} = 1$ dacă $j \in F(i)$. De exemplu, dacă $F(1)$ este mulţimea numerelor naturale prime, atunci linia a doua a matricii începe cu 0111010100010...

Se defineşte $B = \{x \in \mathbf{N} \; x \notin F(x)\} = \{n \in \mathbf{N} \mid a_{nn} = 0\}$. Pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $B \neq F(n)$, deoarece $n \in F(n)$ ddacă $a_{nn} = 1$ şi $a_{nn} = 1$ ddacă $n \notin B$.

Se remarcă faptul că elemetele lui B sînt determinate de diagonala matricii, adică de a_{nn} pentru $n \in \mathbf{N}$.

În cazul particular $A = \mathbf{N}$ se obţine $\mathbf{N} \prec P(\mathbf{N})$. Cum $P(\mathbf{N}) \sim \mathbf{R}$ (vezi problema 35.) rezultă $\mathbf{N} \prec \mathbf{R}$ sau $|\mathbf{N}| < |\mathbf{R}|$, unde $|\mathbf{N}|, |\mathbf{R}|$ sînt cardinalele lui $\mathbf{N}$, respectiv $\mathbf{R}$. Pentru orice cardinal α, se alege mulţimea A astfel încît $|A| = \alpha$ şi atunci $|P(A)| > \alpha$, deci pentru orice cardinal există unul strict mai mare.

Observaţia 2. a) În teoria mulţimilor există o axiomă (independentă de sistemul de axiome Zermelo—Fraenkel la care se adaugă axioma alegerii) numită ipoteza continuului generalizat (ICG) care afirmă că succesorul unui cardinal se obţine prin procedeul de mai sus (luînd mulţimea părţilor $P(A)$).

b) În cazul particular $A = \mathbf{N}$ axioma (ICG) se numeşte ipoteza continuului (IC) şi se poate pune sub forma:

Orice submulţime a lui $\mathbf{R}$ este sau echipotentă cu $\mathbf{R}$ sau cel mult numărabilă.

1.39. Să se arate că pentru o mulţime $A \subseteq \mathbf{R}$ avem relaţia

$$\sup_{x \in A} |x| = \max\{|\sup A|, |\inf A|\}.$$

R. Prin definiţie avem $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$, $|x| \leqslant \max\{|\sup A|, |\inf A|\}$, pentru orice $x \in A$. Rezultă

(i) $\sup_{x \in A} |x| \leqslant \max\{|\sup A|, |\inf A|\}$.

Folosim în continuare proprietăţile marginilor extreme şi din $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ pentru orice $x \in A$ obţinem $-\sup_{x \in A}|x| \leqslant -\inf_{x \in A}|x| = \sup_{x \in A}(-|x|) \leqslant \sup_{x \in A} x \leqslant \sup_{x \in A}|x|$, $|\sup A| \leqslant \sup_{x \in A}|x|$, respectiv $-\sup_{x \in A}|x| = \inf_{x \in A}(-|x|) \leqslant \inf_{x \in A} x \leqslant \inf_{x \in A}|x| \leqslant \sup_{x \in A}|x|$, $|\inf A| \leqslant \sup_{x \in A}|x|$.

Urmează

(ii) $\max\{|\sup A|, |\inf A|\} \leqslant \sup_{x \in A}|x|$.

Din i), ii) rezultă relaţia

$$\sup_{x \in A} |x| = \max\{|\sup A|, |\inf A|\}.$$

1.40. Să se arate că pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}^*$ are loc egalitatea

$$\sum_{k=1}^{n}\left[x + \frac{k-1}{n}\right] = [nx],$$

unde $[a]$ este partea întreagă a lui $a \in \mathbf{R}$.

R. Deoarece egalitatea este evidentă pentru $n = 1$, presupunem în continuare că $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. Fie $\{x\} = x - [x]$ partea fracţionară a lui $x \in \mathbf{R}$ cu $\{x\} \in [0, 1)$ ($\{x\} = 0$ ddacă $x \in \mathbf{Z}$).
Conform axiomei lui Arhimede (vezi 1.23.—1.30.) mulţimea $M = \{p \in \mathbf{N}/n\{x\} < p\}$ este nevidă. Urmează că există $m = \min M$, $m \in \{1, \ldots, n\}$ astfel încît $\{x\} \in \left[\frac{m-1}{n}, \frac{m}{n}\right)$. Avem $x + \frac{k-1}{n} = [x] + \left(\{x\} + \frac{k-1}{n}\right)$, unde $\{x\} + \frac{k-1}{n} \in \left[\frac{m+k-2}{n}, \frac{m+k-1}{n}\right)$. Se observă că $\left[x + \frac{k-1}{n}\right] = \begin{cases} [x], & k \in \{1, \ldots, n-m+1\}. \\ [x]+1, & k \in \{n-m+2, \ldots, n\}. \end{cases}$
Se obţine

$$\sum_{k=1}^{n}\left[x + \frac{k-1}{n}\right] = \sum_{k=1}^{n-m+1}\left[x + \frac{k-1}{n}\right] + \sum_{k=n-m+2}^{n}\left[x + \frac{k-1}{n}\right] =$$

$$= (n - m + 1)[x] + (m-1)([x]+1) = n[x] + m - 1,$$

$$n[x] + m - 1 \leqslant [nx] = [n[x] + n\{x\}] = n[x] + [n\{x\}] < n[x] + m,$$

$$[nx] = n[x] + m - 1.$$

Egalitatea se verifică uşor în cazurile particulare remarcabile $\{x\} = 0$, $\{x\} \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ (pentru $m = 1$) şi respectiv $\{x\} \in \left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$ (pentru $m=n$).

1.41. Se consideră C_I^0 mulţimea funcţiilor continue pe compactul $I \subset \mathbf{R}$. Să se arate că $d : C_I^0 \times C_0^I \to \mathbf{R}$,

$$d(f, g) = \int_I \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\,dx \text{ este o matrică în } C_I^0.$$

R. Aplicaţia d este metrică (distanţă) în C_I^0 dacă verifică axiomele
1) Pentru orice $f, g \in C_I^0$, $d(f, g) \geqslant 0$ şi $d(f, g) = 0$ ddacă $f = g$;
2) Pentru orice $f, g \in C_I^0$, $d(f, g) = d(g, f)$;
3) Pentru orice $f, g, h \in C_I^0$, $d(f, h) \leqslant d(f, g) + d(g, h)$.
Pentru orice $f, g \in C_I^0$ avem

$$\frac{|f-g|}{1+|f-g|} \in C_I^0, \quad \frac{|f-g|}{1+|f-g|} \geqslant 0 \text{ pe } I,$$

deci d este corect definită şi $d : C_I^0 \times C_I^0 \to \mathbf{R}_+$. În continuare 1), partea a doua, 2) şi 3) se verifică folosind proprietăţile modulului.

1.42. Să se arate că dacă (E, d) este spaţiu metric, atunci (E, d_i), $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ sînt spaţii metrice, unde:
1) $d_1 = \frac{d}{1+d}$;
2) $d_2 = d^\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$;
3) $d_3 = \ln(1 + d)$;
4) $d_4 = \min\{d, c\}$; $c : E \times E \to \mathbf{R}_+^*$, $c(x, y) = c$ este funcţia constantă.

R. Aplicaţia d verifică axiomele

A1) Pentru orice $x, y \in E$, $d(x, y) \geqslant 0$ şi $d(x, y) = 0$ ddacă $x = y$;

A2) Pentru orice $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$;

A3) Pentru orice $x, y, z \in E$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

1) A1) (pentru d_1) se verifică imediat, cu observaţia că pentru orice $x, y \in E$, dacă $d_1(x, y) = 0$, atunci $d(x, y) = 0$ şi deci $x = y$. Evident, dacă d verifică A2), atunci şi d_1 verifică A2). Din inegalitatea $\frac{a}{1+a} \leqslant \frac{b}{1+b}$, $0 \leqslant a \leqslant b$ şi A3), pentru d, avem

$$d_1(x, z) = \frac{d(x, z)}{1 + d(x, z)} \leqslant \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} +$$

$$+ \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \leqslant \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} = d_1(x, y) + d_1(y, z),$$

pentru orice $x, y, z \in E$.

2) Analog cu 1), axiomele A1) şi A2) se verifică uşor. Pentru $\alpha \in (0, 1)$ avem inegalitatea

i) $(a + b)^\alpha \leqslant a^\alpha + b^\alpha$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Într-adevăr, dacă $a = b = 0$ avem egalitate. În caz contrar se împarte prin $\max\{a, b\} \in \mathbf{R}_+^*$ şi se ajunge la inegalitatea $(1 + x)^\alpha - x^\alpha - 1 \leqslant 0$, $x \in \mathbf{R}_+$ care este adevărată deoarece funcţia $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$, $f(x) = (1 + x)^\alpha - x^\alpha - 1$ este descrescătoare ($f'(x) = \alpha[(1 + x)^{\alpha-1} - x^{\alpha-1}] < 0$ pentru $x \in \mathbf{R}_+^*$ şi $f(0) = 0$). Din i) şi A3) pentru d se obţine

$$d_2(x, z) = [d(x, z]^\alpha \leqslant [d(x, y) + d(y, z)]^\alpha \leqslant [d(x, y]^\alpha + [d(y, z)]^\alpha =$$

$$= d_2(x, y) + d_2(y, z) \text{ pentru orice } x, y, z \in E.$$

3) Axiomele A1) şi A2) se verifică uşor, cu observaţia că pentru orice $x, y \in E$, dacă $d_3(x, y) = 0$, atunci $d(x, y) = 0$ şi deci $x = y$. Din proprietăţile funcţiei ln şi A3) pentru d avem

$$d_3(x, z) = \ln[1 + d(x, z)] \leqslant \ln(1 + d(x, y) + d(y, z)] \leqslant$$

$$\leqslant \ln[[1 + d(x, y)][1 + d(y, z)]] = \ln[1 + d(x, y] +$$

$$+ \ln[1 + d(y, z)] = d_3(x, y) + d_3(y, z), \text{ pentru orice } x, y, z \in E.$$

4) Axiomele A1) şi A2) se verifică uşor, cu observaţia că pentru orice $x, y \in E$, $d_4(x, y) = 0$ ddacă $d(x, y) = 0$. Folosim inegalitatea

ii) $\min\{a + b, c\} \leqslant \min\{a, c\} + \min\{b, c\}$, $a, b, c \in \mathbf{R}_+$ care se verifică uşor în cazurile $c \leqslant \min\{a, b\}$, $\min\{a, b\} \leqslant c \leqslant \max\{a, b\}$, $\max\{a, b\} \leqslant c \leqslant a + b$, $a + b \leqslant c$. Din ii) şi A3) pentru d, se obţine

$$d_4(x, z) = \min\{d(x, z), c\} \leqslant \min\{d, (x, y) + d(y, z), c\} \leqslant$$

$$\leqslant \min\{(d(x, y), c\} + \min\{d(y\ z), c\} = d_4(x, y) + d_4(y, z),$$

pentru orice $x, y, z \in E$.

1.43. Fie (E, d) spaţiu metric şi $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ o funcţie care verifică proprietăţile

P1) f este strict crescătoare pe $\mathbf{R}_+$;
P2) $f(0) = 0$;
P3) $f(a + b) \leqslant f(a) + f(b)$, unde $a, b \in \mathbf{R}_+$.

Să se arate că $(E, f \circ d)$ este spaţiu metric.

R. Aplicaţia d verifică axiomele

A1) Pentru orice $x, y \in E$, $d(x, y) \geqslant 0$ şi $d(x, y) = 0$ ddacă $x = y$;
A2) Pentru orice $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$;
A3) Pentru orice $x, y, z \in E$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Urmează că aplicaţia $h = f \circ d$ este corect definită. Din P1) se obţine că $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$. Dacă $x = y$ cu $x \in E$, atunci conform A1) şi P2) rezultă $h(x, y) = f(0) = 0$. Reciproc, dacă pentru orice $x, y \in E$, $h(x, y) = f(d(x, y)) = 0$, atunci $d(x, y) = 0$ deoarece f este injectivă (conform P1)) şi deci $x = y$ (conform A1)). Am demonstrat că aplicaţia h este corect definită şi verifică A1). Evident h verifică şi A2), deoarece d verifică A2)).

Pentru orice $x, y, z \in E$ din A3) pentru d, P1) şi P3) avem

$$h(x, z) = f(d(x, z)) \leqslant f(d(x. y) + d(y, z)) \leqslant f(d(x, y) + $$
$$+ f(d(y, z)) = h(x, y) + h(y, z).$$

Rezultă că (E, h) este spaţiu metric.

1.44. În spaţiul metric (E, d) se defineşte aplicaţia $f: E \rightarrow \mathbf{R}_+$, $x \rightarrow \inf\limits_{y \in A} d(x, y)$ (distanţa de la mulţimea $A \subset E$ fixată la $x \in E$).

Să se arate că pentru orice $x, y \in E$ are loc inegalitatea

$$|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y).$$

R. Aplicaţia d verifică axiomele

1) Pentru orice $x, y \in E$, $d(x, y) \geqslant 0$ şi $d(x, y) = 0$, ddacă $x = y$;
2) Pentru orice $x, y \in E$, $d(x, y) = d(y, x)$;
3) Pentru orice $x, y, z \in E$, $d(x, y) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Conform 3) avem $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$, $d(y, z) \leqslant d(y, x) + d(x, z)$, pentru orice $x, y, z \in E$. Din (1) şi proprietăţile marginii inferioare se obţine $f(x) \leqslant d(x, y) + f(y)$, $f(y) \leqslant d(y, x) + f(x)$.

În final, prin aplicarea axiomei 2) rezultă $-d(x, y) \leqslant f(x) - f(y) \leqslant \leqslant d(x, y)$, $|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y)$.

1.45. Se consideră mulţimile $A \subset \mathbf{R}$ şi $A' \subseteq \mathbf{R}$ (mulţimea punctelor de acumulare pentru A). Să se arate că dacă A este finită, atunci A' este vidă.

R. Prin definiţie $A' = \{x \in \mathbf{R} / \forall V_x,\ V_x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$. Considerăm o enumerare a mulţimii A, fie $A = \{x_i\}_{i \in I}$, $I = \{0, 1, \ldots, n - 1\}$, $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. Cum $\mathbf{R} = A \cup (\mathbf{R} \setminus A)$, $A' = (A \cap A') \cup (A' \cap (\mathbf{R} \setminus A))$, $A' \cap A \cap (\mathbf{R} \setminus A) = \emptyset$, examinăm cazurile

1) $x_i \in A \cap A'$, $i \in I$ arbitrar fixat, caz în care există vecinătatea simetrică $V_{x_i} = (x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon)$, cu $0 < \varepsilon < \min\limits_{j, k \in I} |x_j - x_k|$, astfel încît $V_{x_i} \cap A = \{x_i\}$ şi deci $x_i \notin A'$, i.e. $A \cap A' = \emptyset$;

2) $x \in (\mathbf{R} \setminus A) \cap A'$ arbitrar fixat, caz în care există vecinătatea simetrică $V_x = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ cu $0 < \varepsilon < \min\limits_{j \in I} |x - x_j|$, astfel încît $V_x \cap A = \emptyset$ şi iarăşi $x \notin A'$, adică $A' \cap (\mathbf{R} \setminus A) = \emptyset$. Rezultă $A' = \emptyset$.

1.46. Fie mulţimile $A \subset \mathbf{R}$ şi $A' \subseteq \mathbf{R}$ (mulţimea punctelor de acumulare pentru A) şi elementele $m = \inf A$, $M = \sup A$. Să se arate că

1) Dacă $m, M \notin A$, atunci $m, M \in A'$.

2) Dacă A este închisă, atunci $m, M \in A$.

R. 1) Prin definiţie $A' = \{x \in \mathbf{R} / \forall V_x,\ V_x \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset\}$. Avem $(m = \inf A) \Leftrightarrow$ (i1 şi i2), unde

i1: $\forall x \in A,\ m \leqslant x$,

i2: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A,\ m \leqslant x_\varepsilon < m + \varepsilon$ (vezi problema 20.).

Cum $m \notin A$, se obţine $x_\varepsilon \neq m$, $x_\varepsilon \in (m - \varepsilon, m + \varepsilon)$.

Cu observaţia că, pentru orice V_m, există $\varepsilon > 0$ astfel încît $(m - \varepsilon, m + \varepsilon) \subset V_m$, rezultă $m \in A'$. Analog se arată că $M \in A'$.

2) Avem $A' \subseteq \bar{A}$, unde $\bar{A} = \{x \in \mathbf{R} \mid \forall V_x,\ V_x \cap A \neq \emptyset\}$ este mulţimea punctelor aderente pentru A. Dacă A este închisă, i.e. $A = \bar{A}$, atunci $A' \subseteq A$. Conform 1), în ipoteza $m \notin A$ urmează $m \in A'$, contradicţie. Analog rezultă şi $M \in A$.

1.47. a) Pentru orice două numere reale x, y se notează $d(x, y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$. Să se arate că funcţia $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ astfel definită este o distanţă pe $\mathbf{R}$ şi că, relativ la această distanţă, şirul (x_n), $x_n = n$, $n \geqslant 1$ este şir Cauchy, monoton şi mărginit şi totuşi nu este convergent.

b) Fie mulţimea $X = \{1, 2, 3, \ldots\}$; pentru orice $x, y \in X$ notăm $d(x, y) = |1/x - 1/y|$. Să se arate că d este o distanţă pe X; este X spaţiu metric complet? (Concursul Tr. Lalescu, 1979, etapa locală I.P.B.).

R. a) Funcţia $d : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$ verifică axiomele

1) Pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$, $d(x, y) = 0$ ddacă $x = y$;

2) Pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$, $d(x, y) = d(y, x)$;

3) Pentru orice $x, y, z \in \mathbf{R}$, $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Urmează că d este distanţă (metrică) pe $\mathbf{R}$. Evident şirul (x_n) este monoton. În plus este şi mărginit deoarece pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$, $d(x_n, 0) = |\operatorname{arctg} n| < \pi/2$.

Cum funcţia $\operatorname{arctg} x : \mathbf{R} \to [-\pi/2, \pi/2]$ este crescătoare, pentru orice $n, p \in \mathbf{N}^*$ avem

$$d(x_{n+p}, x_n) = |\operatorname{arctg}(n + p) - \operatorname{arctg} n| = \left|\operatorname{arctg} \frac{p}{1 + n(n + p)}\right| =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{p}{1 + n(n + p)} < \operatorname{arctg} \frac{1}{n}.$$

Conform axiomei lui Arhimede pentru 1, $\operatorname{tg} \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$ (cu $0 < \varepsilon < \pi/2$) rezultă că există $n \in \mathbf{N}^*$ astfel încît $n \operatorname{tg} \varepsilon > 1$. Fixăm rangul $N(\varepsilon) = [1/\operatorname{tg} \varepsilon] + 1$ şi deoarece funcţia $\operatorname{tg} : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbf{R}$ este crescătoare, obținem că pentru orice $n, p \in \mathbf{N}^*$, $n \geq N(\varepsilon)$ implică $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$, deci șirul (x_n) este Cauchy. Dacă șirul (x_n) este convergent în $(\mathbf{R}, d)$, atunci există $x_0 \in \mathbf{R}$, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$. Avem $d(x_n, x_0) = |\operatorname{arctg} n -$ $- \operatorname{arctg} x_0| = \left|\operatorname{arctg} \frac{n - x_0}{1 + nx_0}\right| = \operatorname{arctg} \frac{n - x_0}{x_0 n + 1}$, $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x_0}$. Rezultă $x_0 \in \{-\infty, \infty\}$, contradicție. Urmează că spațiul metric $(\mathbf{R}, d)$ nu este complet.

b) Aplicația $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ verifică axiomele 1) — 3), deci este distanță pe X. Fie șirul (x_n), $x_n = n$, $n \in \mathbf{N}^*$. Pentru orice $n, p \in \mathbf{N}^*$ avem $d(x_{n+p}, x_n) = \left|\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n}\right| < \frac{1}{n}$.

Conform axiomei lui Arhimede pentru ε, $1 \in \mathbf{R}_+^*$, există $n \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $n\varepsilon > 1$. Fixăm rangul $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ și obținem că pentru orice $n, p \in \mathbf{N}^*$, $n > N(\varepsilon)$ implică $d(x_{n+p}, x_n) < \varepsilon$, deci șirul (x_n) este Cauchy. Dacă șirul (x_n) este convergent în (X, d), atunci există $x_0 \in X$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = \lim_{n\to\infty} |1/x_n - 1/x_0| = 1/x_0.$$

Rezultă $x_0 \in \{-\infty, \infty\}$ contradicție. Urmează că spațiul metric (X, d) nu este complet.

CAPITOLUL 2

ŞIRURI ŞI SERII DE NUMERE

2.1. Să se studieze plecînd de la definiţie convergenţa şirurilor (a_n) cu termenul general respectiv

1) $a_n = 1/n$;
2) $a_n = x^n$, $x \in \mathbf{R}$;
3) $a_n = \sqrt[n]{x}$, $x \in \mathbf{R}_+^* = \{r \in \mathbf{R}/r > 0\}$.

R. Pentru studiul convergenţei şirurilor (a_n) se foloseşte definiţia cu ε:
$(\exists a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n \geqslant N(\varepsilon)) \Rightarrow (|a_n - a| < \varepsilon))$.
În fiecare caz se alege a şi se determină pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat, rangul $N(\varepsilon)$, astfel încît pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant N(\varepsilon)$, $|a_n - a| < \varepsilon$.

1) Se ia $a = 0$ şi se aplică axioma lui Arhimede (AA) pentru ε, $1 \in \mathbf{R}_+^*$. Rezultă că există $N \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $N\varepsilon > 1$. Se alege $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$.

2) Se discută cazurile

2.1) $|x| < 1$, pentru care se ia $a = 0$ şi se aplică AA pentru $-\lg \varepsilon$, $-\lg |x| \in \mathbf{R}_+^*$. Urmează că există $N \in \mathbf{N}^*$, astfel încît $-N \lg |x| > -\lg \varepsilon$. Se alege $N(\varepsilon) = [(\lg \varepsilon)/\lg |x|] + 1$.

2.2) $x > 1$, caz în care se ia $a = \infty$. Definiţia cu ε devine:

$$(\lim_{n\to\infty} a_n = \infty) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (\forall M \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists N(M) \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n \geqslant N(M)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a_n > M)).$$

Se aplică AA pentru $\lg M, \lg x \in \mathbf{R}_+^*$. Se obţine $N(M) = (\lg M/\lg x) + 1$.

2.3) $x < -1$, caz care se reduce la cel precedent luînd $y = -x$. Se obţine $y > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} y^n = \infty$, mulţimea punctelor limită $\mathcal{L}(a_n) = \{-\infty, \infty\}$. Deci şirul (a_n) este divergent.

3) Se discută cazurile:

3.1) $x < 1$, caz în care se ia $a = 1$, se aplică AA pentru ε, $x - 1 \in \mathbf{R}_+^*$. Se obţine $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{x-1}{\varepsilon}\right] + 1$. Pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant N(\varepsilon)$ conform inegalităţii lui Bernoulli se obţine succesiv $x < 1 + n\varepsilon < (1 + \varepsilon)^n$, $1 - \varepsilon < 1 < a_n < 1 + \varepsilon$.

3.2) $x = 1$, evident $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

3.3) $x < 1$, caz care se reduce la 3.1) luînd $y = 1/x$.

Se obține $|a_n - 1| = \left|\frac{1-\sqrt[n]{y}}{\sqrt[n]{y}}\right| < |\sqrt[n]{y} - 1| < \varepsilon$.

2.2. Să se arate că pentru orice şir (x_n) cu proprietatea

$$\lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0, \text{ avem } \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + x_{n-1}}{n} = 0.$$

R. *Soluția* 1. Conform definiției cu ε, pentru un şir (x_n) cu proprietate $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ avem că

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n \geqslant N_1(\varepsilon)) \Rightarrow (-\varepsilon/2 < x_n - x_{n-2} < \varepsilon/2).$$

Se obține succesiv

$$x_n - x_{N_1} = \sum_{k=N_1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=N_1+1}^{n} (x_k - x_{k-2}) - \sum_{k=N_1+1}^{n} (x_{k-1} - x_{k-2}) =$$

$$= \sum_{k=N_1}^{n} (x_k - x_{k-2}) - x_{n-1} + x_{N_1-1},$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}(n - N_1) < x_n + x_{n-1} - (x_{N_1} + x_{N_1-1}) < \frac{\varepsilon}{2}(n - N_1),$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{N_1}{n}\right) < \frac{x_n + x_{n-1}}{n} - \frac{x_{N_1} + x_{N_1-1}}{n} < \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{N_1}{n}\right).$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{N_1} + x_{N_1-1}}{n} = 0$, avem că

$$\exists N_2(\varepsilon) \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n \geqslant N_2(\varepsilon)) \Rightarrow \left(-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{x_{N_1} + x_{N_1-1}}{n} < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Pentru $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ rezultă că

$$\forall n \in \mathbf{N},\ (n \geqslant N(\varepsilon)) \Rightarrow \left(-\varepsilon < \frac{x_n + x_{n-1}}{2} < \varepsilon\right), \text{ deci } \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + x_{n-1}}{n} = 0.$$

Soluția 2. Conform lemei lui Stolz, pentru un şir (x_n) cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0$ se aleg şirurile (a_n), $a_n = x_n - x_{n-1}$, (b_n), $b_n = n$ (crescător şi nemărginit) şi se obține că

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n + x_{n-1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = 0.$$

Exemple: Şirul (x_n), $x_n = (-1)^n + 1/n$ are mulțimea punctelor limită $\mathfrak{L}(x_n) = \{-1, 1\}$, deci este divergent (nu are limită).

Se verifică însă uşor că $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-2}) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n + x_{n-1})/n = 0$.

Analog, pentru şirul divergent (care are limită infinită) (x_n), $x_n = \sqrt{n} + 1/n$.

2.3. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

R. *Soluția* 1. Considerăm $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/x}$. Cu observația că sînt îndeplinite condițiile din ipoteză, aplicăm regula lui l'Hospital în cazul ∞^0. Se obține

$$\lim_{x\to\infty} x^{1/x} = \lim e^{\ln x/x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}(\ln x)/x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} 1/x} = 1.$$

Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Pentru a evita folosirea derivatei unei funcții este preferabilă:

Soluția 2. Cu observația că $\sqrt[n]{n} \geqslant 1$, se notează $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, unde $\alpha_n \in \mathbf{R}_+$. Se obține $n = (1+\alpha_n)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \alpha_n^k > \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2$, $\alpha_n^2 < \frac{2}{n-1}$. Conform criteriului majorării, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ și deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

2.4. Să se arate că dacă (a_n) și (b_n) sînt șiruri Cauchy în spațiul metric (E, d), atunci șirul $(d(a_n, b_n))$ este convergent (vezi 1.47.).

R. În spațiul metric (E, d) se notează $\mathcal{F}_E$, $\mathcal{C}_E$ clasa șirurilor fundamentale (Cauchy), respectiv clasa șirurilor convergente. Prin definiție, $(x_n) \in \mathcal{F}_E \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\exists N_x(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, $\forall n, m \in \mathbf{N}$, $(n, m \geqslant N_x(\varepsilon)) \Rightarrow (d(x_n, x_m) < \varepsilon/2)$, unde $x \in \{a, b\}$. Deoarece $\mathcal{F}_{\mathbf{R}} = \mathcal{C}_{\mathbf{R}}$, este suficient de arătat că $(d(a_n, b_n)) \in \mathcal{F}_{\mathbf{R}}$. Conform proprietăților metricei d, avem

$$d(a_n, b_n) \leqslant d(a_n, b_m) + d(b_m, b_n) \leqslant d(a_n, a_m) + d(a_m, b_m) + d(b_m, b_n),$$

deci $d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m) \leqslant d(a_n, a_m) + d(b_n, b_m)$. Prin permutarea lui n cu m și alegerea rangului $N(\varepsilon) = \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$, rezultă că $|d(a_n, b_n) - d(a_m, b_m)| < \varepsilon$.

2.5. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} n^p/2^n$, unde $p \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$.

R. *Soluția* 1. Considerăm $\lim\limits_{x\to\infty} x^p/2^x$. Cu observația că sînt îndeplinite condițiile din ipoteză aplicăm regula lui l'Hospital în cazul ∞/∞: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^p}{2^x} = \frac{p}{\ln 2}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^{p-1}}{2^x}$. În continuare se aplică regula lui l'Hospital de încă $p-1$ ori, condițiile din ipoteză fiind îndeplinite la fiecare pas. Se obține $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^p}{2^x} = \frac{p!}{(\ln 2)^p}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2^x} = 0$. Rezultă $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n^p}{2^n} = 0$. Pentru a evita folosirea derivatei unei funcții, este preferabilă:

Soluția 2. Se procedează prin inducție matematică. Pentru $p = 1$ și șirurile (a_n), $a_n = n$, (b_n), $b_n = 2^n$ (crescător și nemărginit), conform lemei lui Stolz, avem: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$. Se presupune că

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0$ pentru $k < p$. Se aplică lema lui Stolz pentru şirurile (a_n), $a_n = n^p$, (b_n), $b_n = 2^n$. Se obţine

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^p}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p - n^p}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{p-1} C_p^k n^k}{2^n} = \sum_{k=0}^{p-1} C_p^k \lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{2^n} = 0.$$

2.6. Să se examineze convergenţa şirului (a_n) definit de relaţiile de recurenţă $a_1 = 0$, $a_{2m} = \frac{1}{2} a_{2m-1}$, $a_{2m+1} = a_{2m} + \frac{1}{2}$, $m \in \mathbf{N}^*$.

R. *Soluţia* 1. $\mathfrak{L}(a_n)$, mulţimea punctelor limită se obţine ca mulţimea limitelor subşirurilor convergente care se pot extrage din şirul (a_n), respectiv subşirurile (a_{2m+1}) şi (a_{2m}). Relaţiile de recurenţă pentru subşirul (a_{2m+1}) sînt $a_1 = 0$, $a_{2m+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a_{2m-1}$. Se obţine

$$a_{2m+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} a_{2m-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} a_{2m-3} = \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^m} a_1 = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^m}, \quad \lim_{m\to\infty} a_{2m+1} = 1.$$

Relaţiile de recurenţă pentru subşirul (a_{2m}) sînt $a_2 = 0$, $a_{2m} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} a_{2m-2}$. Se obţine $a_{2m} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} a_{2m-2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} a_{2m-4} = \ldots = \sum\limits_{k=2}^{m} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{m-1}} a_2 = \sum\limits_{k=2}^{m} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^m}$ (rezultat care se obţine direct din relaţia $a_{2m} = \frac{1}{2} a_{2m-1}$), $\lim\limits_{m\to\infty} a_{2m} = \frac{1}{2}$. În final, $\mathfrak{L}(a_n) = \{1/2, 1\}$, $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \inf \mathfrak{L}(a_n) = 1/2$, $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \sup \mathfrak{L}(a_n) = 1$, deci şirul (a_n) este divergent.

Soluţia 2. Se presupune că şirul (a_n) are limită, deci există $a \in \overline{\mathbf{R}}$, $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Dacă $a \in \mathbf{R}$, trecînd la limită în ultimele două relaţii de recurenţă din enunţ, rezultă un sistem de două ecuaţii cu o necunoscută incompatibil. Dacă $a = \infty$ (a nu poate fi $-\infty$ deoarece în relaţiile de recurenţă apare 0 şi operaţiile de adunare şi înmulţire), ar rezulta că şirul este nemărginit, ceea ce contrazice faptul că a_{2m+1}, a_{2m} (calculaţi la soluţia 1.) verifică inegalităţile $0 \leqslant a_{2m+1} < 1$, $0 \leqslant a_{2m} < 1/2$. Rezultă că şirul (a_n) nu are limită, deci este divergent.

2.7. Fie numărul e dat ca limita şirului (a_n), $a_n = (1 + 1/n)^n$.

1) Să se arate că şirul (b_n), $b_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ are ca limită numărul e;
2) Să se demonstreze inegalitatea $e - b_n \leqslant 1/n!n$;
3) Să se deducă că e este un număr iraţional.

R. 1) Pentru $n \in \mathbf{N}$ arbitrar fixat, folosind binomul lui Newton, se obține

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k n^{-k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = b_n.$$

Pentru $n \in \mathbf{N}$ fixat, $m \in \mathbf{N}$ arbitrar fixat, $m > n$ rezultă

$$a_m = 2 + \sum_{k=2}^{m} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{k!} \geqslant$$

$$\geqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{k!}$$

sau, trecînd la limită,

$$e = \lim_{m\to\infty} a_m \geqslant 2 + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=2}^{n} \frac{\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)}{k!} = b_n.$$

În concluzie $a_n \leqslant b_n \leqslant e$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e$.

2) Pentru $n \in \mathbf{N}$ fixat, $m \in \mathbf{N}$ arbitrar fixat, $m > n$ se evaluează

$$b_m - b_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{m} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{n+i} \leqslant \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{m-n} \frac{1}{(n+1)^k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n!} \frac{\overline{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!n}$$

Trecînd la limită, rezultă $\lim\limits_{m\to\infty} (b_m - b_n) = e - b_n \leqslant 1/n!n$.

3) Se presupune prin reducere la absurd că $e \in \mathbf{Q}$, $e = p/q$, $p \in \mathbf{Z}$, $e \in \mathbf{N}^*$; deoarece $2 < e < 3$, avem $p, q \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$. Din inegalitatea $q - b_u \leqslant 1/n!n$ pentru $n = q$, se obține succesiv

$$0 < \frac{p}{q} - \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{q!q}, \quad 0 < (q-1)!p - \sum_{k=1}^{q} \frac{q!}{k!} \leqslant \frac{1}{q} < 1.$$

Am găsit un număr natural situat între 0 și 1, contradicție.

2.8. Să se arate că șirul de numere reale (x_n), definit de relațiile

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + a/x_{n-1}),\ n \in \mathbf{N}^*, \text{ iar } x_0 \in \mathbf{R}_+^*,\ a \in \mathbf{R}_+^* \text{ fixați},$$

este convergent și să i se calculeze limita (Formula lui Heron).

R. Deoarece x_0, $a \in \mathbf{R}_+^*$ se obține prin inducție că pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $x_n \in \mathbf{R}_+^*$. În plus, $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) - x_{n-1} = \frac{1}{2x_{n-1}}(a - x_{n-1}^2) \leqslant 0$

deoarece trinomul de gradul doi în x_{n-1}, $x_{n-1}^2 - 2x_nx_{n-1} + a = 0$ are rădăcinile reale. Rezultă că şirul (x_n) este convergent (descrescător şi minorat de 0), deci există $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ unde $x \in \mathbf{R}_+$. În final se trece la limită în prima relaţie de definiţie folosind proprietăţi ale limitei şi se obţine $x^2 = a$. Deci $x = \sqrt{a}$. Se observă că pentru $a \in \mathbf{R}_+^*$ fixat, prima relaţie de definiţie dă aproximaţii succesive raţionale pozitive ale numărului $\sqrt{a} \in \mathbf{R}_+^*$, unde aproximaţia x_0 este un număr raţional mai mare decît $\sqrt{a}$, iar $\sqrt{a} \leqslant x_n \leqslant x_0$, $n \in \mathbf{N}^*$.

2.9. Să se arate că şirul de numere reale (x_n), definit de relaţiile $x_1 = 0$, $x_n = x_{n-1} + \frac{1}{2}(a - x_{n-1}^2)$, $n \in \mathbf{N}^*$, iar $a \in [0, 1]$ fixat, este convergent şi să i se calculeze limita.

R. Deoarece trinomul de gradul doi în x_{n-1}, $x_{n-1}^2 - 2x_{n-1} + 2x_n - a = 0$ obţinut din prima relaţie de definiţie are rădăcinile reale, rezultă că $x_n \leqslant \frac{a+1}{2} \leqslant 1$. Se observă că $x_2 = \frac{a}{2} \geqslant 0$ şi se presupune adevărată inegalitatea de la 1 la pînă $n - 1$. Se obţine

$$x_n = \frac{1}{2}a + x_{n-1}\left(1 - \frac{1}{2}x_{n-1}\right) \geqslant \frac{a}{2} \geqslant 0, \text{ deoarece}$$

$$1 - \frac{1}{2}x_{n-1} \geqslant 1 - \frac{a+1}{4} = \frac{3-a}{4} > 0.$$

Prin inducţie s-a demonstrat că pentru orice $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, $x_n \geqslant a/2 \geqslant 0$ şi deci $x_n \in \left[\frac{a}{2}, \frac{a+1}{2}\right] \subset [0, 1]$. În continuare, prin aceeaşi metodă, se restrînge intervalul la $[a/2, \sqrt{a})$, unde $a \neq 0$. Se observă că $x_2 = a/2 < \sqrt{a}$ şi se presupune adevărată inegalitatea de la 1 pînă la $n - 1$. Revine la a arăta că $x_{n-1}^2 - 2x_{n-1} + 2\sqrt{a} - a > 0$, inegalitate adevărată pentru $x_{n-1} \in [a/2, \sqrt{a})$. În plus, $x_n - x_{n-1} > 0$. Rezultă că şirul (x_n) este convergent, fiind monoton şi mărginit, deci există $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, unde $x \in \mathbf{R}_+$. În final, se trece la limită în prima relaţie de definiţie folosind proprietăţi ale limitei şi se obţine $x^2 = a$, deci $x = \sqrt{a}$. Se observă că pentru $a \in (0, 1)$ fixat, prima relaţie de definiţie dă aproximaţii succesive raţionale pozitive ale numărului $\sqrt{a} \in (0, 1)$, unde prima aproximaţie este $0 < \sqrt{a}$.

2.10. Fie universul $\mathcal{U}$ al mulţimilor, înzestrat cu relaţiile $=$ (egalitate), $\subseteq$ (incluziune), $\sim$ (echipotenţă), definită prin $A \sim B$ dacă între A şi B există o bijecţie, $\preccurlyeq$ (cardinal mai mică), definită prin $A \preccurlyeq B$ ddacă A este echipotentă cu o submulţime a lui B (sau între A şi B există o funcţie injectivă).

1. Pentru mulţimile de şiruri de numere reale $A = \left\{(a_n) \middle/ \left(\frac{a_n}{n}\right) \text{ descrescător}\right\}$, $B = \{(b_n) \,/\, \forall m, n \in \mathbf{N}^*,\ b_{m+n} \leqslant b_m + b_n$ (proprietate de sub-

aditivitate)}, $C = \left\{(c_n) \,/\, \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbf{N}^*} \left\{\frac{c_n}{n}\right\}\right\}$ să se arate că şirul finit (A, B, C) este

a) strict crescător în sensul relaţiei $\subseteq$;

b) staţionar (constant) în sensul relaţiei $\preccurlyeq$, odată cu şirul $(A, B, C, \mathbf{R})$.

2. Să se reformuleze punctul 1, dacă mulţimea B se defineşte cu ajutorul proprietăţii de supraaditivitate, $b_{m+n} \geqslant b_m + b_n$.

3. Aceeaşi cerere ca la punctul 2, în cazul proprietăţii de aditivitate, $b_{m+n} = b_m + b_n$.

4. Aceeaşi cerere ca la punctul 2, pentru mulţimile $A_r = \{(a_n)$ din $\mathbf{R}/(a_n)$ monoton$\}$, $B_r = \{(b_n)$ din $\mathbf{R}/(b_n)$ verifică cel puţin una din proprietăţile de subaditivitate, supraaditivitate, aditivitate, $C_r = \Big\{(c_n)$ din $\mathbf{R}/\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} \in \left\{\inf\limits_{n\in\mathbf{N}^*}\left\{\frac{c_n}{n}\right\}, \sup\limits_{n\in\mathbf{N}^*}\left\{\frac{c_n}{n}\right\}\right\}\Big\}$.

R. 1. a) Arătăm că $A \subset B \subset C$, cu menţiunea că mulţimea A este nevidă, deoarece conţine mulţimea $\{(cn)/c \in \mathbf{R}_+\}$, evident nevidă. Începem prin a considera $(a_n) \in A$ cu (x_n), $x_n = \frac{a_n}{n}$, $n \in \mathbf{N}^*$ descrescător; avem $a_{m+n} = (m+n)\,x_{m+n} = mx_{m+n} + nx_{m+n} \leqslant mx_m + nx_n = a_m + a_n$ deci $(a_n) \in B$ şi $A \subseteq B$. Totodată dacă $(b_n) \in B$, cu $b_1 \in \mathbf{R}_-$, atunci şirul (b_n) este descrescător, deoarece $b_{n+1} - b_n \leqslant b_1 \leqslant 0$, $n \in \mathbf{N}^*$, fără ca şirul $\left(\frac{b_n}{n}\right)$ să fie neapărat descrescător (şi în general monoton — conform proprietăţilor numerelor reale) şi deci $A \subset B$; în particular avem $P = \{(-n^\alpha),\ \alpha > 1,\ (|\sin ny|),\ y \in \mathbf{R}\setminus\{k\pi/k \in \mathbf{Z}\}\} \subset B \setminus A$. În continuare considerăm $(b_n) \in B$ şi arătăm că există $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \inf\limits_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{b_n}{n}\ (= b)$. Deoarece cazul $b = \infty$ nu este posibil (deoarece şirul (b_n) devine şirul constant (∞) din $\overline{\mathbf{R}}\setminus\mathbf{R}$), rămîn de studiat două cazuri: $c1: b \in \mathbf{R}$ şi $c2: b = -\infty$. În cazul $c1$ se foloseşte proprietatea de caracterizare a lui infimum în $\mathbf{R}$, $b = \inf\limits_{n\in\mathbf{N}^*}\left\{\frac{b_n}{n}\right\} \Leftrightarrow (i1$ şi $i2)$, cu $i1: \forall n \in \mathbf{N}^*,\ b \leqslant \frac{b_n}{n}$, $i2: \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists m \in \mathbf{N}^*,\ b \leqslant \frac{b_m}{m} < b + \varepsilon$. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ arbitrar fixat, identitatea împărţirii cu rest a lui n la m dă $n = qm + r$, unde $q, r \in \mathbf{N}$, $r < m$. Se obţine succesiv $\frac{b_n}{n} = \frac{b_{qm+r}}{n} \leqslant \frac{b_{qm} + b_r}{n} \leqslant \ldots \leqslant \frac{qb_m}{n} + \frac{b_r}{n}$, $b \leqslant \frac{b_n}{n} \leqslant \frac{b_m}{m} \cdot \frac{qm}{qm+r} + \frac{b_r}{n}$. Deoarece $n \to \infty$ ddacă $q \to \infty$, iar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_r}{n} = 0$, prin trecere la limită în ultima dublă inegalitate obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = b$.

În cazul $c2$ se procedează în mod analog, cu menţiunea că în $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ axioma marginii superioare (AMI) devine AMI$(\overline{\mathbf{R}})$: „Orice mulţime nevidă admite infimum", deoarece în $\overline{\mathbf{R}}$ mulţimea minoranţilor oricărei mulţimi conţine cel puţin elementul $-\infty$. Urmează că $B \subseteq C$, chiar $B \subset C$, deoarece $\left\{\left(-n^2 - \frac{1}{n}\right),\ (\operatorname{arctg} n),\ (\ln n)\right\} \subset C \setminus B$.

Observăm că incluziunea $B \subset C$ se probează pentru mulţimea P, adică avem şi $P \subset C$.

b) Şirul (A, B, C) este staţionar, odată cu şirul $(A, B, C, \mathbf{R})$ ddacă $A \sim B \sim C \sim \mathbf{R}$. Funcţia $\mathbf{R}_+ \to A$, $c \mapsto (a_n)$, $a_n = c$ este corect definită, deoarece $\left(\frac{a_n}{n}\right)$ este şir descrescător şi injectivă, deci $\mathbf{R}_+ \preccurlyeq A$. Cum funcţiile de incluziune sînt şi ele injective şi în plus $C \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}} = \{f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}\}$ avem $\mathbf{R}_+ \preccurlyeq A \preccurlyeq B \preccurlyeq C \preccurlyeq \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Deoarece $\mathbf{R}_+ \sim \mathbf{R}$ şi $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$ (vezi problema 1.36), conform tranzitivităţii relaţiei $\preccurlyeq$ şi în plus antisimetriei acesteia (afirmată de teorema Cantor—Bernstein, vezi problema 1.34) rezultă echipotenţele $A \sim B \sim C \sim \mathbf{R}$.

2. În cazul proprietăţii de supraaditivitate enunţul rămîne acelaşi, pentru mulţimile $A = \left\{(a_n) \,\middle|\, \left(\frac{a_n}{n}\right) \text{ crescător}\right\}$, $B = \{(b_n) / \forall m, n \in \mathbf{N}^*, b_{m+n} \geqslant b_m + b_n$ (proprietate de supraaditivitate)$\}$, $C = \left\{(c_n) / \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left\{\frac{c_n}{n}\right\}\right\}$. Rezolvarea este asemănătoare cu cea de la punctul 1.

3. În cazul proprietăţii de aditivitate mulţimile $A = \left\{(a_n) \,\middle|\, \left(\frac{a_n}{n}\right) \text{ staţionar}\right\}$, $B = \{(b_n) / \forall m, n \in \mathbf{N}^*, b_{m+n} = b_m + b_n$ (proprietate de aditivitate)$\}$, $C = \left\{(c_n) / \inf\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left\{\frac{c_n}{n}\right\} = \sup\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \left\{\frac{c_n}{n}\right\} \left(= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{n}\right)\right\}$ devin egale cu mulţimea $\{(cn/c \in \mathbf{R}\}$, aşa încît punctul 1.a devine 3.a) staţionar în sensul relaţiei $\subseteq$. Punctul 1.b rămîne acelaşi, dar cu o rezolvare uşor simplificată (datorită înlocuirii relaţiei $\subset$ cu relaţia $=$).

4. Dacă înzestrăm mulţimile A, B, C de la punctele 1, 2, 3, cu indicii respectivi, avem $A_3 = A_1 \cap A_2$, $B_3 = B_1 \cap B_2$, $C_3 = C_1 \cap C_2$, aşa încît la punctul 3 am obţinut

3.a) $A_1 \cap A_2 = B_1 \cap B_2 = C_1 \cap C_2$, cu $A_i \subset B_i \cap C_i$, $i \in \{1, 2\}$;

3.b) $A_1 \cap A_2 \sim B_1 \cap B_2 \sim C_1 \cap C_2 \sim \mathbf{R}$, cu $A_i \sim B_i \sim C_i \sim \mathbf{R}$, $i \in \{1, 2\}$.

Avem $A_r = A_1 \cup A_2$, $B_r = B_1 \cup B_2$, $C_r = C_1 \cup C_2$, $A_r \subset B_r \subset C_r$.

În plus obţinem uşor implicaţia

$\forall X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{U}$. $X_1 \sim Y_1$, $X_2 \sim Y_2$, $X_1 \cap X_2 \sim Y_1 \cap Y_2 \Rightarrow X_1 \cup X_2 \sim Y_1 \cup Y_2$, conform bijecţiei $F: X_1 \cup X_2 \to Y_1 \cup Y_2$, definită cu ajutorul bijecţiilor $F_1: X_1 \to Y_1$, $F_2: X_2 \to Y_2$, $F_3: X_1 \cap X_2 \to Y_1 \cap Y_2$ prin $F | (X_1 \setminus X_2) = F_1 | (X_1 \setminus X_2)$, $F | (X_2 \setminus X_1) = F_2 | (X_2 \setminus X_1)$, $F | (X_1 \cap X_2) = F_3$. Prin folosirea implicaţiei, cu $X_i, Y_i \in \{A_i, B_i, C_i, \mathbf{R}\}$, $i \in \{1, 2\}$, urmează că enunţul de la punctul 1 rămîne acelaşi.

Observaţie. 1. Pentru mulţimi infinite (cazul de faţă) implicaţia precedentă se poate folosi într-o formă „mai slabă", în care se renunţă la condiţia $X_1 \cap X_2 \sim Y_1 \cap Y_2$; o formă „mai tare" a implicaţiei este cea în care condiţia $X_1 \cap X_2 \sim Y_1 \cap Y_2$ se înlocuieşte cu $X_1 \cap X_2 = Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$ (X_1, X_2, respectiv Y_1, Y_2 sînt dijuncte). Facem menţiunea că o reciprocă a acestei forme „mai tari", anume

$X_1 \sim Y_1$, $X_1 \cup X_2 \sim Y_1 \cup Y_2$, $X_1 \cap X_2 = Y_1 \cap Y_2 = \emptyset \Rightarrow X_2 \sim Y_2$ şi în particular, pentru $Z = X_1 \cup X_2 = Y_1 \cup Y_2$, $X \sim Y \Rightarrow C_Z X \sim C_Z Y$.

nu este adevărată decît pentru mulţimi finite. Într-adevăr, pentru $X_1 = [-2, -1]$, $Y_1 = [-1, 0]$, $X_2 = \mathbf{N}$, $Y_2 = \{1, \dots, n\}$ avem $X_1 \sim Y_1 \sim \mathbf{R}$, $X_1 \cup X_2 \sim Y_1 \cup Y_2 \sim \mathbf{R}$, $X_1 \cap X_2 = Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, $X_2 \nsim Y_2$.

2. Incluziunile $B_1 \cap A_2 \subset B_1 \setminus A_1$, $B_1 \setminus A_r \not\subset B_1 \setminus A_1$, $C_1 \cap B_2 \subset C_1 \setminus B_1$, $C_1 \setminus B_r \subset C_1 \setminus B_1$ (care rezultă conform incluziunilor A_2, $CA_r \subset CA_1$, respectiv B_2, $CB_r \subset CB_1$, complementarea fiind în raport cu mulţimea $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$) şi celelalte asemănătoare sînt utile pentru a arăta că la punctele 1 şi 2 avem incluziuni stricte.

3. Pentru mulţimile uzuale de şiruri de numere reale $A_d = \{(x_n) / (x_n)$ descrescător$\}$, $A_d^- = \{(x_n)$ din $\mathbf{R}_-/(x_n)$ descrescător$\} \subset A_d$, $A_c = \{(x_n)/(x_n)$ crescător$\}$, $A_c^+ = \{(x_n)$ din $\mathbf{R}_+/(x_n)$ crescător$\} \subset A_c$, avem $\mathbf{R} \sim \mathbf{R}_- \leqslant A_d^- \leqslant \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$, $A_d^- \sim A_c^+$, $\mathbf{R} \sim (A_d \cap A_c) \leqslant A_d$, $A_c \leqslant \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$, aşa încît, conform teoremei Cantor—Bernstein rezultă $A_d^- \sim A_c^+ \sim A_d \sim A_c \sim$ $\sim (A_d \cap A_c) \sim \mathbf{R}$.

În final, cu notaţii pentru submulţimile $A_1^- \subset A_1$, $B_1^- \subset B_1$, $A_2^+ \subset A_2$, $B_2^+ \subset B_2$, asemănătoare cu a submulţimilor $A_d^- \subset A_d$, $A_c^+ \subset A_c$, remarcăm incluziunile $A_1^- \subseteq B_1^- \subseteq A_d^-$, $A_2^+ \subseteq B_2^+ \subseteq A_c^+$.

2.11. Să se studieze convergenţa, iar în caz de convergenţă să se calculeze limita şirurilor (x_n) definite respectiv prin relaţiile de recurenţă

1) $x_1 = \sqrt{a}$, $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, iar $a \in \mathbf{R}_+^*$, fixat;

2) $x_0 = 1$, $x_n = \sqrt{a x_{n-1}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, iar $a \in \mathbf{R}_+^*$ fixat;

3) $x_1 = a^{\frac{1}{a}}$, $x_{n+1} = a^{\frac{x_n}{a}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, iar $a \in (1, \infty)$ fixat.

R. 1) Conform relaţiilor de recurenţă avem $x_2 = \sqrt{a + x_1} > \sqrt{a} = x_1$. Presupunem adevărată inegalitatea $x_{k+1} > x_k$ pentru $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$. Se obţine $a + x_n > a + x_{n-1}$, $x_{n+1} > x_n$.

Prin inducţie matematică s-a demonstrat că şirul (x_n) este strict crescător. Cum inegalitatea $x_n^2 - x_n - a < 0$ este adevărată pentru $x_n \in \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4a}}{2}, \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}\right)$, rezultă că şirul (x_n) este şi mărginit, deci convergent. Urmează că există $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$ care se calculează prin trecere la limită în relaţia de recurenţă $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$ folosind proprietăţi ale limitei. Se obţine $x = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$.

2) Se demonstrează prin inducţie matematică relaţia $x_n = a^{y_n}$, unde $y_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$. Cum pentru $n = 1$ relaţia este evident adevărată, o presupunem adevărată de la 1 la $n - 1$. Avem

$$x_n = \sqrt{a x_{n-1}} = \sqrt{a}\sqrt{x_{n-1}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{y_{n-1}/2} = a^{y_n}.$$

Şirul (y_n) este convergent fiind suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice cu raţia $1/2 < 1$ şi $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} 1/2 \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} = 1$.

Rezultă că şirul (x_n) este convergent şi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

Deoarece $\frac{x_{n+1}}{x_n} = a^{y_{n+1} - y_n} = a^{\frac{1}{2^{n+1}}}$ se observă că şirul (x_n) este strict crescător pentru $a \in (1, \infty)$, staţionar pentru $a = 1$ şi strict descrsecător pentru $a \in (0, 1)$.

3) Conform relațiilor de recurență avem

$$x_1 = a^{1/a} > 1, \; x_2 = a^{x_1/a} > a^{1/a} = x_1.$$

Presupunem adevărată inegalitatea $x_{k+1} > x_k$ pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Se obține

$$a^{x_n/a} > a^{x_{n-1}/a}, \; x_{n+1} > x_n.$$

Deoarece

$$x_1 = a^{1/a} < a(1/a < 1), \; x_2 = a^{x_1/a} < a^{a/a} = a,$$

dacă $x_k < a$ pentru $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, atunci $x_n = a^{x_{n-1}/a} < a$.

Prin inducție matematică s-a demonstrat că șirul (x_n) este strict crescător și mărginit, deci convergent. Urmează că există $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ care se calculează prin trecere la limită în relația de recurență $x_{n+1} = a^{x_n/a}$ folosind proprietăți ale limitei. Se obține $x = a$.

2.12. Se consideră șirul (x_n) definit prin relația de recurență

$$x_n = ax_{n-1} + b, \; n \in \mathbf{N}^* \text{ cu } x_0, \; a, \; b \in \mathbf{R} \text{ fixați.}$$

Să se găsească expresia lui x_n (în funcție de a, b, x_0) și să se studieze convergența șirului (x_n).

R. Conform relației de recurență avem

$$\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}x_k = \sum_{k=1}^{n} a^{n-k}(ax_{k-1} + b) = a^n x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a^{n-k}x_k + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k},$$

$$x_n = a^n x_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} = a^n x_0 + b\,\frac{1-a^n}{1-a} = \left(x_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a}.$$

Se consideră cazurile

1) $a \neq 1$, $x_0 = \dfrac{b}{1-a}$, în care șirul constant (x_n), $x_n = \dfrac{b}{1-a}$ este convergent.

2) $|a| > 1$, $x_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$, în care șirul (x_n) este divergent în $\mathbf{R}$. Se observă că pentru $a \in (1, \infty)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, adică șirul (x_n) este convergent în $\overline{\mathbf{R}}$.

3) $a = 1$, $x_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$, în care șirul (x_n), $x_n = x_0 + bn$ este divergent în $\mathbf{R}$ (dar convergent în $\overline{\mathbf{R}}$).

4) $a = -1$, $x_2 \neq \dfrac{b}{1-a}$, în care șirul (x_n) este divergent, avînd mulțimea termenilor $\{x_n\} = \{x_0, \; b - x_0\}$ și mulțimea punctelor limită $L(x_n) = \{x_0, \; b - x_0\}$.

5) $|a| < 1$, $x_0 \neq \dfrac{b}{1-a}$, în care șirul (x_n) este convergent cu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{b}{1-a}$.

În concluzie, pentru $a \in (-1, \infty)$ șirul (x_n) convergent în $\overline{\mathbf{R}}$, iar pentru $a \in (-1, 1)$ șirul (x_n) este convergent în $\mathbf{R}$.

2.13. Să se arate că există două şiruri (a_n), (b_n) de numere reale pozitive astfel încît a_n, b_n să fie soluţii ale ecuaţiei

$$x^n - nx + 1 = 0 \text{ pentru } n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1, 2\} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} a_n = 0,\ \lim_{n\to\infty} b_n = 1.$$

R. Pentru $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1, 2\}$ arbitrar fixat se consideră funcţia $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n - nx + 1$ cu proprietăţile:

1) f_n continuă pe $\mathbf{R}$ ($f_n \in C^0(\mathbf{R})$);

2) $f_n(0) = 1 > 0$, $f_n(1) = 2 - n < 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$.

Conform proprietăţii lui Darboux există $a_n \in (0, 1)$, $b_n \in (1, \infty)$ astfel încît $f_n(a_n) = f_n(b_n) = 0$. Dearoece $a_n^n < 1$ avem

$na_n = a_n^n + 1 < 2$, $a_n < \frac{2}{n}$. Prin trecere la limită în dubla inegalitate $0 < a_n < 2/n$ se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Se consideră şirul (c_n), $c_n = b_n - 1 > 0$.

Relaţia $f_n(b_n) = 0$ devine $(1 + c_n)^n - n(1 + c_n) + 1 = 0$, $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k c_n^k - nc_n + 1 - n = 0$,

$$\frac{n(n-1)}{2} c_n^2 + \sum_{k=3}^{n} C_n^k c_n^k = n - 2. \text{ Rezultă } \frac{n(n-1)}{2} c_n^2 < n - 2,\ c_n^2 < \frac{2(n-2)}{n(n-1)}.$$

Prin trecere la limită în dubla inegalitate $0 < c_n^2 < \frac{2(n-2)}{n(n-1)}$ se obţine $\lim\limits_{n\to\infty} c_n^2 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 1$.

2.14. Se consideră şirul (f_n) definit prin relaţiile de recurenţă

$$f_0 = 0,\ f_1 = f_2 = 1,\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1},\ n \in \mathbf{N}^* \text{ (şirul lui Fibonacci).}$$

Se se demonstreze pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ relaţiile:

1) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} f_{2k} = f_{2n+1} - 1$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} f_{2k-1} = f_{2n}$;

5) $\sum\limits_{k=1}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$.

R. 1) *Soluţia* 1. Se consideră ecuaţia $x^2 - x - 1 = 0$, cu rădăcinile $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Conform relaţiilor $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $x_1 + x_2 = 1$, $x_1 x_2 = -1$ avem $f_{n+1} = (x_1 + x_2)f_n - x_1 x_2 f_{n-1}$, de unde deducem succesau $f_{n+1} - x_2 f_n = x_1(f_n - x_2 f_{n-1}) = x_1^2(f_{n-1} - x_2 f_{n-2}) = \ldots = x_1^n(f_1 - x_2 f_0)$, deci $f_{n+1} - x_2 f_n = x_1^n f_1$. În mod analog se obține $f_{n+1} - x_1 f_n = x_2^n f_1$.

Cum $f_1 = 1$, scăzînd penultima relație din ultima rezultă

$$f_n(x_2 - x_1) = x_2^n - x_1^n,\ f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Soluția 2. Se verifică imediat

$$f_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0\right] = 0,\ f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1.$$

Se presupune adevărată relația 1) pentru f_k, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Conform relației de recurență $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ se calculează

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right] - \right.$$

$$\left. - \left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]\right\} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4}\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

S-a demonstrat prin inducție că relația 1) este adevărată pentru orice $n \in \mathbf{N}$.

2) Conform relațiilor din enunț avem

$$\sum_{k=1}^{n} f_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} f_k + \sum_{k=1}^{n} f_{k-1},$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} f_k + f_n + f_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} f_k + f_0 + f_1 + \sum_{k=2}^{n-1} f_k,\quad \sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1.$$

3) Avem

$$f_{2k+1} = f_{2k} + f_{2k-1},\ k \in \mathbf{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} f_{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k} + \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1},$$

$$\sum_{k=2}^{n} f_{2k-1} + f_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k} + f_1 + \sum_{k=2}^{n} f_{2k-1},\quad \sum_{k=1}^{n} f_{2k} = f_{2n+1} - 1.$$

4) Analog cu 3) se obține

$$f_{2k} = f_{2k-1} + f_{2k-2},\ k \in \mathbf{N}^*,\quad \sum_{k=1}^{n} f_{2k} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} f_{2k-2},$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} f_{2k} + f_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} + f_0 + \sum_{k=1}^{n-1} f_{2k},\quad \sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} = f_{2n}.$$

5) Pentru $n = 1$ relaţia este evidentă. Se presupune adevărată de la 1 la n şi se demonstrează pentru $n+1$. Avem

$$\sum_{k=1}^{n+1} f_k^2 = \sum_{k=1}^{n} f_k^2 + f_{n+1}^2 = f_n f_{n+1} + f_{n+1}^2 = f_{n+1}(f_n + f_{n+1}) = f_{n+1} f_{n+2}.$$

2.15. Se consideră şirul (f_n) definit prin relaţiile de recurenţă $f_0 = 0$, $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$ (şirul lui Fibonacci). Să se arate că:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n}{f_{n+1}} = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$;

2) există în mod unic $a \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n}{a^n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

3) există în mod unic $a \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k}{a^{n+2}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

R. 1) Se calculează

$$\frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] : \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]\right\} =$$

$$= \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right] : \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right].$$

Deoarece $\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n = 0$ rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n+1}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

2) Se observă că pentru $a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ avem

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{a^n} = \frac{1}{\sqrt{5}} \lim_{n\to\infty}\left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Numărul $a \in \mathbf{R}_+^*$ ales mai sus este unic. Într-adevăr, dacă mai există $b \in \mathbf{R}_+^*$, astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n}{b_n} = 0$, atunci

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{f^n} \cdot \frac{f_n}{b^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{f^n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{f^n}{b^n} = 1,$$

deci $\dfrac{a}{b} = 1$, adică $a = b$.

3) Deoarece $\sum_{k=1}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$, conform 2), pentru $a = (1+\sqrt{5})/2$, se obține $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} f_k}{a^{n+2}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{f_{n+2}}{a^{n+2}} - \frac{1}{a^{n+2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

4) Deoarece $\sqrt[n]{f_n} = a\sqrt[n]{\frac{f_n}{a^n}}$ se aplică 2) cu $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ și se obține $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{f_n} = a\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^0 = a$.

2.16. Se consideră șirul (l_n), $l_n = \sqrt[n+1]{(n+1)!} - \sqrt[n]{n!}$, $n \in \mathbf{N}^*$ (șirul lui Tr. Lalescu). Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} l_n$.

R. Se consideră șirul (a_n), $a_n = \sqrt[n]{n!}$. Conform lemei lui Stolz pentru șirurile (a_n), (n) se obține $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = \lim_{n\to\infty} l_n$. În continuare se calculează $\lim_{n\to\infty} b_n$, unde $b_n = \frac{a_n}{n}$ sub forma $e^{\lim\limits_{n\to\infty} \ln b_n}$. Avem $\ln b_n = \ln\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\ln\frac{n!}{n^n}}{n} = \frac{c_n}{n}$, unde $c_n = \ln\frac{n!}{n^n}$. Se aplică încă o dată lema lui Stolz pentru șirurile (c_n), (n) și se obține $\lim \ln b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{n} = \lim_{n\to\infty} (c_{n+1} - c_n)$. Se calculează $c_{n+1} - c_n = \ln\left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right] = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $\lim_{n\to\infty} \ln b_n = -1$. Se consideră șirul (d_n), $d_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Avem $1 < \sqrt[n+1]{1+\frac{1}{n}} < d_n < \sqrt[n+1]{n+1}$. Urmează $d_n > 1$, $l_n > 0$ pentru $n \in \mathbf{N}^*$ și $\lim_{n\to\infty} d_n = 1$. Deoarece $\frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{d_{n+1} - 1}{1 - \frac{1}{d_n}} \leqslant 1 \Leftrightarrow d_{n+1} + \frac{1}{d_n} \leqslant 2$, iar conform definiției cu ε avem $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $(n \geqslant N(\varepsilon)) \Rightarrow (d_n < 1+\varepsilon)$, rezultă $d_{n+1} + \frac{1}{d_n} < (1+\varepsilon) + 1 = 2 + \varepsilon$ (pentru $n \geqslant N(\varepsilon) - 1$, $d_{n+1} + \frac{1}{d_n} \leqslant 2$, $l_{n+1} \leqslant l_n$. Deci șirul (l_n) este convergent (descrescător și minorat de 0) și $\lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1}{e}$.

2.17. Se consideră șirul (S_n), $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{n^{p+1}}$, unde $p \in \mathbf{N}$ este fixat. Să se calculeze $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

R. Pentru $p = 0$ avem (prin convenţie)

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{n}, \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

În continuare se presupune $p \in \mathbf{N}^*$. Se calculează

$$u_k = \frac{(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{n^{p+1}} = \frac{1}{n^{p+1}} \frac{k!\,(k+1)(k+2)\ldots(k+p)}{k!} =$$

$$= \frac{1}{n^{p+1}} \frac{(p+k)!}{k!} = \frac{p!}{n^{p+1}} \frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+k)}{k!} = \frac{p!}{n^{p+1}} C_{p+k}^{k} =$$

$$= \frac{p!}{n^{p+1}} C_{p+k}^{p}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{p!}{n^{p+1}} \sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^{p}.$$

Folosim formula $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$. Avem

$$C_{p+k+1}^{p+1} = C_{p+k}^{p+1} + C_{p+k}^{p}, \quad \sum_{k=1}^{n} C_{p+k+1}^{p+1} = \sum_{k=1}^{n} C_{p+k}^{p+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{p+k}^{p},$$

$$\sum_{k=2}^{n} C_{p+k}^{p+1} + C_{n+p+1}^{p+1} = 1 + \sum_{k=2}^{n} C_{p+k}^{p+1} + \sum_{k=1}^{n} C_{p+k}^{p}, \quad C_{n+p+1}^{p+1} = \sum_{k=0}^{n} C_{p+k}^{p}.$$

Rezultă

$$S_n = \frac{p!}{n^{p+1}} C_{n+p+1}^{p+1} = \frac{p!}{n^{p+1}} \frac{(n+p+1)!}{(p+1)!\,n!} = \frac{1}{p+1} \frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+p+1)}{n^{p+1}} =$$

$$= \frac{1}{p+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{p+1}{n}\right), \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{p+1}.$$

Observaţie. 1) Pentru $p = 0$ se regăseşte rezultatul calculat la început;

2) (S_n) şi S sînt şirul sumelor parţiale, respectiv suma seriei $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$.

2.18. Să se arate că un şir (x_n) de numere reale este mărginit ddacă mulţimea punctelor limită $\mathfrak{L}(x_n)$ este mărginită.

R. Dacă (x_n) este mărginit există $M \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $|x_n| \leqslant M$. Se extrage din (x_n) un subşir (x_{k_n}) convergent cu limita x. Deoarece pentru orice $n \in \mathbf{N}$, $|x_{k_n}| \leqslant M$ avem că $|x| \leqslant M$. Cum mulţimea punctelor limită este $\mathfrak{L}(x_n) = \{x/\text{există } (x_{k_n}) \text{ subşir convergent al lui } (x_n) \text{ cu limita } x\}$ rezultă că $\mathfrak{L}(x_n) \subseteq [-M, M]$ şi deci $\mathfrak{L}(x_n)$ este mărginită.

Reciproc, presupunem că $\mathfrak{L}(x_n)$ este mărginită, adică există $M \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $\mathfrak{L}(x_n) \subseteq [-M, M]$. Deoarece

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \min \mathfrak{L}(x_n) \leqslant \max \mathfrak{L}(x_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n,$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \sup_{n\in\mathbf{N}} \inf_{k\geqslant n} \{x_k\}, \quad \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbf{N}} \sup_{k\geqslant n} \{x_n\},$$

avem că pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat există $N \in \mathbf{N}$, astfel încît pentru $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant N$, $-M - \varepsilon \leqslant x_n \leqslant M + \varepsilon$. Rezultă

$$\min\{x_0, x_1, \ldots, x_N, -M - \varepsilon\} \leqslant x_n \leqslant \max\{x_0, x_1, \ldots, x_N, M + \varepsilon\},$$

adică (x_n) este mărginit.

2.19. Dacă $A \subset \mathbf{R}$ este o mulţime finită, nevidă, atunci există un şir (x_n) de numere reale astfel încît mulţimea punctelor limită, $\mathfrak{L}(x_n) = A$.

R. Se consideră o enumerare a mulţimii A, $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}\}$, identitatea împărţirii lui $n \in \mathbf{N}$ la m, $n = qm + r$, $q \in \mathbf{N}$, $r \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ şi un şir (x_n) definit prin

$$x_n = \begin{cases} a_n, & n \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \\ a_r + \dfrac{1}{q+1}, & n > m-1. \end{cases}$$

Atunci $(a_r + 1/n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ este un subşir convergent (cu limita a_r) al şirului (x_n), deci $A \subseteq \mathfrak{L}(x_n)$. Reciproc, fie (x_{k_n}) un subşir convergent (cu limita x) al şirului (x_n). El este de forma $(a_{r_n} + 1/n)_{n \in \mathbf{N}^*}$, unde $a_{r_n} \in A$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, urmează că $\lim\limits_{n\to\infty} a_{r_n} = x$, adică $x \in A$ şi deci $\mathfrak{L}(x_n) \subseteq A$.

2.20. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \dfrac{1}{n(n+p)}$, unde $p \in \mathbf{N}^*$ este fixat, iar în caz de convergenţă să i se calculeze suma.

R. Se observă că pentru $n \in \mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{p}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+p}\right)$. Se ia $n > p$ şi se calculează

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+p}\right) = \frac{1}{p}\left(\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} + \sum_{k=p+1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-p}\frac{1}{k+p} - \right.$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{n+k}\right) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{n+k}.$$ Se obţine

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k} - \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+k} = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{k}.$$

Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă şi are suma $\dfrac{1}{p}\sum\limits_{k=1}^{p}\dfrac{1}{k}$.

Observaţie. 1) Pentru $p = 1$ se obţine că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ este convergentă şi are suma 1;

2) În cazul exceptat $p = 0$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ $\left(\text{caz particular al seriei armonice generalizate } \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha} \text{ cu } \alpha = 2 > 1\right)$ este convergentă şi are suma $\dfrac{\pi^2}{6}$.

2.21. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \frac{1}{C_{p+n}^{p}}$, unde $p \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$ este fixat, iar în caz de convergență să i se calculeze suma.

R. Avem

$$u_n = \frac{p!}{(p+n)\dots(n+1)} = \frac{p!}{(p-1)}\left[\frac{1}{(n+1)\dots(n+p-1)} - \frac{1}{(n+2)\dots(n+p)}\right].$$

Se calculează

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{p!}{p-1}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{(k+1)\dots(k+p-1)} - \frac{1}{(k+2)\dots(k+p)}\right] =$$

$$= \frac{p!}{p-1}\left[\frac{1}{p!} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k+1)\dots(k+p-1)} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+2)\dots(k+p)} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{(n+2)\dots(n+p)}\right] = \frac{p!}{p-1}\left[\frac{1}{p!} - \frac{1}{(n+2)\dots(n+p)}\right].$$

Se obține

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{p-1} - \frac{p!}{p-1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+2)\dots(n+p)} = \frac{1}{p-1}.$$

Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă și are suma $\frac{1}{p-1}$.

Observație. 1) Pentru $p = 2$ se obține că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \frac{1}{C_{n+2}^{2}}$ este convergentă și are suma 1;

2) În cazurile exceptate $p = 0, 1$ seriile de termen general respectiv $1, \frac{1}{n+1}$ sînt divergente.

2.22. Să se calculeze $\sum_{n=3}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{3}{n^2-n-1}$.

R. Suma este o serie cu termeni pozitivi, deoarece $x^2 - x - 1 > 0$ pentru $[3, \infty) \subset (x_2, \infty)$, unde x_2 este rădăcina pozitivă a trinomului de gradul doi. Se evaluează termenul general al șirului sumelor parțiale (S_n), $S_n = \sum_{k=3}^{n} u_k$, $u_k = \operatorname{arctg}\frac{3}{k^2-k-1}$. Se obține succesiv

$$\frac{3}{k^2-k-1} = \frac{3}{k^2-k-2+1} = \frac{3}{1+(k+1)(k-2)} = \frac{k+1-(k-2)}{1+(k+1)(k-2)} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k+1}\right)}{\left(\frac{1}{(k+1)(k-2)} + 1\right)}.$$

$$u_k = \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{k-2} - \frac{1}{k+1}}{1 + \frac{1}{(k+1)(k-2)}} = \operatorname{arctg} \frac{1}{k-2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{k+1},$$

$$S_n = \sum_{k=3}^{n} u_k = \sum_{k=3}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k-2} - \sum_{k=3}^{n} \operatorname{arctg} \frac{1}{k+1} =$$

$$= \sum_{k=4}^{n-2} \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{k} - \operatorname{arctg} \frac{1}{k}\right) + \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3} -$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} =$$

$$= \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \Big/ \left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\right) - \operatorname{arctg} \frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n} -$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1} = 2\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}.$$

Suma cerută este limita $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = 2 \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{2}$.

2.23. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \left(\frac{1}{n!} \prod\limits_{k=1}^{n} |a + k|\right)^{\frac{1}{n}}$, unde $a \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}_-^*$ este fixat.

R. Se observă că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este cu termeni pozitivi şi se notează $v_n = \frac{1}{n!} \prod\limits_{k=1}^{n} |a + k|$. Pentru $a \in \mathbf{R}_+$ se obţine

$$\prod_{k=1}^{n} (a + k) \geqslant \prod_{k=1}^{n} k = n!, \quad v_n \geqslant 1, \quad u_n \geqslant 1, \quad \lim_{n\to\infty} u_n \geqslant 1 \quad \text{(dacă există)},$$

iar pentru $a \in \mathbf{R}_- \setminus \mathbf{Z}_-$, $n > -[a] + 1$,

$$\prod_{k=-[a]+1}^{n} |a + k| > \prod_{k=-[a]+1}^{n} ([a] + k) = ([a] + n)!,$$

$$v_n \geqslant \frac{1}{([a] + n + 1) \ldots n} \prod_{k=1}^{-[a]} |a + k| \geqslant \frac{1}{n^{-[a]}} \prod_{k=1}^{-[a]} |a + k|.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} x^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{\alpha}{n}} = 1$ (se obţine imediat cu regula lui l'Hospital), rezultă iarăşi că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \geqslant 1$ (dacă există). Deci seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă, deoarece nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă.

2.24. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \ln \frac{1}{n} - \ln \sin \frac{1}{n}$.

R. Se observă că

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{n^{-1}}{\sin n^{-1}} = \ln \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}}{\sin n^{-1}} = \ln 1 = 0;$$

deci condiţia necesară de convergenţă este îndeplinită.

Fie (a_n), $a_n = \frac{n^{-1}}{\sin n^{-1}}$, $a_n > 1$ $(n^{-1} > \sin n^{-1} > 0)$; prin definiţie

$(\lim_{n\to\infty} a_n = 1) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ (n > N(\varepsilon)) \Rightarrow (a_n < 1 + \varepsilon))$.

Pentru $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbf{N}^*$, $m \in \mathbf{N}^*$ arbitrar fixaţi se obţine succesiv

$$\frac{n^{-1}}{\sin n^{-1}} < 1 + \varepsilon,\ \prod_{k=1}^{m} \frac{(n+k)^{-1}}{\sin (n+k)^{-1}} < 1 + \varepsilon'(\varepsilon),$$

$\ln \prod_{k=1}^{m} \frac{(n+k)^{-1}}{\sin (n+k)^{-1}} < \varepsilon''(\varepsilon)$, unde $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$. Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ verifică criteriul general de convergenţă al lui Cauchy, adică $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ (dat de şirul (a_n)), $\forall n \in \mathbf{N},\ \forall m \in \mathbf{N}^*\ (n > N(\varepsilon)) \Rightarrow \left(\sum_{k=1}^{m} u_{n+k} < \varepsilon\right)$.

2.25. Fie (a_n) un şir de numere reale pozitive descrescător; dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este o serie convergentă, atunci $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ (Olivier).

Să se arate (prin contraexemple) că nu sînt adevărate implicaţia care se obţine omiţînd condiţia „(a_n) descrescător" şi implicaţia inversă.

R. Conform criteriului general de convergenţă al lui Cauchy, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat există $N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ astfel încît pentru orice $n \in \mathbf{N}$, dacă $n > N$, atunci $a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Deoarece $a_{N+1} \geqslant a_{N+2} \geqslant \ldots \geqslant a_n$, urmează că $(n - N)\, a_n \leqslant a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_n < \frac{\varepsilon}{2}$. Pentru $n > 2N$ sau $\frac{n}{2} < n - N$ se obţine $\frac{n}{2} a_n < \frac{\varepsilon}{2}$, $n a_n < \varepsilon$, deci $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$ conform definiţiei cu ε.

Contraexemplu pentru afirmaţia „Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergentă, $a_n \geqslant 0$ implică $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$".

Fie $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & n \neq 3^k \\ \frac{1}{2^k}, & n = 3^k \end{cases}$; şirul (a_n) nu este monoton, deoarece

$$a_{3^k} - a_{2^k} = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{2k}} > 0;\quad a_{3^k+1} - a_{3^k} = \frac{1}{(3^k+1)^2} - \frac{1}{2^k} < 0.$$

Conform unuia din criteriile de comparaţie, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă deoarece $a_n < 1/n^2 + 1/2^n$, iar seria de acest termen general este convergentă ca sumă de două serii cu termeni pozitivi convergente (armonică generalizată cu $\alpha = 2$ în $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ şi geometrică). Se observă că mulţimea punctelor limită ale şirului (na_n) este $\mathcal{L}(na_n) = \{0, \infty\}$. Limitele extreme $\varliminf_{n\to\infty} na_n = 0$, $\varlimsup_{n\to\infty} na_n = \infty$ sînt diferite, deci şirul (na_n) nu converge la 0.

Contraexemplu la implicaţia inversă.

Fie şirul (a_n), $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ de numere pozitive descrescător la 0. Conform principiului condensării, seria $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ care este divergentă.

2.26. Fie seriile (S1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{p^n}$, unde $(p, x) \in (1, \infty) \times \mathbf{R}$, (S2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}$, unde $(p, x) \in \mathbf{R}^2$, (S3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$.

1) Să se stabilească convergenţa seriei (S1) şi divergenţa seriei (S3) utilizînd criteriul general de convergenţă al lui Cauchy;

2) Să se determine mulţimile $\{(p, x) \in \mathbf{R}^2\}$ pentru care seria (S2) este absolut convergentă, respectiv simplu convergentă.

R. 1) Pentru seria (S3) se observă că $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$, deci seria este divergentă deoarece nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă. Conform criteriului general de convergenţă al lui Cauchy, seria (S1) este convergentă dacă

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N},\ \forall n \in \mathbf{N},\ \forall q \in \mathbf{N}^*,\ (n \geqslant N(\varepsilon)) \Rightarrow \left(\left| \sum_{k=1}^{q} \frac{\cos(n+k)x}{p^{n+k}} \right| < \varepsilon \right).$$

Se obţine

$$\left| \sum_{k=1}^{q} \frac{\cos(n+k)x}{p^{n+k}} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{q} \left| \frac{\cos(n+k)x}{p^{n+k}} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{p^{n+k}} = p^{-(n+1)} \frac{1 - p^{-q}}{1 - p^{-1}} < \frac{1}{(p-1)p^n}.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat, se impune condiţia $\frac{1}{(p-1)p^n} < \varepsilon$ şi se determină rangul $N(\varepsilon) = \left[\log_p \frac{1}{(p-1)\varepsilon}\right] + 1$.

2) Conform unuia din criteriile de comparaţie deoarece $\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right| \leqslant \frac{1}{n^p}$ şi seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este convergentă pentru $p > 1$, rezultă că seria (S2) este absolut convergentă pentru mulţimea $(1, \infty) \times \mathbf{R}$. Pentru a găsi mulţimea de simplu convergentă (semiconvergenţă) se aplică criteriul lui Abel. Se pune seria (S2) sub forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$, unde $u_n = \cos nx$, $a_n = \frac{1}{n^p}$. Se evaluează suma $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ calculînd $2S_n \sin\frac{x}{2}$ sau $S_n + \mathrm{i}\, T_n$, unde $T_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx$ şi se obţine

$$|S_n| = \left|\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|} \quad \text{pentru} \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}.$$

Se observă că şirul (a_n) de numere pozitive este strict descrescător la 0 pentru $p \in \mathbf{R}_+^*$. Deci mulţimea de simplu convergenţă a seriei (S2) este $(0, 1] \times \mathbf{R} \setminus \{2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\}$.

2.27. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \operatorname{arctg} n^\alpha$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$ este fixat.

R. Se calculează

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} 0, & \alpha \in \mathbf{R}_-^* \\ \pi/4, & \alpha = 0 \\ \pi/2, & \alpha \in \mathbf{R}_+^* \end{cases}$$

şi se constată că seria este divergentă pentru $\alpha \in \mathbf{R}_+$ deoarece nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă. Pentru $\alpha \in \mathbf{R}_-^*$, $n^\alpha \in (0, \pi/2)$ se folosesc inegalităţile $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ şi se obţine $\frac{n^\alpha}{\sqrt{1+n^{2\alpha}}} < u_n < n^\alpha$.

Se observă că pentru $-\alpha > 1$, seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha$ este convergentă, iar pentru $\alpha = -\beta \in [-1, 0)$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+n^{2\alpha}}}$ este divergentă conform unuia din criteriile de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi, deoarece $\frac{n^{-\beta}}{\sqrt{1+n^{-2\beta}}} > \frac{1}{n^\beta+1}$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta+1}$ are aceeaşi natură cu seria armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\beta}$ (divergentă pentru $\beta \in (0, 1]$).

Conform aceluiaşi criteriu de comparaţie, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă pentru $\alpha < -1$ şi divergentă pentru $\alpha \in [-1, 0)$. În concluzie, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă pentru $\alpha \in (-\infty, -1)$ şi divergentă pentru $\alpha \in [-1, \infty)$.

2.28. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \arccos(1 - 1/n^2)$.

R. Funcţia $\arccos: [-1, 1] \to [0, \pi]$ este inversa funcţiei $\cos: [0, \pi] \to [-1, 1]$ şi este descrescătoare deoarece $(\arccos x)' = (\pi/2 - \arcsin x)' = = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$, $x \in (-1, 1)$. Se observă că şirul (c_n), $c_n = 1 - 1/n^2$ este strict crescător, deoarece $c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} > 0$ şi deci şirul (u_n) este strict descrescător; în plus $u_n \in [0, \pi/2]$ deoarece $c_n \in \mathbf{R}_+$. Rezultă că şirul (u_n) este convergent, fiind monoton şi mărginit şi $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \arccos 1 = = 0 \in [0, \pi/2]$. Acelaşi rezultat se obţine folosind inegalităţile $\sin u_n < < u_n < \operatorname{tg} u_n$ şi calculînd

$$\lim_{n\to\infty} \sin u_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 - (1 - 1/n^2)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sqrt{2 - 1/n^2} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{tg} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin u_n}{\cos u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \frac{\sqrt{2 - 1/n^2}}{1 - 1/n^2} = 0.$$

Conform criteriului de comparaţie la limită, seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ au aceeaşi natură, deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} u_n}{u_n} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} u_n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2 - 1/n^2}}{1 - 1/n^2} = \sqrt{2}.$$

Cum seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n$ este divergentă, rezultă că şi seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} u_n$ sînt divergente.

2.29. Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = 1 - (n + 1/2) \ln (1 + 1/n)$ şi şirul (a_n), $a_n = \frac{n!\, e^n}{n^{n+1/2}}$. Să se arate că:

1) Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă;

2) Şirul (a_n) este convergent.

1'. *Observaţie.* Se calculează raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\,e^{n+1}}{n!\,e^n} \cdot \frac{n^{n+1/2}}{(n+1)^{n+1+1/2}} =$

$= \frac{e}{(1+1/n)^{n+1/2}}$ şi se găseşte relaţia $u_n = \ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1) Se observă că $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, deci condiţia necesară de convergenţă este îndeplinită. Se consideră şirul (e_n'), $e_n' = (1+1/n)^{n+1/2}$. Folosind binomul lui Newton generalizat,

$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)}{k!} x^k$, se calculează diferenţa

$$e_{n+1}' - e_n' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1+1/2)(n+1/2)(n-1/2)\dots(n+1+1/2-k+1)}{k!(n+1)^k} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+1/2)(n-1/2)\dots(n+1/2-k+1)}{k!\,n^k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \left[\frac{(1+1/2(n+1)((1-1/2(n+1))\dots(1-(2k-3)/2(n+1))}{k!} - \right.$$

$$\left. - \frac{(1+1/2n)(1-1/2n)\dots(1-(2k-3)/2n)}{k!} \right] +$$

$$+ \sum_{k=4}^{\infty} \frac{(1+1/2(n+1))((1-1/2(n+1))\dots(1-(2k-3)/2(n+1)) - (1+1/2n)(1-1/2n)\dots(1-(2k-3)/2n)}{k!}.$$

Se obţine că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ prima sumă este strict pozitivă (prin calcul), iar a doua este strict pozitivă deoarece

$$1 - \frac{1}{4n^2} < 1 - \frac{1}{4(n+1)^2},\quad 1 - \frac{2k-3}{2n} < 1 - \frac{2k-3}{2(n+1)},\ \text{unde } k \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}.$$

Deci şirul (e_n') este strict crescător şi cum $\lim_{n\to\infty} e_n' = e$, rezultă că pentru orice $n \in \mathbf{N}^* \setminus \{1\}$, $e_n' < e$ $(e_1' = 2\sqrt{2} < e)$. Prin urmare seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este cu termeni pozitivi (cu excepţia primului termen) şi conform criteriului general al lui Cauchy este convergentă, deoarece pentru $\varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $p \in \mathbf{N}^*$ arbitrar fixaţi, $n \in \mathbf{N}$, $n \geq N(\varepsilon)$, (astfel încît $e/e_n' < 1 + \varepsilon$), avem $u_{n+1} + \dots u_{n+p}' < \varepsilon'(\varepsilon)$.

2) Conform observaţiei iniţiale suma primilor $n-1$ termeni ai seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} \ln \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ln \prod_{k=1}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ln \frac{a_n}{a_1}$. Rezultă $a_n = a_1 e^{S_{n-1}} = e^{S_{n-1}+1}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = e^{S+1}$, unde S este suma seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

2.30. Să se stabilească convergenţa seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$ şi cîţi termeni trebuie însumaţi pentru a obţine suma seriei cu 3 zecimale exacte.

R. Seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergentă conform criteriului raportului pentru serii cu termeni pozitivi, deoarece $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} \cdot \frac{(n+1)!}{(n+2)!} = \frac{2}{n+2} \leqslant q < 1$ pentru $n \geqslant 2q^{-1} - 2$ (de exemplu, pentru $q = 1/3$, $n \geqslant 4$).

Aproximarea sumei S a, seriei cu trei zecimale exacte se face majorînd restul de ordin n al seriei

$$R_n = S - S_n = \sum_{k \in \mathbf{N}^*} u_{n+k} \leqslant u_n \sum_{k \in \mathbf{N}^*} \frac{1}{3^k} = \frac{2^n}{(n+1)!} \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 1/3} =$$

$$= \frac{2^{n-1}}{(n+1)!} < \frac{1}{10^3}.$$

Se verifică faptul că inegalitatea este satisfăcută pentru $n = 9$. Deci pentru a obţine suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ cu trei zecimale exacte trebuie însumaţi 9 termeni (seria este rapid convergentă).

2.31. Să se studieze natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$, $u_n = 2^{(-1)^n - n}$ cu criteriul raportului şi a rădăcinii.

R. Pentru seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ se foloseşte criteriul raportului sub forma:

Dacă $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă;

dacă $\underline{\lim_{n\to\infty}} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$, seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ este divergentă.

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ fiind cu termeni pozitivi, se evaluează raportul

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2^{(-1)^{n+1} - n - 1 - (-1)^n + n} = 2^{2(-1)^{n+1} - 1} = \begin{cases} \frac{1}{8}, & n \text{ par} \\ 2, & n \text{ impar} \end{cases}.$$

Rezultă mulţimea punctelor limită

$$\mathfrak{L}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \left\{\frac{1}{8}, 2\right\},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \max \mathfrak{L}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = 2 \not< 1, \quad \underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \min \mathfrak{L}\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{1}{8} \not> 1,$$

deci criteriul raportului nu dă nici o informaţie despre natura seriei. În continuare se foloseşte criteriul rădăcinii într-o formă asemănătoare:

„Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă; dacă $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} > 1$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ este divergentă".

Seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}$ fiind cu termeni pozitivi, se evaluează radicalul $\sqrt[n]{u_n} = 2^{((-1)^n-n)/n} = \frac{1}{2} 2^{(-1)^n/n}$.

Rezultă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2} < 1$, deci seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ este convergentă.

În concluzie, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ este un exemplu de serie numerică pentru care natura sa nu se poate stabili cu criteriul raportului, ci cu criteriul rădăcinii.

2.32. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = \left(\frac{a+n}{a+n-1} b\right)^n$, unde $a, b \in \mathbf{R}^*$.

R. Pentru seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ se foloseşte criteriul rădăcinii (Cauchy) sub forma

„Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u_n|} < 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă;

dacă

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} > 1, \text{ seria este divergentă".}$$

Se evaluează radicalul $\sqrt[n]{|u_n|} = \left|\frac{a+n}{a+n-1}\right| |b|$ şi se obţine $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|u|_n} = |b|$. Deci pentru $|b| < 1$, respectiv $|b| > 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă, respectiv divergentă. Dacă $|b| \geqslant 1$, şi $n > 1 - a$ se poate face minorarea $\left|\frac{a+n}{a+n-1} b\right| = \left|\frac{a+n}{a+n-1}\right| |b| > |b| \geqslant 1$ şi se găseşte că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, deci seria este divergentă deoarece nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă.

2.33. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$, $u_n = \left(n^{\frac{1}{n}} - 1\right)^{\alpha}$, unde $\alpha \in \mathbf{R}$ este fixat.

R. Se observă că seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ este cu termeni pozitivi; notăm

$$v_n = n^{1/n} - 1, \text{ unde } v_n \in \mathbf{R}_+^*.$$

Se obține

$$n = (1 + v_n)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k v_n^k > \frac{n(n-1)}{2} v_n^2, \quad v_n^2 < \frac{2}{n-1}.$$

Conform criteriului majorării, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$. Urmează că pentru $\alpha \in \mathbf{R}_-$, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, deci seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ este divergentă. Pentru $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$ se face majorarea $u_n < 2^{\frac{\alpha}{2}} \frac{1}{(n-1)^{\alpha/2}}$ și se observă că s-a obținut termenul general al unei serii care are aceeași natură cu seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha/2}}$, convergentă dacă $\alpha > 2$. Conform unuia din criteriile de comparație, rezultă că pentru $\alpha > 2$ seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ este convergentă. În continuare se studiază cazul $\alpha \in (0, 2]$. Se notează $w_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha$, unde $w_n \in \mathbf{R}_+^*$ și se observă că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{w_n} = 1$ deoarece

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^{\ln x/x} - 1}{\ln x/x}\right)^\alpha = \lim_{y\to 0} \left(\frac{e^y - 1}{y}\right) = 1$$

(s-a aplicat trecerea la limită în funcții compuse și regula lui l'Hospital). În plus șirul (w_n) este descrescător deoarece funcția $f\colon (e, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^\alpha$ este descrescătoare pentru $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, $\left(f'(x) = \alpha\left(\frac{\ln x}{x}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right) < 0\right)$. Conform unuia din criteriile de comparație și a principiului condensării rezultă că seriile $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n w_{2^n}$ au aceeași natură $\left(\text{având aceeași natură cu seria } \sum\limits_{n=2}^{\infty} w_n\right)$. Se obține

$$2^n w_{2^n} = (\ln 2)^\alpha \frac{n^\alpha}{2^{(\alpha-1)n}}, \quad \lim_{n\to\infty} 2^n w_{2^n} = \begin{cases} \infty, & \alpha \in (0, 1] \\ 0, & \alpha \in (1, 2] \end{cases},$$

deci seria $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ este divergentă pentru $\alpha \in (0, 1]$, rezultat care se obține și din compararea cu seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ cu $\ln n/n > 1/n$. În final se aplică criteriul rădăcinii (Cauchy) seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n w_{2^n}$. Se calculează

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n w_{2^n}} = \frac{1}{2^{\alpha-1}} \lim_{n\to\infty} (\ln 2)^{\alpha/n} \cdot \lim_{n\to\infty} n^{\alpha/n} = \frac{1}{2^{\alpha-1}}$$

şi se găseşte că $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ pentru $\alpha > 1$. În concluzie seria $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ este convergentă dacă $\alpha \in (1, \infty)$, cu observaţia că s-a regăsit rezultatul de convergenţă pentru $\alpha \in (2, \infty)$ şi divergenţă pentru $\alpha \in (-\infty, 1]$.

2.34. Pentru un şir de numere reale (a_n), să se demonstreze inegalităţile

$$\varliminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

şi să se compare criteriul raportului cu a rădăcinii în stabilirea naturii seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

R. Prin definiţie

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \min \mathcal{L}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) \leqslant \max \mathcal{L}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \text{ unde } \mathcal{L}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$$

este mulţimea punctelor limită pentru şirul $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)$ În continuare se demonstrează inegalitatea

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

pentru inegalitatea

$$\varliminf_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

procedîndu-se în mod analog. Dacă

$$a = \varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \infty,$$

inegalitatea este evidentă. Pentru $a \in \mathbf{R}$, deoarece

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \inf_{n\in\mathbf{N}} \left\{ \sup_{k\geqslant n} \left\{\left|\frac{a_{1+k}}{a_k}\right|\right\}\right\} = \inf_{n\in\mathbf{N}} \{b_n\}$$

$\left(\text{şirul } (b_n), \text{ cu } b_n = \sup_{k\geqslant n} \left\{\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|\right\} \text{ este descrescător}\right)$, se foloseşte propoziţia

$$(a = \inf_{n\in\mathbf{N}} \{b_n\} \Leftrightarrow (\text{i1 şi i2}), \text{ unde i1} : \forall n \in \mathbf{N},\ a \leqslant b_n,$$

$$\text{i2}: \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N(\varepsilon) \in \mathbf{N},\ \forall\, n \in \mathbf{N},\ (n \geqslant N(\varepsilon)) \Rightarrow (a \leqslant b_n < a + \varepsilon).$$

Se obţine succesiv:

$$|a_{N+1}| < |a_N|(a + \varepsilon),\ |a_{N+2}| < |a_{N+1}|(a + \varepsilon) < |a_N|(a + \varepsilon)^2, \ldots$$

$$\ldots, |a_n| < |a_N|\,(a + \varepsilon)^{n-N}.$$

În final rezultă

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \sqrt[n]{|a_N|(a+\varepsilon)^{-N}}\,(a+\varepsilon)$$

sau, trecînd la limită,

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant a+\varepsilon, \text{ deci } \varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} \leqslant a.$$

Folosim criteriile raportului şi al rădăcinii sub forma:

„Dacă $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, respectiv $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă

dacă $\varliminf\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, respectiv $\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă".

Conform inegalităţilor demonstrate anterior rezultă că:

Dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este absolut convergentă conform criteriului raportului, atunci ea este absolut convergentă şi conform criteriului rădăcinii; dacă seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este divergentă conform criteriului raportului, atunci ea este divergentă şi conform criteriului rădăcinii. Cu alte cuvinte, dacă natura unei serii numerice se poate stabili prin criteriul raportului, atunci ea se poate stabili şi prin criteriul rădăcinii. Cu observaţia că există serii numerice $\left(\text{de exemplu } \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n,\ u_n = 2^{(-1)^n-n}\right)$ a căror natură nu se poate stabili cu criteriul raportului, dar se poate stabili cu criteriul rădăcinii (v. **2.31**) rezultă că criteriul rădăcinii este mai „tare" decît criteriul raportului.

2.35. Să se stabilească natura seriei armonice generalizate $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$, unde $\alpha\in\mathbf{R}\setminus\{1\}$ este fixat folosind teorema creşterilor finite (Lagrange) pentru o funcţie convenabil aleasă.

R. Se observă că pentru $\alpha\in\mathbf{R}_-$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ este divergentă. Cum $(x^{-\alpha})' = -\alpha x^{-\alpha-1}$, se aplică teorema lui Lagrange funcţiei $f:\mathbf{R}_+^*\to\mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha-1}}$, $\alpha\in\mathbf{R}_+^*$ derivabilă pe orice interval $[n, n+1]$, $n\in\mathbf{N}^*$. Rezultă că există $x_n\in(n, n+1)$, astfel încît $\dfrac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}} = (1-\alpha)\cdot\dfrac{1}{x_n^\alpha}$. Deoarece $n^\alpha < x_n^\alpha < (n+1)^\alpha$ se obţin succesiv inegalităţile

$$(1-\alpha)\frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} < (1-\alpha)\frac{1}{n^\alpha},$$

$$(1-\alpha)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^\alpha} < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right) < \sum_{k=1}^{n}(1-\alpha)\frac{1}{k^\alpha},$$

$$(1-\alpha)(S_{n+1}-1) < \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - 1 < (1-\alpha)\,S_n,\ \alpha<1,$$

unde (S_n) este şirul sumelor parţiale ale seriei. Folosind proprietăţile limitei rezultă

$$S_n > \frac{1}{1-\alpha}(n+1)^{-\alpha+1} - \frac{1}{1-\alpha}, \ \lim_{n\to\infty} S_n = \infty; \ \alpha < 1,$$

$$S_n < \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} < \frac{1}{\alpha-1}, \ \alpha > 1.$$

Urmează că pentru $\alpha < 1$ seria armonică generalizată este divergentă, iar pentru $\alpha > 1$ convergentă (este cu termeni pozitivi şi are şirul sumelor parţiale mărginit). În cazul exceptat $\alpha = 1$, seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ este divergentă.

2.36. Să se stabilească convergenţa seriei $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$, $u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\lg^3 n}$ şi numărul de termeni ce trebuie însumaţi pentru a obţine suma seriei cu 3 zecimale exacte.

R. Seria $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ este convergentă conform criteriului lui Leibniz pentru serii alternate, deoarece şirul (v_n), $v_n = |u_n|$ este descrescător la zero ($f: \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$, $f(x) = \lg^3 x$ este crescătoare).

Aproximarea sumei S a seriei cu trei zecimale exacte se face majorînd restul de ordin n al seriei cu primul termen, $|R_n| = |S - S_n| \leqslant \leqslant |u_{n+1}| = \frac{1}{\lg^3(n+1)} < \frac{1}{10^3}$. Se obţine $n > 10^{10} - 1$, deci pentru a obţine suma seriei $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ cu trei zecimale exacte trebuie însumaţi cel puţin 10^{10} termeni (seria este foarte slab convergentă).

2.37. Fie seria armonică alternată $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = (-1)^{n-1}\, 1/n$:

1) Să se calculaze suma seriei;

2) Să se găsească o permutare a acestei serii astfel încît suma seriei obţinute să fie de două ori mai mică.

R. 1) *Soluţia* **1.** Conform criteriului lui Leibniz, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă deoarece şirul $(|u_n|)$, $|u_n| = 1/n$ este strict descrescător la 0, dar nu este absolut convergentă deoarece seria armonică $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ este divergentă. Deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este simplu convergentă(semiconvergentă). Suma S a seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este limita şirului sumelor parţiale (S_n), $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. Dacă se notează (σ_n), $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, se observă că $S_{2n} = \sigma_{2n} - 2(\sigma_n/2) = \sigma_{2n} - \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$. Se evaluează σ_n folosind şirul (e_n), $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $e = \lim_{n\to\infty} e_n$. Deoarece şirul (e_n) este crescător rezultă că pentru orice $k \in \mathbf{N}^*$,

$(1 + 1/k)^k < e < (1 + 1/k)^{k+1}$ sau (i) $1/(k+1) < \ln(1 + 1/k) < 1/k$.

Însumînd inegalitatea din dreapta pentru k de la 1 la $n-1$ se obţine succesiv

$$\ln \frac{2 \cdot 3 \ldots n}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)} < \sigma_{n-1},\quad 0 < \frac{1}{n} < \sigma_n - \ln n.$$

Conform (i), inegalitatea din stînga, se observă că şirul de numere strict pozitive (a_n), $a_n = \sigma_n - \ln n$ este strict descrescător, deoarece $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$, deci este convergent; fie $c = \lim_{n\to\infty} a_n$ ($c = 0{,}577 \ldots$ — constanta lui Euler). Se calculează $S = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} (\sigma_{2n} - \sigma_n) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} - \lim_{n\to\infty} a_n + \ln 2 = \ln 2$.

Soluţia 2. Se demonstrează că seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ este convergentă pe mulţimea $(-1, 1]$, mulţime pe care are suma $\ln(1 + x)$. În particular, pentru $x = 1$ se obţine $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

2) Deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este semiconvergentă, conform teoremei lui Riemann există o permutare a seriei astfel încît seria obţinută, $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$ să aibă suma $S' = \ln 2/2$, anume permutarea care face ca după un termen pozitiv să urmeze doi termeni negativi. Dacă se notează (S'_n) şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n$, se calculează

$$S'_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2(2k-1)} - \frac{1}{2 \cdot 2k} \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) = \frac{S_n}{2},$$

$$S'_{3n-1} = S'_{3n} + \frac{1}{4n},\quad S'_{3n-2} = S'_{3n-1} + \frac{1}{4n-2}.$$

Rezultă că

$$S' = \lim_{n\to\infty} S'_n = \frac{\ln 2}{2}.$$

Observaţie. Se poate demonstra următoarea generalizare:

„Pentru o permutare de forma — după un şir de p termeni pozitivi în ordine crescătoare urmează un şir de q termeni negativi descrescători în modul — suma seriei obţinute este $\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}$.

2.38. Să se studieze natura seriei

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n,\ u_n = \frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}} + \mathrm{i}\log\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

R. Se studiază fie natura seriei $\sum_{n=2}^{\infty} |u_n|$ (cu criteriile uzuale de la serii de numere reale), fie natura seriilor $\sum_{n=2}^{\infty} x_n$, $\sum_{n=2}^{\infty} y_n$, unde $u_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n$. Se observă că seria $\sum_{n=2}^{\infty} x_n$ este serie alternată, deoarece $x_n = \frac{1}{1+(-1)^n\sqrt{n}} = (-1)^n \frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}}$ şi $\frac{1}{(-1)^n+\sqrt{n}} \in \mathbf{R}_+$. Se consideră seriile auxiliare $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (armonică alternată semiconvergentă conform criteriului lui Leibniz) şi $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - x_n)$, $a_n - x_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}} = \frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n}((-1)^n+\sqrt{n})} = \frac{1}{(n+(-1)^n\sqrt{n})}$. Cum $a_n - x_n \geqslant \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ este divergentă $\left(\text{avînd aceeaşi natură cu seria armonică } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\right)$, conform unuia din criteriile de comparaţie rezultă că seria $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - x_n)$ este divergentă. Rezultă că seria $\sum_{n=2}^{\infty} x_n$ este divergentă, deci şi seria $\sum_{n=2}^{\infty} u_n$ este divergentă.

2.39. Să se arate că este posibil să se aplice criteriul lui Leibniz pentru stabilirea naturii unei serii în care alternează semnele unor grupuri de termeni.

Aplicaţie. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = (-1)^{\left[\frac{n}{3}\right]} \ln\left(\frac{a+n}{n}\right)$, unde $a \in \mathbf{R}_+^*$.

R. Fie (L) $(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n_1}) + \ldots + (u_{n_{k-1}+1} + \ldots + u_{n_k}) + \ldots$ seria obţinută prin asocierea termenilor seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ astfel încît fiecare paranteză să conţină termeni de acelaşi semn (nu se schimbă poziţia termenilor). Să arătăm că dacă seria (L) este convergentă, atunci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă şi are aceeaşi sumă. Fie (σ_{n_k}) şirul sumelor parţiale ale seriei (L) (de sumă σ) şi (S_n) şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Prin definiţie, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat există $n_{k_0} \in \mathbf{N}^*$ ($k_0 \in \mathbf{N}^*$) astfel încît dacă $n_k \geqslant n_{k_0}$, atunci $\sigma - \varepsilon < \sigma_{n_k} < \sigma + \varepsilon$. Pentru $n \in \mathbf{N}^*$ arbitrar fixat astfel încît $n > n_{k_0-1} + 1$ (u_n face parte din paranteza

$(u_{n_{k-1}+1} + \dots + u_{n_k})$ care poate conține termeni pozitivi sau negativi) avem că $\sigma_{n_{k-1}} < S_n < \sigma_{n_k}$ sau $\sigma_{n_k} < S_n < \sigma_{n_{k-1}}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sigma$.

Dacă $u_n = (-1)^{[n/3]} \ln\left(\frac{a+n}{n}\right)$, $a \in \mathbf{R}_+^*$, atunci prima paranteză conține doi termeni pozitivi, apoi alternează paranteze de trei termeni negativi cu paranteze de trei termeni pozitivi, deoarece pentru $3k \leqslant n < 3(k+1)$, $\left[\frac{n}{3}\right] = k$. Deoarece $v_n = \frac{a+n}{n} > 1$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n^2+an+1}{n^2+an+n+a} < 1$, iar funcția $\ln : \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{R}$ este strict crescătoare, rezultă că șirul $|u_n| = \ln v_n$ este descrescător la zero, deci conform criteriului Leibniz seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă.

2.40. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n = (-1)^{n-1} \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+p)}{n!\, n^q}$, unde $p, q \in \mathbf{N}$ sînt fixați.

R. Se folosește criteriul lui Raabe–Duhamel sub forma

„Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right) > 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă;

dacă $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right) < 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă".

Se evaluează termenul general din șirul lui Raabe–Duhamel

$$n\left(\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right) = n\left(\frac{(n+1)^{q+1}}{n^q(n+1+p)} - 1\right) = \frac{(n+1)^{q+1} - n^{q+1} - (1+p)\,n^q}{n^q + (1+p)\,n^{q-1}} =$$

$$= \frac{(q-p)\,n^q + \sum\limits_{k=0}^{q-1} C_{q+1}^k n^k}{n^q + (1+p)\,n^{q-1}}.$$

Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| - 1\right) = q - p$, deci pentru $q > p + 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă. Se observă că raportul

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{n^{q+1} + (1+q)\,n^q}{n^{q+1} + (1+p)\,n^q + \sum\limits_{k=0}^{q-1} C_{q+1}^k n^k}$$

este subunitar pentru $q \geqslant p$. Se prelucrează termenul general în modul

$$|u_n| = \frac{1}{p!}\,\frac{(n+p)!}{n!\,n^q} = \frac{1}{p!}\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{p}(n+k)}{n^q} = \frac{1}{p!}\,\frac{\prod\limits_{k=1}^{p}\left(1+\frac{k}{n}\right)}{n^{q-p}}$$

şi se obţine

$$\lim_{n\to\infty}|u_n| = \begin{cases} 0, & q \geq p+1 \\ \frac{1}{p!}, & q = p \\ \infty, & q < p. \end{cases}$$

Pentru $q = p + 1$ seria este semiconvergentă conform criteriului lui Leibniz, iar pentru $q \leq p$ este divergentă deoarece nu îndeplineşte condiţia necesară de convergenţă. Se observă că pentru $p = 0$, $u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{n^q}$ şi se regăseşte rezultatul privind natura seriei armonice generalizate alternate.

Pentru $q > 1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este absolut convergentă, pentru $q = 1$ semiconvergentă, iar pentru $q = 0$ divergentă.

2.41. Să se studieze natura seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)^2$, $u_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, unde $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k u_{n-k+1}$.

R. Conform criteriului lui Leibniz pentru seriile alternate, seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă deoarece şirul de termn general $|u_n|$ este descrescător la 0. Cu observaţia că seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ este armonică generalizată alternată de forma $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}$, cu $\alpha = \frac{1}{2} > 0$, rezultatul este direct. Seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ nu este absolut convergentă deoarece $\alpha < 1$, deci este semiconvergentă. Urmează că natura seriei produs $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)^2$ trebuie studiată direct. Se calculează

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{1}{\sqrt{k}}(-1)^{n-k}\frac{1}{\sqrt{n-k+1}} = (-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}}$$

şi se face minorarea

$$|v_n| = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k(n-k+1)}} > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} = 1.$$

Rezultă $\lim_{n\to\infty}|v_n| \geq 1$, $\lim_{n\to\infty} v_n \neq 0$, (dacă există), deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ este divergentă deoarece nu este îndeplinită condiţia necesară de convergenţă.

2.42. Să se studieze natura produsului $\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1+u_n)$, unde $u_n=\frac{1}{n(n+2)}$, iar în caz de convergenţă să se calculeze.

R. Produsul $\prod_{n\in\mathbb{N}^*}(1+u_n)$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}u_n$ care este convergentă cu suma $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ (vezi problema 20.). Pentru calculul produsului avem

$$1+u_k=\frac{(k+1)^2}{k(k+2)},\quad P_n=\prod_{k=1}^{n}(1+u_k)=\prod_{k=1}^{n}\frac{(k+1)^2}{k(k+2)}=\frac{2(n+1)}{n+2}.$$

Prin trecere la limită se obţine valoarea produsului

$$P=\lim_{n\to\infty}P_n=2.$$

2.43. Se consideră (p_n) şirul numerelor prime cu $p_0=1$ şi $\alpha\in\mathbb{R}$, $\alpha<1$ fixat. Să se stabilească convergenţa produsului $\prod_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{1-p_n^{-\alpha}}$ şi să se compare valoarea sa cu suma seriei $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\alpha}$.

R. Avem $\frac{1}{1-p_n^{-\alpha}}-1=\frac{1}{p_n^\alpha-1}$.

Produsul $\prod_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{1-p_n^{-\alpha}}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p_n^\alpha-1}$ care este convergentă dacă seria armonică generalizată $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă, deoarece şirul (p_n) este subşir al lui $\mathbb{N}$.

Cum pentru $\alpha>1$ seria $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă, rezultă că şi produsul din enunţ este convergent. În continuare, dacă $p_n=m$, notăm n cu $\overline{m}$. Din convergenţa (pentru $\alpha>1$) a seriei armonice generalizate rezultă că pentru orice $\varepsilon>0$ există $\overline{M}(\varepsilon)\in\mathbb{N}^*$ încît pentru orice $\overline{m}>\overline{M}(\varepsilon)$ să avem $\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\varepsilon$. Pentru m astfel încît $\overline{m}>\overline{M}(\varepsilon)$, fie

$$P(m)=\prod_{i=1}^{\overline{m}}\frac{1}{1-p_i^{-\alpha}}=\prod_{i=1}^{\overline{m}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{p_i^{k\alpha}},$$

$$A_1=\left\{n\in\mathbb{N}^*/n=\prod_{i=1}^{q}p_i^{r_i}\text{ cu } q,\ r_i\in\mathbb{N}^*,\ p_i\leqslant m\right\},$$

$$A_2=\left\{n\in\mathbb{N}^*/n=\prod_{i=1}^{q}p_i^{r_i}\text{ cu } q,\ r_i\in\mathbb{N}^*,\ p_i>m\right\}.$$

Avem $P(m) = \sum\limits_{n \in A_1} \frac{1}{n^\alpha}$, $\sum\limits_{n \in A_2} \frac{1}{n^\alpha} < \varepsilon$; $\sum\limits_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{1}{n^\alpha} = P(m) + \sum\limits_{n \in A_2} \frac{1}{n^\alpha}$. Prin trecere la limită se obține valoarea produsului

$$P = \lim_{m \to \infty} P(m) = \sum_{n \in \mathbf{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}.$$

2.44. 1) Să se afle $b, c \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)}$ să fie convergentă.

2) În condițiile găsite arătați că

$$\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-2}\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{b+n-1}(1-x)^{c-b-1}\mathrm{d}x$$

și exprimați cu ajutorul funcției Γ suma seriei de la punctul 1) (Concursul Tr. Lalescu, 1987, etapa locală I.P.B., profil electric).

R. 1) Deoarece $u_n = \frac{b(b+1)\dots(b+n-1)}{c(c+1)\dots(c+n-1)} > 0$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ folosim criteriul lui Raabe—Duhamel sub forma

„Dacă $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) > 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă; dacă $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) < 1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este divergentă".

Se evaluează termenul general din șirul lui Raabe—Duhamel

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = n\left(\frac{c+n}{b+n} - 1\right) = \frac{(c-b)n}{n+b}.$$

Rezultă $\lim\limits_{n \to \infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = c - b$, deci pentru $c > b + 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ este convergentă, iar pentru $c < b + 1$ este divergentă. Conform unuia din criteriile de comparație, pentru $c = b + 1$ seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b}{b+n}$ are aceeași natură cu seria armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ care este divergentă.

2) În condițiile $b, c \in \mathbf{R}_+^*$, $c > b + 1$, $x \in (0, 1)$ avem

$$x^{b-1}(1-x)^{c-b-2} = x^{b-1}(1-x)^{c-b-1}\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{b+n-1}(1-x)^{c-b-1},$$

$$\int_0^1 x^{b-1}(1-x)^{c-b-2}\mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\sum_{n=0}^{\infty} x^{b+n-1}(1-x)^{c-b-1}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{b+n-1}(1-x)^{c-b-1}\mathrm{d}x,$$ deoarece integrala comută cu suma.

În continuare folosim funcțiile Γ, β și obținem

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)},$$

$$\beta(b, c-b-1) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta(b+n, c-b),$$

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b-1)}{\Gamma(c-1)} = \Gamma(c-b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)},$$

$$\frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b-1)}{\Gamma(c-1)} = \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}(S+1),$$

$$1 = \frac{c-b-1}{c-1}(S+1),\ S = \frac{c-1}{c-b-1} - 1 = \frac{b}{c-b-1},\ S \in \mathbf{R}_+^*.$$

2.45. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi convergentă, (S_n) șirul sumelor parțiale și o funcție $f: \mathbf{R}_+ \to [-1, 1]$.

1) Să se studieze natura seriilor de termen general respectiv

$$u_n f(u_n),\ u_n (f(S_n),\ u_n f(nu_n),\ u_n f(nS_n).$$

2) Să se arate că dacă șirul (u_n) este descrescător și există $r, T \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $f(r + nT/2) = (-1)^n$, $n \in \mathbf{N}$, atunci șirul (v_n), $v_n = u_n f(1/u_n)$, $n \in \mathbf{N}$ nu poate fi monoton.

R. 1) Pentru orice $n \in \mathbf{N}$ avem

$$|u_n f(u_n)| = u_n |f(u_n)| \leqslant u_n.$$

Conform unuia din criteriile de comparație rezultă că seria de termen general $u_n f(u_n)$ este absolut convergentă. Analog seriile de termen general respectiv $u_n f(S_n)$, $u_n f(nu_n)$, $u_n f(nS_n)$ sînt absolut convergente.

2) Se consideră funcția $g: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} xf(1/x), & x \in \mathbf{R}_+^* \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

continuă în 0 și șirul (x_n), $1/x_n = r + nT/2$, $n \in \mathbf{N}$.

Deoarece șirul (x_n) este descrescător urmează că $(g(x_n))$, $g(x_n) = (-1)^n \dfrac{2}{2r + nT}$ nu este monoton; cum $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ rezultă că funcția g nu este monotonă în nici o vecinătate a originii. Din convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ avem că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Cum șirul (u_n) este și descrescător, rezultă că șirul (v_n), $v_n = g(u_n)$, $n \in \mathbf{N}$ nu este monoton. Se observă că $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

2.46. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ o serie cu termeni pozitivi convergentă cu suma S, (S_n) șirul sumelor parțiale, $f: \mathbf{R}_+ \to [-1, 1]$ o funcție și mulțimea

$T = \{x \in \mathbf{R}_+ /$ Graficul lui f are în $(x, f(x))$ tangentă (semitangentă) diferită de axele (semiaxele) de coordonate$\}$.

1. Să se studieze natura seriilor de termen general v_n dacă
   1) $0 \in T$, $f(0) = 0$, $v_n = f(u_n)$;
   2) f are limită nenulă în S, $v_n = f(S_n)$;
   3) $S \in T$, $v_n = f(S_n)$;
   4) $0 \in T$, $f(0) = 0$, şirul (u_n) este descrescător, $v_n = f(nu_n)$.

2. Să se arate că seria de termen general $f(nS_n)$ este cel mult semiconvergentă (nu poate fi absolut convergentă) dacă f îndeplineşte condiţiile:
   i) Pentru orice $x, y \in \mathbf{R}_+$, $f(x + y) \leqslant f(x) + f(y)$ (f este subaditivă pe $\mathbf{R}_+$);
   ii) $\inf\limits_{x \in \mathbf{R}_+^*} \frac{f(x)}{x} \in \mathbf{R}^*$ (număr real finit şi nenul).

3. Ce se poate spune despre natura seriilor de termen general $nf(u_n)$ (în cazul 1.4)), respectiv $nf(S_n)$ (în fiecare din cazurile 1.2), 1.3) şi 2. cu $f: \mathbf{R}_+ \to [0, 1]$)?

R. 1.1) Din enunţ rezultă că există $f_d'(0)$, derivata la dreapta a lui f în 0 şi $f_d'(0) \in \mathbf{R}^*$ (finită şi nenulă). Prin definiţie avem $f_d'(0) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x}$. Deoarece $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{|f(x)|}{x} = \left|\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x}\right|$, urmează că există $|f|_d'(0)$, $|f|_d'(0) = |f_d'(0)|$ şi deci $|f|_d'(0) \in \mathbf{R}_+^*$. Cum $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$ $\left(\text{din convergenţa seriei } \sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n\right)$, conform criteriului de comparaţie la limită rezultă că seria de termen general $f(u_n)$ este absolut convergentă.

1.2) Cu observaţia că $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$, avem că seria de termen general $f(S_n)$ este divergentă deoarece nu îndeplineşte condiţia necesară de convergenţă.

1.3) Deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$ şi f este continuă (la stînga) în S rezultă că $\lim\limits_{n \to \infty} f(S_n) = f(S) \neq 0$, deci seria de termen general $f(S_n)$ este divergentă deoarece nu îndeplineşte condiţia necesară de convergenţă (cu menţiunea că $f(S) = 0$ implică $S \notin T$).

1.4) Conform problemei 25. avem că $\lim\limits_{n \to \infty} nu_n = 0$. Analog cu 1.1), obţinem că seria de termen general $|f(nu_n)|$ are aceeaşi natură cu seria de termen general nu_n care poate fi divergentă sau convergentă. De exemplu seria armonică generalizată $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ cu $\alpha > 1$ este convergentă, şirul $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ este descrescător, $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, dar seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ este divergentă pentru $\alpha \leqslant 2$ şi convergentă pentru $\alpha > 2$. Rezultă că seria de termen general $f(nu_n)$ este absolut convergentă, respectivul mult semiconvergentă dacă seria de termen general nu_n este convergentă, respectiv divergentă.

2) În cazul mai general (generalizare şi a problemei 10.)

i') $\alpha \geqslant 0$, $f: [\alpha, \infty) \to \mathbf{R}$ subaditivă,

ii') Pentru orice $A \subseteq [2\alpha, \infty)$, $\sup f(A) < \infty$ se demonstrează că $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \inf\limits_{x > \alpha} \frac{f(x)}{x} < \infty$ (vezi E. Hille, R. Phillips, Functional analysis and semi-groups, cap. VII, Amer. Math. Soc., Colloq. Public., vol. XXXI, 1957).

Există $m = \inf\limits_{x > \alpha} \frac{f(x)}{x}$ conform axiomei marginii inferioare în $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$:

„Orice mulţime nevidă admite infimum”,

deoarece mulţimea minoranţilor conţine cel puţin elementul $-\infty$.

Dintre cazurile posibile $m = -\infty$ şi $m \in \mathbf{R}^*$ ne ocupăm de ultimul. Avem $m = \inf\limits_{x > \alpha} \frac{f(x)}{x}$ ddacă i1 şi i2, unde

i1: $\forall x \in (\alpha, \infty)$, $m \leqslant \frac{f(x)}{x}$,

i2: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists a \in (\alpha, \infty)$, $m \leqslant \frac{f(a)}{a} < m + \varepsilon$.

Fie $x > \alpha$, $n \in \mathbf{N}^*$ arbitrar fixaţi astfel încît $x - na \in [a, 2a]$, adică $a(n+1) \leqslant x \leqslant a(n+2)$. Conform i1, i') avem

$$m \leqslant \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x - na + na)}{x} \leqslant \frac{f(x - na) + f(na)}{x} \leqslant \ldots \leqslant \frac{f(x - na) + nf(a)}{x} =$$
$$= \frac{f(x - na)}{x} + \frac{n}{x} f(a).$$

Din ii') rezultă că există $M \in \mathbf{R}_+^*$ astfel încît $|f(x - na)| \leqslant M$. Conform proprietăţilor limitei urmează că $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x - na)}{x} = 0$.

Folosim dubla inegalitate $a(n+1) \leqslant x \leqslant a(n+2)$ şi obţinem

$$x \to \infty \text{ dacă } n \to \infty \text{ şi } \frac{n}{a(n+2)} \leqslant \frac{n}{x} \leqslant \frac{n}{a(n+1)}.$$

Din i2 şi prin trecere la limită (după x sau n) în dubla inegalitate $m \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(x - na)}{x} + \frac{f(a)}{a} \frac{n}{n+1}$ rezultă $m = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$. Cum $\lim\limits_{n \to \infty} nS_n = \infty$ (seria de termen general nS_n este divergentă) şi $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{x} = \left| \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \right| = |m|$, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{|f(x)|}{x} \in \mathbf{R}_+^*$, conform criteriului de comparaţie la limită rezultă că seria de termen general $|f(nS_n)|$ este divergentă, deci seria de termen general $f(nS_n)$ nu poate fi absolut convergentă.

3. În cazul 1.4) seria de termen general $|nf(u_n)|$ are aceeaşi natură cu seria de termen general nu_n care poate fi divergentă sau convergentă. Deci seria de termen general $nf(u_n)$ este absolut convergentă, respectiv cel mult semiconvergentă, dacă seria de termen general nu_n este convergentă, respectiv divergentă. Pentru seria de termen general $nf(S_n)$ avem: În cazurile 1.2), 1.3) este divergentă deoarece $\lim\limits_{n \to \infty} nf(S_n) = \infty$. În cazul 2. cu $f: R_+ \to [0, 1]$ este divergentă, conform criteriului de comparaţie pentru serii cu termeni pozitivi (cu inegalităţi), deoarece seria de termen general $f(nS_n)$ este divergentă şi $nf(S_n) \geqslant f(nS_n)$.

CAPITOLUL 3

FUNCȚII. LIMITE. CONTINUITATE. DERIVABILITATE PE R

3.1. Folosind — Criteriul lui Cauchy—Bolzano să se arate că funcția $f: \mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ are limită în $x = 0$ și să se calculeze această limită.

R. Criteriul lui Cauchy—Bolzano:

„Fie f o funcție definită pe o mulțime A și x_0 (x_0 finit) punct de acumulare al lui A. Atunci f are limită finită în x_0, dacă și numai dacă, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît oricare ar fi x', $x'' \in V \cap A$, $x' \neq x_0$, $x'' \neq x_0$ avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$".

a) Arătăm că oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi x', x'', $x' \neq 0$, $x'' \neq 0$ cu $|x'| < \eta(\varepsilon)$ și $|x''| < \eta(\varepsilon)$, avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Avem:

$$|f(x') - f(x'')| = \left| x' \sin \frac{1}{x'} - x'' \sin \frac{1}{x''} \right| = \left| x' \sin \frac{1}{x'} \right| + \left| x'' \sin \frac{1}{x''} \right| \leqslant$$
$$\leqslant |x'| + |x''|.$$

Fiind dat $\varepsilon > 0$ arbitrar, e suficient să alegem $\eta = \varepsilon/2$, astfel încît pentru $|x'| < \varepsilon/2$, $|x''| < \varepsilon/2$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

b) Calculăm $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Ținem seama că $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqslant 1$ și că $\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|$. Apoi aplicăm teorema: „Dacă $|f(x)| < M$ și $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ atunci $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = 0$". Cu $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ și $g(x) = x$, obținem: $\lim\limits_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$.

3.2. Pentru ce valoare a constantei $\alpha \in \mathbf{R}$ funcția:

$$f: (1/e^2, 2] \to \mathbf{R} \text{ dată de:}$$

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha x \ln(xe) + x^2}, & x \in (1/e^2, 1) \\ \alpha + x/2, & x \in [1, 2) \end{cases}$$

are limită în punctul $x = 1$?

R. Pentru ca funcţia să aibă limită în punctul $x = 1$ trebuie ca limitele laterale în acest punct să fie egale. Avem:

$$l_s = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{\alpha x - 2\alpha \ln (xe) + x^2} = \sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 1} = |\alpha - 1|,$$

$$l_d = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (\alpha + x/2) = \alpha + 1/2 = \alpha + 1/2$$

Trebuie, deci, ca: $|\alpha - 1| = \alpha + 1/2$. Pentru $\alpha \in (-\infty, 1)$ rezolvăm ecuaţia $-\alpha + 1 = \alpha + 1/2$ deci $\alpha = 1/4$. Pentru $\alpha = 1$ avem $\alpha + 1/2 = 0$, de unde $\alpha = -1/2$. Pentru $\alpha \in (1, +\infty)$ nu avem soluţii. Rezultă că funcţia $f(x)$ admite limită în punctul $x = 1$ numai pentru $\alpha = 1/4$. Verificare: Într-adevăr, avem

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sqrt{\frac{1}{16} - \frac{1}{2} x \ln (xe) + x^2} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{2}\right), \text{ adică}$$

$$\sqrt{1/16 - 1/2 + 1} = 1/4 + 1/2 \text{ sau } 3/4 = 3/4$$

Arătăm că pentru orice $x \in (1/e^2, 1)$ radicalul are sens oricare ar fi α. Pentru ca radicalul să aibă sens trebuie ca: $\alpha^2 - 2\alpha x \ln (xe) + x^2 \geqslant 0$ sau $2\alpha x \ln (xe) \leqslant x^2 + \alpha^2$.
Pentru $x \in (1/e^2, 1)$, avem $|\ln xe| < 1$, prin urmare $|2\alpha x \ln (xe)| < < 2|\alpha||x| \leqslant x^2 + \alpha^2$ pentru că $(|x| - |\alpha|)^2 = x^2 + \alpha^2 - 2|\alpha||x| \geqslant 0$ şi $2|\alpha||x| = x^2 + \alpha^2$.

3.3. Să se cerceteze existenţa limitei funcţiei:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2}, & x < 2 \\[2ex] \dfrac{4}{\sqrt{e}}\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}}, & x > 2 \end{cases}$$

în punctul $x = 2$.

R. Calculăm limitele laterale în punctul $x = 2$:

$$l_s = \lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 3x + 2} = \frac{0}{12} = 0,$$

$$l_d = \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{4}{\sqrt{e}}\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-2}} = \frac{4}{\sqrt{e}}\left[\lim_{x\to 2+0}\left(1 + \frac{x-2}{2}\right)^{\frac{2}{x-2}}\right] = 4.$$

Deoarece limita la stînga este diferită de limita la dreapta, rezultă că funcţia nu are limită în punctul $x = 2$.

3.4. Să se cerceteze dacă funcţia $f: \mathbf{R} - \{2\} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 1\Big/\left(1 + e^{\frac{1}{x-2}}\right)$ are limită în punctul $x = 2$.

R. Pentru ca o funcţie să aibă limită într-un punct trebuie ca limitele laterale în acel punct să fie egale. Avem: $\lim\limits_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = -\infty$ deci $\lim\limits_{x \to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$ şi $\lim\limits_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = +\infty$ deci $\lim\limits_{x \to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = \infty$.

Prin urmare: $l_s = \lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} 1 \Big/ \left(1 + e^{\frac{1}{x-2}}\right) = 1$, $l_d = \lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = $

$= \lim\limits_{x \to 2+0} 1 \Big/ \left(1 + e^{\frac{1}{x-2}}\right) + 0.$

Limitele laterale în $x = 2$ fiind diferite rezultă că funcţia dată nu are limită în acest punct.

3.5. Să se calculeze:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$$

R. Sîntem în cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$. Deoarece radicalii au indici diferiţi îi aducem la acelaşi indice după care amplificăm fracţia cu conjugata expresiei care conţine radicalii, ţinînd seama de formula:

$$(\sqrt[6]{a} - \sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a^5} + \sqrt[6]{a^4 b} + \sqrt[6]{a^3 b^2} + \sqrt[6]{a^2 b^3} + \sqrt[6]{a b^4} + \sqrt[6]{a^5}) = a - b.$$

Avem:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[6]{\cos^3 x} - \sqrt[6]{\cos^2 x}}{\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^3 x - \cos^2 x}{\sin^2 x(\sqrt[6]{\cos^{15} x} + \sqrt[6]{\cos^{14} x} + \sqrt[6]{\cos^{13} x} + \sqrt[6]{\cos^{12} x} + \sqrt[6]{\cos^{11} x} + \sqrt[6]{\cos^{10} x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos^2 x(\cos x - 1)}{\sin^2 x(\sqrt[6]{\cos^{15} x} + \sqrt[6]{\cos^{14} x} + \sqrt[6]{\cos^{13} x} + \sqrt[6]{\cos^{12} x} + \sqrt[6]{\cos^{11} x} + \sqrt[6]{\cos^{10} x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\cos^2 x \sin^2 \frac{x}{2}}{4\sin^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} (\sqrt[6]{\cos^{15} x} + \sqrt[6]{\cos^{14} x} + \sqrt[6]{\cos^{13} x} + \sqrt[6]{\cos^{12} x} + \sqrt[6]{\cos^{11} x} + \sqrt[6]{\cos^{10} x})} =$$

$$= \frac{-2}{4 \cdot 6} = -\frac{1}{12}.$$

Acelaşi rezultat se obţine aplicînd regula lui l'Hospital pentru cazul $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} + \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}}}{2\sin x \cdot \cos x} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{\cos^2 x}} - \frac{1}{2\sqrt{\cos x}}\right) \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}.$$

3.6. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1+4x) + \ldots + \ln(1+n^2x)}{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin mx}.$$

(Examen)

R. Aplicăm regula lui l'Hospital pentru a înlătura nedeterminarea $\left(\text{cazul } \frac{0}{0}\right)$. Avem:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) + \ln(1+4x) + \ldots + \ln(1+n^2x)}{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin mx} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{4}{1+4x} + \ldots + \dfrac{n^2}{1+n^2x}}{\cos x + 2\cos 2x + \ldots + m\cos mx} = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{1 + 2 + \ldots + m} =$$

$$= \frac{\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{\dfrac{m(m+1)}{6}} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3m(m+1)}.$$

3.7. Să se calculeze:

$$\lim_{x\to 0} (1 + \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)^{1/x}.$$

(Examen)

R. Sîntem în cazul de nedeterminare 1^∞. Avem:

$$\lim_{x\to 0} (1 + \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx)^{1/x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left\{[1 + (\sin x + \ldots + \sin nx)]^{1/(\sin x + \ldots + \sin nx)}\right\}^{(\sin x + \ldots + \sin nx)/x}.$$

Dar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} + \frac{\sin 2x}{x} + \ldots + \frac{\sin nx}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} + 2\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} + \ldots + n\lim_{x\to 0} \frac{\sin nx}{nx} =$$

$$= 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Deci limita este $e^{n(n+1)/2}$.

3.8. Să se determine parametrul real α pentru care funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{tg} 6(x-1)}{\sin 2(x-1)}, & x < 1 \\ \sqrt{\alpha^2 + 4 + 4\alpha/e^{x-1}}, & x > 1 \end{cases}$$

are limită în punctul $x = 1$.

R. Calculăm limitele laterale în punctul $x = 1$

$$l_s = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{\operatorname{tg} 6(x-1)}{\sin 2(x-1)} = 3 \lim_{x\to 1-0} \frac{\dfrac{\operatorname{tg} 6(x-1)}{6(x-1)}}{\dfrac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)}} = 3$$

$$l_d = \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \sqrt{\alpha^2 + 4 + \frac{4\alpha}{e^{x-1}}} = \sqrt{\alpha^2 + 4 + 4\alpha} = \alpha + 2.$$

Pentru ca funcţia să aibă limită în punctul $x = 1$ trebuie ca $l_s = l_d$; deci $\alpha = 1$.

3.9. Să se studieze funcţia: $f(x) = \sqrt[p]{x} - [\sqrt[p]{x}]$, $p \in \mathbf{N}$, $x \geqslant 0$, unde $[\sqrt[p]{x}]$ reprezintă partea întreagă a numărului $\sqrt[p]{x}$ şi să i se traseze graficul.

R. Ştiind că:

$$[\sqrt[p]{x}] = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \in [1, 2^p) \\ 2, & x \in [2^p, 3^p) \\ \dots\dots\dots & \\ n, & x \in [n^p, (n+1)^p) \end{cases} \qquad \text{avem } f(x) = \sqrt[p]{x} - [\sqrt[p]{x}] =$$

$$= \begin{cases} \sqrt[p]{x}, & x \in [0, 1) \\ \sqrt[p]{x} - 1, & x \in [1, 2^p) \\ \sqrt[p]{x} - 2, & x \in [2^p, 3^p) \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ \sqrt[p]{x} - n, & x \in [n^p, (n+1)^p) \end{cases}.$$

Pe fiecare interval de forma $[k^p, (k+1)^p)$, $k = 0, 1, \dots, n$ funcţia este continuă şi strict crescătoare. În punctele $x = n^p$ avem $f(n^p) = n - n = 0$ iar limitele laterale $l_s = \lim\limits_{x\to n^p-0} f(x) = \sqrt[p]{n^p} - n + 1 = 1$ şi $l_d = \lim\limits_{x\to n^p+0} f(x) = n - n = 0$ sînt diferite; rezultă că $f(x)$ este discontinuă în aceste puncte; (este continuă numai la dreapta în $x = n^p$).

Graficul este dat în figura 3.1. şi se obţine translatînd pe fiecare interval graficul funcţiei $\sqrt[p]{x}$.

3.10. Să se studieze continuitatea funcţiei:

$$f(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \dots + b_{m-1}x + b_m}, \quad x \in \mathbf{R} - I,$$

unde I este mulţimea punctelor în care se anulează numitorul.

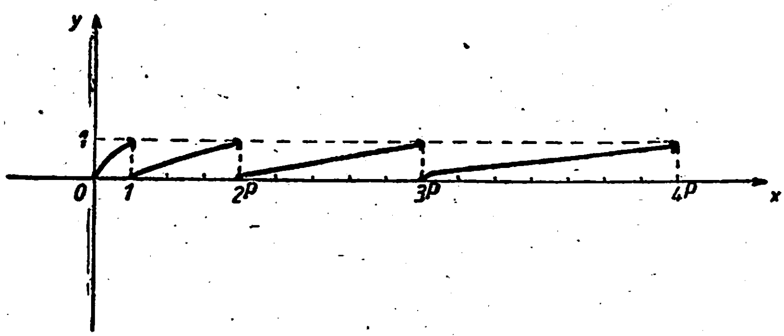


Fig. 3.1

R. Notăm $g(x) = b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$.

Funcţia $f(x)$ este definită pentru $x \in \mathbf{R} - \{x \in \mathbf{R} \mid g(x) = 0\}$ şi este continuă pe tot domeniul de definiţie. În punctele $x \in \mathbf{R}$ pentru care $g(x) = 0$, nu se pune problema studierii continuităţii, deoarece în aceste puncte funcţia nu este definită.

3.11. Să se stabilească dacă funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x > 0 \\ -x^2 + x, & x \leqslant 0 \end{cases}$$

este continuă în punctul $x = 0$.

R. Pentru aceasta trebuie calculate limitele laterale în $x = 0$:

$$l_s = \lim_{x \to 0-0} f(x); \quad \lim_{x \to 0-0} (-x^2 + x) = 0;$$

$$l_d = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \text{ deoarece } 0 \leqslant \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|.$$

Avem: $f(0) = 0$. Pentru că $l_s = l_d = f(0)$ rezultă că funcţia este continuă în punctul $x = 0$. Graficul funcţiei este dat în figura 3.2.

3.12. Să se studieze continuitatea funcţiei:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x - 1|\sqrt{1 + x}}{\sin \pi x}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

în punctul $x = 1$.

R. Pentru a studia dacă funcţia este continuă în punctul $x = 1$ vom calcula limitele laterale în acest punct:

$$l_s = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \frac{|x - 1|\sqrt{1 + x}}{\sin \pi x} = -\lim_{x \to 1-0} \frac{(x - 1)\sqrt{1 + x}}{\sin \pi x}.$$

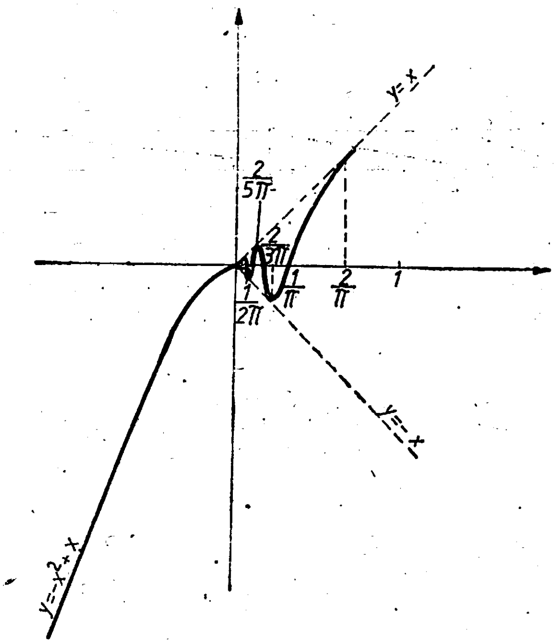


Fig. 3.2

Notăm $y = x - 1$, de unde $x = y + 1$ şi ţinem seama că:

$$\sin \pi(y+1) = -\sin \pi y. \tag{1}$$

Avem în continuare:

$$l_s = -\sqrt{2} \lim_{y\to 0-0} \frac{y}{\sin \pi(y+1)} = \sqrt{2} \lim_{y\to 0-0} \frac{y}{\sin \pi y} = \sqrt{2} \lim_{y\to 0-0} \frac{\pi y}{\sin \pi y} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

Calculăm: $l_d = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{|x-1|\sqrt{1+x}}{\sin \pi x} = \lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{(x-1)\sqrt{1+x}}{\sin \pi x}.$

Notăm: $y = x - 1$, deci $x = y + 1$ şi ţinem seama de (1). Avem:

$$l_d = \sqrt{2} \lim_{y\to 0+0} \frac{y}{\sin \pi(y+1)} = -\sqrt{2} \lim_{y\to 0+0} \frac{\pi y}{\sin \pi y} \cdot \frac{1}{\pi} = -\frac{\sqrt{2}}{\pi}.$$

În final: $l_s \neq l_d$, deci funcţia nu este continuă în punctul $x = 1$ (discontinuitate de speţa întîi).

3.13. Să se studieze continuitatea funcţiei

$$f(x) = \begin{cases} \cos \pi x/2, & |x| \leqslant 1, \\ |x-1|, & |x| > 1. \end{cases}$$

R. Explicitînd modulul

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \in [1, +\infty) \\ -x+1, & x \in (-\infty, 1) \end{cases}$$

avem:

$$f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in (-\infty, -1) \\ \cos \pi x/2, & x \in [-1, 1] \\ x-1, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Deoarece pe intervalul $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ funcţia considerată este continuă, rămîne de studiat continuitatea în punctele: $x = -1$ şi $x = 1$. În punctul $x = -1$ avem:

$$l_s = \lim_{x \to -1-0} f(x) = \lim_{x \to -1-0} (-x+1) = 2,$$

$$l_d = \lim_{x \to -1+0} f(x) = \lim_{x \to -1+0} \cos \frac{\pi x}{2} = 0 \text{ şi } f(-1) = 0,$$

deci în acest punct $f(x)$ nu este continuă (este continuă numai la dreapta), discontinuitatea fiind de speţa întîi. În punctul $x = 1$ avem:

$$l_s = \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} \cos \frac{\pi x}{2} = 0,$$

$$l_d = \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} (x-1) = 0 \text{ şi } f(1) = 0$$

prin urmare $f(x)$ este continuă în acest punct.

Rezultă că funcţia $f(x)$ este continuă pe $\mathbf{R} - \{-1\}$.

Graficul ei este dat de figura 3.3.

3.14. Să se determine α real astfel încît funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln[1 + \ln(2-x)]}{(x-1)^\alpha}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

să fie continuă în $x = 1$.

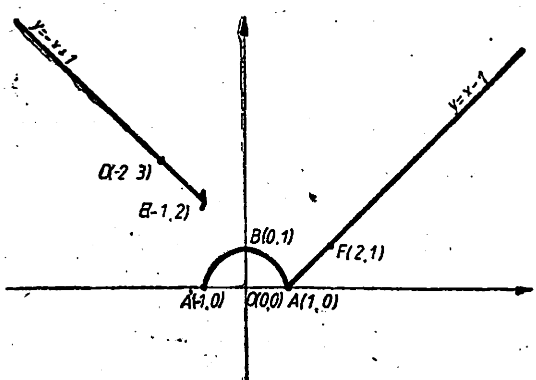


Fig. 3.3

R. Avem:

$$l_s = \lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{\ln[1+\ln(2-x)]}{(x-1)^\alpha} = \lim_{x\to 1-0} \frac{\ln[1+\ln(2-x)]}{\ln(2-x)} \cdot \frac{\ln(2-x)}{(x-1)^\alpha}.$$

Folosind $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\log_a(1+f(x))}{f(x)} = \log_a e$ pentru $a > 1$ şi $f(x) > -1$, rezultă că:

$$l_s = \ln e \cdot \lim_{x\to 1-0} \frac{\ln(2-x)}{(x-1)^\alpha} = -\lim_{x\to 1-0} \frac{\ln[1+(1-x)]}{(1-x)^\alpha}.$$

Pentru ca funcţia $f(x)$ să fie continuă în punctul $x = 1$ trebuie ca: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = -1$, deci $\alpha = 1$.

3.15. Să se studieze continuitatea funcţiei:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{x - \pi}, & x \neq k\pi,\ k \in \mathbf{N} \\ 1, & x = k\pi \end{cases}$$

R. Pentru a studia continuitatea funcţiei în punctele $k\pi$ vom considera separat cazurile în care k este par şi k impar.

a) $k = 2m$. Avem:

$$l_s = \lim_{x\to 2m\pi-0} f(x) = \lim_{x\to 2m\pi-0} \frac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{x - \pi} = \frac{2m\pi}{(2m-1)\pi} = \frac{2m}{2m-1}$$

$$l_d = \lim_{x\to 2m\pi+0} f(x) = \lim_{x\to 2m\pi+0} \frac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{x - \pi} = \infty$$

$\left(\text{deoarece } \lim\limits_{x\to 2m\pi-0} e^{\frac{1}{\sin x}} = e^{-\infty} = 0 \text{ şi } \lim\limits_{x\to 2m\pi+0} e^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\infty} = \infty\right)$ şi $f(2m\pi) = 1$. Deoarece $l_s \neq l_d$, funcţia nu are limită în $x = 2m\pi$, deci nu este continuă. Discontinuitatea este de speţa a doua.

b) $k = 2m + 1$. Avem:

$$l_s = \lim_{x\to(2m+1)\pi-0} f(x) = \lim_{x\to(2m+1)\pi-0} \frac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{x - \pi} = \infty,$$

pentru că $\lim\limits_{x\to(2m+1)\pi-0} e^{\frac{1}{\sin x}} = \infty$;

$$l_d = \lim_{x\to(2m+1)\pi+0} f(x) = \lim_{x\to(2m+1)\pi+0} \frac{x + e^{\frac{1}{\sin x}}}{x - \pi} = \frac{(2m+1)\pi}{(2m+1)\pi - \pi} = \frac{2m+1}{2m},$$

$$m \neq 0, \text{ şi } f((2m+1)\pi) = 1.$$

Deoarece limitele laterale sînt diferite, rezultă că $f(x)$ nu are limită în punctele $(2m+1)\pi$, deci nu este continuă. Discontinuitatea este de speţa a doua. Rămîne de studiat continuitatea în punctul $x=\pi$.

$$l_s = \lim_{x\to\pi-0} f(x) = \lim_{x\to\pi-0} \frac{x+e^{\frac{1}{\sin x}}}{x-\pi} = -\infty$$

$$l_d = \lim_{x\to\pi+0} f(x) = \lim_{x\to\pi+0} \frac{x+e^{\frac{1}{\sin x}}}{x-\pi} = +\infty, \text{ pentru că}$$

$$\lim_{x\to\pi-0} e^{\frac{1}{\sin x}} = e^{\infty} = \infty \text{ şi } \lim_{x\to\pi+0} e^{\frac{1}{\sin x}} = e^{-\infty} = 0.$$

Avem: $l_s \neq l_d$, deci $f(x)$ nu are limită în punctul $x=\pi$. Rezultă că $f(x)$ nu este continuă în $x=\pi$. Discontinuitatea este de speţa a doua.

3.16. Se dau funcţiile:

$$f(x) = \begin{cases} k, & x \in \mathbf{Q} \\ -k, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases} \text{ şi } g(x) = \begin{cases} -k, & x \in \mathbf{Q} \\ k, & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}$$

Să se demonstreze că funcţiile sînt discontinue în fiecare punct şi că suma lor este o funcţie continuă.

R. O funcţie f este continuă într-un punct x_0 din domeniul de definiţie, dacă, oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există $\eta_\varepsilon > 0$, astfel încît dacă $|x - x_0| < \eta_\varepsilon$, atunci $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Considerăm $x_0 \in \mathbf{Q}$ şi un punct oarecare $x \notin \mathbf{Q}$.

Avem: $|f(x) - f(x_0)| = |-k-k| = 2k$, de unde rezultă că f nu este continuă în punctul $x = x_0$.

Iar pentru g, avem: $|g(x) - g(x_0)| = |k+k| = 2k$, de unde rezultă că nici g nu este continuă în $x = x_0$. Calculăm: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0$ pentru orice x. Funcţia $f+g$ este continuă.

3.17. Să se studieze uniform continuitatea funcţiei:

$$f(x) = x\cos^2 x^2 \text{ pe orice interval } [a, b] \subset \mathbf{R}.$$

R. Alegem

$$x_n' = \sqrt{n\pi},\ x_n'' = \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}},\ n \in \mathbf{N}$$

şi calculăm:

$$|x_n' - x_n''| = \left|\sqrt{n\pi} - \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\right| = \left|\frac{n\pi - n\pi - \frac{\pi}{2}}{\sqrt{n\pi} + \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}}\right| =$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{n\pi} + \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}} < \eta_\varepsilon.$$

Avem:

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = \left|\sqrt{n\pi}(\cos n\pi)^2 - \sqrt{(2n+1)\frac{\pi}{2}}\left(\cos (2n+1)\frac{\pi}{2}\right)^2\right| =$$

$$= |\sqrt{n\pi} - 0| = \sqrt{n\pi} > 1.$$

Rezultă că $f(x)$ nu este uniform continuă.

3.18. Să se studieze continuitatea uniformă a funcţiilor:

a) $f(x) = \sin^p x^2$, $p \in \mathbf{N}$ $x \in [a, b] \subset \mathbf{R}$

b) $f(x) = \cos^p x^2$.

R. a) Funcţia $f(x)$ este definită pe $\mathbf{R}$ şi continuă pe orice interval închis $[a, b]$, deci este uniform continuă pe $[a, b]$. Arătăm că pe $\mathbf{R}$ funcţia nu este uniform continuă. Pentru aceasta considerăm şirurile

$$x_n' = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}};\quad x_n'' = \sqrt{2\pi n}.$$

Avem:

$$x_n' - x_n'' = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} - \sqrt{2\pi n} = \frac{2\pi n + \frac{\pi}{2} - 2\pi n}{\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2\pi n}} =$$

$$= \frac{\pi}{2\left(\sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} + \sqrt{2\pi n}\right)}$$

şi:

$$f(x_n') - f(x_n'') = \sin^p x_n'^2 - \sin^p x_n''^2 = \sin^p \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} - \sin^p \sqrt{2\pi n} = 1,$$

pentru că:

$$\sin^p x^2 = \begin{cases} 1, & x^2 = 2\pi n + \frac{\pi}{2},\ n \in \mathbf{N}, \\ 0, & x^2 = \pi n \\ (-1)^p, & x^2 = 2\pi n + \frac{3\pi}{2}. \end{cases}$$

Diferenţa $x_n' - x_n''$ se poate face oricît de mică, dar $|f(x_n') - f(x_n'')| = 1$. Prin urmare funcţia $f(x)$ nu este uniform continuă.

b) Considerăm şirurile

$$x_n' = \sqrt{2\pi n} \text{ şi } x_n'' = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}.$$

Avem:

$$x_n' - x_n'' = \sqrt{2\pi n} - \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}}$$

şi

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = \left| |\cos^p 2\pi n - \cos^p \left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) \right| = 1,$$

pentru că avem:

$$\cos^p x^2 = \begin{cases} 0, & x^2 = \pi n + \frac{\pi}{2} \\ 1, & x^2 = 2\pi n \\ (-1)^p, & x^2 = (2n+1)\pi. \end{cases}$$

Deci diferenţa $x_n' - x_n''$ poate fi făcută mai mică decît orice număr real pozitiv, dar $|f(x_n') - f(x_n'')| = 1$ şi funcţia $g(x) = \cos^p x^2$, $p \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$ nu este uniform continuă.

3.19. Să se prelungească funcţia:

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{-1}{x^2}}, \quad x \in \mathbf{R} - \{0\},$$

prin continuitate în punctul $x = 0$.

R. Pentru calculul limitelor laterale în punctul $x = 0$ utilizăm formula:

$$x = e^{\ln x}, \quad x > 0.$$

Avem:

$$l_s = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0-0} e^{\ln \frac{1}{x^2}} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0-0} e^{\ln \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0-0}\left(\ln 1 - \ln x^2 - \frac{1}{x^2}\right)} = e^{-\lim\limits_{x \to 0-0}\left(\ln x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{x \to 0-0} \frac{x^2 \ln x^2 + 1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0$$

deoarece pentru a calcula $\lim (x^2 \ln x^2 + 1)$, $x \to 0-0$, trebuie eliminat cazul de nedeterminare $0 \cdot (-\infty)$ şi deoarece:

$$\lim_{x\to 0-0} x^2 \ln x^2 = \lim_{x\to 0-0} \frac{\ln x^2}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0-0} \frac{\frac{2x}{x^2}}{-\frac{2x}{x^4}} = -\lim_{x\to 0-0} x^2 = 0$$

Analog:

$$l_d = \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{-1}{x^2}} = e^{-\infty} = 0.$$

Pentru ca funcţia să fie continuă în punctul $x = 0$ trebuie prelungită astfel încît în acest punct să ia valoarea zero. Avem:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

3.20. Să se prelungească prin continuitate în punctul $x = 0$ funcţia

$$f(x) = (1 + x)^{1/x},\ x \in (-1, +\infty) - \{0\}.$$

R. Calculăm limitele laterale în punctul $x = 0$ şi punem condiţia ca valoarea funcţiei $\bar{f}$ în acest punct să fie egală cu valoarea comună a acestora. Avem:

$$l_s = \lim_{x\to 0-0} (1 + x)^{1/x} = e,\quad l_d = \lim_{x\to 0+0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Deci:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} (1 + x)^{1/x}, & x \in (-1, +\infty) - \{0\}, \\ e, & x = 0. \end{cases}$$

3.21. Să se prelungească funcţia:

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1},\ x \in [-1, +\infty) - \{0\}$$

în punctul $x = 0$, astfel încît funcţia prelungită $\bar{f}$ să fie continuă în acest punct.

R. Pentru ca funcţia să fie continuă în $x = 0$ trebuie ca valoarea ei în acest punct să coincidă cu valoarea limitelor laterale ale funcţiei $f(x)$ în $x = 0$. Avem:

$$l_s = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt[3]{1 + x} - 1} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x(\sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{1 + x} + 1)}{x(\sqrt{1 + x} + 1)} =$$

$$= \lim_{x\to 0-0} \frac{\sqrt[3]{(1 + x)^2} + \sqrt[3]{1 + x} + 1}{\sqrt{1 + x} + 1} = \frac{3}{2};\ l_d = \lim_{x\to 0+0} f(x) = \frac{3}{2}$$

Deci:

$$\bar{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, & x\in[-1,+\infty)-\{0\},\\ \dfrac{3}{2}.\end{cases}$$

3.22. Să se studieze derivabilitatea şi să se calculeze derivata de ordinul întîi a funcţiei:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x^2+11}, & x\in(-\infty,4]\\ \dfrac{8x+49}{27}, & x\in(4,+\infty)\end{cases}$$

R. Pentru $(-\infty, 4)$ funcţia $f(x)=\sqrt[3]{x^2+11}$ este derivabilă şi $f'(x)=$ $=\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+11)^2}}$. Pentru $x\in(4,+\infty)$ funcţia $f(x)=\dfrac{8x+49}{27}$ este derivabilă şi $f'(x)=\dfrac{8}{27}$.

Rămîne de studiat derivabilitatea în punctul $x=4$.

Avem:

$$f_s'(4)=\lim_{x\to4-0}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4-0}\frac{\sqrt[3]{x^2+11}-\sqrt[3]{27}}{x-4}=\lim_{x\to4-0}\frac{\sqrt[3]{x^2+11}-3}{x-4}=$$

$$=\lim_{x\to4-0}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)\left(\sqrt[3]{(x^2+11)^2}+3\sqrt[3]{x^2+11}+9\right)}=\frac{9}{27},$$

$$f_d'(4)=\lim_{x\to4+0}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4+0}\frac{\dfrac{8x+49}{27}-3}{x-4}=\lim_{x\to4+0}\frac{8x-32}{27(x-4)}=\frac{8}{27}.$$

Deoarece $f_s'(4)=f_d'(4)=\dfrac{8}{27}$, rezultă că $f(x)$ este derivabilă pe tot domeniul de definiţie şi avem:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+11)^2}}, & x\in(-\infty,4]\\ \dfrac{8}{27}, & x\in(4,+\infty).\end{cases}$$

3.23. Să se studieze derivabilitatea şi să se calculeze derivata de ordinul întîi a funcţiei:

$$f(x)=\max(\cos x, \cos^3 x),\ x\in[0,\pi].$$

R. Pentru $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $0\leqslant\cos x\leqslant1$ şi $\cos x>0$ prin urmare $\cos^3x<$ $<\cos x$ deci: $\max\limits_{x\in[0,\pi/2]}(\cos x,\cos^3x)=\cos x$. Pentru $x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, $-1\leqslant$

$\leqslant \cos x < 0$ şi $\cos x < 0$, deci $\cos^3 x > \cos x$, de unde rezultă că $\max\limits_{x\in[0,\pi/2]} (\cos x, \cos^3 x) = \cos^3 x$. Avem:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \cos^3 x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \quad \text{şi } f'(x) = \begin{cases} -\sin x, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ -3\cos^2 x \cdot \sin x, & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

Calculăm derivatele laterale în punctul $x = \frac{\pi}{2}$ pornind de la definiţie:

$$f_s'(\pi/2) = \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{\cos x - 0}{x - \pi/2} = \lim_{x\to\pi/2+0} \frac{-\sin x}{1} = -1$$

$$f_d'(\pi/2) = \lim_{x\to p/2+0} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{\cos^3 x - 0}{x - \pi/2} = \lim_{x\to\pi/2-0} \frac{-3\cos^2 x \sin x}{1} = 0$$

Avem:

$$f_s'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq f_d'\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

prin urmare funcţia nu este derivabilă în punctul $x = \pi/2$. În concluzie $f(x)$ este derivabilă pe intervalul

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right].$$

Graficul funcţiei $f(x)$ este dat în figura 3.4.

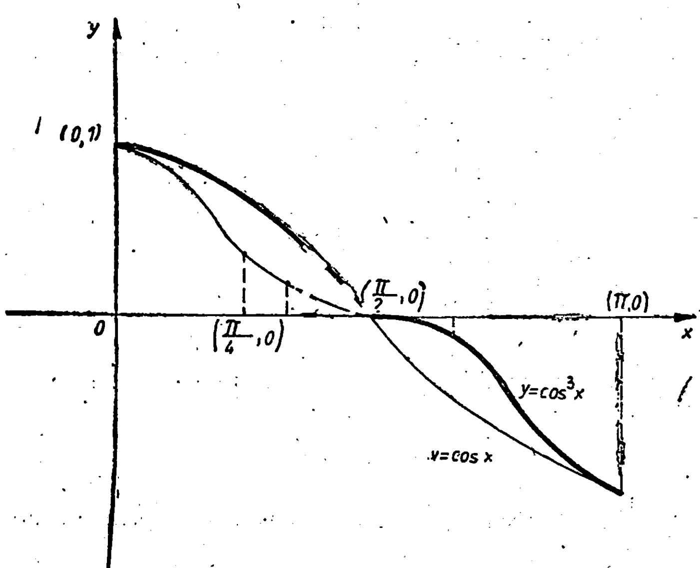


Fig. 3.4

3.24. Să se studieze derivabilitatea şi să se calculeze derivata de ordinul întîi a funcţiei

$$f(x) = |\cos^3 x|, \ x \in [0, \pi].$$

R. Funcţia $f(x)$ este dată de:

$$f(x) = \begin{cases} \cos^3 x, & x \in [0, \pi/2] \\ -\cos^3 x, & x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Pentru $x \in [0, \pi/2)$ funcţia $f(x) = \cos^3 x$ este derivabilă şi $f'(x) = -3\cos^2 x \cdot \sin x$. Pentru $x \in (\pi/2, \pi]$ funcţia $f(x) = -\cos^3 x$ este derivabilă şi $f'(x) = 3\cos^2 x \sin x$.

În punctul $x = \pi/2$ avem:

$$f_s'(\pi/2) = \lim_{x \to \pi/2 - 0} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \lim_{x \to \pi/2 - 0} \frac{\cos^3 x - 0}{x - \pi/2} = \lim_{x \to \pi/2 - 0} \frac{-3\cos^2 x \sin x}{1} = 0;$$

$$f_d'(\pi/2) = \lim_{x \to \pi/2 + 0} \frac{f(x) - f(\pi/2)}{x - \pi/2} = \lim_{x \to \pi/2 + 0} \frac{-\cos^3 x - 0}{x - \pi/2} = \lim_{x \to \pi/2 + 0} \frac{3\cos^2 x \sin x}{1} = 0.$$

Deoarece $f_s'\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_d'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, rezultă că $f(x)$ este derivabilă în punctul $x = \frac{\pi}{2}$. Deci:

$$f'(x) = \begin{cases} -3\cos^2 x \sin x, & x \in [0, \pi/2] \\ 3\cos^2 x \sin x, & x \in (\pi/2, \pi]. \end{cases}$$

Graficul funcţiei $f(x)$ este dat în figura 3.5.

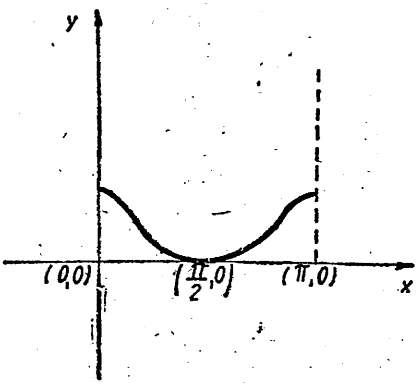


Fig. 3.5

3.25 Să se studieze derivabilitatea şi să se calculeze derivata de ordinul întîi a funcţiei

$$f(x) = |\ln x - 1|, \ x \in (0, +\infty)$$

R. Avem:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \ln x, & x \in (0, e) \\ \ln x - 1, & x \in [e, +\infty). \end{cases}$$

Pentru $x \in (0, e)$ funcţia $f(x) = 1 - \ln x$ este derivabilă şi $f'(x) = -1/x$. Pentru $x \in (e, +\infty)$ funcţia $f(x) = \ln x - 1$ este derivabilă şi $f'(x) = 1/x$. În punctul $x = e$ avem:

$$f'_s(e) = \lim_{x \to e-0} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \to e-0} \frac{\ln x - 1}{x - e} = \lim_{x \to e-0} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{e},$$

$$f'_s(e) = \lim_{x \to e-0} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \to e-0} \frac{\ln x - 1}{x - 3} = \lim_{x \to e+0} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{e}$$

$$f'_d(e) = \lim_{x \to e+0} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \to e+0} \frac{1 - \ln x}{x - e} = \lim_{x \to e-0} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = -\frac{1}{e}.$$

Deoarece $f'_s(e) \neq f'_d(e)$ rezultă că $f(x)$ nu este derivabilă în punctul $x = e$. Deci

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x}, & x \in (0,\ e) \\ \dfrac{1}{x}, & x \in (e,\ +\infty). \end{cases}$$

3.26. Să se determine α, $\beta \in \mathbf{R}$, astfel încît funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} \ln^3 x\ , & x \in (0,\ e] \\ \alpha x + \beta, & x \in (e,\ +\infty) \end{cases}$$

să fie derivabilă pe tot domeniul de definiţie.

R. Funcţia $f(x)$ este continuă pe $(0, +\infty) - \{e\}$. Pentru ca $f(x)$ să fie continuă în punctul $x = e$ calculăm:

$$l_s = \lim_{x \to e-0} \ln^3 x = 1\,;\ l_d = \lim_{x \to e+0} (\alpha x + \beta) = \alpha e + \beta\,;\ f(e) = \alpha e + \beta$$

şi punem condiţia ca: $l_s = l_d = f(e)$ adică:

$$\alpha e + \beta = 1 \tag{1}$$

Funcţia $f(x)$ este derivabilă pe $(0, +\infty) - \{e\}$.

Pentru ca $f(x)$ să fie derivabilă în punctul $x = e$ trebuie ca $f'_s(e) = f'_d(e)$. Avem:

$$f'_s(e) = \lim_{x \to e-0} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \to e-0} \frac{\ln^3 x - 1}{x - e} = \lim_{x \to e-0} \frac{\frac{3}{x}\ln^2 x}{1} = \frac{3}{e},$$

$$f'_d(e) = \lim_{x \to e+0} \frac{f(x) - f(e)}{x - e} = \lim_{x \to e+0} \frac{\alpha x + \beta - \alpha e - \beta}{x - e} = \alpha,$$

de unde obţinem: $\alpha = 3/e$. (2)

Din relaţiile (1) şi (2) deducem: $\alpha = 3/e$, $\beta = -2$.

În concluzie funcția $f(x)$ este derivabilă pe $(0, +\infty)$ pentru $\alpha = 3/e$, $\beta = -2$. iar derivata ei este:

$$f'_x = \begin{cases} (3/x)\ln^2 x, & x \in (0, e], \\ 3/e, & x \in (e, +\infty). \end{cases}$$

3.27. Să se calculeze diferențiala de ordinul n a funcției:

$$f(x, y) - xe^y + y\ln(1 + x),\ x \in (-1, +\infty),\ y \in \mathbf{R}.$$

(Examen)

R. Calculăm diferențialele de ordinul n ale funcțiilor: x, y, e^y, $\ln(1+x)$. Avem:

$$dx = 1,\ d^2x = 0, \ldots, d^{n-1}x = 0,\ d^nx = 0, \text{ adică } d^nx = 0,\ n = 2, 3, \ldots$$

$$dy = 1,\ d^2y = 0, \ldots, d^{n-1}y = 0,\ d^ny = 0, \text{ adică } d^ny = 0,\ n = 2, 3, \ldots$$

$$\frac{d}{dy}(e^y) = e^y,\ \frac{d^2}{dy^2}(e^y) = e^y, \ldots, \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}(e^y) = e^y,\ \frac{d^n}{dy^n}(e^y) = e^y,$$

$$\frac{d}{dx}[\ln(1 + x)] = \frac{1}{1+x},\ \frac{d^2}{dx^2}[\ln(1 + x)] = -\frac{1}{1+x^2}, \ldots,$$

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\ln(1 + x)] = (-1)^{n-2}\cdot\frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}} \text{ și } \frac{d^n}{dx^n}\cdot[\ln(1 + x)] =$$

$= (-1)^{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$ și utilizăm formula care dă diferențiala de ordinul n:

$$d^nf(x, y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} f(x, y).$$

Avem:

$$d^n(f(x, y)) = d^n(xe^y) + d^n[y\ln(1 + x)] = C_n^0 x\frac{d^n}{dy^n}(e^y)dy^n +$$

$$+ C_n^1\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}(e^y)dx + C_n^2\frac{d^{n-2}}{dy^{n-2}}(e^y)dy^{n-2}d^2x + \ldots +$$

$$+ C_n^{n-1}\frac{d}{dy}(e^y)dyd^{n-1}x + C_n^ne^yd^nx + C_n^0y\frac{d^n}{dx^n}[\ln(1 + x)]\cdot dx^n +$$

$$+ C_n^1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[\ln(1 + x)]dx^{n-1}dy + C_n^2\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}[\ln(1 + x)]dx^{n-2}dy^2 + \ldots +$$

$$+ C_n^{n-1}\frac{d}{dx}[\ln(1 + x)]\,dxd^{n-1}y + C_n^n\ln(1 + x)d^nv.$$

de unde deducem:

$$\mathrm{d}^n f(x, y) = xe^y \mathrm{d}y^n + ne^y \mathrm{d}y^{n-1}\mathrm{d}x + y(-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\mathrm{d}x^n +$$

$$+ n(-1)^{n-2} \cdot \frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}\mathrm{d}x^{n-1}\mathrm{d}y = (x\mathrm{d}y + n\mathrm{d}x)e^y \mathrm{d}y^{n-1} +$$

$$+ (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}\left[\frac{y(n-1)}{1+x} - n\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x^{n-1}, \quad \text{cu } x \in (-1, +\infty), \ y \in \mathbf{R}.$$

3.28. Se dă funcția:

$$f(x) = \begin{cases} x \ln^2 |x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{și se cere:}$$

a) Să se arate că $f(x)$ este continuă în origine, dar nu este derivabilă în acest punct.
b) Să se calculeze derivatele la dreapta și la stînga în punctul $x = 0$.

R. Pentru a stabili dacă $f(x)$ este continuă în origine trebuie să calculăm:

$$l_s = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} x \ln^2|x| = \lim_{x\to 0-0} \frac{\ln^2(-x)}{1/x} = \lim_{x\to 0-0} \frac{-2\ln(-x)\cdot 1/(-x)}{-1/x^2} =$$

$$= -2 \lim_{x\to 0-0} \frac{\ln(-x)}{1/x} = -2 \lim_{x\to 0-0} \frac{1/x}{-1/x^2} = 0;$$

$$l_d = \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} x \ln^2|x| = \lim_{x\to 0+0} x \ln^2 x = 0 \text{ și } f(0) = 0.$$

Deoarece $l_s = l_d = f(0)$, rezultă că $f(x)$ este continuă în punctul $x = 0$.
Calculăm: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x \ln^2|x|}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \ln^2|x| = +\infty$.

Deoarece limita este infinită rezultă că $f(x)$ nu este derivabilă în punctul $x = 0$.

b) Calculăm derivatele laterale în punctul $x = 0$:

$$f_s'(0) = \lim_{x\to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x \ln^2(-x)}{x} = \lim_{x\to 0-0} \ln^2(-x) = +\infty,$$

$$f_d'(0) = \lim_{x\to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x \ln^2 x}{x} = \lim_{x\to 0+0} \ln^2 x = +\infty.$$

Deci: $f_s'(0) = f_d'(0) = +\infty$; prin urmare funcția are derivată în $x = 0$ dar nu este derivabilă în acest punct.

3.29. Se dă funcția:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}, & x \in \mathbf{R} - \{0\}. \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{Se cer:}$$

a) limitele laterale ale funcției $f(x)$ în punctul $x = 0$,
b) limitele laterale ale funcției $f'(x)$ în punctul $x = 0$,
c) graficul funcției $f(x)$.

R. a) Considerăm restricția funcției tangentă la intervalul $(-\pi/2, \pi/2)$, restricție care este bijectivă, deci inversibilă: $\mathrm{tg}: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$. Inversa ei este funcția: $\mathrm{arctg}: \mathbf{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Funcția $\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$ este definită pe $\mathbf{R} - \{0\}$ și ia valori în intervalul $(-\pi/2, \pi/2)$. Calculăm:

$$l_s = \lim_{x\to 0-0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} \mathrm{arctg}\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2},\quad l_d = \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \mathrm{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

b) Calculăm derivata funcției $\mathrm{arctg}\frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$:

$$f'(x) = \frac{-1/x^2}{1 + 1/x^2} = \frac{-1}{x^2 + 1}.$$

Avem: $\lim\limits_{x\to 0-0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} f'(x) = -1.$

c) Trasăm graficul funcției $\mathrm{actg}\frac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R} - \{0\}$. Graficul nu intersectează axele de coordonate. Avem:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0,\quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = -\pi/2 \text{ și } \lim_{x\to 0+0} f(x) = \pi/2.$$

Calculăm derivata întîi a funcției: $f'(x) = \frac{-1}{1 + x^2}$; $f'(x) \neq 0$ și $f'(x) < 0$ pentru orice $x \in \mathbf{R} - \{0\}$. Prin urmare funcția este strict descrescătoare pe tot domeniul de definiție. Calculăm derivata a doua a funcției: $f''(x) = \frac{2x}{(1 + x^2)^2}$; $f''(x) = 0$ pentru $x = 0$. Graficul admite numai asimptotă orizontală dreapta $y = 0$. Tabloul de variație al funcției este dat în figura 3.6.

Graficul funcției este dat în figura 3.7.

Tangentele la grafic în punctele $(0, -\pi/2)$ și $(0, \pi/2)$ sînt paralele cu cea de-a doua bisectoare a axelor de coordonate. Acesta deoarece: $\lim\limits_{x\to 0-0} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0+0} f'(x) = -1.$

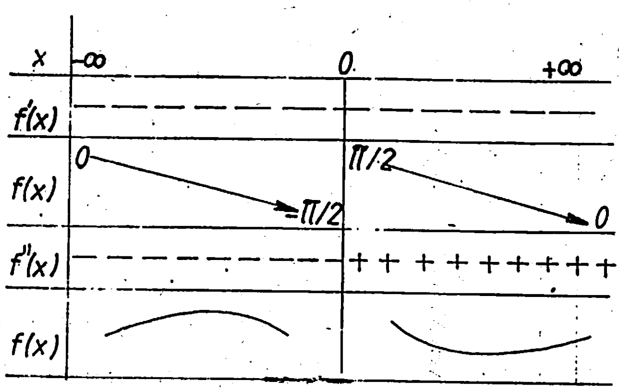


Fig. 3.6

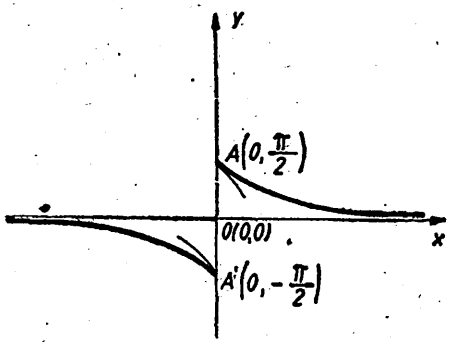


Fig. 3.7

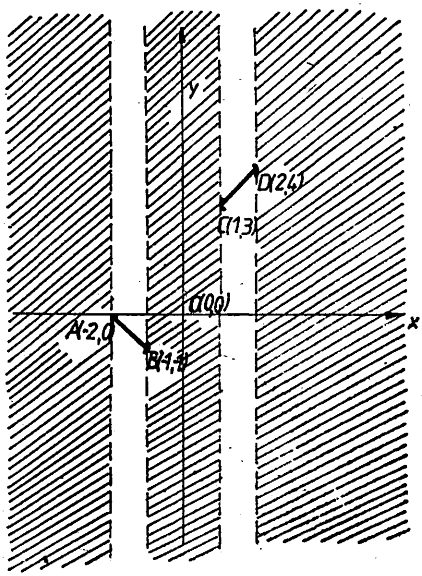


Fig. 3.8

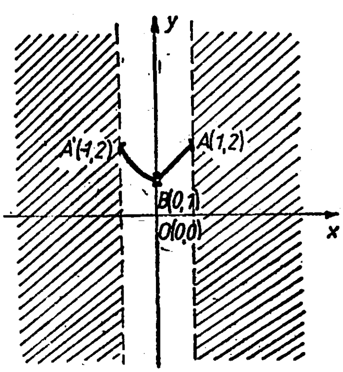


Fig. 3.9

3.30. Să se arate că funcţia:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2, & x \in [-2, -1] \\ x + 2, & x \in [1, 2] \end{cases}$$

nu are proprietatea lui Darboux.

R. Graficul funcţiei $f(x)$ este dat în figura 3.8; f este o aplicaţie a lui $[-2, -1] \cup [1, 2] \to [-1, 0] \cup [3, 4]$.

Mulţimea de definiţie a funcţiei este reuniune de două intervale disjuncte; funcţia este continuă pe compactul $[-2, -1] \cup [1, 2]$, dar nu are proprietatea lui Darboux deoarece nu ia nici o valoare cuprinsă în intervalul $(0, 3)$.

3.31. Să se cerceteze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcţia: $f\colon [-1, 1] \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [-1, 0], \\ x + 1, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

R. 1) $f(x)$ este continuă pe $[-1, 1]$,

2) $f(x)$ este derivabilă pe $(-1, 0) \cup \cup (0, 1)$.

În $x = 0$ avem:

$$f'_s(0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0-0} \frac{x^2 + 1 - 1}{x} = 0$$

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} =$$

$$= \lim_{x \to 0+0} \frac{x + 1 - 1}{x} = 1$$

deci: $f'_s(0) \neq f'_d(0)$.

3) $f(-1) = f(1) = 2$

Nu putem afirma că se poate aplica teorema lui Rolle deoarece funcţia $f(x)$ nu este derivabilă pe $(-1, 1)$. Graficul funcţiei $f(x)$ este dat în figura 3.9.

3.32. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Rolle pentru funcția : $f: [-2\sqrt{3}, 3] \to \mathbf{R}$, dată de:

$$f(x) = \begin{cases} x^2/4 + 2, & x \in [-2\sqrt{2}, 0) \\ \sqrt{x^2 + x + 4}, & x \in [0, 3]. \end{cases}$$

R. a) $f(x)$ continuă pe $[-2\sqrt{2}, 3]$;

b) $f(x)$ derivabilă pe $(-2\sqrt{2}, 3) - \{0\}$.

În punctul $x = 0$ avem:

$$f_s'(0) = \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{x^2/4 + 2 - 2}{x} = 0$$

$$f_d'(0) = \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0+0} \frac{x(x + 1)}{(\sqrt{x^2 + x + 4} + 2)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{4}; \quad f_s'(0) \neq f_d'(0).$$

c) $f(-2\sqrt{2}) = f(3) = 4$.

Nu putem afirma că se poate aplica teorema lui Rolle deoarece funcția $f(x)$ nu este derivabilă pe $(-2\sqrt{2}, 3)$.

3.33. Să se determine numărul α care intervine în teorema lui Cauchy pentru funcțiile:

$$f: [0, 3] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} -x + 4/3, & x \in [0, 1] \\ x^3/3 - x^2 + 1, & x \in (1, 3] \end{cases}$$

și $g: [0, 3] \to \mathbf{R}$, $g(x) = x$.

R. 1. $f(x)$, $g(x)$ continue pe $[0, 3]$

2. $f(x)$, $g(x)$ derivabile pe $(0, 1) \cup (1, 3)$

3. $g'(x) = 1 \neq 0$ pentru orice $(0, 3)$.

Rezultă că $g(3) - g(1) = 2 \neq 0$ și că există cel puțin un punct $\alpha \in (0, 3)$ astfel încît:

$$\frac{f(3) - f(1)}{g(3) - g(1)} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)},$$

de unde:

$$\frac{9 - 9 + 1 + 1 - 4/3}{3 - 1} = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$$

adică $\alpha^2 - 2\alpha = 1/3$ sau $3\alpha^2 - 6\alpha - 1 = 0$, ecuație care are rădăcinile $\alpha_{1,2} = 1 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Dar $\alpha \in (0, 3)$, prin urmare $\alpha > 0$, deci constanta căutată este $\alpha = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

3.34. Să se studieze aplicabilitatea teoremei lui Lagrange pentru funcţia: $f: [1, 3] \to \mathbf{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1, 2] \\ x^2/4 + 1, & x \in (2, 3]. \end{cases}$$

R. a) $f(x)$ este continuă pe intervalul $[1, 3] - \{2\}$. În $x = 2$ avem:

$$l_s = \lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} x = 2; \quad l_d = \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (x^2/4 + 1) = 2$$

şi $f(2) = 2$. Avem: $l_s = l_d = 2$; deci $f(x)$ este continuă în $x = 2$. Prin urmare $f(x)$ este continuă pe intervalul $[1, 3]$.

b) $f(x)$ este derivabilă pe $(1, 3) - \{2\}$ şi:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, 2) \\ x/2, & x \in (2, 3) \end{cases}$$

În $x = 2$ avem:

$$f'_s(2) = \lim_{x \to 2-0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2-0} \frac{x - 2}{x - 2} = 1;$$

$$f'_d(2) = \lim_{x \to 2+0} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2+0} \frac{x^2/4 + 1 - 2}{x - 2} = \frac{1}{4} \lim_{x \to 2+0} (x + 2) = 1.$$

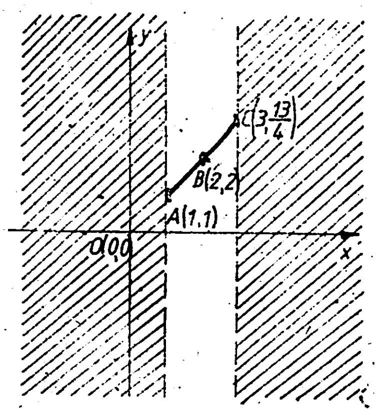


Fig. 3.10

Avem: $f'_s(2) = f'_d(2)$ deci $f(x)$ este derivabilă în $x = 2$ prin urmare, este derivabilă pe intervalul $(1, 3)$.

Deci:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (1, 2] \\ x/2, & x \in (2, 3). \end{cases}$$

Rezultă, aplicînd teorema lui Lagrange, că există cel puţin un punct $c \in (1, 3)$, astfel încît:

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = f'(c) \text{ sau } \frac{9/4 + 1 - 1}{2} = f'(c),$$

de unde: $f'(c) = 9/8$; dacă $c \in (2, 3)$, rezultă că: $c/2 = 9/8$ şi $c = 9/4$. Graficul funcţiei, reprezentat în figura 3.10, confirmă acest fapt.

3.35. Să se determine valoarea lui c care intervine în teorema lui Lagrange pentru funcţia:

$$f: [0, 2] \to \mathbf{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0, 1] \\ 2x - 1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

R. 1) $f(x)$ continuă pe $[0, 2]$

2) $f(x)$ derivabilă pe $(0, 2) - \{1\}$.

În punctul $x = 1$ avem:

$$f_s'(1) = \lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^2-1}{x-1} = 2;$$

$$f_d'(1) = \lim_{x\to 1+0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1+0} \frac{2x-1-1}{x-1} = 2;$$

deci: $f_s'(1) = f_d'(1)$. Rezultă că $f(x)$ este derivabilă pe $(0, 2)$. Deci există cel puţin un punct $c \in (0, 2)$, astfel încît: $\frac{f(2)-f(0)}{2} = f'(c)$. Avem: $f'(c) = 3/2$ sau $2c = 3/2$, de unde $c = 3/4$. Graficul funcţiei $f(x)$ este trasat în figura 3.11.

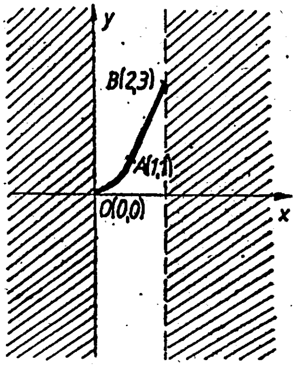


Fig. 3.11

3.36. Să se demonstreze, folosind teorema lui Lagrange, următoarele inegalităţi:

1) $|\sin b - \sin a| \leqslant |b - a|$;

2) $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$; $0 \leqslant a < b < \frac{\pi}{2}$.

R. 1) Considerăm funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in [a, b]$

a) $f(x)$ este continuă pe $[a, b]$,

b) $f(x)$ este derivabilă pe (a, b).

Sîntem în condiţiile teoremei lui Lagrange. Prin urmare, există cel puţin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \text{ adică } \frac{\sin b - \sin a}{b-a} = f'(c)$$

sau $\sin b - \sin a = (b-a)\cos c$. Dar $|\sin b - \sin a| = |b-a| \cdot |\cos c|$ şi deoarece $-1 \leqslant \cos c \leqslant 1$ sau $|\cos c| \leqslant 1$, avem: $|\sin b - \sin a| \leqslant |b-a|$.

2) Considerăm funcţia: $f(x) = \operatorname{tg} x$, $x \in [a, b]$ $0 \leqslant a < b < \pi/2$.

a) $f(x)$ continuă pe $[a, b]$,

b) $f(x)$ derivabilă pe (a, b).

Sîntem în condiţiile teoremei lui Lagrange. Rezultă că există cel puţin un punct $c \in (a, b)$, astfel încît: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$, adică $\frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b-a} = \frac{1}{\cos^2 c}$, $c \in (a, b)$. Dar pe intervalul $[0, \pi/2)$ funcţia $\cos x$ este descrescătoare; prin urmare, deoarece $a < c < b$, avem: $\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{1}{\cos^2 c} < \frac{1}{\cos^2 b}$, de unde: $\frac{1}{\cos^2 a} < \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b-a} < \frac{1}{\cos^2 b}$, $\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$, adică relaţia cerută.

3.37. Se dă funcţia: $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^n e^{3x}$, $n \in \mathbf{N}$. Să se discute după n extremele lui f.

(Examen)

R. Avem:

— pentru $n = 0$, funcţia $f(x) = e^{3x}$, $x \in \mathbf{R}$ este strict crescătoare, deci nu are extreme;

— pentru $n = 1$, funcţia $f(x) = xe^{3x}$, are derivata: $f'(x) = e^{3x} + 3xe^{3x} = (1 + 3x)e^{3x}$, iar ecuaţia $f'(x) = 0$ are rădăcina $x_1 = -1/3$. Derivata a doua: $f''(x) = 3e^{3x} + 3(1 + 3x)e^{3x} = 3(2 + 3x)e^{3x}$ este pozitivă în punctul $x = -1/3$, deci acest punct este punct de minim;

— în cazul general: $f(x) = x^n e^{3x}$, iar derivata întîi este: $f'(x) = nx^{n-1}e^{3x} + 3x^n e^{3x} = x^{n-1}(n + 3x)e^{3x}$. Ecuaţia $f'(x) = 0$ are rădăcinile $x = 0$ şi $x = -n/3$.

a) Considerăm $x = 0$. Atunci prima derivată nenulă cste derivata de ordin n. Prin urmare:

— dacă n este par avem în punctul $x = 0$ un minim deoarece:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) > 0; \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) > 0 \text{ şi } f(0) = 0;$$

— dacă n este impar avem în punctul $x = 0$ un punct de inflexiune deoarece:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) < 0; \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) > 0 \text{ şi } f(0) = 0.$$

b) Considerăm $x = -n/3$. Avem: $f'(x) = 0$ şi:

$$f''(x) = (n - 1)x^{n-2}(n + 3x)e^{3x} + 3x^{n-1}e^{3x} + 3x^{n-1}(n + 3x)e^{3x} =$$

$$= x^{n-2}[n(n - 1) + 3nx - 3x + 3x + 3nx + 9x^2]e^{3x} =$$

$$= x^{n-2}[n(n - 1) + 6nx + 9x^2]e^{3x},$$

$$\text{iar } f''\left(-\frac{n}{3}\right) = \left(-\frac{n}{3}\right)^{n-2} \cdot (-n)e^{-n} = (-1)^{n-1}\left(\frac{n}{3}\right)^{n-2} \cdot ne^{-n}.$$

Prin urmare:

— dacă n este par $x = -n/3$ este punct de maxim;

— dacă n este impar $x = -n/3$ este punct de minim.

3.38. Să se reprezinte grafic funcţia:

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2}{x^4 + 2x^2 + 1}$$

R. Funcţia se poate scrie şi sub forma:

$$f(x) = \frac{x^4 - x^2 + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

1) Domeniul de definiţie: $x \in \mathbf{R}$.

2) Calculăm:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 1 \text{ şi } \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1.$$

3) Graficul nu intersectează axa absciselor, dar intersectează axa ordonatelor în punctul $M(0, 2)$.

4) Calculăm derivata întîi:

$$f'(x) = \frac{(4x^3 - 2x)(x^4 + 2x^2 + 1) - (4x^3 + 4x)(x^4 - x^2 + 2)}{(x^2 + 1)^4};$$

de unde rezultă, după efectuarea calculelor:

$$f'(x) = \frac{2x(3x^2 - 5)}{(x^2 + 1)^3}.$$

Rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$ sau $2x(3x^2 - 5) = 0$, care are rădăcinile $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{15}/3$.

Semnul derivatei întîi este dat în tabloul:

x	$-\infty \qquad -\frac{\sqrt{15}}{3} \qquad 0 \qquad \frac{\sqrt{15}}{3} \qquad +\infty$
x	$- - - - - - - - - - - 0 + + + + + + + + + + + + +$
$3x^2 - 5$	$+ + + + + + 0 - - - - - - - - - 0 + + + + + + + +$
$f'(x)$	$- - - - - - - 0 + + + 0 - - - - 0 + + + + + + +$

Puncte de extrem: $m_1(-\sqrt{15}/3; 0{,}4)$, $m_2(\sqrt{15}/3; 0{,}4)$ şi $M(0, 2)$.

5) Calculăm derivata a doua:

$$f''(x) = \frac{(18x^2 - 10)(x^2 + 1)^3 - 3(x^2 + 1)^2 \cdot 2x \cdot (6x^3 - 10x)}{(x^2 + 1)^6},$$

de unde, după efectuarea calculelor, obţinem: $f''(x) = \frac{-2(9x^4 - 34x^2 + 5)}{(x^2 + 1)^4}$ şi rezolvăm ecuaţia $f''(x) = 0$ sau $9x^4 - 34x^2 + 5 = 0$, ecuaţie bipătrată cu rădăcinile $x^2 = \frac{17 \pm 2\sqrt{61}}{9}$ sau $x_{1,2} = \pm 1{,}9$ şi $x_{3,4} = \pm 0{,}39 \simeq 0{,}4$.

Puncte de inflexiune:

$$I_1(-1{,}9; 0{,}5); \; I_2(-0{,}4; 1{,}4) \text{ şi } I_3(0{,}4; 1{,}4); \; I_4(1{,}9; 0{,}5).$$

6) Graficul admite asimptota orizontală $y = 1$ şi nu admite asimptote verticale sau oblice.

7) Tabloul de variaţie al funcţiei este dat în figura 3.12.

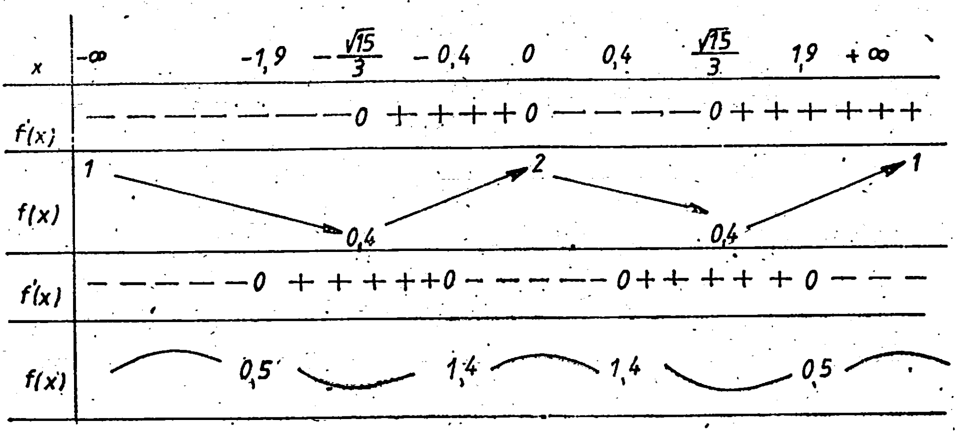


Fig. 3.12

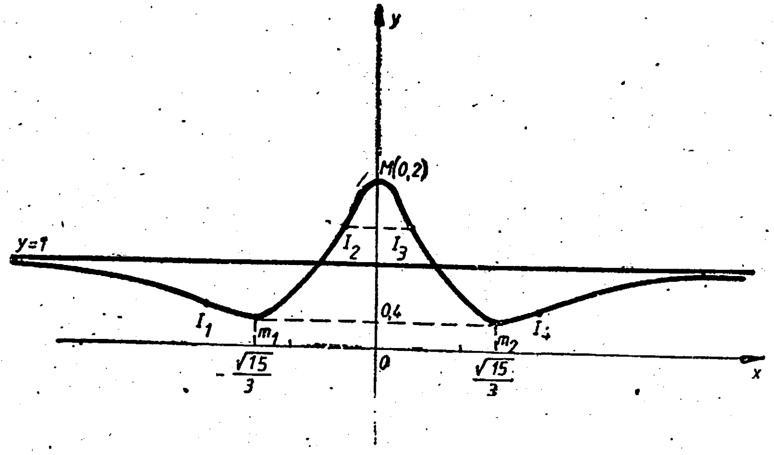


Fig. 3.13

8) Graficul funcţiei este dat în figură 3.13.
Funcţia $f(x)$ fiind funcţie pară, graficul ei este simetric faţă de axa ordonatelor.

3.39. Să se reprezinte grafic:

$$f(x) = \frac{e^{4x}(x-1)^{2/3}}{10x}.$$

R. 1) Domeniul de definiţie: $x \in \mathbf{R} - \{0\}$.
2) Calculăm limitele la capetele intervalelor domeniului de definiţie:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty.$$

3) Graficul intersectează axa absciselor în punctul $A(1, 0)$.
4) Calculăm derivata întîi:

$$f'(x) = \frac{\left(4e^{4x}\sqrt[3]{(x-1)^2} + e^{4x}\cdot 2(x-1)/3\sqrt[3]{(x-1)^4}\right)10x - 10e^{4x}\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}{100\,x^2} =$$

$$= \frac{[12e^{4x}(x-1)^2 + 2e^{4x}(x-1)]10x - 30e^{4x}(x-1)^2}{300\,x^2(x-1)\sqrt[3]{x-1}},$$

de unde deducem, după efectuarea calculelor:

$$f'(x) = \frac{e^{4x}(12x^2 - 13x + 3)}{30x^2\sqrt[3]{x-1}}.$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$ se reduce la $12x^2 - 13x + 3 = 0$ care are soluţiile:

$$x_1 = \frac{1}{3} \text{ şi } x_2 = \frac{3}{4}.$$

Semnul derivatei întîi este dat în tabloul următor:

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $\frac{1}{3}$ $\quad$ $\frac{3}{4}$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$12x^2 - 13x + 3$	+ + + + + + + 0 − − 0 + + + + + + + + +
x^2	+ + + + 0 + + + + + + + + + + + + + + +
$\sqrt[3]{x-1}$	− − − − − − − − − − − − − − − 0 + + + +
$f'(x)$	− − − − | − − 0 + + + 0 − − − | + + + +

Punctele de extem: $m(1/3;\ 0{,}86)$ şi $M(3/4;\ 1{,}06)$

Avem:

$$\lim_{x\to 1-0} f'(x) = -\infty \quad \text{şi} \quad \lim_{x\to 1+0} f'(x) = +\infty$$

Asimptote: — verticale: $x = 0$,
— orizontale $y = 0$ pentru ramura de la $-\infty$.
— oblice — nu există.

Tabloul de variaţie al funcţiei este dat în figura 3.14.
Graficul funcţiei este dat în figura 3.15.

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$\frac{3}{4}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		− − − − − −	|	− −	0	+ +	0	− −	$-\infty$ | $+\infty$	+ + + + +	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$0{,}86$	↗	$1{,}06$	↘	0	↗	$+\infty$

Fig. 3.14

3.40. Să se reprezinte grafic funcţia:

$$f(x) = |x+1|\, e^{-|x-1|}$$

R. Ţinînd seama de semnul funcţiilor $x + 1$ şi $x - 1$, deducem:

$$f(x) = \begin{cases} -(x+1)e^{x-1}, & x \in (-\infty,\ -1] \\ (x+1)e^{x-1}, & x \in (-1,\ 1) \\ (x+1)e^{-(x-1)}, & x \in [1,\ +\infty) \end{cases}$$

1) Domeniul de definiţie: $x \in \mathbf{R}$.

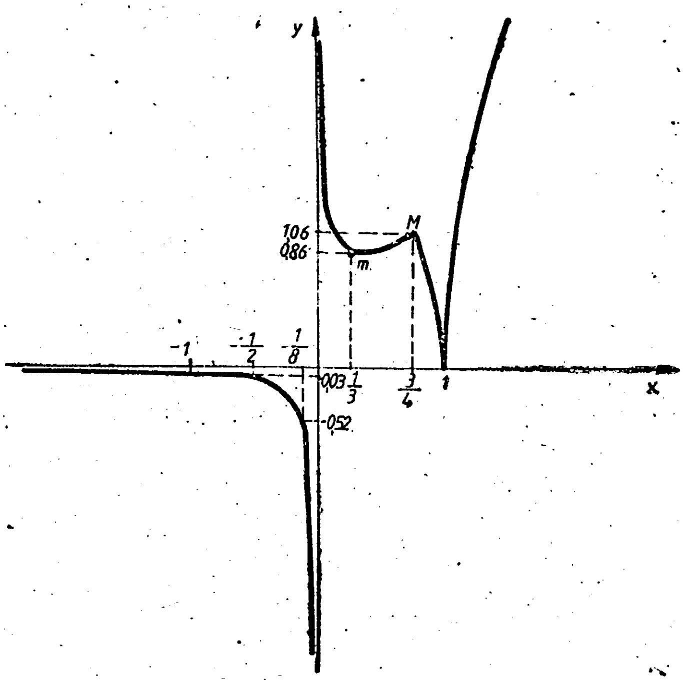


Fig. 3.15

2) Calculăm limitele la capetele intervalelor domeniului de definiție:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{x-1} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{e^{1-x}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{1-x}} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x+1)e^{-(x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{e^{x-1}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}} = 0,$$

$$\lim_{x\to-1-0} f(x) = -\lim_{x\to-1-0}(x+1)e^{x-1} = 0,$$

$$\lim_{x\to-1+0} f(x) = \lim_{x\to-1+0}(x+1)e^{x-1} = 0,$$

$$\lim_{x\to1-0} f(x) = \lim_{x\to1-0}(x+1)e^{x-1} = 2,$$

$$\lim_{x\to1+0} f(x) = \lim_{x\to1+0}(x+1)e^{-(x-1)} = 2.$$

3) Graficul intersectează axele de coordonate în punctele $A(-1, 0)$ și $C(0, 1/e)$.

4. Calculăm derivata întîi:

$$x \in (-\infty, -1),\ f'(x) = -e^{x-1} - (x+1)e^{x-1} = -(x+2)e^{x-1},$$

$$x \in (-1, 1),\ f'(x) = e^{x-1} + (x+1)e^{x-1} = (x+2)e^{x-1},$$

$$x \in (1, +\infty),\ f'(x) = e^{-(x-1)} - (x+1)e^{-(x-1)} = -xe^{-(x-1)}$$

Deci:

$$f'(x) = \begin{cases} -(x+2)e^{x-1}, & x \in (-\infty, -1) \\ (x+2)e^{x-1}, & x \in (-1, 1) \\ -xe^{-(x-1)}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Ecuaţia $f'(x) = 0$ are rădăcina: $x = -2$ iar punctul $M(-2, e^{-3})$ este punctul de extrem al funcţiei.

Studiem derivabilitatea în punctele $x = -1$ şi $x = 1$. Avem:

$$\lim_{x\to -1-0} f'(x) = \lim_{x\to -1-0} (x+2)e^{x-1} = -e^{-2} = -1/e^2;$$

$$\lim_{x\to -1+0} f'(x) = \lim_{x\to -1+0} (x+2)e^{x-1} = e^{-2} = 1/e^2;$$

$$\lim_{x\to 1-0} f'(x) = \lim_{x\to 1-0} (x+2)e^{x-1} = 3;$$

$$\lim_{x\to 1+0} f'(x) = -\lim_{x\to 1+0} xe^{-(x-1)} = -1.$$

În $x = 1$ şi $x = -1$ funcţia este derivabilă. Punctele $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ sînt puncte unghiulare.

5. Calculăm derivata a doua:

$$x \in (-\infty, -1),\ f''(x) = -e^{x-1}(x+2) - e^{x-1} = -(x+3)e^{x-1},$$

$$x \in (-1, 1),\ f''(x) = e^{x-1}(x+2) + e^{x-1} = (x+3)e^{x-1},$$

$$x \in (1, +\infty),\ f''(x) = -e^{-(x-1)} + xe^{-(x-1)} = (x-1)e^{-(x-1)}.$$

Avem deci:

$$f''(x) = \begin{cases} -(x+3)e^{x-1}, & x \in (-\infty, -1) \\ (x+3)e^{x-1}, & x \in (-1, 1) \\ (x-1)e^{-(x-1)}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Ecuaţia $f''(x) = 0$ are rădăcina $x = -3$. Punct de inflexiune $I(-3, 2e^{-4})$. În punctele $x = -1$ şi $x = 1$, $f''(x)$ nu există.

6. Asimptote: — orizontală: $y = 0$
— verticale şi oblice: nu există.

7. Tabloul de variaţie al funcţiei este dat în figura **3.16**.

8. Graficul funcţiei este dat în figura **3.17**.

3.41. Să se reprezinte grafic funcţia

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}.$$

R. 1) Domeniul de definiţie: $x \in \mathbf{R}$.

2) Calculăm:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \text{ şi } \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

3) Graficul intersectează axele de coordonate în punctele: $O(0, 0)$ şi $A(3, 0)$.

x	$-\infty$		-3		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + +$	$+ + + +$		0	$- -$	|	$+ + +$	|	$- - - -$	
$f(x)$	0	$\nearrow$			e^{-3}	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0
$f''(x)$		$+ + + + +$	0	$- - -$		$- - -$	|	$+ + +$	|	$+ + + +$	
$f(x)$		$\cup$	$2e^{-4}$	$\cap$		$\cap$	0	$\cup$	2	$\cup$	

Fig. 3.16

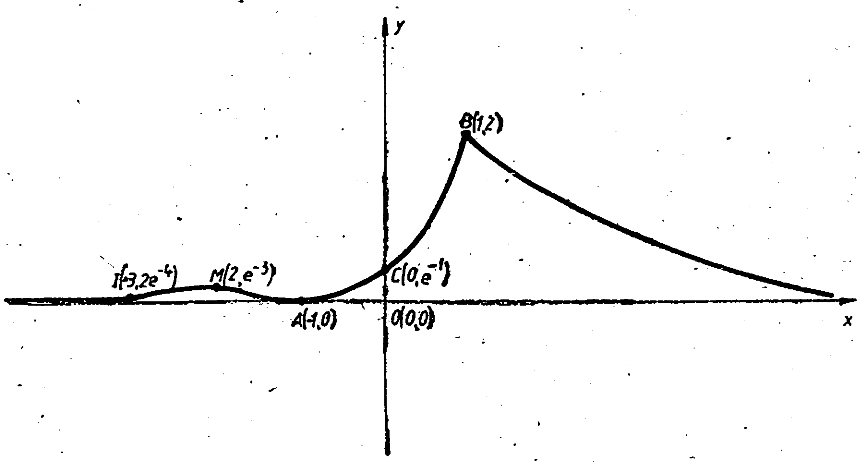


Fig. 3.17

4) Calculăm derivata întîi:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 6x}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x^2)^2}} = \frac{x - 2}{\sqrt[3]{x(x - 3)^2}}$$

Ecuația $f'(x) = 0$ are rădăcina $x = 2$. Semnul derivatei întîi este dat în tabloul următor:

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$x - 2$		$- - - -$		$- - - -$	0	$+ + + + +$		$+ + + + + +$	
$\sqrt[3]{x(x-3)^2}$		$- - - -$	0	$+ + + +$		$+ + + +$	0	$+ + + + + +$	
$f'(x)$		$+ + + +$	|	$- -$	0	$+ + + + +$	|	$+ + + + + +$	

Punct de minim: $m\ (2,\ -\sqrt[3]{4})$ Avem:

$\lim\limits_{x\to 0-0} f'(x) = +\infty,\ \lim\limits_{x\to 0+0} f'(x) = -\infty\ \lim\limits_{x\to 3-0} f'(x) = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to 3+0} f'(x) = +\infty.$

Calculăm derivata a doua:

$$f''(x) = \frac{\sqrt[3]{x(x-3)^2} - (x-2)\cdot \dfrac{3x^2-12x+9}{3\sqrt[3]{x^2(x-3)^4}}}{\sqrt[3]{x^2(x-3)^4}}$$

de unde deducem, după efectuarea calculelor:

$$f''(x) = \frac{-2}{x(x-3)\sqrt[3]{x(x-3)^2}}$$

Semnul derivatei a doua este dat în tabloul:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$3-x$		+ + + + + +	+	+ + + + +	0	− − − − − − − −	
$f''(x)$		+ + + + +	|	+ + + + +	|	− − − − − − − −	

6) Graficul admite asimptotă oblică: $y = x - 1$ deoarece:

$$m' = m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3-3x^2}}{x} = 1;$$

$$n' = n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{x^3-3x^2} - x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2-x^3}{\sqrt[3]{(x^3-3x^2)^2} + \sqrt[3]{x^3(x^3-3x^2)} + \sqrt[3]{x^6}} = -1.$$

7) Tabloul de variaţie al funcţiei este dat în figura 3.18.

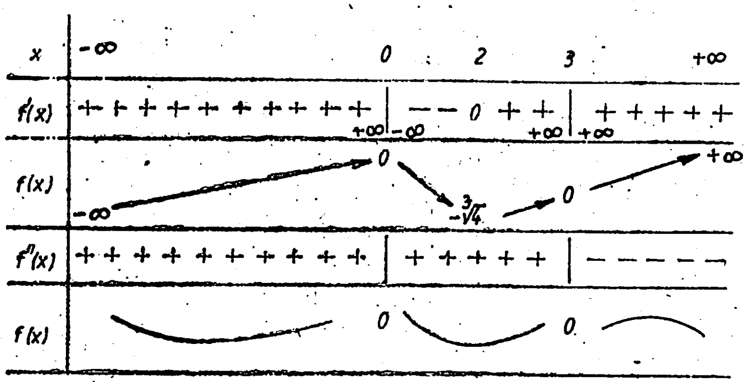


Fig. 3.18

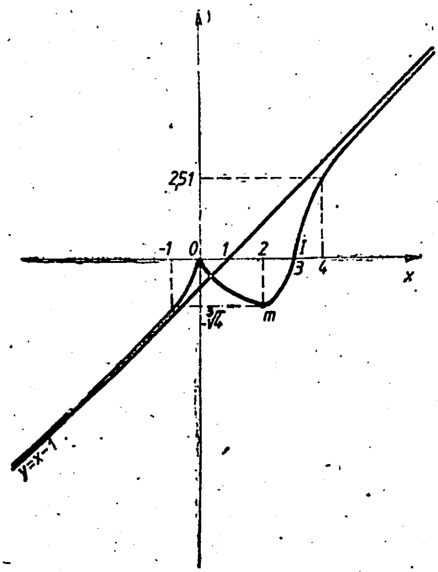


Fig. 3.19

8) Graficul funcției este dat în figura 3.19. Punctul $O(0, 0)$ este punct de întoarcere, iar punctul $I(3, 0)$ este punct de inflexiune.

3.42. Să se reprezinte grafic funcția:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}.$$

R. 1) Domeniul de definiție: $x \in \mathbf{R}$.

2) Calculăm: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3) Graficul intersectează axele de coordonate în punctele:

$$A(-2, 0)\ B(1, 0) \text{ și } C(0, \sqrt[3]{2}).$$

4) Calculăm derivata întîi:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}} = $$

$$= \frac{x^2 - 1}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}}$$

și rezolvăm ecuația: $f'(x) = 0$ care are rădăcinile $x_{1,2} = \pm 1$. Semnul derivatei întîi este dat în tabloul:

x	$-\infty$	-2	-1	1	$+\infty$
$x^2 - 1$	+ + + + + + +	+ + + + + +	0 − − −	0 + + + + + +	
$f'(x)$	+ + + + + + +	| + + + +	0 − − −	| + + + + + +	

Avem:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = +\infty;\ \lim_{x \to -2+0} f(x) = +\infty;\ \lim_{x \to 1-0} f(x) = -\infty;\ \lim_{x \to 1+0} f(x) = +\infty.$$

Punct de întoarcere: $B(1, 0)$. Punct de maxim: $M(-1, \sqrt[3]{4})$.

5) Calculăm derivata a doua:

$$f''(x) = 2x(x^3 - 3x + 2)^{-2/3} - \frac{2}{3}(x^2 - 1) \cdot 3(x^2 - 1)(x^3 - 3x + 2)^{-5/3},$$

de unde: $f''(x) = \dfrac{-2}{(x + 2)\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2}}$. Ecuația $f''(x) = 0$ nu are soluții.

6) Asimptote: — orizontale și verticale nu există:

— oblice: dreapta $y = x$ deoarece:

$$m' = m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}}{x} = 1$$

$$n' = n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} [\sqrt[3]{x^3 - 3x + 2} - x] =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x + 2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^3 - 3x + 2)^2} + \sqrt[3]{x^3(x^3 - 3x + 2)} + \sqrt[3]{x^6}} = 0.$$

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+ + + + + +$	$+\infty \mid +\infty$	$+ +$	0	$- - - - -$	$-\infty \mid +\infty$	$+ + + + + + +$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f''(x)$		$+ + + + + +$	$\mid$	$- - -$	$-$	$- - - -$	$\mid$	$- - - - - - -$	
$f(x)$		$\cup$	0	$\cap$		$\cap$	0	$\cap$	

Fig. 3.20

7) Tabloul de variație al funcției este dat în figura 3.20.
8) Graficul funcției este dat în figura 3.21.

3.43. Se dă funcția $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8}}{x}$.

a) Să se determine mulțimile de definiție, de continuitate și de derivabilitate.

b) Să se studieze variația și să se reprezinte grafic funcția:

R. a) Pentru ca funcția să fie definită trebuie ca $x^4 - 9x^2 + 8 \geqslant 0$ și $x \neq 0$.

Ecuația bipătrată $x^4 - 9x^2 + 8 = 0$ admite rădăcinile:

$$x_1 = -2\sqrt{2},\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2\sqrt{2}.$$

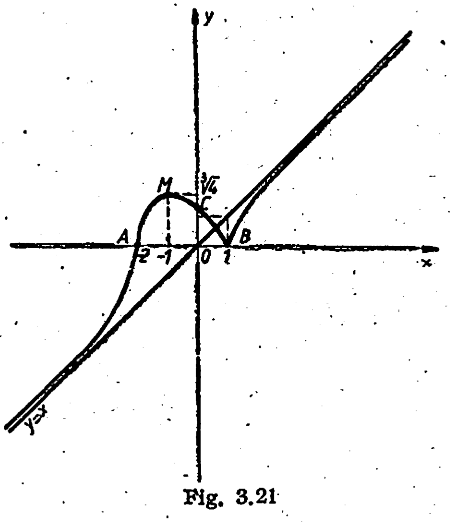


Fig. 3.21

Tabloul de semne este:

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$		-1		1		$2\sqrt{2}$		$+\infty$
x^4-9x^2+8		$++++++++$	0	$---$	0	$+++$	0	$--$	0	$+++++$	

Deci funcţia este definită pentru:

$$x \in (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [-1, 0) \cup (0, 1)] \cup [2\sqrt{2}, +\infty).$$

Funcţia este continuă pe: $(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2\sqrt{2}, +\infty)$. În punctele $x = -2\sqrt{2}$, $x = 1$ funcţia este continuă la stînga pentru că:

$$l_s = \lim_{x\to -2\sqrt{2}-0} f(x) = f(-2\sqrt{2}) = 0 \text{ şi } l_s = \lim_{x\to 1-0} f(x) = f(1) = 0,$$

iar în punctele $x = 1$ şi $x = 2\sqrt{2}$ funcţia este continuă la dreapta deoarece:

$$l_d = \lim_{x\to -1+0} f(x) = f(-1) = 0 \text{ şi } l_d = \lim_{x\to 2\sqrt{2}+0} f(x) = f(2\sqrt{2}) = 0.$$

Funcţia $f(x)$ este derivabilă pe intervalul:

$$(-\infty, -2\sqrt{2}) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2\sqrt{2}, +\infty).$$

În punctele $-2\sqrt{2}$, -1, 0, 1, $2\sqrt{2}$ funcţia nu este derivabilă, dar are derivată laterală deoarece:

$$\lim_{x\to -2\sqrt{2}-0} \frac{f(x)-f(-2\sqrt{2})}{x+2\sqrt{2}} = \lim_{x\to -2\sqrt{2}-0} \frac{\sqrt{x^4-9x^2+8}}{x+2\sqrt{2}} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+0} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1+0} \frac{\sqrt{x^4-9x^2+8}}{x+1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 1-0} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1-0} \frac{\sqrt{x^4-9x^2+8}}{x-1} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to 2\sqrt{2}+0} \frac{f(x)-f(2\sqrt{2})}{x-2\sqrt{2}} = \lim_{x\to 2\sqrt{2}+0} \frac{\sqrt{x^4-9x^2+8}}{x-2\sqrt{2}} = +\infty.$$

Deci funcţia $f(x)$ are derivată la stînga în punctele $-2\sqrt{2}$ şi -1 şi are derivată la dreapta în punctele 1 şi $2\sqrt{2}$.

b) Reprezentăm grafic funcţia $f(x)$.

1) Domeniul de definiţie: $x \in (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [-1, 0) \cup (0, 1] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$.

2) Calculăm: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$;

$$\lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty.$$

3) Graficul nu intersectează axa ordonatelor, dar intersectează axa absciselor în punctele: $A(-2\sqrt{2}, 0)$; $B(-1, 0)$; $C(1, 0)$; $D(2\sqrt{2}, 0)$.

4) Calculăm derivata întîi:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{4x^3 - 18x}{2\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8}} \cdot x - \sqrt{x^4 - 9x^2 + 8}}{x^2} = \frac{2x^4 - 9x^2 - x^4 + 9x^2 - 8}{x^2\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8}} =$$

$$= \frac{x^4 - 8}{x^2\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8}}$$

şi rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$ sau $x^4 - 8 = 0$, de unde:

$$(x^2 - \sqrt{8})(x^2 + \sqrt{8}) = 0,$$

ecuaţia care are rădăcinile reale: $x_1 = \sqrt[4]{8}$ şi $x_2 = -\sqrt[4]{8}$.

Graficul nu admite asimptotă orizontală, dar are asimptotă verticală dreapta $x = 0$ şi asimptotă oblică dreapta $y = x$ deoarece:

$$m' = m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8}}{x^2} = 1,$$

$$n' = n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8}}{x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 9x^2 + 8} - x^2}{x} = 0.$$

Tabloul de variaţie al funcţie este dat în figura 3.22.

x	$-\infty$		$-2\sqrt{2}$	//////	-1		0		1	//////	$2\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + + + + +		//////		− − − −	|	− − − −		//////		+ + + + + + +	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	//////	0	$\searrow$	$-\infty$ | $+\infty$	$\searrow$	0	//////	0	$\nearrow$	$+\infty$

Fig. 3.22

Graficul funcţiei este dat în figura 3.23.

3.44. Să se reprezinte grafic funcţia:

$$f(x) = \frac{ax}{ax^2 + 1}, \quad a > 0$$

(serpentina lui Newton).

R. 1) Domeniul de definiţie: $x \in \mathbf{R}$

2) Calculăm: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3) Graficul intersectează axele de coordonate în punctul $O(0, 0)$.

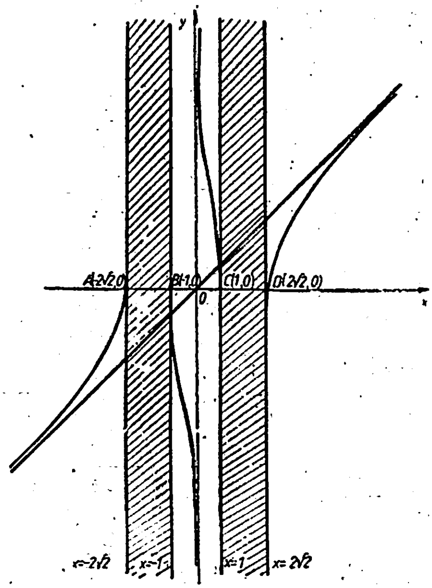


Fig. 3.23

4) Calculăm derivata întîi:

$$f'(x) = \frac{a(ax^2+1) - 2a^2x^2}{(ax^2+1)^2} = \frac{a(1-ax)^2}{(ax^2+1)^2}$$

şi rezolvăm ecuaţia $f'(x) = 0$, care are rădăcinile:

$$x_{1,2} = \pm 1/\sqrt{a} = \pm\sqrt{a}/a.$$

Punctele de extrem ale funcţiei sînt: $m(-\sqrt{a}/a, -\sqrt{a}/2)$ şi $M(\sqrt{a}/a, \sqrt{a}/2)$.
5) Calculăm derivata a doua:

$$f''(x) = a\frac{-2ax(ax^2+1)^2 - 4ax(ax^2+1)(1-ax^2)}{(ax^2+1)^4} = \frac{-2a^2x(ax^2+1+2-2ax^2)}{(ax^2+1)^3} =$$

$$= \frac{-2ax(3-ax^2)}{(ax^2+1)^3}$$

şi rezolvăm ecuaţia $f''(x) = 0$. Aceasta are rădăcinile:

$$x_1 = 0,\quad x_{2,3} = \pm\sqrt{3/a} = \pm\sqrt{3a}/a.$$

Semnul derivatei a doua este dat în tabloul următor:

x	$-\infty$	$-\frac{\sqrt{3a}}{a}$		0		$\frac{\sqrt{3a}}{a}$	$+\infty$
$-2ax$	+ + + + +	+ + +	+ +	0	− − − −	− − − −	− − −
$3-ax^2$	− − − − −	0	+ + + + +	+	+ + + +	0	− − − − − −
$f''(x)$	− − − − −	0	+ + + +	0	− − −	0	+ + + + + +

Puncte de inflexiune: $O(0, 0)$, $I_1(-\sqrt{3a}/a, -\sqrt{3a}/4)$, $I_2(\sqrt{3a}/a, \sqrt{3a}/4)$.
6) Asimptote orizontale: $y = 0$
— verticale — nu există.
— oblice — nu există.
7) Tabloul de variație al funcției este dat în figura 3.24.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3a}}{a}$		$-\frac{\sqrt{a}}{a}$		0		$\frac{\sqrt{a}}{a}$		$\frac{\sqrt{3a}}{a}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-\ -\ -$	$-$	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	$+$	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	$-$	$-\ -\ -$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\searrow$	$-\frac{\sqrt{a}}{2}$	$\nearrow$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{a}}{2}$	$\searrow$		$\searrow$	0
$f''(x)$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	$+$	$+\ +\ +$	0	$-\ -\ -$	$-$	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$	
$f(x)$		$\frown$	$-\frac{\sqrt{3a}}{4}$	$\smile$		$\smile$	0	$\frown$		$\frown$	$\frac{\sqrt{3a}}{4}$	$\smile$	

Fig. 3.24

8) Graficul funcției este dat în figura 3.25.

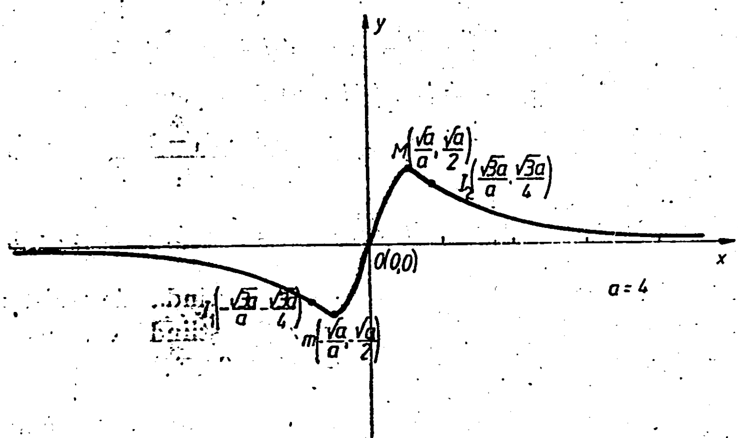


Fig. 3.25

3.45. Principiul de minim al lui Fermat. Fiind date o dreaptă d și două puncte A și B situate în același plan cu dreapta d și de aceeași parte a ei, să se găsească un punct M pe d astfel încît suma $MA + MB$ să fie minimă (legea reflexiei razelor de lumină).

R. În planul xOy, h_1, h_2, l sînt date (vezi figura 3.26). Trebuie ca drumul $L(x)$ să fie minim. Avem:

$$L(x) = AM + MB = \sqrt{h_1^2 + x^2} + \sqrt{h_2^2 + (l - x)^2}.$$

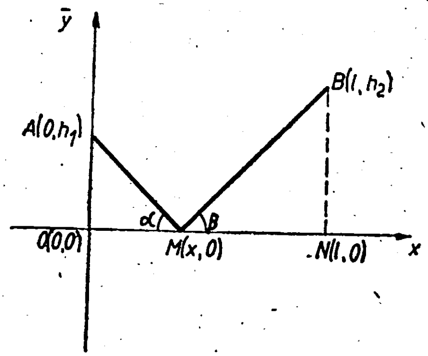


Fig. 3.26

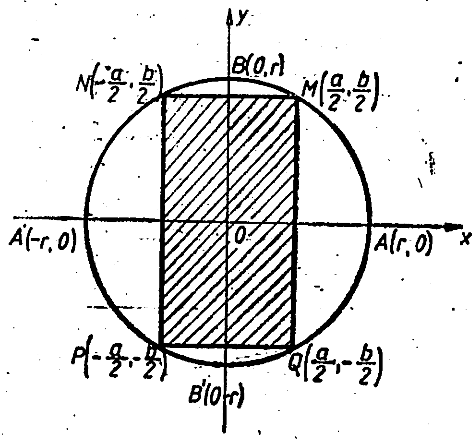


Fig. 3.27

Pentru a calcula minimul funcţiei $L(x)$ calculăm derivata întîi şi rezolvăm ecuaţia $L'(x) = 0$. Avem:

$$L'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{h_1^2+x^2}} - \frac{2(l-x)}{2\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{h_1^2+x^2}} - \frac{l-x}{\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}}.$$

$$L'(x) = 0 \text{ dacă } x\sqrt{h_2^2+(l-x)^2} = (l-x)\sqrt{h_1^2+x^2} \text{ sau}$$

$$x^2(h_2^2 - h_1^2) + 2lh_1^2 - l^2h_1^2 = 0 \text{ deci pentru:}$$

$$x_1 = \frac{-lh_1(h_1+h_2)}{(h_1-h_2)(h_1+h_2)} = \frac{-lh_1}{h_1-h_2}; \quad x_2 = \frac{-lh_1\cdot(h_1-h_2)}{(h_1-h_2)\cdot(h_1+h_2)} = \frac{-lh_1}{h_1+h_2}.$$

Obţinem: $OM/AM = MN/MB$ sau $\sin\alpha = \sin\beta$, deci $\alpha = \beta$.

3.46. Să se taie dintr-un buştean circular o grindă de rezistenţă maximă cu secţiunea un dreptunghi de laturi a şi b ştiind că supusă la încovoiere are rezistenţa proporţională cu ab^2 (fig. 3.27).

R. Rezistenţa R este dată de: $R(a, b) = kab^2$, $a > 0$, $b > 0$, unde k este o constantă. Ţinem seama de relaţia dintre raza buşteanului r şi dimensiunile dreptunghiului a şi b adică de: $4r^2 = a^2 + b^2$ şi obţinem: $R(a) = ka(4r^2 - a^2)$. Calculăm derivata de ordinul întîi a funcţiei $R(a)$: $R'(a) = k(4r^2 - a^2) - 2ka^2 = k(4r^2 - 3a^2)$ şi rezolvăm ecuaţia $R'(a) = 0$ adică $4r^2 - 3a^2 = 0$. Deci extremele funcţiei sînt: $a_1 = 2r\sqrt{3}/3$ şi $a_2 = -2r\sqrt{3}/3$. Calculăm derivata de ordinul doi a funcţiei: $R''(a) = -6ka$ deoarece pentru $a_1 = 2r\sqrt{3}/3$, $R''(2r\sqrt{3}/3) = -12k\sqrt{3}/3 < 0$ rezultă un maxim. Valoarea maximă a rezistenţei este: $R_{max}(2r\sqrt{3}/3) = 16kr^3\sqrt{3}/9$. Grinda are dimensiunile: $a = 2r\sqrt{3}/3$ şi $b = 2r\sqrt{6}/3$.

3.47. Să se determine unde este rezistența maximă într-un stîlp tronconic supus unei forțe orizontale P (fig. 3.28).

R. Avem: $\frac{x}{h} = \frac{e}{D-d}$ de unde $e = \frac{x(D-d)}{h}$. Notăm cu y diametrul stîlpului. Putem scrie: $y = d + e = d + \frac{x(D-d)}{h}$. Ținînd seama că $x = \frac{he}{D-d}$, rezultă că: $x = \frac{h(y-d)}{D-d}$. Într-o secțiune oarecare momentul forței este dat de: $M = Px$, iar rezistența de $R = M/W = Px/(\pi y^3/32) = 32P/\pi\cdot(x/y^3)$. Rezistența este maximă cînd este maximă funcția $z(x, y) = x/y^3$, adică funcția $z(y) = \frac{h(y-d)}{(D-d)y^3}$.

Extremele funcției $z(y)$ se determină rezolvînd ecuația $z'(y) = 0$. Avem:

$$z'(y) = \frac{h}{D-d}\cdot\frac{y^3 - 3y^2(y-d)}{y^6} =$$

$$= \frac{h}{D-d}\cdot\frac{y^2(3d-2y)}{y^6} = \frac{h}{D-d}\cdot\frac{3d-2y}{y^4}$$

și $z'(y) = 0$ pentru $y = 3d/2$. Avem:

$$x = \frac{h}{D-h}\cdot(y-d) = \frac{h}{D-d}\left(\frac{3d}{2}-d\right) = \frac{hd}{2(D-d)}.$$

Calculăm derivata de ordonul doi:

$$z''(y) = \frac{h}{D-d}\cdot\frac{-2y^4 - 4y^3(3d-2y)}{y^8} =$$

$$= -\frac{h}{D-d}\cdot\frac{12dy^3 - 6y}{y^8} = \frac{h}{D-d}\cdot\frac{6(y-2d)}{y^5}.$$

Pentru $y = \frac{3d}{2}$, avem:

$$z''\left(\frac{3d}{2}\right) = \frac{h}{D-d}\cdot\frac{6\left(\frac{3d}{2}-2d\right)}{\frac{243d^5}{32}} = -\frac{h}{D-d}\cdot\frac{32}{81d^4} < 0.$$

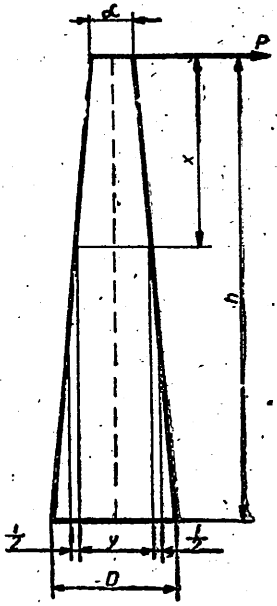


Fig. 3.28

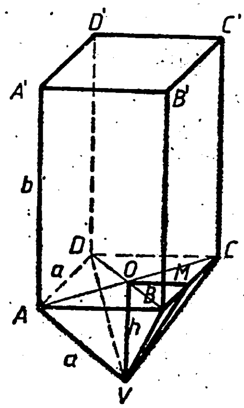


Fig. 3.29

Rezistența în stîlp este maximă dacă $D > 3d/2$ sau $x < h$.

3.48. Să se construiască un bunker de volum maxim dintr-un material dat S^2, format dintr-un tronson paralelipipedic de înălțime b fără capac, de bază un pătrat de latură a, completat cu o piramidă regulată de muchie a, cu vîrful în jos (vezi figura 3.29).

R. Înălţimea piramidei, h, este dată de: $h = \sqrt{a^2 - \frac{(a\sqrt{2})^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ (1),

iar aria bunkerului (fără capac): $S^2 = 4ab + \frac{4a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{2} = 4ab + a^2\sqrt{3}$.

Deducem: $b = \frac{S^2 - a^2\sqrt{3}}{4a}$ (2). Volumul bunkerului este: $V = a^2b + \frac{a^2h}{3}$, de unde deducem, înlocuind h din relaţia (1) şi b din relaţia (2):

$$V(a) = a^2 \cdot \frac{S^2 - a^2\sqrt{3}}{4a} + \frac{a^2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{3aS^2 - 3a^3\sqrt{3} + 2a^3\sqrt{2}}{12} =$$

$$= \frac{a^3(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) + 3S^2a}{12}.$$

Avem de studiat maximul funcţiei $V(a)$. Pentru aceasta calculăm:

$$V'(a) = \frac{1}{12}[3a^2(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) + 3S^2] = \frac{a^2(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) + 3S^2}{4}$$

şi rezolvăm ecuaţia $V'(a) = 0$ care are rădăcinile:

$$a_{1,2} = \pm\frac{S\sqrt{57(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}}{19}.$$

Calculăm derivata a doua: $V''(a) = \frac{a(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})}{2}$. În punctul

$$a_1 = \frac{S}{19}\sqrt{57(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})}$$

avem:

$$V''(a_1) = \frac{S}{28}(2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})\sqrt{57(3\sqrt{3} + 2\sqrt{2})} < 0,$$

deci volumul este maxim.

3.49. Să se determine la ce înălţime x trebuie aşezată o lampă pe verticala centrului unei piste circulare de rază r pentru ca aceasta să fie luminată la maximum, ştiind că intensitatea luminii într-un punct M este proporţională cu sinusul unghiului făcut de raza de lumină cu planul pistei şi invers proporţională cu pătratul distanţei de la punctul M la sursă.

R. Pentru punctele situate pe conturul pistei, deci cele situate la cea mai mare distanţă faţă de sursă, intensitatea I este dată, ţinînd seama de enunţ, deci: $I(x) = \frac{\sin\alpha}{d^2}$, unde $d^2 = \sqrt{x^2 + r^2}$ şi $\sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}$ (fig. 3.30).

Pentru a rezolva problema trebuie să calculăm extremele funcţiei: $I(x) = \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}}$, $x > 0$. Calculăm derivata de ordinul întîi:

$$I'(x) = \frac{(x^2+r^2)^{3/2} - \frac{3}{2}\cdot 2x^2(x^2+r^2)^{1/2}}{(x^2+r^2)^3} = \frac{(x^2+r^2)^{1/2}(x^2+r^2-3x^2)}{(x^2+r^2)^3} = \frac{r^2-2x^2}{(x^2+r^2)^{5/2}}$$

şi rezolvăm ecuaţia $I'(x) = 0$. Avem $r^2 - 2x^2 = 0$ pentru $x_{1,2} = \pm\frac{r\sqrt{2}}{2}$.
Calculăm derivata de ordinul doi a funcţiei:

$$I''(x) = \frac{-4x(x^2+r^2)^{5/2} - (r^2-2x^2)\cdot\frac{5}{2}\cdot 2x\cdot(x^2+r^2)^{3/2}}{(x^2+r^2)^5} =$$

$$= \frac{-x(x^2+r^2)^{3/2}(4x^2+4r^2+r^2-2x^2)}{(x^2+r^2)^5} = \frac{-x(2x^2+5r^2)}{(x^2+r^2)^{7/2}}.$$

Pentru $x_1 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$, avem $I''(x_1) = -\frac{3r^3\sqrt{2}\cdot 2^{7/4}}{3r^3} = -4r\sqrt[4]{2} < 0$. Prin urmare funcţia $I(x)$ are pentru $x_1 = r\sqrt{2}/2$ un punct de maxim. Rezultă că pista este luminată la maximum dacă sursa de lumină este aşezată la distanţa $x = r\sqrt{2}/2$ faţă de centrul pistei.

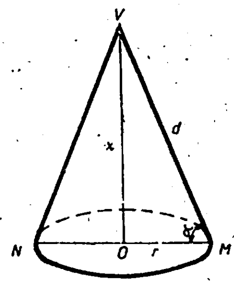


Fig. 3.30

3.50. Cantitatea de gaz care se scurge într-o secundă dintr-un vas cu presiunea P_0 în alt vas cu presiunea P (printr-un orificiu de secţiune constantă) este proporţională cu expresia: $E(v) = y^{1/\alpha}(1 - y^{(\alpha-1)/\alpha})^{1/2}$ unde $y = P/P_0$ iar α o constantă ce depinde de natura gazului. Se cere relaţia dintre P şi P_0 pentru ca scurgerea în unitatea de timp să fie maximă.

R. Calculăm derivata de ordinul întîi a funcţiei $E(y)$:

$$E'(y) = \frac{1}{\alpha}\cdot y^{(1-\alpha)/\alpha}(1 - y^{(\alpha-1)/\alpha})^{1/2} - (1/2)\,y^{1/\alpha}(1 - y^{(\alpha-1)/\alpha})^{-1/2}\cdot\frac{\alpha-1}{\alpha}y^{-1/\alpha} =$$

$$= \frac{1}{2\alpha}(1 - y^{(\alpha-1)/\alpha})^{-1/2}\cdot\left(2y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - \alpha - 1\right).$$

Rezolvăm ecuaţia $E'(y) = 0$ pentru a determina extremele funcţiei $E(y)$. Avem: $y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \frac{\alpha+1}{2}$ sau $y = \left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$. Obţinem următoarea relaţie între P şi P_0: $P = P_0 y = P_0\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^{\alpha/(1-\alpha)}$, care, în cazul aerului, pentru care $\alpha = 1{,}41$, devine: $P = 0{,}526P_0$.

3.51. Un element galvanic de forţă electromotoare E şi rezistentă interioară r produce un curent I într-un circuit exterior de rezistenţă R. Să se determine cît de mare trebuie să fie R pentru ca puterea efectivă L a elementului galvanic să fie maximă ştiind că intensitatea curentului şi respectiv puterea efectivă sînt date de: $I = \frac{E}{r+R}$, $r > 0$, $R > 0$, $L(R) = R \cdot I^2 = \frac{R \cdot E^2}{(r+R)^2}$ watt.

R. Calculăm extremele funcţiei L. Pentru aceasta calculăm $L'(R)$ şi rezolvăm ecuaţia $L'(R) = 0$. Avem:

$$L'(R) = \frac{E^2(r+R)^2 - 2RE^2(r+R)}{(r+R)^4} = \frac{E^2(r+R)(r+R-2R)}{(r+R)^4} = \frac{E^2(r+R)(r-R)}{(r+R)^4},$$

de unde $L'(R) = \frac{E^2(r-R)}{(r+R)^3}$. $L'(R) = 0$ dă $r - R = 0$ adică $R = r$.

Calculăm derivata de ordinul doi:

$$L''(R) = E^2 \cdot \frac{-(r+R)^3 - 3(r+R)^2(r-R)}{(r+R)^6} = -E^2 \cdot \frac{r+R+r-R}{(r+R)^4} = -\frac{2rE^2}{(r+R)^4}$$

şi $L''(r) = \frac{-2r^3E^2}{16r^4} = -\frac{E^2}{8r^3} < 0$. Deoarece $L''(r) < 0$, rezultă că puterea efectivă $L(R)$ este maximă pentru $R = r$.

3.52. Să se determine care este cea mai mare forţă de frînare a unei frîne electrice cu şaibă dată de relaţia: $F'(v) = \frac{av}{b^2+v^2}$, $v \in \mathbf{R}$, unde v este viteza periferică, iar a, b, constante reale pozitive.

R. Trebuie să determinăm extremele funcţiei: $F(v) = \frac{av}{b^2+v^2}$, $v \in \mathbf{R}$. Calculăm derivata întîi: $F'(v) = \frac{a(b^2+v^2) - 2av^2}{(b^2+v^2)^2} = \frac{a(b^2-v^2)}{(b^2+v^2)^2}$ şi rezolvăm ecuaţia $F'(v) = 0$ care conduce la: $b^2 - v^2 = 0$ cu soluţiile $v_1 = b$, $v_2 = -b$. Calculăm derivata doua:

$$F''(v) = a \cdot \frac{-2v(b^2+v^2)^2 - 2v(b^2+v^2)(b^2-v^2)}{(b^2+v^2)} = \frac{-2av(3b^2-v^2)}{(b^2+v^2)^3}.$$

În punctul $v_1 = b$ avem: $F''(b) = \frac{-2ab \cdot 2b^2}{8b^6} = \frac{-2av(3b^2-v^2)}{(b^2+v^2)^3}$ deoarece $a > 0$, $b > 0$. Deci pentru $v = b$ forţa de frînare este maximă şi ia valoarea: $F_{max} = ab/2b^2 = a/2b$.

3.53. Curba de magnetizare a fierului este dată de relaţia $y = e^{\frac{x}{a+bx}}$, unde x este intensitatea cîmpului magnetic, y inducţia, iar a şi b constante reale. Să se determine valorile lui x pentru care permeabilitatea $\mu(x) = \frac{y}{x}$ ia cea mai mică şi cea mai mare valoare.

R. Avem: $\mu(x) = \frac{y}{x} = \frac{1}{x} \cdot e^{\frac{x}{a+bx}}$, $x > 0$. Calculăm:

$$\frac{d\mu}{dx} = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{x}{a+bx}} + \frac{1}{x} \cdot \frac{a + bx - bx}{(a + bx)^2} e^{\frac{x}{a+bx}}\left(-\frac{1}{x} + \frac{a}{(a + bx)^2}\right) = 0$$

şi rezolvăm ecuaţia $\frac{d\mu}{dx} = 0$. Avem: $-\frac{1}{x} + \frac{a}{(a + bx)^2} = 0$, de unde:

$$b^2x^2 + (2b - 1)ax + a^2 = 0$$

cu soluţiile:

$$x_{1,2} = \frac{a(1 - 2b) \pm \sqrt{a^2(1 - 2b)^2 - 4a^2b^2}}{2b^2} = \frac{a\left(1 - 2b \pm \sqrt{1 - 4b}\right)}{2b^2},$$

care sînt reale dacă $1 - 4b > 0$ sau $b < \frac{1}{4}$ (fenomenul fizic conduce şi la impunerea altor condiţii). Valorile extreme ale permeabilităţii sînt:

$$\mu(x_i) = \frac{2b^2}{a\left(1 - 2b \pm \sqrt{1 - 4b}\right)} \cdot e^{\frac{\frac{a(1-2b\pm\sqrt{1-4b})}{2b^2}}{\frac{2b^2}{2ab^2 + ab\left(1 - 2b \pm \sqrt{1 - 4b}\right)}}}$$

sau

$$\mu(x_i) = \frac{2b^2}{a\left(1 - 2b \pm \sqrt{1 - 4b}\right)} \cdot e^{\frac{1-2b\pm\sqrt{1-4b}}{b(1\pm\sqrt{1-4b})}}, \quad i = 1,\ 2.$$

CAPITOLUL 4

FUNCȚII. LIMITE. CONTINUITATE. DERIVABILITATE PE R

4.1. Să se figureze mulțimea punctelor din plan care satisfac relațiile:

a) $\begin{cases} y \leqslant x^2 \\ |x| \leqslant 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x - 2| \leqslant 1 \\ |y| \leqslant 2. \end{cases}$

R. a) $y = x^2$ este ecuația unei parabole cu vîrful în origine care are ca axă de simetrie axa ordonatelor. $x^2 - y \geqslant 0$ este mulțimea punctelor din plan limitată de parabola $y = x^2$ (care conține punctul $M(-1, -1)$), iar $|x| \leqslant 2$ pentru $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Mulțimea căutată este reprezentată hașurat în fig. 4.1. Sînt incluse și punctele situate pe frontieră.

b) Rezolvăm inecuația: $|x - 2| \leqslant 1$. Pentru aceasta considerăm:

$x \in (-\infty, 2]$, deci $-x + 2 \leqslant 1$, de unde $x \in [1, 2]$;

$x \in (2, +\infty)$, deci $x - 2 \leqslant 1$, de unde $x \in (2, 3]$.

Inecuația $|y| \leqslant 2$ dă $y \in [-2, 2]$. Mulțimea cerută este hașurată în fig. 4.2. Sînt incluse și punctele situate pe frontieră. Prin urmare este o

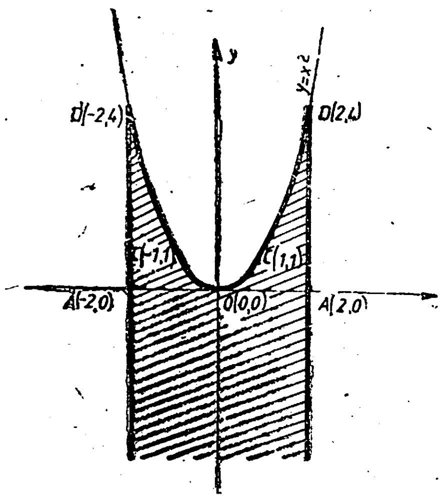


Fig. 4.1

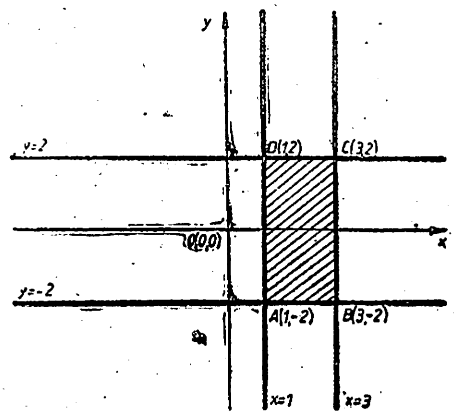


Fig. 4.2

mulţime închisă şi mărginită adică o mulţime compactă. În plus mulţimea este simplu conexă.

R. Funcţia este definită pentru $xyz < 0$. Pot exista următoarele

4.2. Să se determine mulţimea de definiţie a funcţiei $f(x, y, z) = \ln xyz$.

R. Funcţia este definită pentru $xyz > 0$. Pot exista următoarele cazuri:

$$\mathrm{I}\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases} \quad \mathrm{II}\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ z < 0 \end{cases} \quad \mathrm{III}\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ z > 0 \end{cases} \quad \mathrm{IV}\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \\ z < 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{V}\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ z > 0 \end{cases} \quad \mathrm{VI}\begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \\ z < 0 \end{cases} \quad \mathrm{VII}\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ z > 0 \end{cases} \quad \mathrm{VIII}\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \\ z < 0 \end{cases}$$

Dintre triedele scrise mai sus le alegem pe cele care satisfac relaţia: $xyz > 0$. Mulţimea de definiţie a funcţiei $f(x, y, z)$ este formată din triedrele I, IV, VI, VII din care se exclude frontiera.

4.3. Să se determine mulţimea de definiţie a funcţiei:

$$f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$$

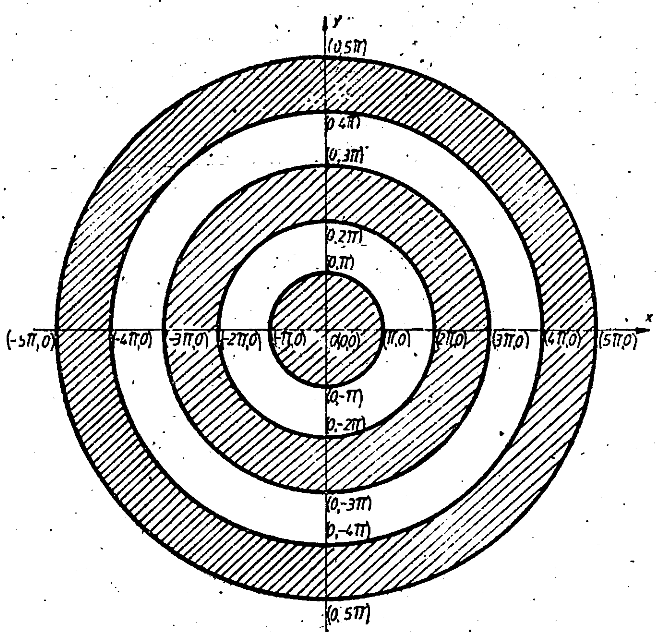


Fig. 4.3

R. Radicalul are indice par, deci trebuie impusă condiţia:

$$\sin(x^2 + y^2) \geqslant 0, \text{ de unde rezultă } 2k\pi \leqslant x^2 + y^2 \leqslant (2k+1)\pi,$$
$$k = 0, 1, \dots n$$

Prin urmare mulţimea de definiţie a funcţiei este mulţimea punctelor din plan care aparţin unei familii de coroane circulare cu centrul în punctul $O(0, 0)$. Este o mulţime închisă şi neconexă, reprezentată haşurat în fig. 4.3.

4.4. Să se afle mulţimea de definiţie a funcţiei:

$$f(x, y, z) = \ln(-1 - x^2 - y^2 + z^2).$$

R. Pentru ca logaritmul să aibă sens trebuie ca expresia de logaritmat să fie strict pozitivă adică: $-1 - x^2 - y^2 + z^2 > 0$ sau: $x^2 + y^2 - z^2 + 1 < 0$, care reprezintă interiorul hiperboloidului cu două pînze de ecuaţie: $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$. Este o mulţime nemărginită şi neconexă. De exemplu punctele: $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, 2)$, $A'(0, 0, -1)$, $B'(0, 0, -2)$, $C(1, 1, \sqrt{3})$, $C'(1, 1, -\sqrt{3})$.

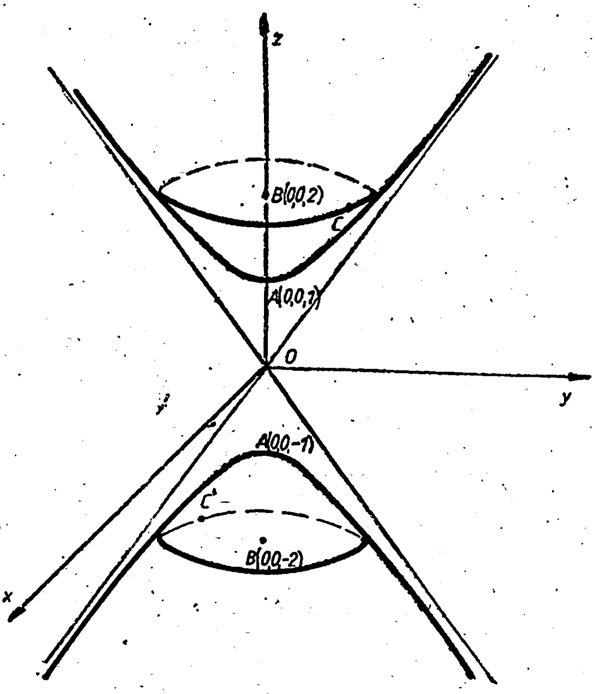


Fig. 4.4

4.5. Să se determine mulţimea de definiţie a funcţiei:

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$$

R. Trebuie ca: $1 - x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0$; $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ este ecuaţia sferei reprezentate în fig. 4.5. Mulţimea căutată este mulţimea punctelor

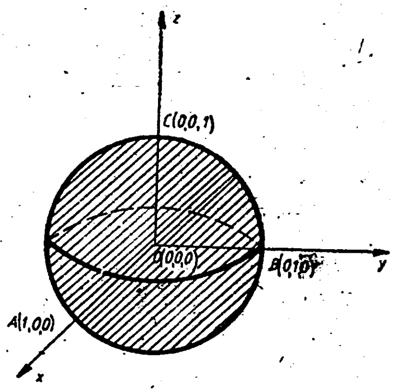


Fig. 4.5

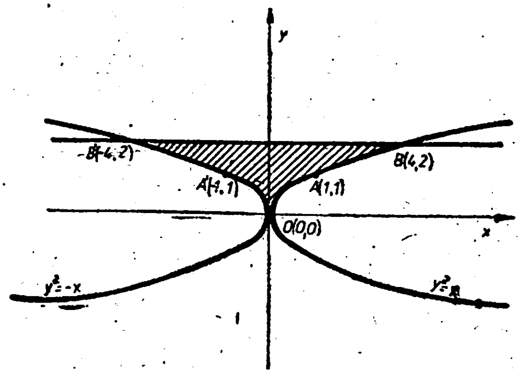


Fig. 4.6

din spaţiu situate în interiorul şi pe suprafaţa sferei cu centrul în origine şi de rază $r = 1$. Deci sfera închisă, care este o mulţime compactă (închisă şi mărginită).

4.6. Să se determine mulţimea de definiţie a funcţiei:

$$f(x, y) = \arcsin x/y^2 + \arcsin (1 - y).$$

R. Întrucît funcţia arcsinus este definită pe intervalul $[-1, 1]$ trebuie ca:
$\begin{cases} -1 \leqslant x/y^2 \leqslant 1 & \text{I} \\ -1 \leqslant 1 - y \leqslant 1 & \text{II} \end{cases}$ care revine la:

$$\text{I} \begin{cases} x/y^2 \geqslant -1 \\ x/y^2 \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{şi} \quad \text{II} \quad -2 \leqslant -y \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$$

$$\text{sau I} \begin{cases} x \geqslant -y^2 \\ x \leqslant y^2 \end{cases},\ y \neq 0 \text{ adică } -y^2 \leqslant x \leqslant y^2 \text{ şi II } 0 \leqslant y \leqslant 2.$$

Deci mulţimea de definiţie (haşurată în fig. 4.6) este mulţimea punctelor din plan mărginită de parabolele de ecuaţii: $y^2 = x$, $y^2 = -x$ şi de dreapta $y = 2$, în afara punctului $(0, 0)$. Este o mulţime conexă.

4.7. Se dă funcţia: $f(x, y) = \dfrac{x + (x - y)^2}{3x + y - (x + y)^2}$, $(x, y) \neq (0, 0)$.

Să se calculeze:
a) $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y))$; b) $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y))$; c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$.

R. a) $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x + (x - y)^2}{3x + y - (x + y)^2}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x^2}{3x - x^2} =$
$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 + x}{3 - x} = \dfrac{1}{3}$.

b) $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x + (x - y)^2}{3x + y - (x + y)^2}\right) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^2}{y - y^2} =$
$= \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y}{1 - y} = 0.$

c) Facem ca: $x \to 0$ şi $y \to 0$ pe dreapta $y = mx$:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x + (x-y)^2}{3x + y - (x+y)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x + (x-mx)^2}{3x + mx - (x+mx)^2} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x[x(1-m)^2]}{x[3 + m - x(1+m)]} = \frac{1}{3+m}.$$

Deoarece limita depinde de m, rezultă că funcţia $f(x, y)$ nu are limită în $(0, 0)$.

4.8. Se dă funcţia: $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Să se arate că $f(x, y)$ nu are limită în origine, utilizînd definiţia cu şiruri.

R. Considerăm şirurile de puncte: $M_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n}\right)$ şi $P_n\left(\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}\right)$ care converg către origine. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{1/n^2 + 1/n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \text{ şi}$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2/n^2}{1/n^2 + 4/n^2} = \frac{2n^2}{5n^2} = \frac{2}{5}.$$

Rezultă că $f(x, y)$ nu are limită în origine.

4.9. Să se arate că funcţia: $f(x, y) = \dfrac{(x+y)^2 + y}{3x + 12(x+y)^2 + y}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ nu are limită în origine.

R. Pentru calculul limitei considerăm că $x \to 0$, $y \to 0$ pe o dreaptă ce trece prin origine, de ecuaţia $y = mx$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x+y)^2 + y}{3x + 12(x+y)^2 + y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{(x+mx)^2 + mx}{3x + 12(x+mx)^2 + mx} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x^2(1+m)^2 + mx}{3x + 12x^2(1+m)^2 + mx} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{x(1+m)^2 + m}{3 + 12x(1+m)^2 + m} = \frac{m}{3+m}.$$

Deci limita nu există deoarece depinde de m.

4.10. Fie $D = \{(x, y)/cx + dy = 0\}$ şi funcţia

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{ax + by}{cx + dy}, & (x, y) \in \mathbf{R}^2 - D \\ 0, & (x, y) \in D \end{cases}$$

Să se calculeze: $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y))$ şi $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y))$.

R. a) Presupunem $ad - bc \neq 0$. Avem:

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x, y)) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{ax+by}{cx+dy}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{ax}{cx} = \frac{a}{c};$$

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x, y)) = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{ax+by}{cx+dy}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{bx}{dy} = \frac{d}{b}.$$

b) Pentru $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = k$, adică pentru $a = ck$, $b = dk$, avem:

$$f(x, y) = \frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{ckx+dky}{cx+dy} = \frac{k(cx+dy)}{cx+dy} = k;$$

deci: $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)) = k$ şi $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)) = k$.

4.11. Se dă funcţia: $f(x, y) = \dfrac{ax+by}{cx+dy}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

Să se calculeze: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$, dacă $M(x, y)$ se apropie de origine fiind situat pe prima bisectoare a axelor de coordonate.

R. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{ax+by}{cx+dy} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \dfrac{ax+bx}{cx+dx} = \dfrac{a+b}{c+d}$.

4.12. Se dă funcţia:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2}{2x^2+9y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Să se arate că: $f(x, y)$ nu are limită în origine.

R. Pentru calculul limitei $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ considerăm că $x\to 0$, $y\to 0$ pe curba $y^2 = mx$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{3xy^2}{2x^2+9y^4} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y^2=mx}} \frac{2mx^2}{2x^2+9m^2x^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y^2=mx}} \frac{2m}{2+9m^2} = \frac{2m}{2+9m^2}.$$

Deoarece limita depinde de parametrul m rezultă că nu este unică, prin urmare funcţia $f(x, y)$ nu are limită în origine.

4.13. Să se arate că pentru funcţia $f(x, y) = \dfrac{2(x-y)}{x+3y}$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ nu există.

R. Pentru calculul limitei $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)$ considerăm $x\to 0$, $y\to 0$ pe o dreaptă ce trece prin origine $y = mx$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2(x-y)}{x+3y} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{2(x-mx)}{x+3mx} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{2(1-m)}{1+3m} = \frac{2(1-m)}{1+3m}.$$

Deci limita nu există deoarece depinde de m.

4.14. Să se calculeze : $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to k}} (1 + y/x)^x$.

R. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to k}}(1+y/x)^x = \lim\limits_{x\to\infty} (1+k/x)^x = \lim\limits_{x\to\infty} [(1+k/x)^{x/k}]^k = [\lim\limits_{x\to\infty}(1+k/x)^{x/k}]^k = e^k$.

4.15. Se dă funcţia :

$$f(x, y) = (x + y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}, \quad x \neq 0, \; y \neq 0.$$

Să se arate că :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x, y) = 0$; b) $\lim\limits_{x\to 0} (\lim\limits_{y\to 0} f(x, y))$ nu există;

c) $\lim\limits_{y\to 0} (\lim\limits_{x\to 0} f(x, y))$ nu există.

R. a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x, y) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x+y) \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} = 0$ pentru că $\sin \frac{1}{x}$, $\sin \frac{1}{y}$ sînt mărginite, deci :

$$\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y} \in [-1, 1], \text{ iar } \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} (x + y) = 0;$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y)) = \lim\limits_{x\to 0} \left(\lim\limits_{y\to 0}(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x \sin \frac{1}{x} \lim\limits_{y\to 0} \sin \frac{1}{y}\right)$. Dar $\lim\limits_{y\to 0} \sin \frac{1}{y}$ nu există pentru că se pot găsi şiruri diferite $\{y_n\}$ cu $y_n \to 0$ astfel încît şirurile $\left\{\sin \frac{1}{y_n}\right\}$ corespunzătoare să aibă limite diferite. Rezultă că $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x, y))$ nu există;

c) $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y)) = \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\left(y \sin \frac{1}{y} \lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}\right)$. Dar $\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ nu există pentru că se pot găsi şiruri diferite $\{x_n\}$ cu $x_n \to 0$, astfel încît şirurile $\left\{\sin \frac{1}{x_n}\right\}$ corespunzătoare să aibă limite diferite. Deci $\lim\limits_{y\to 0}(\lim\limits_{x\to 0} f(x, y))$ nu există.

4.16. Să se studieze continuitatea funcţiei :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

R. Pentru $x^2+y^2 \neq 0$ funcţia $f(x, y)=\frac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ este continuă fiind compunere de funcţii continue. Studiem continuitatea în $(0, 0)$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\cos 0-\cos(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{-2\sin^2\frac{x^3+y^3}{2}}{x^2+y^2}=-2\underset{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}{\mathrm{ilm}}\frac{\sin^2\frac{x^3+y^3}{2}}{\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2}\cdot\frac{(x^3+y^3)^2}{4(x^2+y^2)}.$$

Dar: $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin^2\frac{x^3+y^3}{2}}{\left(\frac{x^3+y^3}{2}\right)^2}=1.$

Avem în continuare:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{(x^3+y^3)^2}{x^2+y^2}=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{(x^3+m^3x^3)^2}{x^2+m^2x^2}=$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{x^3(1+m^3)^2}{x^2(1+m^2)}=-\frac{1}{2}\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{x(1+m^3)^2}{1+m^2}=0.$$

Dar $f(0, 0)=0$. Rezultă că $f(x, y)$ este continuă în origine cînd $(x, y)\to(0, 0)$ pe dreapta $y=mx$.

4.17. Să se arate că funcţia:

$$f(x, y)=\begin{cases}\frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2\neq 0\end{cases}$$

este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, dar nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

R. a) Fixăm $y=y_0$. Avem $f(x, y_0)=\frac{2xy_0}{x^2+y_0^2}$ şi calculăm $\lim_{x\to x_0} f(x, y_0)=$ $=f(x_0, y_0)=\frac{2x_0y_0}{x_0^2+y_0^2}$. Deci $f(x, y)$ este continuă în raport cu x.

b) Fixăm $x=x_0$. Avem $f(x_0, y)=\frac{2x_0y}{x_0^2+y}$ şi calculăm $\lim_{y\to y_0} f(x_0, y)=$ $=f(x_0, y_0)=\frac{2x_0y_0}{x_0^2+y_0^2}$. Rezultă că $f(x, y)$ este continuă în raport cu y.

c) Arătăm că funcţia nu este continuă în raport cu ansamblul variabilelor. Pentru aceasta calculăm:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}}\frac{2mx^2}{x^2+m^2x^2}=\frac{2m}{1+m^2}.$$

Deoarece depinde de m, rezultă că $f(x, y)$ nu are limită în origine.

Observaţie: Dacă $f(x, y)$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor, atunci $f(x, y)$ este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte. Reciproca nu este adevărată.

Dacă $f(x, y)$ este continuă în raport cu fiecare variabilă în parte, nu rezultă că $f(x, y)$ este continuă în raport cu ansamblul variabilelor.

4.18. Să se studieze continuitatea funcţiei

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

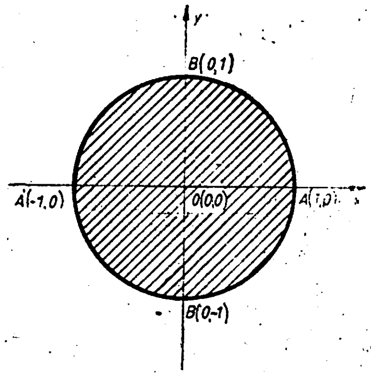


Fig. 4.7

R. Pentru ca radicalul să aibă sens, trebuie ca $1-x^2-y^2 \geqslant 0$ sau $x^2+y^2-1 \leqslant 0$.

Notăm cu D mulţimea punctelor din plan situate pe discul mărginit de cercul de ecuaţie $x^2+y^2-1=0$ (fig. 4.7):

$$D = \{(x, y) \mid x^2+y^2-1 \leqslant 0\}$$

Funcţia $f(x, y)$ este dată de:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, & x \in D-\{(0, 0)\} \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

$f(x, y) = \dfrac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}$ este continuă pe $D-\{(0, 0)\}$. Rămîne de studiat continuitatea în punctul $(0, 0)$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}.$$

Sîntem în cazul de nedeterminare $\dfrac{0}{0}$. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)(1+\sqrt{1-x^2-y^2})} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} = \frac{1}{2}.$$

Deci: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) \neq f(0, 0)$. Rezultă că funcţia dată nu este continuă în origine, dar este continuă pe $D-\{(0, 0)\}$.

4.19. Fie funcţia: $f(x, y) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y}$.

Pornind de la definiţie să se calculeze

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \text{ şi } \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

R. Pentru $y = 0$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{f(x, 0) - f\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)}{x - 0} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\sin^2 x} - \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pentru $x = \frac{\pi}{4}$, avem:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) = \lim_{y \to \frac{\pi}{4}} \frac{f\left(\frac{\pi}{4}, y\right) - f\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)}{y - \frac{\pi}{4}} = \lim_{y \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sin^2 y} - \sqrt{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}}{y - \frac{\pi}{4}} =$$

$$= \lim_{y \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{\frac{1}{2} + \sin^2 y} - 1}{y - \frac{\pi}{4}} = \lim_{y \to \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{2 \sin y \cos y}{2\sqrt{\frac{1}{2} + \sin^2 y}}}{1} = \frac{1}{2}.$$

4.20. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întîi ale funcţiei:

$$f(x, y, z) = x^{y^z},\ x > 0,\ y > 0.$$

R. Calculăm: $\frac{\partial f}{\partial x}$ aplicînd formula $(x^a)' = ax^{a-1}$; obţinem $\frac{\partial f}{\partial x} = y^z \cdot x^{y^z - 1}$. Pentru calculul lui $\frac{\partial f}{\partial y}$ aplicăm pe rînd formulele: $(a^u)' = u'a^u \ln a$, apoi $(x^n)' = nx^{n-1}$, pentru calculul lui $(y^z)'$. Avem: $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{y^z} \cdot zy^{z-1} \ln x = x^{y^z} zy^{z-1} \ln x = x^{y^z} \cdot y^{z-1} \cdot z \cdot \ln x$.

Pentru calculul lui $\frac{\partial f}{\partial z}$ aplicăm de două ori formula:

$(a^u)' = u'a^u \ln a$, o dată pentru x^{y^z} considerînd $a = x$ şi $u = y^z$ şi o dată pentru y^z. Avem: $\frac{\partial f}{\partial z} = x^{y^z} y^z \cdot 1 \cdot \ln y \cdot \ln x = x^{y^z} y^z \ln x \ln y$.

4.21. Fie $f(x, y) = \begin{cases} xy \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Să se arate că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nu este continuă în origine.

R. Calculăm derivata parţială de ordinul II $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Pentru aceasta calculăm întîi $\frac{\partial f}{\partial y}$. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{-2y(x^2+y^2)-2y(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2}\left[(x^2-y^2) - \frac{2y(x^2+y^3+x^2y-y^3)}{x^2+y^2} = \frac{x(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right]$$

şi în continuare

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^5-xy^4-4x^3y^2}{x^4+2x^2y^2+y^4}\right) = \frac{(5x^4-y^4-12x^2y^2)(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^4} -$$

$$- \frac{x(4x^3+4xy^2)(x^4-y^4-4x^2y^2)}{(x^2+y^2)^4} = \frac{(x^2+y^2)[(5x^4-y^4-12x^2y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^4} -$$

$$- \frac{4x^2(x^4-y^4-4x^2y^2)]}{(x^2+y^2)^4} = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} = \frac{(x^6-y^6)+9x^2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \frac{(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)+9x^2y^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} = \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3}.$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$ este continuă în orice punct $(x, y) \neq (0, 0)$, deoarece este compunere de funcţii continue. Studiem continuitatea în punctul $(0, 0)$ considerînd că $(x, y) \to (0, 0)$ după o direcţie oarecare m. Avem:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(x^2-y^2)(x^4+10x^2y^2+y^4)}{(x^2+y^2)^3} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{(x^2-m^2x^2)}{(x^2+m^2x^2)^3}\cdot\frac{(x^4+10m^2x^4+m^4x^4)}{1} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=mx}} \frac{(1-m^2)(1+10m^2+m^4)}{(1+m^2)^3} =$$

$$= \frac{(1-m^2)(1+10m^2+m^4)}{(1+m^2)^3}.$$

Deci limita poate lua o infinitate de valori; prin urmare $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nu este continuă în $(0, 0)$.

4.22. Să se calculeze: $\frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p \partial y^q}$ pentru funcţia

$$f(x, y) = (x^2+y^2)e^{x+y},\ (x, y) \in \mathbf{R}^2.$$

R. Considerăm funcţiile $g(x, y) = e^{x+y}$ şi $h(x, y) = x^2 + y^2$.

Pentru a calcula derivatele parţiale de ordin $p + q$ folosim formula lui Leibnitz de 2 ori, o dată pentru a calcula $\frac{\partial^p f}{\partial x^p}$, iar a doua oară pentru

a calcula $\dfrac{\partial^{p+q}f}{\partial x^p\partial y^q}$: Avem: $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p} = e^{x+y}(x^2+y^2) + C_p^1 e^{x+y}\cdot 2x + C_p^2 e^{x+y}\cdot 2 =$
$= e^{x+y}[x^2+y^2+2px+p(p-1)]$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\frac{\partial^{p+q}f}{\partial x^p\partial y^q} = e^{x+y}[x^2+y^2+2px+p(p-1)] + C_q^1 e^{x+y}2y + C_q^2 e^{x+y}\cdot 2 =$$

$$= e^{x+y}[x^2+y^2+2px+2qy+p(p-1)+q(q-1)],\ (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

4.23. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul p în raport cu x şi y pentru funcţia $f(x, y) = (x-a)^m(y-b)^n$.

R. a) Demonstrăm formula pentru $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}$ folosind metoda inducţiei matematice.

I. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = m(x-a)^{m-1}(y-b)^n$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = m(m-1)(x-a)^{m-2}(y-b)^n$

II. Presupunem că:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k} = m(m-1)\ldots(m-k+1)(x-a)^{m-k}(y-b)^n \qquad (1)$$

Demonstrăm că:

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{k+1}} = m(m-1)\ldots(m-k)(x-a)^{m-k-1}(y-b)^n \qquad (2)$$

Într-adevăr, derivînd din nou $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^p}$ în raport cu x în (1), obţinem relaţia (2), adică: $\dfrac{\partial^p f}{\partial x^p} = A_m^p(x-a)^{m-p}(y-b)^n$.

b) Utilizăm tot metoda inducţiei matematice.

I. $\dfrac{\partial f}{\partial y} = n(x-a)^m(y-b)^{n-1}$; $\dfrac{\partial^k f}{\partial y^k} = n(n-1)(x-a)^m(y-b)^{n-2}$.

II. Presupunem că:

$$\frac{\partial^k f}{\partial y^k} = n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-a)^m(y-b)^{n-k} \qquad (3)$$

Demonstrăm că:

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial y^{k+1}} = n(n-1)\ldots(n-k)(x-a)^m(y-b)^{n-k-1} \qquad (4)$$

Într-adevăr, derivînd din nou $\dfrac{\partial^k f}{\partial y^k}$ în raport cu y în (3), obţinem relaţia (4), adică: $\dfrac{\partial^p f}{\partial y^p} = A_n^p(x-a)^m(y-b)^{n-p}$.

4.24. Să se calculeze df şi d^2f pentru funcţia:

$$f(x, y, z) = \cos(x + 2y + 3z), \quad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$$

R. Calculăm derivatele parţiale de ordinul I:

$$\partial f/\partial x = -\sin(x + 2y + 3z), \ \partial f/\partial y = -2\sin(x + 2y + 3z),$$
$$\partial f/\partial z = -3\sin(x + 2y + 3z)$$

şi înlocuind în expresia lui df:

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

Avem:

$$\mathrm{d}f = -\sin(x + 2y + 3z)\mathrm{d}x - 2\sin(x + 2y + 3z)\mathrm{d}y - 3\sin(x + 2y + 3z)\mathrm{d}z,$$
$$\mathrm{d}f = -\sin(x + 2y + 3z)(\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y + 3\mathrm{d}z).$$

Calculăm derivatele parţiale de ordin II:

$$\partial^2 f/\partial x^2 - \cos(x + 2y + 3z); \ \partial^2 f/\partial y^2 = -4\cos(x + 2y + 3z);$$
$$\partial^2 f/\partial x\partial y = -2\cos(x + 2y + 3z), \ \partial^2 f/\partial y\partial z = -6\cos(x + 2y + 3z);$$
$$\partial^2 f/\partial z^2 = -9\cos(x + 2y + 3z); \ \partial^2 f/\partial z\partial x = -3\cos(x + 2y + 3z)$$

şi înlocuim în formula:

$$\mathrm{d}^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\mathrm{d}z^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

Avem:

$$d^2f = -\cos(x + 2y + 3z)(\mathrm{d}x^2 + 4\mathrm{d}y^2 + 9\mathrm{d}z^2 + 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 12\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 6\mathrm{d}z\mathrm{d}x)$$
$$\mathrm{d}^2 f = -\cos(x + 2y + 3z)(\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y + 3\mathrm{d}z)^2.$$

4.25. Să se arate că pentru funcţia $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, avem $d^2f > 0$, oricare ar fi $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

R. Toate derivatele parţiale de ordinul I şi II precum şi df şi d^2f sînt definite pentru $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.
Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \ \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\text{şi } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Celelalte derivate parţiale de ordinul II se deduc uşor ţinînd seama că funcţia $f(x, y, z)$ este simetrică în x, y, z:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{z^2 + x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\frac{-2xy}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = -\frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Din simetrie rezultă:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\frac{zx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Înlocuind în expresia:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\mathrm{d}z^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\mathrm{d}y\mathrm{d}z +$$
$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\mathrm{d}z\mathrm{d}x,$$

obţinem:

$$d^2 f = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}[(y^2+z^2)\mathrm{d}x^2 + (z^2+x^2)\mathrm{d}y^2 + (x^2+y^2)\mathrm{d}z^2 -$$
$$- 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y - 2yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x],$$

sau

$$d^2 f = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}[(y^2\mathrm{d}x^2 - 2xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y + x^2\mathrm{d}y^2 +$$
$$+ (z^2\mathrm{d}y^2 - 2yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z^2) + (x^2\mathrm{d}z^2 - 2zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x^2)],$$

de unde:

$$\mathrm{d}^2 f = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}[(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)^2 + (z\mathrm{d}y - y\mathrm{d}z)^2 + (x\mathrm{d}z - z\mathrm{d}x)^2].$$

Rezultă că $\mathrm{d}^2 f > 0$, pentru orice $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

4.26. O funcţie $z = f(x, y)$ care verifică identic relaţia $f(mx, my) = m^k f(x, y)$ pentru orice m se numeşte funcţie omogenă de grad k. Să se arate că funcţia omogenă de ordin k: $z = f(x, y)$ poate fi pusă totdeauna sub forma: $z = x^k F(1, y/x)$, $x \neq 0$.

R. Deoarece $z = f(x, y)$ este o funcţie omogenă de grad k, avem:

$$f(mx, my) = m^k f(x, y) \tag{1}$$

Considerăm $m = 1/x$, $x \neq 0$ şi înlocuind în (1) avem:

$$f(1, y/x) = (1/x^k) f(x, y/x) \text{ sau } f(x, y/x) = x^k f(1, y/x).$$

Notăm: $F(y/x) = f(1, y/x)$ şi scriem funcţia $z = f(x, y)$ sub forma $z = x^k F(y/x)$.

4.27. O funcţie omogenă de un număr oarecare de variabile se defineşte în acelaşi mod ca o funcţie de două variabile. Într-adevăr, o funcţie $f(x, y, z)$ este omogenă de grad k dacă:

$f(mx, my, mz) = m^k f(x, y, z)$ pentru orice m. Să se demonstreze că există relaţia $f(x, y, z) = x^k F(1, y/x, z/x)$, $x \neq 0$.

R. Punem $m = 1/x$, $x \neq 0$. Avem:

$$f(1, y/x, z/x) = \frac{1}{x^k} f(x, y, z), \text{ de unde } f(x, y, z) = x^k f(1, y/x, z/x).$$

Notăm $F(y/x, z/x) = f(1, y/x, z/x)$.

Prin urmare: $f(x, y, z) = x^k F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$.

4.28. Să se arate că dacă $f(x, y, z)$ este o funcţie omogenă de grad n şi derivabilă, atunci derivatele parţiale de ordin I sînt funcţii omogene de grad $n - 1$.

R. $f(x, y, z)$ este funcţie omogenă de grad n; atunci:

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z).$$

Derivăm în raport cu x:

$$t \cdot f'_x(tx, ty, tz) = t^n f'_x(x, y, z); \quad f'_x(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_x(x, y, z);$$

$f'_x(x, y, z)$ este funcţie omogenă de grad $n - 1$. La fel, celelalte derivate parţiale sînt funcţii omogene de grad $n - 1$ adică:

$$f'_y(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_y(x, y, z); \quad f'_z(tx, ty, tz) = t^{n-1} f'_z(x, y, z).$$

4.29. Să se arate că dacă $f(x, y, z)$ este o funcţie omogenă de grad n în toate variabilele şi derivabilă de 2 ori, atunci verifică egalitatea:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)} f = n(n - 1)f.$$

R. $f(x, y, z)$ este funcţie omogenă de grad n. Atunci $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$ şi verifică relaţia lui Euler:

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} = nf \tag{1}$$

Derivînd relaţia în raport cu x, y, z, obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + x \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + z \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = n \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ x \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + y \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = n \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ x \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} + y \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} + z \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = n \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+z\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=(n-1)\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\ x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+z\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=(n-1)\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ x\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}+y\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}+z\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=(n-1)\dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

de unde:

$$\begin{cases} x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+xz\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=(n-1)x\dfrac{\partial f}{\partial x}; \\ xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}+zy\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=(n-1)y\dfrac{\partial f}{\partial y}; \\ xz\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}+yz\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}+z^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=(n-1)z\dfrac{\partial f}{\partial z}. \end{cases}$$

Adunăm membru cu membru toate relaţiile şi ţinem seama de relaţia (1). Avem:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2zy\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=$$

$$=(n-1)\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}\right)=(n-1)\,nf,$$

adică: $\left(x\dfrac{\partial}{\partial x}+y\dfrac{\partial}{\partial y}+z\dfrac{\partial}{\partial z}\right)^{(2)};f=n(n-1)f.$

4.30. Să se arate că funcţia:

$$f(x,\ y,\ z)=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ (x,\ y,\ z)\in\mathbf{R}^3-\{(0,\ 0,\ 0)\}$$

verifică relaţia $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=0.$

R. Rezolvăm în două moduri:

I. Orice funcţie omogenă de grad n, de clasă $C^{(1)}$ verifică relaţia lui Euler: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}+z\dfrac{\partial f}{\partial z}=nf.$

Observăm că funcţia $f(x,\ y,\ z)=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ este funcţie omogenă de grad 0 şi deci înlocuind în relaţia lui Euler $n=0$ obţinem, relaţia

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

II. Calculăm derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei $f(x, y, z)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \dfrac{2x(ax+by+cz)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{ay^2+az^2-bxy-cxz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{b\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \dfrac{2y(ax+by+cz)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{bx^2+bz^2-axy-cyz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{c\sqrt{x^2+y^2+z^2} - \dfrac{2z(ax+by+cz)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{cx^2+cy^2-axz-byz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

Avem deci:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(axy^2+axz^2-bx^2y+bx^2y-cx^2z+$$
$$+byz^2-axy^2-cy^2z+cx^2z+cy^2z-axz^2-byz^2)=0$$

adică relaţia cerută.

4.31. Să se arate că dacă $f(x, y)$ şi $g(x, y)$ sînt 2 funcţii de 2 ori derivabile, iar Δ este operatorul lui Laplace, atunci

$$\Delta(f, g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\Delta^*(f, g), \text{ unde}$$
$$\Delta^*(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} = (\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g).$$

R. Pentru a demonstra relaţia cerută este necesară calcularea derivatelor parţiale de ordinul I şi II ale funcţiei fg:

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x} = f\frac{\partial g}{\partial x} + g\frac{\partial f}{\partial x};\quad \frac{\partial(fg)}{\partial y} = f\frac{\partial g}{\partial y} + g\frac{\partial f}{\partial y},$$

iar

$$\frac{\partial^2(fg)}{\partial x^2} = f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} = f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + g\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}$$

şi analog:

$$\frac{\partial^2(fg)}{\partial y^2} = f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + g\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x},$$

de unde:

$$\Delta(fg) = \frac{\partial^2(fg)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(fg)}{y^2} =$$
$$= f\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) + g\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\right) =$$
$$= f\Delta g + g\Delta f + 2(\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g).$$

Deci

$$\Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f + 2\Delta(f,g).$$

4.32. Se numeşte *potenţial al sferei* $x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$ funcţia

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 2\pi a^2 - \dfrac{2\pi}{3}(x^2 + y^2 + z^2), & x^2 + y^2 + z^2 < a^2 \\ \dfrac{4\pi a^3}{3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, & x^2 + y^2 + z^2 \geqslant a^2. \end{cases}$$

Să se verifice că $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ia valorile -4π şi 0 după cum punctul $M(x, y, z)$ se află în interiorul sau în exteriorul sferei.

R. a) Pentru $x^2 + y^2 + z^2 < a^2$, deci dacă M se află în interiorul sferei $(x, y, z) = 2\pi a^2 - \dfrac{2\pi}{3}(x^2 + y^2 + z^2)$ şi avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4\pi}{3}x; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4\pi}{3}y; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{4\pi}{3}z,$$

iar

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{4\pi}{3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{4\pi}{3}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{4\pi}{3},$$

de unde

$$\Delta f = -\frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} - \frac{4\pi}{3} = -4\pi.$$

b) Pentru $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant a^2$, adică dacă M aparţine exteriorului sferei

$$f(x, y, z) = \frac{4\pi a}{3\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

şi

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{4\pi a x}{3\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4\pi a y}{3\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{4\pi a z}{3\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^3}},$$

iar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3} - \dfrac{2x^2 \cdot 3(x^2 + y^2 + z^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2)}}}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} =$$

$$= -\frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{(x^2 + y^2 + z^2) - 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = -\frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2-3x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} =$$

$$= \frac{4\pi a}{3} \cdot \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Analog:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{4\pi a}{3} \frac{2y^2 - z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{4\pi a}{3} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=-\frac{4\pi a}{3}\,\frac{2(x^2+y^2+z^2-x^2-y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=0$$

Deci:

$$\Delta f=\begin{cases}-4\pi, & x^2+y^2+z^2<a^2\\ 0, & x^2+y^2+z^2\geqslant a^2.\end{cases}$$

4.33. Să se calculeze dF și d^2F pentru funcția

$$F(x,y)=f(x+y,\,x^2+y^2)$$

R. a) Notăm: $u=x+y$; $v=x^2+y^2$ de unde

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1;\ \frac{\partial u}{\partial y}=1;\ \frac{\partial v}{\partial x}=2x;\ \frac{\partial v}{\partial y}=2y.$$

Calculăm dF utilizînd formula

$$\mathrm{d}F=\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}+2y\frac{\partial f}{\partial v},$$

deci:

$$\mathrm{d}F=\left(\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial f}{\partial u}+2y\frac{\partial f}{\partial v}\right)\mathrm{d}y.$$

b) Pentru a calcula dF utilizăm formula:

$$\mathrm{d}^2F=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\mathrm{d}y^2 \tag{1}$$

Prin urmare trebuie calculate derivatele parțiale de ordin II ale funcției $F(x,y)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+$$

$$+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},$$

de unde:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial v};$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2(x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}.$$

Înlocuind în formula (1) obţinem:

$$\mathrm{d}^2F = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial v}\right)\mathrm{d}x^2 +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 4y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial v}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y +$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2(x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} + 4xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)\mathrm{d}y^2$$

sau:

$$\mathrm{d}^2F = (\mathrm{d}x^2 + 2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \mathrm{d}y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + 2[2x\mathrm{d}x^2 + 2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (x+y)\mathrm{d}y^2]\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v} +$$

$$+ 4(x^2\,\mathrm{d}x^2 + y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}y^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}x\mathrm{d}y)\frac{\partial f}{\partial v}.$$

4.34. Să se calculeze $\mathrm{d}F$ pentru funcţia $F(x, y) = f(1 + xy, x^2 + y^2)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

R. Notăm $u = 1 + xy$, $v = x^2 + y^2$. Avem:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y;\quad \frac{\partial u}{\partial y} = x;\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x;\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y.$$

Înlocuim în relațiile:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x};\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

și obținem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}y+\frac{\partial f}{\partial x}2x;\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}x+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot 2y.$$

Deci diferențiala funcției $F(x, y)$ este:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=\left(y\frac{\partial f}{\partial u}+2x\frac{\partial f}{\partial v}\right)dx+\left(x\frac{\partial f}{\partial u}+2y\frac{\partial f}{\partial v}\right)dy.$$

4.35. Să se arate că funcția $z(x, y)$ definită de relația:

$\varnothing(x-az, y-bz)=0,\quad a, b\in\mathbf{R}$ verifică ecuația $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=1.$

(Examen(

R. Notăm $\alpha=x-az$, $\beta=y-bz$ și derivăm întîi în raport cu x, apoi în raport cu y, în ipoteza că $\varnothing(\alpha,\beta)$ este de clasă $C^{(1)}$ în $D\subset\mathbf{R}^2$. Avem:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\alpha}\left(1-a\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\beta}\left(-b\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=0\\[2mm] \dfrac{\partial\varnothing}{\partial\alpha}\left(-a\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\beta}\left(1-b\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=0,\end{cases}$$

de unde

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}\left(a\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\alpha}+b\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\beta}\right)=\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\alpha}\\[2mm] \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(a\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\alpha}+b\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\beta}\right)=\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\beta}.\end{cases}$$

Înlocuim $\partial z/\partial x$ și $\partial z/\partial y$ în ecuația dată și obținem:

$$a\frac{\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\alpha}}{a\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\alpha}+b\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\beta}}+b\frac{\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\beta}}{a\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\alpha}+b\dfrac{\partial\varnothing}{\partial\beta}}=1$$

soluție care este adevărată în ipoteza că:

$$a\frac{\partial\varnothing}{\partial\alpha}+b\frac{\partial\varnothing}{\partial\beta}\neq 0.$$

4.36. Să se găsească transformata ecuației

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

în urma schimbării de variabile: $x=u$, $y=uv$.

R. Avem $u = x$; $v = y/x$, $x \neq 0$. Calculăm derivatele parţiale de ordinu I ale lui z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 1 - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{y}{x^2} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{v}{u};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot 0 + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Calculăm derivatele parţiale de ordinul II ale lui z utilizînd operatorii:

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x} = \frac{\partial \cdot}{\partial u} - \frac{u}{v} \frac{\partial \cdot}{\partial v}; \quad \frac{\partial \cdot}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial \cdot}{\partial v}.$$

Avem:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{v}{u} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \frac{\partial z}{\partial v}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{v}{u^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{v}{u}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} - \frac{1}{u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{v}{u^2} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{v}{u} \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} + \frac{v}{u^2} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{v^2}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{2v}{u^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - 2\frac{v}{u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v^2}{u^2} \frac{\partial^2 z}{v^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{u} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right) =$$

$$= -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{v}{u} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -\frac{1}{u^2} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{v}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Înlocuim în ecuaţia dată $x = u$; $y = uv$ precum şi

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{ şi } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

şi obţinem:

$$u^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{v}{u} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{v^2}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{2v}{u^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right) +$$

$$+ 2u^2 v\left(-\frac{1}{u^2} \frac{\partial z}{\partial v} + \frac{1}{u} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{v}{u^2} \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) + u^2 v^2 \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

de unde:

$$u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2uv \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + 2v \frac{\partial z}{\partial v} - 2v \frac{\partial z}{\partial v} + 2uv \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 2v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + v^2 \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$$

sau

$$u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = 0.$$

Ecuația are ecuația generală: $z = f(v) + ug(v)$. (1)

Dar $u = x$, $v = y/x$, $x \neq 0$ și înlocuind în expresia soluției generale obținem soluția generală a ecuației date:

$$z(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$$

cu $x \neq 0$, unde f și g au derivate de ordinul al II-lea continue.

4.37. Să se găsească punctele de extrem ale funcției $f(x, y) = xy \ln (x^2+y^2)$.

R. Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y \ln (x^2 + y^2) + xy \dfrac{2x}{x^2+y^2} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x \ln (x^2 + y^2) + xy \dfrac{2y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} y \left[\ln (x^2 + y^2) + \dfrac{2x^2}{x^2+y^2}\right] = 0 \\ x \left[\ln (x^2 + y^2) + \dfrac{2y^2}{x^2+y^2}\right] = 0 \end{cases}$$

pentru a determina punctele staționare ale funcției $f(x, y)$.

Găsim soluțiile $\begin{cases} x = \pm 1/\sqrt{2e} \\ y = \pm 1/\sqrt{2e} \end{cases}$ și $\begin{cases} x = \pm 1/\sqrt{2e} \\ y = \pm 1/\sqrt{2e} \end{cases}$

deci punctele staționare sînt

$$A(1/\sqrt{2e},\ 1/\sqrt{2e});\ B(-1/\sqrt{2e},\ -1/\sqrt{2e});\ C(1/\sqrt{2e},\ -1/\sqrt{2e});$$
$$D(-1/\sqrt{2e},\ 1/\sqrt{2e}).$$

Calculăm derivatele parțiale de ordinul II:

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y\left[\frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{4x(x^2+y^2) - 4x^3}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{y(2x^3 + 6xy^2)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \ln(x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + x\left[\frac{2x}{x^2+y^2} - \frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2}\right] =$$

$$= \ln (x^2+y^2) + \frac{2y^2}{x^2+y^2} + \frac{2x^2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x\left[\frac{2y}{x^2+y^2} + \frac{4y(x^2+y^2) - 4y^3}{(x^2+y^2)^2}\right] = \frac{x(2y^3 + 6x^2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy(y^2+3x^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Din semnul expresiei $rt - s^2$ calculat pentru fiecare punct în parte deducem că punctele $A(1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e})$ şi $B(-1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e})$ sînt puncte de minim ale funcţiei $f(x, y)$ deoarece $r_0t_0 - s_0^2 = 4e^4 > 0$ şi $r_0 = 2e^2 > 0$ iar $C(-1/\sqrt{2e}, 1/\sqrt{2e})$ şi $D(1/\sqrt{2e}, -1/\sqrt{2e})$ sînt puncte de maxim pentru că $r_0t_0 - s_0^2 = 4e^4 > 0$, iar $r_0 = -2e^2 < 0$.

4.38. Să se găsească punctele de extrem ale funcţiei:

$$z(x, y) = \sin x + \cos y + \cos (x - y);\ 0 \leqslant x \leqslant \pi/2 \text{ şi } 0 \leqslant y \leqslant \pi/2.$$

R. Rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos x - \sin (x - y) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -\sin y + \sin (x - y) = 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \cos x = \sin (x - y) \\ \sin y = \sin (x - y) \end{cases}$$

cu soluţiile cuprinse în intervalele cerute $x = \pi/3$, $y = \pi/6$.
Deci $A(\pi/3, \pi/6)$ este punct staţionar. Pentru a determina natura punctelor de extrem calculăm derivatele parţiale de ordinul II.

$$r = \partial^2 z/\partial x^2 = -\sin x - \cos (x - y);\ s = \partial^2 z/\partial x \partial y = \cos (x - y);$$

$$t = \partial^2 z/\partial y^2 = -\cos y + \cos (x - y).$$

În punctul $A(\pi/3, \pi/6)$ semnul expresiei $rt - s^2$ este:

$$r_0t_0 - s_0^2 = [-\sin \pi/3 - \cos (\pi/3 - \pi/6)][-\cos \pi/6 + \cos (\pi/3 - \pi/6)] -$$
$$- \cos^2(\pi/3 - \pi/6) = -3/4 < 0.$$

Deci $A(\pi/3, \pi/6)$ este punct „şa" şi $z(\pi/3, \pi/6) = \sin \pi/3 + \cos \pi/6 + \cos \pi/3 = \sqrt{3}/2 + 2\sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}/2$.

4.39. Să se determine un punct M din planul triunghiului ABC, astfel încît suma $z = MA^2 + MB^2 + MC^2$ să fie minimă.

R. Fie $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ şi $M(x, y)$.
Avem:

$$z = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + (x - x_3)^2 + (y - y_1)^2 + (y - y_2)^2 + (y - y_3)^2.$$

Rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2(x - x_1 + x - x_2 + x - x_3) = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2(y - y_1 + y - y_2 + y - y_3) = 0 \end{cases}$$

şi obţinem $x_M = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$; $y_M = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$.

Deoarece: $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6$; $s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$; $t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ rezultă că în punctul $M(x_M, y_M)$ avem $r_0 t_0 - s_0^2 = 36 > 0$ şi $r_0 > 0$. Rezultă că punctul M este punct de minim. Prin urmare, dacă M este centrul de greutate al triunghiului ABC atunci suma $z = MA^2 + MB^2 + MC^2$ este minimă.

4.40. O bobină de volum $V = 2\pi xyz$ are inductanţa $u = \frac{mxyz}{ax + by + cz}$ unde x este raza medie de înfăşurare, y diferenţa dintre raza exterioară şi raza interioară, z lungimea bobinei, iar m, a, b şi c constante. Să se determine valorile x, y, z astfel încît la un volum dat V inductanţa să fie maximă.

R. Din expresia volumului deducem $z = \frac{V}{2\pi xy}$. Determinăm minimul funcţiei $U = U(x, y)$ dată de:

$$U = \frac{1}{u} = \frac{1}{m}\left(\frac{a}{yz} + \frac{b}{xz} + \frac{c}{xy}\right) = \frac{2\pi}{mV}\left(ax + by + \frac{cV}{2\pi xy}\right).$$

Pentru aceasta rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{2\pi}{mV}\left(a - \dfrac{2\pi c V y}{4\pi^2 x y^2}\right) = \dfrac{2\pi}{mv}\left(a - \dfrac{cV}{2\pi x^2 y}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{2\pi}{mV}\left(b - \dfrac{2\pi c V x}{4\pi^2 x^2 y^2}\right) = \dfrac{2}{mV}\left(b - \dfrac{cV}{2\pi x y^2}\right) = 0, \end{cases}$$

de unde: $\begin{cases} x^2 y = cV/2a\pi \\ xy^2 = cV/2b\pi \end{cases}$ sau $x/y = b/a$, deci $x = yb/a$.

Dar: $y = cV/2a\pi \cdot b^2y^2/a^2 = a^2cV/2a\pi b^2 y = acV/2b^2\pi y^2$.

De aici $y^3 = acV/2b^2\pi$ sau $y = \sqrt[3]{acV/2b^2V}$; $x = \sqrt[3]{bcV/2b^2V}$; $z = \sqrt[3]{abV/2c^2\pi}$

Avem:

$$u = \frac{mV}{2\pi}\left(\sqrt[3]{\frac{a^3bcV}{2a^3V}} + \sqrt[3]{\frac{b^2acV}{2b^2\pi}} + \frac{cV}{2\pi\sqrt[3]{\frac{bcV}{2a^2\pi}\cdot\frac{acV}{2b^2\pi}}}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{mV}{2\pi}\cdot\sqrt[3]{\frac{2\pi}{abcV}} = \frac{mV}{6\pi}\sqrt[3]{\frac{2\pi}{abcV}} = \frac{m}{3}\sqrt[3]{\frac{V^2}{4abc\pi^2}}.$$

Pentru această valoare u este maxim deoarece:

$$U = 1/u \text{ este minim.}$$

Avem:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{aV}{2\pi y}\cdot\frac{2}{x^3};\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{cV}{2\pi}\cdot\frac{1}{x^2y^2};\quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{cV}{2\pi x}\cdot\frac{2}{y^3},$$

de unde:

$$r_0 t_0 - s_0^2 = c^2V^2/x^4y^4\pi^2 - c^2V^2/x^4y^4\pi^2 > 0 \text{ şi } r_0 > 0.$$

Rezultă că $U = 1/u$ este minim.

CAPITOLUL 5

ŞIRURI ŞI SERII DE FUNCŢII

5.1. Se dă şirul de funcţii

$$f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^{2n}}, \quad x \in \mathbf{R},\ n = 1, 2, \ldots .$$

Se cer:

a) mulţimea de convergenţă şi funcţia limită;

b) să se studieze uniform convergenţa şirului dat pe mulţimea de convergenţă.

R. a) Fie $x \in \mathbf{R}$, $|x| < 1$, deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{1 + (x^2)^n} = \frac{0}{1+0} = 0$. Dacă $x = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(1) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Dacă $x = -1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(-1) = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n/2$ nu există. Pentru $|x| > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{x^n(1/x^n + x^n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1/x)^n + x^n} = 0.$$

Rezultă că mulţimea de convergenţă este $C = \mathbf{R} \setminus \{-1\}$ şi funcţia limită este $f\colon C \to \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in C,\ x \neq 1 \\ 1/2, & x = 1. \end{cases}$$

b) Să arătăm că şirul (f_n) nu este uniform convergent pe C. Pentru aceasta arătăm că nu există $N(\varepsilon)$ finit, astfel încît $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$ şi orice $x \in C$. Pentru $x \in C$, $x \neq 1$ avem

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x^n}{1 + x^{2n}} - 0 \right| = \frac{|x|^n}{1 + (x^2)^n} = \frac{|x|^n}{1 + |x|^{2n}}$$

şi condiţia

$$\frac{|x|^n}{1 + |x|^{2n}} < \varepsilon \text{ revine la } \varepsilon(|x|^n)^2 - |x|^n + \varepsilon > 0$$

care conduce la

$$|x|^n < \frac{1 - \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon} \quad \text{sau} \quad |x|^n > \frac{1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}.$$

sau, logaritmînd,

$$n \ln |x| < \ln \frac{1-\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon} \quad \text{sau} \quad n \ln |x| > \ln \frac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}.$$

Prima inegalitate nu poate fi satisfăcută pentru orice $n \in \mathbf{N}$ (şi nici pentru orice $x \in C$) iar din a doua inegalitate obţinem: $n > \dfrac{\ln \dfrac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}}{\ln |x|}$.

Însă pentru ε fixat, avem $\sup\limits_{x \in C} \dfrac{\ln \dfrac{1+\sqrt{1-4\varepsilon^2}}{2\varepsilon}}{\ln |x|} = +\infty$ deci nu există $N(\varepsilon)$.

5.2. Se consideră şirul (f_n), $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f_n(x) = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2}.$$

Să se arate că este uniform convergent pe $\mathbf{R}$.

R. Folosim criteriul general al lui Cauchy. Pentru aceasta evaluăm modulul diferenţei $f_{n+p}(x) - f_n(x)$, care se scrie:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left| \frac{\cos(n+1)x}{(n+1)^2} + \frac{\cos(n+2)x}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{\cos(n+p)x}{(n+p)^2} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{|\cos(n+1)x|}{(n+1)^2} + \frac{|\cos(n+2)x|}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{|\cos(n+p)x|}{(n+p)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+p)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}.$$

Deoarece $1/n \to 0$, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$, astfel încît, pentru $n > N(\varepsilon)$, să avem $1/n < \varepsilon$ şi deci $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ pentru orice $n > N(\varepsilon)$, $p \geqslant 1$ şi pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Rezultă că şirul dat este uniform convergent pe $\mathbf{R}$.

5.3. Să se arate că dacă (f_n) este un şir de funcţii $f_n : A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}$, egal mărginite pe A şi (a_n) un şir de numere reale, convergent la zero, atunci şirul de funcţii (g_n), $g_n : A \to \mathbf{R}$, $g_n(x) = a_n f_n(x)$ este uniform convergent la zero pe A.

Să se aplice acest rezultat pentru şirurile

a) $\dfrac{\sin nx}{n}$; b) $\dfrac{\cos nx}{n}$; c) $\dfrac{\alpha \sin nx + \beta \sin nx}{\ln n}$.

R. Deoarece şirul de funcţii (f_n), $f_n : A \to \mathbf{R}$ este echimărginit, rezultă că există $M > 0$, astfel încît $|f_n(x)| \leqslant M$, oricare ar fi $x \in A$ şi $n \in \mathbf{N}$ Deoarece $a_n \to 0$, rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $N(\varepsilon)$, astfel încît $|a_n| < \varepsilon/M$, $n > N(\varepsilon)$. Avem: $|g_n(x)| = |a_n f_n(x)| \leqslant |a_n| M < \varepsilon$, $x \in A$ şi deci $g_n \xrightarrow[A]{u} 0$. Pentru şirurile concrete date se alege $a_n = 1/n \to 0$ şi $f_n(x) = \sin nx$ pentru a) şi $f_n(x) = \cos nx$ pentru *b*).

Pentru c) alegem $a_n = 1/\ln n \to 0$ şi observăm că

$$|\alpha \sin nx + \beta \cos nx| \leqslant \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

5.4. Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie indefinit derivabilă şi (f_n) şirul: $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ $f_n = f^{(n)}$, $n \in \mathbf{N}$, $(f^{(0)} = f)$.

Să se arate că dacă şirul (f_n) este uniform convergent pe orice mulţime compactă din $\mathbf{R}$ către funcţia g cu proprietatea $g(0) = 1$ atunci $g(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$.

R. Avem:

$$f_n'(x) = f_{n+1}(x), \quad x \in \mathbf{R} \tag{1}$$

şi deci şirul (f_n') converge şi el uniform pe orice mulţime compactă din $\mathbf{R}$. Aplicăm teorema privind derivabilitatea funcţiei limită, deci g este derivabilă şi trecînd la limită în (1) rezultă $g'(x) = g(x)$, $x \in \mathbf{R}$, adică $g(x) = Ce^x$. Cum $g(0) = 1$, rezultă $C = 1$ deci $g(x) = e^x$.

5.5. Avînd un calculator electronic de buzunar, prevăzut cu taste pentru funcţii elementare, faceţi următorul experiment:

Introduceţi un număr x în calculator pe care îl memoraţi sau îl notaţi.

Apăsaţi în continuare numai pe aceeaşi tastă de un număr n de ori (suficient de mare). Ce observaţi? Explicaţi-vă rezultatele considerînd şirurile de funcţii:

$$\underset{\substack{\text{(tasta} \\ \text{aleasă)}}}{f_0 = f_{\text{dat}}}, \; f_n(x) = (f \circ f_{n-1})(x) \quad (n \geqslant 1)$$ în următoarele cazuri:

a) $f_0(x) = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$;
b) $f_0(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$;
c) $f_0(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$;
d) $f_0(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$;
e) $f_0(x) = \ln x$, $x > 0$.

Sînt toate aceste şiruri de funcţii corect definite?

Repetaţi experimentul schimbînd valoarea iniţială x.

R. a) $f_0(x) = \sqrt{x}$, $f_1(x) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}, \ldots, f_{n-1}(x) = x^{\alpha_{n-1}}$ $(\alpha_0 = 1/2)$, $f_n(x) = x^{\alpha_{n-1}/2} = x^{\alpha_n}$. Obţinem şirul exponenţilor lui x, $\alpha_n = \dfrac{1}{2} \cdot \alpha_{n-1}$, $n \geqslant 1$, cu $\alpha_0 = 1/2$, de unde deducem $\alpha_n = 1/2^{n+1}$. Rezultă $f_n(x) = x^{1/2^{n+1}}$ şi pentru orice $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 1$.

Pentru $x = 0$ se obţine şirul constant 0.

b) Folosind inegalitatea $e^t > t$, $t \in \mathbf{R}$, ce se poate demonstra imediat, eventual studiind funcția $g(t) = e^t - t$, $t \in \mathbf{R}$, rezultă $f_n(x) = e^{f_{n-1}(x)} > f_{n-1}(x)$, deci șirul $(f_n(x))$ este strict crescător pentru orice x. Șirul este nemărginit. Presupunînd că ar fi mărginit ar rezulta că există $l = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ și trecînd la limită în relația de recurență ar rezulta $l = e^l$ ceea ce nu se poate deoarece $e^l > l$. Rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \infty$, $x \in \mathbf{R}$ (La calculator se va semnala depășirea capacității de înregistrare).

c) Deoarece pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $\sin x \in [-1, 1] \subset [-\pi/2, \pi/2]$ și deoarece pentru orice $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$, rezultă $|f_n(x)| = |\sin f_{n-1}(x)| \leqslant |f_{n-1}(x)|$, deci șirul modulelor $(|f_n(x)|)$ este descrescător. Dacă $x \in \mathbf{R}$ astfel ca $\sin x \geqslant 0$ atunci șirul $f_n(x)$ este descrescător și există $l = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ care va verifica ecuația $l = \sin l$ adică $l = 0$.

Dacă $\sin x \leqslant 0$, șirul $f_n(x)$ este crescător și rezultă tot $l = 0$.

d) Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, $\cos x \in [-1, 1]$ și se obține un șir convergent (fără să fie monoton) către unica soluție reală a ecuației $\cos x = x$, $x \in (0, \pi/2)$, $x = 0{,}73908513\ldots$

e) Șirul nu este corect definit deoarece $\ln x < x$ și deci pentru orice $x > 0$, $f_n(x)$ este descrescător și pentru orice $x > 0$ va exista n astfel ca $f_n(x) < 0$, deci f_{n+1} nu mai poate fi calculat. La calculator va apărea indicația de oprire a calculelor datorită unei operații incorecte (în cazul acesta, logaritmul unui număr negativ).

5.6. Fie șirul (f_n) de funcții $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definit prin

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} f_{n-1}(x),\ n \geqslant 1,\ f_0(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Să se arate că:

a) Șirul (f_n) converge uniform către funcția $\theta(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}$.

b) Șirul $(\sqrt{n} \cdot f_n)$ converge punctual către funcția

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3/2}, & x \neq 0 \\ 0\ ; & x = 0. \end{cases}$$

R. a) Notăm, pentru ușurința scrierii, cu $y_n = f_n(x)$, pentru $x \in \mathbf{R}$ fixat. Dacă $x > 0$, $y_{n+1} = \operatorname{arctg} y_n < y_n$ deci șirul (y_n) este descrescător și fiind cu termeni pozitivi este și mărginit și deci convergent. Fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, din relația de recurență, datorită continuității funcției arctg, obținem $l = \operatorname{arctg} l$ de unde rezultă $l = 0$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Dacă $x < 0$ șirul (y_n) este crescător și mărginit și se obține în mod asemănător $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Pentru $x = 0$, $f_n(0) = 0 \to 0 = \theta(0)$. Convergența $f_n \to \theta$ este uniformă căci dacă notăm, pentru $n \in \mathbf{N}$

$$a_n = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x) - \theta(x)| = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f_n(x)|$$

deoarece $|f_n|$ este crescătoare, obţinem

$$a_n = \lim_{x\to\infty} |f_n(x)| = \text{arctg}\,(\ldots(\text{arctg}\,\pi/2)) = f_{n-1}(\pi/2)$$

şi din demonstraţia de mai sus (pentru $x = \pi/2$) rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Rezultă că f_n converge uniform pe $\mathbf{R}$ către zero.

b) Definim şirul (z_n) prin $z_n = 1/y_{n+1}^2 - 1/y_n^2$, pentru $x \neq 0$. Avem

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} (1/y_{n+1}^2 - 1/y_n^2) = \lim_{n\to\infty} (1/(\text{arctg}\,y_n)^2 - 1/y_n^2) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{y_n^2 - (\text{arctg}\,y_n)^2}{y_n^2(\text{arctg}\,y_n)^2}.$$

Dezvoltînd funcţia $(\text{arctg}\,t)^2$ în serie de puteri se obţine: $(\text{arctg}\,t)^2 = t^2 - \frac{2}{3}t^4 + \ldots$, $t \in (-1, 1)$ şi folosind acest rezultat, limita de mai sus devine

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n^2 - (y_n^2 - 2/3y_n^4 + \ldots)}{y_n^2(y_n^2 - 2/3y_n^4 + \ldots)} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n^4(2/3 + \ldots)}{y_n^4(1 - 2/3y_n^2 + \ldots)} = 2/3$$

deoarece în paranteze termenii nescrişi conţin puteri ale lui y_n pentru care $y_n \to 0$ conform cu punctul a). Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 2/3$ rezultă că avem

şi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{z_0 + z_1 + \ldots + z_{n-1}}{n} = 2/3$ şi deci:

$$2/3 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{y_{k+1}^2} - \frac{1}{y_k^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{y_n^2} - \frac{1}{y_0^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ny_n^2} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ny_0^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{ny_n^2}, \text{ adică } \lim_{n\to\infty} \sqrt{n} f_n(x) = \sqrt{3/2}.$$

Pentru $x = 0$, din definiţie se obţine şirul constant $\sqrt{n} f_n(0) = 0$ şi deci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} f_n = f$, f fiind funcţia din enunţ.

Convergenţa $\sqrt{n} f_n \to f$ este simplă deoarece funcţiile $\sqrt{n} f_n$ sînt continue pe $\mathbf{R}$ iar funcţia limită f este discontinuă în origine.

5.7. Fie $f_n : \mathbf{R}\setminus\mathbf{N} \to \mathbf{R}$ şirul (f_n) definit astfel $f_n(x) = \frac{x}{x - n}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) \neq \lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ şi să se explice rezultatul.

R. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = 1$ pentru orice $n \in \mathbf{N}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to\infty} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim\limits_{x\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

Explicaţia constă în faptul că $f_n \to f$, $f(x) = 0$, $x \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{N}$ şi convergenţa nu este uniformă. Într-adevăr, funcţia limită este $f : \mathbf{R}\setminus\mathbf{N} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ şi pentru $n \in \mathbf{N}$, avem $\sup\limits_{x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{N}} |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{N}} \left|\frac{x}{x - n}\right| = +\infty$, deoarece $\lim\limits_{x\to n}\left|\frac{x}{x - n}\right| = +\infty$.

5.8. Considerînd șirurile de funcții (f_n) și (f_n'), $f_n : [-1, 1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2x^2}$. Să se studieze convergența acestora și să se compare $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(0)$ cu $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))'_{x=0}$, explicîndu-se rezultatul.

R. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, $x \in [-1, 1]$, deci $f(x) = 0$, oricare ar fi $x \in [-1, 1]$ este funcția limită și $f_n \xrightarrow[{[-1,1]}]{u} f$.

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}; \quad \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1, 1) \setminus \{0\}; \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$f_n' \to g$ dar nu uniform (deoarece g este discontinuă);

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(0) = 1 \neq 0 = (\lim_{n\to\infty} f_n(x))'_{x=0}.$$

Rezultatul se explică prin faptul că f_n' nu converge uniform pe $[-1, 1]$ la g.

5.9. Se consideră șirul (f_n), $f_n: [0, 1] \to \mathbf{R}$ definit prin $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$. Să se arate că $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx \neq \int_0^1 (\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x))\,dx$ și să se explice rezultatul.

R. Calculăm: $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 nxe^{-nx^2}\,dx = -\frac{1}{2} e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n}$ deci

$\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-n}\right) = 1/2$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} nxe^{-nx^2} = 0$, $x \in \mathbf{R}$, deci $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0$ este funcția limită.

$$\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \quad (1/2 \neq 0).$$

Explicația constă în faptul că (f_n) este un șir care converge către f dar neuniform pe $[0, 1]$. Într-adevăr, dacă studiem comportarea funcției f_n, pe intervalul $[0, 1]$, pentru $n \in \mathbf{N}$, fixat avem

$$f_n'(x) = ne^{-nx^2} - 2n^2x^2e^{-nx^2} = ne^{-nx^2}(1 - 2nx^2) \text{ și deci}$$

$$a_n = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} e^{-n\cdot 1/2n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{n}e^{-1/2}$$

și se vede că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, deci convergența nu este uniformă.

5.10. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție derivabilă. Să se arate că există șiruri de funcții (f_n), $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, derivabile astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f'$.

R. Fie $x \in \mathbf{R}$. Deoarece f este derivabilă în x rezultă că există $\lim\limits_{h\to\infty} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$. Aplicînd pentru limita de mai sus definiţia cu şiruri, rezultă că pentru orice şir (h_n), $h_n \to 0$ şirul (f_n), definit prin $f_n(x) = \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$ are proprietatea că $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f'(x)$.

În particular se poate lua $h_n = 1/n$ obţinînd şirul $f_n(x) = n(f(x+1/n) - f(x)) \to f'(x)$.

5.11. Fiind dat şirul (f_n), $f_n: [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, să se arate că (f_n) deşi converge neuniform pe $[0, 1]$ către $f(x) = 0$, $x \in [0, 1]$ avem totuşi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx.$$

R. Avem $\int\limits_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}dx = \frac{1}{2n}\ln(1+n^2x^2)\Big|_0^1 = \frac{\ln(1+n^2)}{2n}$ şi deci

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = 0 \text{ şi } \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))\,dx = 0.$$

Şirul f_n nu converge uniform pe $[0, 1]$, deoarece

$$\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| = 1/2 \not\to 0.$$

5.12. Să se arate că orice funcţie continuă $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ este limita uniformă a unui şir $f_n: [a, b] \to \mathbf{R}$ de funcţii în scară.

R. Pentru funcţia f dată considerăm şirul (f_n) $f_n: [a, b] \to \mathbf{R}$ definit prin

$$f_n(x) = f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right), \quad x \in \left[a + \frac{b-a}{n}k,\ a + \frac{b-a}{n}(k+1)\right],$$
$$0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Din definiţie se vede că f_n sînt funcţii în scară.

Din continuitatea funcţiei f rezultă că este uniform continuă, deci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel încît, pentru orice $x', x'' \in [a, b]$, cu $|x' - x''| < \eta(\varepsilon)$, să rezulte $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

Fie $N(\varepsilon)$ astfel ca $\frac{b-a}{n} < \eta(\varepsilon)$. Dacă $n > N(\varepsilon)$ şi $x \in [a, b]$, atunci există k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$ astfel ca $x \in \left[a + \frac{b-a}{n}k,\ a + \frac{b-a}{n}(k+1)\right]$ şi deci $|f_n(x) - f(x)| = \left|f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) - f(x)\right| < \varepsilon$ deoarece

$$x - \left(a + \frac{b-a}{n}k\right) < \frac{b-a}{n} < \frac{b-a}{N(\varepsilon)} < \eta(\varepsilon). \text{ Rezultă că } f_n \xrightarrow[{[a,b]}]{u} f.$$

5.13. Se consideră şirul de funcţii $(f_n)_{n\geq 1}$, $f_n: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, definit prin $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$.

Să se arate că:

a) f_n sînt funcţii cu variaţie mărginită;

b) f_n converge uniform pe intervalul de definiţie către funcţia $f: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = 0$;

c) Şirul variaţiilor totale $\bigvee_0^{2\pi} (f_n)$ nu este convergent.

R. a) Deoarece funcţiile f_n sînt derivabile şi cu derivatele f_n' mărginite pe intervalul de definiţie, $(|f_n'(x)| \leq \sqrt{n})$, rezultă că f_n sînt cu variaţie mărginită.

b) Convergenţa $f_n \to f$ este uniformă pe $[0, 2\pi]$ deoarece

$$a_n = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]} \left|\frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx\right| = 1/\sqrt{n} \text{ şi } \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

c) Fie $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 1$, fixat. Deoarece $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$ este periodică cu perioada $2\pi/n$ rezultă

$$\bigvee_0^{2\pi} (f_n) = n \cdot \bigvee_0^{2\pi/n} (f_n) \qquad (1)$$

Comportarea, privind variaţia, funcţiei $\sin nx$ pe $[0, 2\pi/n]$, este identică cu variaţia funcţiei $\sin t$ pentru $t \in [0, 2\pi]$. Rezultă

$$\bigvee_0^{\frac{2\pi}{n}} (f_n) = \bigvee_0^{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx\right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \bigvee_0^{\frac{2\pi}{n}} (\sin nx) = \frac{1}{\sqrt{n}} \bigvee_0^{2\pi} (\sin t) = 4/\sqrt{n}.$$

Ţinînd seama de acest rezultat (1) devine

$$\bigvee_0^{2\pi} (f_n) = n \cdot \frac{4}{\sqrt{n}} = 4\sqrt{n} \text{ şi se vede că } \lim_{n\to\infty} \bigvee_0^{2\pi} (f_n) = \infty$$

deci şirul variaţiilor totale este divergent.

5.14. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n(x + \alpha/n), \quad \alpha \in \mathbf{R}; \quad x + \alpha/n \neq \pi/2 + k\pi, \quad \alpha > 0.$$

R. Datorită periodicităţii funcţiei tg vom studia seria pentru $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Studiem absolut convergenţa seriei. Seria modulelor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\operatorname{tg}(x + \alpha/n)|^n$$

fiind cu termeni pozitivi putem să aplicăm criteriul rădăcinii

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} |\operatorname{tg}(x + \alpha/n)| = |\operatorname{tg} x|.$$

a) Dacă $|\operatorname{tg} x| < 1$ adică $x \in (-\pi/4, \pi/4)$ seria dată este absolut convergentă.

b) Dacă $|\operatorname{tg} x| > 1$ adică $x \in [-\pi/2, -\pi/4) \cup (\pi/4, \pi/2]$ seria dată nu este absolut convergentă. Dacă $x \in (\pi/4, \pi/2]$ seria este cu termeni pozitivi şi aplicînd criteriul rădăcinii rezultă că este divergentă. Pentru $x \in [-\pi/2, -\pi/4)$ seria este alternată şi $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |\operatorname{tg}(x + \alpha/n)|^n = \infty$ pentru $x \in [-\pi/2, -\pi/4)$, deci seria este divergentă, întrucît termenul său general nu tinde la zero.

c) Dacă $|\operatorname{tg} x| = 1$ adică $x = \pm\pi/4$, avem de analizat convergenţa seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n(\pi/4 + \alpha/n)$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^n(-\pi/4 + \alpha/n)$, prima fiind cu termeni pozitivi, a doua alternată. Pentru primul caz obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} (\operatorname{tg}(\pi/4 + \alpha/n))^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1 + \operatorname{tg}\alpha/n}{1 - \operatorname{tg}\alpha/n}\right)^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{2\operatorname{tg}\alpha/n}{1 - \operatorname{tg}\alpha/n}\right)^{\frac{1-\operatorname{tg}\alpha/n}{2\operatorname{tg}\alpha/n}}\right]^{\frac{\operatorname{tg}\alpha/n}{\alpha/n}\cdot 2\alpha \cdot \frac{1}{1-\operatorname{tg}\alpha/n}} = e^{2\alpha} \neq 0,$$

deci seria este divergentă. Pentru a doua serie se deduce că este divergentă deoarece limita termenului general nu există. În concluzie, mulţimea de convergenţă a seriei este

$$C = \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} (-\pi/4 + k\pi, \pi/4 + k\pi).$$

5.15. Fie $h(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ funcţia Heaviside şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ o serie absolut convergentă. Să se arate că pentru orice şir numeric (x_n), $x_n \in \mathbf{R}$, $x_i \neq x_j$ $(i \neq j)$, seria de funcţii $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n h(x - x_n)$ are proprietăţile:

a) este uniform convergentă pe $\mathbf{R}$,

b) funcţia sumă este continuă în orice punct $x \neq x_n$ $(n \in \mathbf{N})$.

R. a) Deoarece $|a_n h(x - x_n)| \leqslant |a_n|$, $x \in \mathbf{R}$ şi cum seria numerică $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ este convergentă, rezultă conform criteriului Weierstrass că seria de funcţii este uniform convergentă pe $\mathbf{R}$.

b) Pentru $x \neq x_n$ $(n \in \mathbf{N})$ funcţiile ce reprezintă termenii seriei, $f_n(x) = a_n h(x - x_n)$ sînt continue în x şi conform cu punctul a) rezultă că suma seriei este o funcţie continuă în astfel de puncte.

5.16. Pentru orice $x \in \mathbf{R}$, fie $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(2^n x)}{2^n}$, unde $\varphi(x) = |x - [x + 1/2]|$; am notat cu $[a]$, partea întreagă a numărului real a. Să se arate că funcţia f este continuă dar nu este derivabilă în nici un punct $x \in \mathbf{R}$.

R. Se demonstrează imediat că $|\varphi(x)| \leqslant 1$, $x \in \mathbf{R}$ şi, deci, termenul general al seriei date poate fi majorat: $\left|\frac{\varphi(2^n x)}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n}$ cu termenul general al seriei numerice geometrice cu raţia $q = \frac{1}{2} < 1$ şi care este deci convergentă. Rezultă că seria dată este uniform convergentă pe **R**. Se poate arăta că φ are proprietăţile $\varphi(x) = |x|$ pentru $x \in [-1/2, 1/2]$, este periodică cu perioada 1, $\varphi(x + 1) = \varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$. De aici decurge că φ este continuă pe **R**. Cum seria este uniform convergentă rezultă că f este o funcţie continuă pe **R**. Să arătăm că f nu e derivabilă pe **R**. Fie $x_0 \in \mathbf{R}$ un punct arbitrar, fixat. Fie intervalul

$$I_n = (2^{-n}[2^n x_0], \ 2^{-n}[2^n x_0] + 2^{-n}) = (\alpha, \beta).$$

Observăm că dacă notăm $g_k(x) = \frac{\varphi(2^k x)}{2^n}$, avem $g_k(\alpha) = 0$, $g_k(\beta) = 0$.

Deducem $\frac{g_k(\beta) - g_k(\alpha)}{\beta - \alpha} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 1, & k < n \\ -1, & k > n \end{cases}$ şi cum $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ rezultă

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_k(\beta) - g_k(\alpha)}{\beta - \alpha} = \pm 1.$$

Dacă $x_0 \in I_n$, pentru $n \to \infty$, $\alpha, \beta \to x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ nu există, deci f nu e derivabilă în x_0. Cum x_0 a fost arbitrar rezultă că f nu e derivabilă pe **R**.

5.17. Să se dea un exemplu de serie de funcţii derivabile, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu proprietatea că seria dată şi seria derivatelor $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$ sînt uniform convergente pe **R** pentru $k = 0, 1, \ldots, p - 1$ dar seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(x)$ nu mai este uniform convergentă pe **R** ($p \in \mathbf{N}$, $p \geqslant 1$ dat).

R. Vom arăta că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{(2n)^{p+1}}$ satisface cerinţele problemei. Seria: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right)}{2^{p+1} \cdot n^{p+1-k}}$ are termenul general majorat de

$$\left|\frac{\sin\left(nx + k\frac{\pi}{2}\right)}{2^{p+1} \cdot n^{p+1-k}}\right| \leqslant \frac{1}{2^{p+1} n^{p+1-k}} \text{ şi pentru } p + 1 - k \geqslant 2$$

adică $k = 0, 1, 2, \ldots, p-1$, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}n^{p+1-k}}$ fiind convergentă, rezultă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(x)$ este uniform convergentă pe $\mathbf{R}$, $(k=0, \ldots, p-1)$, dar seria $\sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(nx + p\frac{\pi}{2}\right)}{2^{p+1} \cdot n}$ este convergentă pe $\mathbf{R}$ şi nu este uniform convergentă pe $\mathbf{R}$, deoarece $\lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{2^{p+1}n} = \frac{1}{2^{p+1}} \neq 0$.

5.18. Fiind dată seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriei în funcţie de a_0 şi r în următoarele cazuri:

a) $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ este o progresie aritmetică cu raţia r; $(r \neq 0)$

b) $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ este o progresie geometrică cu raţia r. $(r \neq 0,\ r \neq 1)$.

R. a) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o progresie aritmetică cu raţia r, atunci $a_n = a_0 + nr$; $n \in \mathbf{N}$ şi:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_0 + (n+1)r}{a_0 + nr}\right| = 1,$$

deci raza de convergenţă este $R = 1$. Pentru $x = 1$ obţinem seria $\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 + nr)$ care este divergentă, iar pentru $x = -1$ obţinem seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(a_0 + nr)$ care este de asemenea divergentă. Deci mulţimea de convergenţă a seriei date este $(-1, 1)$. Fie $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $x \in (-1, 1)$;

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_0 + nr)x^n = a_0\sum_{n=0}^{\infty} x^n + rx\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = a_0 \cdot \frac{1}{1-x} + rx\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{a_0}{1-x} + \frac{rx}{(1-x)^2}.$$

b) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ este o progresie geometrică cu raţia r, atunci $a_n = a_0 r^n$, $n \in \mathbf{N}$ şi $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_0 r^{n+1}}{a_0 r^n}\right| = |r|$. Deci raza de convergenţă a seriei este $R = 1/|r|$.

Pentru $x = 1/|r|$, seria dată se scrie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n \frac{1}{|r|^n} = a_0 \sum_{n=0}^{\infty}(\pm 1)^n$ după cum $r > 0$ sau $r < 0$ şi deci în ambele cazuri este divergentă.

Pentru $x = -1/|r|$ seria devine $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\pm(-1)^n)$ care, de asemenea, este divergentă. Rezultă că mulţimea de convergenţă a seriei este $(-1/|r|, 1/|r|)$. Pentru calculul sumei, avem:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (rx)^n = \frac{a_0}{1 - rx}.$$

5.19. Să se determine mulţimea de convergenţă a seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4 + n^3 + 1}} \left(\frac{x+1}{2x+3}\right)^n, \quad x \neq -3/2.$$

R. Notăm $t = \frac{x+1}{2x+3}$ şi obţinem seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4 + n^3 + 1}} t^n$ care are raza de convergenţă $R = \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}| = 1$, a_n fiind coeficientul lui t^n. Pentru determinarea mulţimii de convergenţă a seriei iniţiale, rezolvăm sistemul de inecuaţii $-1 < \frac{x+1}{2x+3} < 1$. Avem

$$\begin{cases} \frac{x+1}{2x+3} + 1 > 0 \\ \frac{x+1}{2x+3} - 1 < 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \frac{3x+4}{2x+3} > 0 \\ \frac{-x-2}{2x+3} < 0 \end{cases}$$

Din prima inecuaţie obţinem $x \in (-\infty, -3/2) \cup (-4/3, \infty)$ iar din cea de a doua $x \in (-\infty, -2) \cup (-3/2, \infty)$. Intersectînd cele două mulţimi, obţinem: $x \in (-\infty, -2) \cup (-4/3, \infty)$. Să cercetăm comportarea la capete: pentru $x = -2$ obţinem seria numerică $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n^4 + n^3 + 1}} = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ care este divergentă deoarece o putem compara cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ care este divergentă. Într-adevăr, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{1/n} = 1$.

Pentru $x = -4/3$ se obţine seria numerică alternată

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{\sqrt{n^4 + n^3 + 1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$$

care este convergentă, deoarece putem aplica criteriul lui Leibniz. Într-adevăr, şirul $u_n = \frac{n+1}{\sqrt{n^4 + n^3 + 1}}$ converge descrescător la zero. Rezultă că mulţimea de convergenţă a seriei date este $C = (-\infty, -2) \cup [-4/3, \infty)$.

5.20. Să se găsească mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii

$$1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{(n^2+1) \ln^{\beta}(n+1)}{(n^3+1)^{\alpha}} \left(\frac{2x-1}{x-3}\right)^n, \quad x \neq 3.$$

Discuţie după $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Aceeaşi problemă pentru seria derivatelor.

R. Dacă punem $y = \frac{2x-1}{x-3}$ obţinem seria de puteri

$1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\ln^{\beta}(n+1)}{(n^3+1)^{\alpha}} y^n$, care are raza R de convergenţă dată de

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)\ln^{\beta}(n+1)}{(n^3+1)^{\alpha}} \cdot \frac{[(n+1)^3+1]^{\alpha}}{((n+1)^2+1)\ln^{\beta}(n+2)} = 1.$$

Mulţimea de convergenţă a seriei din enunţ se obţine din

$$\left|\frac{2x-1}{x-3}\right| < 1, \quad -1 < \frac{2x-1}{x-3} < 1,$$

şi este dată de $x \in (-2, 3) \cap \{(-\infty, 4/3) \cup (3, +\infty)\} = (-2, 4/3)$.

În intervalul $(-2, 4/3)$ seria din enunţ este absolut convergentă pentru orice α, $\beta \in \mathbf{R}$. Să cercetăm comportarea la capetele intervalului. Pentru $x = -2$, obţinem seria numerică

$$1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(n^3+1)^{\alpha}} \ln^{\beta}(n+1), \tag{1}$$

pe care dacă o comparăm cu seriile lui J. Bertrand obţinem:

a) pentru $3\alpha - 2 > 1$, $\beta \in \mathbf{R}$, seria este convergentă;

b) pentru $3\alpha - 2 = 1$, $-\beta > 1$, seria este convergentă; în celelalte cazuri seria (1) este divergentă.

Pentru $x = 4/3$ obţinem seria alternată

$$1 + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{(n^3+1)^{\alpha}} \ln^{\beta}(n+1);$$

prin urmare:

a) pentru $3\alpha - 2 > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$, seria este simplu convergentă;
b) pentru $3\alpha - 2 = 0$, $-\beta < 0$, seria este simplu convergentă;
c) pentru $3\alpha - 2 > 1$, $\beta > 0$, seria este absolut convergentă;
d) pentru $3\alpha - 2 = 1$, $-\beta > 1$, seria este absolut convergentă.

Seria derivatelor este

$$-\frac{5}{(x-3)^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{n(n^2+1)\ln^{\beta}(n+1)}{(n^3+1)^{\alpha}} \left(\frac{2x-1}{x-3}\right)^{n-1},$$

şi are aceeaşi mulţime de convergenţă $(-2, 4/3)$ cu α, β în $\mathbf{R}$. Comportarea la capete se discută în acelaşi mod. Pentru $x = -2$ dacă $3\alpha - 3 > 1$, $\beta \in \mathbf{R}$, seria este convergentă; pentru $3\alpha - 3 = 1$, $-\beta > 1$, seria obţinută este convergentă. În celelalte cazuri pentru $x = -2$ seria derivatelor este divergentă.

Pentru $x = 4/3$ dacă $3\alpha - 3 > 1$, $\beta \in \mathbf{R}$ seria este absolut convergentă; pentru $3\alpha - 3 = 1$, $-\beta > 1$, seria este absolut convergentă; pentru $3\alpha - 3 < 0$, $\beta \in \mathbf{R}$ sau $3\alpha - 3 = 0$, $-\beta > 0$, seria derivatelor în punctul $x = 4/3$ este simplu convergentă.

5.21. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriei

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2n+1} x^n$$

(examen)

R. Calculăm raza de convergenţă $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2n+1} \cdot \frac{2n+3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$.
Deci pentru $x \in (-1/2, 1/2)$ seria este convergentă.

Pentru $x = 1/2$ obţinem seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ care este divergentă iar pentru $x = -1/2$ obţinem seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ care este convergentă conform criteriului lui Leibniz. Deci mulţimea de convergenţă a seriei este $C = [-1/2, 1/2)$. Pentru calculul sumei notăm $2x = t^2$, pentru $x \geqslant 0$ şi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2n+1} = S(t), \ t \in [0, 1)$$

$$t \cdot S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}; \quad \frac{d}{dt}(t(S(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n} = \frac{1}{1-t^2};$$

$$tS(t) = \int \frac{1}{1-t^2}\, dt = \frac{1}{2} \ln \left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

pentru $t \to 0$ $0 \cdot S(0) = 0 + C$ deci $C = 0$ $(S(0) = 1)$.
Avem $S(t) = \frac{1}{2t} \ln \frac{1+t}{1-t}$, $t \in (0, 1)$ şi deci pentru $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x}} \ln \frac{1+\sqrt{2x}}{1-\sqrt{2x}}, \ x \in (0, 1/2).$$

Pentru $x < 0$, notăm $2x = -t^2$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-t^2)^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n+1} = S(t), \ t \in (-1, 0)$$

Avem $tS(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}$; $\frac{d}{dt}(tS(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \frac{1}{1+t^2}$, deci $tS(t) =$ $= \operatorname{arctg} t + C$, pentru $t \to 0$, obţinem $C = 0$, Deci $S(t) = \frac{1}{t} \operatorname{arctg} t$, adică $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-2x}} \operatorname{arctg} \sqrt{-2x}$, $x \in (-1/2, 0)$. În concluzie, suma seriei este

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2x}} \ln \frac{1+\sqrt{2x}}{1-\sqrt{2x}} & , \ x \in (0, 1/2) \\ 1 & , \ x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-2x}} \operatorname{arctg} \sqrt{-2x}, & x \in [-1/2, 0) \end{cases}$$

Valoarea sumei $f(x)$ a seriei în punctul $x = 0$, o stabilim direct din seria din enunţ.

5.22. Să se determine mulţimea de convergenţă şi suma seriei

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^{2n-1}$$

(Examen)

R. Notăm $\frac{1-x}{1-2x}=y$ şi obţinem seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} y^{2n-1}$ care va avea raza de convergenţă:

$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{(-1)^{n}}\right|=1$ deci pentru $y \in(-1,1)$ seria este convergentă iar pentru $y \in(-\infty,-1) \cup(1, \infty)$ seria este divergentă. Pentru $y=-1$ obţinem seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ iar pentru $y=1$ obţinem seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ ambele alternate şi convergente conform criteriului Leibniz. Pentru determinarea mulţimii de convergenţă a seriei iniţiale rămîne să rezolvăm inegalităţile $-1 \leqslant \frac{1-x}{1-2x} \leqslant 1$ sau, echivalent,

$$\begin{cases}\dfrac{x}{1-2x} \leqslant 0 \Rightarrow x \in(-\infty, 0] \cup(1/2, \infty) \\ \dfrac{2-3x}{1-2x} \geqslant 0 \Rightarrow x \in(-\infty, 1/2) \cup[2/3, \infty)\end{cases}$$

deci mulţimea de convergenţă cerută este $C=(-\infty, 0] \cup[2/3, \infty)$.

Pentru calculul sumei fie $S(y)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)} y^{2n-1}$, $y \in[-1,1]$;

$S'(y)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} y^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(y^2)^{n-1}$; $y^2 S'(y)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(y^2)^{n}$;

$(y^2 S'(y))'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(y^2)^{n-1} \cdot 2y=2y \sum_{n=1}^{\infty}(-y^2)^{n-1}=2y \frac{1}{1+y^2}$; $y^2 S'(y)=$
$=\int \frac{2y}{1+y^2} dy=\ln(1+y^2)+C$; pentru $y \rightarrow 0$ se obţine $C=0$ deci, pentru $y \neq 0$, $S'(y)=\frac{1}{y^2} \ln(1+y^2)$; $S(y)=\int \frac{1}{y^2} \ln(1+y^2) dy=$
$=\int\left(-\frac{1}{y}\right)' \ln(1+y^2) dy=-\frac{1}{y} \ln(1+y^2)+\int \frac{1}{y} \cdot \frac{2y}{1+y^2} dy=$
$=-\frac{1}{y} \ln(1+y^2)+2 \operatorname{arctg} y+C.$

Din definiţie se vede că $\lim_{y\to 0} S(y)=1$, iar din rezultatul obţinut $\lim_{y\to 0} S(y)=\lim_{y\to 0}\left[-\frac{\ln(1+y^2)}{y}+2 \operatorname{arctg} y+C\right]=\lim_{y\to 0} \frac{2y}{1+y^2}+C=C$ deci $C=0$. Obţinem $S(y)=-\frac{1}{y} \ln(1+y^2)+2 \operatorname{arctg} y$. Suma seriei iniţiale va fi: $f(x)=S\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)=-\frac{1-2x}{1-x} \ln\left[1+\left(\frac{1-x}{1-2x}\right)^2\right]+2 \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1-2x}$.

5.23. O sîrmă grea, perfect flexibilă și care nu se lungește, fixată între două puncte A și B ia forma unui lănțișor (graficul funcției $y = \mathrm{ch}\, x$). În vecinătatea vîrfului lănțișorului (originii) curba se poate aproxima cu o parabolă. Pînă la care abscisă eroarea comisă este sub 1%?

R. Funcția $\mathrm{ch}\, x$ admite în jurul originii dezvoltarea în serie

$$y_1 = \mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Iar parabola care o aproximează în vecinătagea originii are ecuația

$$y_2 = 1 + \frac{x^2}{2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Dacă notăm $y_1 = \mathrm{ch}\, x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \cdot R_4(x)$ cu $R_4(x) = 1 + \frac{x^2}{5 \cdot 6} + \frac{x^6}{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots < \mathrm{ch}\, x$, putem scrie $y_1 - y_2 = \frac{x^4}{24} R_4(x) < 0{,}01\, \mathrm{ch}\, x = 0{,}01 \cdot y_1$; obținem condiția $x^4 < 24 \cdot 0{,}01$ de unde $|x| < 0{,}7$ și $y_1 = 1{,}255$, $y_2 = 1{,}245$.

5.24. Să se dezvolte în serie de puteri funcția

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Folosind rezultatul obținut să se arate cum se poate calcula ln 7 cu 5 zecimale exacte.

R. Avem $f(x) = \ln(1+x) - \ln(1-x)$. Calculăm derivatele de ordin 1, 2, ..., n, ale funcției date și valorile acestora în punctul $x = 0$:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}, \quad f'(0) = 2;$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2}, \quad f''(0) = 0;$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n} + \frac{(n-1)!}{(1-x)^n},$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ 2(n-1), & n \text{ impar} \end{cases}$$

Folosind formula Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

obținem

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-1)!(1+(-1)^{n+1})}{n!} x^n = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Pentru a calcula ln 7, din ecuaţia $\frac{1+x}{1-x} = 7$ găsim $x = \frac{3}{4}$ şi numărul ln 7 este dat de suma seriei $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n+1}$. Seria obţinută este cu termeni pozitivi şi observăm că $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+3} \cdot \frac{9}{16} < \frac{9}{16} = k < 1$. Pentru aproximarea dorită, obţinem condiţia $\frac{u_{n+1}}{1-k} \leqslant \varepsilon = 10^{-5}$,

adică $\dfrac{\frac{1}{2n+3}\left(\frac{3}{4}\right)^{2n+3}}{1-\frac{9}{16}} \leqslant 10^{-5}$ sau $\frac{7}{16}(2n+3)\left(\frac{4}{3}\right)^{2n+3} \geqslant 10^5$ din care rezultă $n \leqslant 11$.

5.25. Să se dezvolte în serie de puteri funcţiile

a) tg x; b) th x; c) sec x,

scriind primii trei termeni nenuli.

R. a) $$\operatorname{tg} x = \sin x/\cos x = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}} = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1}x^{2j+1}.$$

Pentru determinarea coeficienţilor $a_1, a_3, \ldots$ facem identificarea

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1}x^{2j+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

adică: $\sum\limits_{\substack{j+k=n\\ j\geqslant 0,\ k\geqslant 0}} a_{2j+1}\frac{(-1)^k}{(2k)!} = (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}$, $n \in \mathbf{N}$.

Particularizînd $n = 0, 1, 2, \ldots$, obţinem sistemul

$$\begin{aligned}
&a_1 = 1,\\
&a_3 - \frac{1}{2!}a_1 = -1/3!\\
&a_5 - \frac{1}{2!}a_3 + \frac{1}{4!}a_1 = 1/5!,\\
&a_7 - \frac{1}{2!}a_5 + \frac{1}{4!}a_3 - \frac{1}{6!}a_1 = -1/7!,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

De unde se obţin $a_1 = 1$, $a_3 = 1/3$, $a_5 = 2/15, \ldots$. Adică

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \ldots,\quad x \in (-\pi/2, \pi/2),$$

b) $\text{th}\, x = \text{sh}\, x/\text{ch}\, x = \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1} x^{2j+1}$.

Din identificarea $\sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1} x^{2j+1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$,

se obține, analog: $\text{th}\, x = x - \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \ldots,\ x \in \mathbf{R}$.

c) Se procedează în mod asemănător

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}} = \sum_{j=0} a_{2j} x^{2j}$$

și se obține $\sec x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{24} x^4 + \ldots,\ x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Obs. Pentru obținerea acelorași rezultate se poate aplica și formula de dezvoltare în serie Mac Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \ldots$$

5.26. Să se găsească primii trei termeni ai dezvoltării în serie de puteri ai funcției $f(x) = (1 + \sin x)^{1+x}$, $x \in I \subset (-\pi/2, \pi/2)$.

(examen)

R. Folosim formula lui Mac-Laurin

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$$

Avem de calculat $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ și obținem succesiv

$$f(0) = 1,$$

$$f'(x) = (1 + \sin x)^{1+x} \left[\ln (1 + \sin x) + (1 + x) \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right],\ f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = (1 + \sin x)^{1+x} \left[\ln (1 + \sin x) + (1 + x) \frac{\cos x}{1 + \sin x} \right]^2 +$$

$$+ (1 + \sin x)^{1+x} \left[2 \frac{\cos x}{1 + \sin x} + (1 + x) \left(\frac{-\sin x}{1 + \sin x} - \frac{\cos^2 x}{(1 + \sin x)^2} \right) \right],$$

$$f''(0) = 2$$

Înlocuind rezultatele în formula Mac-Laurin, obținem

$$(1 + \sin x)^{1+x} = 1 + x + x^2 + \ldots,\ x \in I.$$

5.27. Să se dezvolte în serie de puteri funcțiile de mai jos, stabilindu-se mulțimea de convergență

a) $\sqrt{1+x}$; b) $\sqrt{1-x}$; c) $\sqrt{1-x^2}$; d) $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$; e) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$;
f) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; g) $\arcsin x$; h) $\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

R. Se foloseşte dezvoltarea

$$(1)\quad (1+x)^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

a) Avem $\lambda = 1/2$. Se obţine

$$\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} x^n = 1 + \frac{1}{2}x +$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n, \quad x \in (-1, 1).$$

Studiem convergenţa în extremităţile intervalului. Pentru $x = 1$ se obţine seria numerică

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}$$

pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n-1} - 1\right) = 3/2 > 1$ şi, conform criteriului Raabe—Duhamel, seria dată este absolut convergentă. Pentru $x = -1$ se obţine acelaşi rezultat. Rezultă că dezvoltarea de la a) este valabilă pentru $x \in [-1, 1]$.

b) Facem înlocuirea lui x cu $-x$ în a) şi obţinem:

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n, \quad x \in [-1, 1].$$

Cercetarea comportării seriei la capetele intervalului este identică cu cea de la a).

c) Se înlocuieşte x de la punctul b) cu x^2 şi se obţine

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^{2n}, \quad x \in [-1, 1]$$

d) Se ia în (1) $\lambda = -1/2$ şi se obţine:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}x^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}x^n.$$

Studiem convergența la capete. Pentru $x = -1$ seria este divergentă deoarece, notînd $u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$, avem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \cdot \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2}{(2n+2)!} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{4(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1\right) = \frac{1}{2},$$

deci seria este divergentă. Pentru $x = 1$ seria obținută $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ este o serie alternată. Din evaluarea precedentă a raportului $\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$ deducem că (u_n) este un șir descrescător. Din inegalitățile $0 < u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ rezultă $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ și deci seria este convergentă conform cu criteriul lui Leibniz. (Inegalitatea $u_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ se demonstrează prin inducție, iar $u_n > 0$ este evidentă). În concluzie avem dezvoltarea:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} x^n, \quad x \in (-1, 1]$$

e) Se procedează asemănător ca la punctul d) și se obține:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} x^n, \quad x \in [-1, 1)$$

sau se poate folosi deja rezultatul obținut la d) înlocuind pe x cu $-x$.

f) Se înlocuiește x cu x^2 în rezultatul de la e) și se obține:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} x^{2n}, \quad x \in (-1, 1).$$

Din faptul că $x = 1$ este un punct de divergență a seriei de la punctul e), rezultă că $x^2 = 1$, adică $x = \pm 1$, extremitățile intervalului, sînt puncte de divergență pentru seria obținută.

g) Dacă notăm $f(x) = \arcsin x$, $x \in (-1, 1)$, avem, conform rezultatului precedent, $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} x^{2n}$ din care, prin integrare, obținem:

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}(2n+1)} x^{2n+1}, \quad x \in (-1, 1).$$

(constanta de integrare fiind zero, obținută pentru $x = 0$).

Studiind seria obţinută pentru arcsin x la capetele intervalului, pentru $x=1$ obţinem seria numerică cu termeni pozitivi: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)}$, căreia, aplicîndu-i criteriul Raabe—Duhamel, obţinem

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} \cdot \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^2(2n+3)}{(2n+2)!} - 1\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(6n+7)}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,$$

deci este convergentă. Pentru $x = -1$ seria este convergentă fiind de fapt absolut convergentă. În concluzie avem dezvoltarea

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}(2n+1)} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1]$$

h) Notăm $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in (-1, 1)$. Avem $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ şi folosind rezultatul de la punctul d), înlocuind pe x cu x^2, obţinem $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}} x^{2n}$, $x \in (-1, 1)$.

Procedînd acum ca la punctul precedent obţinem dezvoltarea

$$\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}(2n+1)} x^{2n+1}, \quad x \in [-1, 1].$$

În punctele $x = -1$, $x = 1$ seria obţinută prin integrare se constată că este convergentă.

5.28. Să se dezvolte în serie de puteri funcţiile

$$\text{a) } f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt; \quad \text{b) } f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt; \quad \text{c) } f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt.$$

R. Folosim posibilitatea de a integra termen cu termen o serie de puteri pe intervalul de convergenţă

$$\text{a) } f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!}\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

$$\text{b) } f(x) = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{2k}}{k!}\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k!} \int_0^x t^{2k} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{k!(2k+1)}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

c) Pentru $x \in (-1, 1)$ avem voie să integrăm

$$f(x) = \int_0^x \left(\frac{1}{t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k}\right) dt = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{k} \int_0^x t^{k-1} dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k^2}, \quad x \in (-1, 1)$$

5.29. Folosind dezvoltări în serie ale funcțiilor elementare să se calculeze următoarele limite:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cos^2 x - \sin^2 x}{(\arcsin x)^4}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} - x \sin x - \cos x}{\operatorname{sh}^2 x}$.

R. Folosim dezvoltările în serie de puteri (în vecinătatea originii) ale funcțiilor elementare

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \qquad , x \in \mathbf{R};$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \qquad , x \in \mathbf{R};$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \qquad , x \in \mathbf{R};$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \qquad , x \in \mathbf{R};$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \dots \qquad , x \in (-1, 1);$$

și obținem

$$\cos^2 x = 1 - x^2 + \frac{1}{3} x^4 - \frac{2}{45} x^6 + \dots \qquad , x \in \mathbf{R};$$

$$\sin^2 x = x^2 - \frac{1}{3} x^4 + \frac{2}{45} x^6 + \dots \qquad , x \in \mathbf{R};$$

$$\operatorname{sh}^2 x = x^2 + \frac{1}{3} x^4 + \frac{2}{45} x^6 + \dots \qquad , x \in \mathbf{R};$$

$$(\arcsin x)^2 = x^2 + \frac{1}{3} x^4 + \dots \qquad , x \in (-1, 1).$$

Avem:

$$\text{a) } \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cos^2 x - \sin^2 x}{(\arcsin x)^4} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2(1 - x^2 + \dots) - (x^2 - 1/3x^4 + \dots)}{(x^2 + 1/3x^4 + \dots)^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x^2 + x^4(-1 + 1/3) + \dots}{x^4(1 + \dots)} = -2/3$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-x\sin x-\cos x}{\operatorname{sh}^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x^2+\ldots-x(x-x^3/6+\ldots)-(1-x^2/2+\ldots)}{x^3+x^4/3+\ldots}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-1+(1-1+1/2)x^2+\ldots}{x^2+1/3x^4+\ldots}=1/2.$$

5.30. Folosind proprietățile seriilor de puteri să se calculeze suma următoarelor serii pe intervalul de convergență indicat.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n,\quad x\in(-1,\ 1);$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}x^n,\quad x\in(-1,\ 1);$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in[-1,\ 1];$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^h\cdot\dfrac{x^{3n+1}}{3n+1},\quad x\in(-1,\ 1];$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2(3^n-2^n)}{6^n}.$

R. a) Plecăm de la $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(-1,\ 1)$ și derivăm: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=$ $=\dfrac{1}{(1-x)^2}$, înmulțind cu x și derivînd încă o dată, obținem: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}=$ $=\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{x}{(1-x)^2}\right]=\dfrac{1+x}{(1-x)^3}$, rezultat ce îl înmulțim cu x și obținem în final $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^n=\dfrac{x+x^2}{(1-x)^3}$, $x\in(-1,\ 1)$.

b) Integrăm seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\dfrac{1}{1-x}$, $x\in(-1,\ 1)$ și obținem $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=$ $=-\ln(1-x)+C$. Pentru $x=0$ avem $C=0$ deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n+1}=-\ln(1-x)$.

Împărțim cu x, $(x\neq 0)$, obținem $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^n=-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$. Facem diferența dintre seria inițială și cea obținută mai înainte și rezultă:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)x^n=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}\ln(1-x),$$

deci $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{n+1}x^n=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{x}\ln(1-x)$, $x\in(-1,\ 1)$, $x\neq 0$.

c) Fie $f(x)$ suma seriei, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Derivăm $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ şi deci $f(x) = \operatorname{arctg} x + C$.

Pentru $x = 0$ se obţine $C = 0$ şi deci $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

d) Fie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$. Atunci $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3}$. Obţinem

$$f(x) = \int \frac{1}{1+x^3}\,dx = \int \frac{1/3}{1+x}\,dx + \int \frac{-1/3+2/3}{x^2-x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Pentru $x = 0$, obţinem $0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + C$, deci $C = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$ şi deci suma seriei este

$$f(x) = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

e) Fie $f(x)$ suma seriei de la punctul a). Avem:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(3^n-2^n)}{6^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2\cdot(1/2)^n - \sum_{n=1}^{\infty} n^2(1/3)^n = f(1/2) - f(1/3) =$$

$$= \frac{1/2+(1/2)^2}{(1-1/2)^3} - \frac{1/3+(1/3)^2}{(1-1/3)^3} = 9/2.$$

CAPITOLUL 6

FUNCŢII DEFINITE IMPLICIT. DEPENDENŢĂ FUNCŢIONALĂ. EXTREME CONDIŢIONATE

6.1. Să se arate că ecuaţia $y^2 - y(2a + e^x) + a^2 + ae^x = 0$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ a fiind un număr real fixat, care defineşte pe y ca funcţie de x, admite:

a) o infinitate de soluţii definite pe $\mathbf{R}$ şi cu valori în $[a, +\infty)$;

b) numai două soluţii definite pe $\mathbf{R}$ şi cu valori în $[a, +\infty)$, care să fie continue;

c) o singură soluţie f definită pe o vecinătate V_0 a lui a, care verifică proprietăţile: $f \in C^1(U_0)$, $f(0) = a$. Să se calculeze $f'(0)$.

R. a) Rezolvînd ecuaţia în y, obţinem $y_1(x) = a$ şi $y_2(x) = a + e^x$ ecuaţia scriindu-se $(y-a)(y - a - e^x) = 0$. Funcţiile $f_M : \mathbf{R} \to [a, +\infty)$;

$$f_M(x) = \begin{cases} a & , x \in M \\ a + e^x, & x \in \mathbf{R} \setminus M, \end{cases}$$

unde M este o submulţime oarecare din $\mathbf{R}$, epuizează soluţiile definite pe $\mathbf{R}$ ale ecuaţiei date.

b) Arătăm că $f_1 : \mathbf{R} \to [a, +\infty)$, $f_1(x) = a$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ şi $f_2 : \mathbf{R} \to [a, +\infty)$, $f_2(x) = a + e^x$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$ sînt singurele soluţii care satisfac condiţiile de la b). Fie $f_3 : \mathbf{R} \to [a, +\infty)$ continuă, ce verifică ecuaţia şi $f_3 \neq f_1, f_2$. Atunci, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$, $f_3(x) = a$ sau $f_3(x) = a + e^x$ şi există x_1, $x_2 \in \mathbf{R}$ cu $f_3(x_1) = a$ şi $f_3(x_2) = a + e^{x_2}$.

Dar, din $x_1 = x_2$, rezultă $a = a + e^{x_2}$, adică $e^{x_2} = 0$, deci contradicţie. Atunci, $x_1 \neq x_2$.

Presupunem $x_1 < x_2$. Deoarece f_3 are proprietatea lui Darboux, oricare ar fi $y' \in (a, a + e^{x_1}) \subset (a, a + e^{x_2}) = (f_3(x_1), f_3(x_2))$, există $x' \in (x_1, x_2)$ astfel încît $f_3(x') = y'$. Dar din $f_3(x') = a$ rezultă contradicţie cu $a < y'$, iar din $f_3(x') = a + e^{x'}$, de unde $a < a + e^{x'} < a + e^{x_1}$, rezultă $x' < x_1$, contradicţie.

Analog, se obţine contradicţie şi pentru $x_2 < x_1$.

c) Fie $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $F(x, y) = (y-a)^2 - (y - a)e^x$. Deoarece $F(0, a) = 0$ există F'_x şi F'_y într-o vecinătate a lui $(0, a)$ (de fapt, chiar pe $\mathbf{R}^2$) şi sînt continue (mai mult, sînt din $C^\infty(\mathbf{R}^2)$), iar $F'_y(0, a) = -1 \neq 0$, sînt verificate condiţiile din teorema de existenţă şi unicitate a funcţiilor implicite de clasă C^1 (mai mult, de clasă C^∞) şi, deci, există o unică funcţie f cu proprietăţile de la c). Avem

$$f'(0) = -\frac{F'_x(0, f(0))}{F'_y(0, f(0))} = \frac{(y-a)e^x}{2(y-a)-e^x}\Bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 0,$$

$2(y-a) - e^x \neq 0.$

Observaţie. De la b), ştim că f, fiind continuă, va fi f_1 sau f_2. Dar $f_2(0) = a + 1 \neq a$. Deci, $f = f_1$, adică $f: \mathbf{R} \to [a, +\infty)$, $f(x) = a$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$. Atunci, $f'(x) = 0$, oricare ar fi $x \in \mathbf{R}$, de unde $f'(0) = 0$. Observăm că $f \in C^\infty(\mathbf{R})$.

6.2. Să se arate că ecuaţia $x + \ln x - \sqrt{y} + 1 = 0$, $(x, y) \in (0, \infty) \times [0, \infty)$, admite o singură soluţie $x = x(y)$ de clasă C^1 pe o vecinătate a lui $y_0 = 4$ astfel încît $x(4) = 1$. Să se calculeze $x'(4)$.

R. Fie $F(x, y) = x + \ln x - \sqrt{y} + 1$.
Avem că $F(1, 4) = 0$, există F'_x şi F'_y continue pe $(0, \infty) \times (0, \infty)$, $F'_x(1, 4) = 2 \neq 0$; deci, există o vecinătate $U_0 \subset (0, \infty)$ a lui 4, o vecinătate V_0 a lui 1 şi o unică funcţie $x: U_0 \to V_0$ de clasă C^1 pe U_0 astfel încît

$$F(x(y), y) = 0, \text{ oricare ar fi } y \in U_0,\ x(4) = 1, \text{ iar}$$

$$x'(4) = -F'_y(x, y)/F'_x(x, y)\Big|_{\substack{x=1\\y=4}} = 1/8.$$

Observaţie. Funcţia $x: U_0 \to V_0$ o putem construi şi din construcţie rezultă că U_0 poate fi luat chiar intervalul $[0, \infty)$, iar ca V_0 pe $\mathbf{R}$.

Fie $g: (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $g(x) = x + \ln x + 1$

şi $h: [0, \infty) \to \mathbf{R}$, $h(y) = \sqrt{y}$.

Deci, trebuie găsit $x: [0, \infty) \to \mathbf{R}$ astfel încît $g(x(y)) = h(y)$, oricare ar fi $y \in [0, \infty)$.

Dar g este injectivă, fiind strict crescătoare şi surjectivă, avînd proprietatea lui Darboux şi $\lim\limits_{x \searrow 0} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Atunci, există $g^{-1}: \mathbf{R} \to (0, \infty)$. Rezultă $x(y) = g^{-1}(h(y))$, oricare ar fi $y \in [0, \infty)$, compunerea $g^{-1} \circ h$ avînd sens.

Observăm că $x(4) = g^{-1}(h(4)) = g^{-1}(2) \in \{x \mid x + \ln x + 1 = 2\} = \{1\}$. Din $g'(x) = 1 + 1/x > 0$, oricare ar fi $x \in (0, \infty)$, rezultă că g^{-1} derivabilă şi, h fiind derivabilă pe $(0, \infty)$, obţinem că $x = g^{-1} \circ h$ este derivabilă pe $(0, \infty)$ şi deoarece $h(4) = 2 = g(1)$, rezultă

$$x'(4) = (g^{-1})'(h(4)) \cdot h'(4) = \frac{1}{g'(1)} \cdot h'(4) = 1/8.$$

Funcţia x este unică avînd proprietăţile din enunţ, deoarece dacă există şi $\varphi: [0, \infty) \to \mathbf{R}$, din $g(\varphi(y)) = h(y)$ pentru orice $y \in [0, \infty)$, rezultă $\varphi(y) = g^{-1}(h(y)) = x(y)$ oricare ar fi $y \in [0, \infty)$.

6.3. Fie ecuaţia $xy + \ln y = 0$, $y > 0$, care defineşte implicit pe y ca funcţie de x. Să se calculeze $y'(x)$ şi $y''(x)$.

R. Derivăm ecuaţia în raport cu x:

$$y + xy' + y'/y = 0,\ y > 0$$

de unde $y' = -\dfrac{y^2}{xy+1}$, $xy + 1 \neq 0$.

Calculăm pe $y''(x)$:

$$y''_{x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y'_x\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{y^2}{xy+1}\right) =$$

$$= -\frac{2yy'_x(xy+1) - y^2(y+xy'_x)}{(xy+1)^2} = \frac{y^3(2xy+3)}{(xy+1)^3}$$

6.4. Fie funcţia f de clasă C^2 pe $D \subset \mathbf{R}^2$ şi z funcţie de x şi y definită implicit prin ecuaţia $f(x-y, z) = 0$.
Să se arate că z este soluţie pentru ecuaţiile cu derivate parţiale

$$\partial z/\partial x + \partial z/\partial y = 0 \text{ şi } \partial^2 z/\partial x^2 - \partial^2 z/\partial y^2 = 0.$$

R. Dacă notăm $x - y = u$, obţinem derivînd pe f în raport cu x, apoi cu y,

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\ \partial u/\partial x = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0,\ \partial u/\partial y = -1,$$

care ne dau pentru $\partial f/\partial z \neq 0$,

$$\partial z/\partial x = -\frac{\partial f}{\partial u}\bigg/\frac{\partial f}{\partial z},\quad \partial z/\partial y = \frac{\partial f}{\partial u}\bigg/\frac{\partial f}{\partial z}$$

şi se vede imediat că verifică a doua ecuaţie din enunţ.
Dacă relaţia $\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \partial f/\partial u = 0$ o derivăm în raport cu x, obţinem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \qquad (1)$$

în mod asemănător, să derivăm relaţia $\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} - \partial f/\partial u = 0$ în raport cu y şi obţinem

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

Din (1) şi (2) rezultă imediat derivatele de ordinul doi ale lui z: $\partial^2 z/\partial x^2$ şi $\partial^2 z/\partial y^2$ care înlocuite în a treia ecuaţie din enunţ o verifică identic.

6.5. Fie D un domeniu $\subset \mathbf{R}^2$, $F \in C^1(D)$, iar z o funcţie de variabile x şi y definită implicit prin ecuaţia:

$$F(\operatorname{arctg} z, \ln(x^2 + y^2)) = 0;$$

să se arate că $x\partial z/\partial y - y\partial z/\partial x = 0$;

R. Notăm $u = \operatorname{arctg} z$ şi $v = \ln(x^2 + y^2)$. Atunci,

$$\partial z/\partial x = -F'_x/F'_z = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial z}} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{2x}{x^2+y^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{1+z^2}},\ F'_z \neq 0$$

$$\partial z/\partial y = -F'_y/F'_z = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{1+z^2}} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial v}\cdot\dfrac{2y}{x^2+y^2}}{\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{1}{1+z^2}}$$

Observăm că, înlocuind în relaţia cerută pe $\partial z/\partial x$ şi $\partial z/\partial y$, ea este verificată.

6.6. Funcţia z de variabile x şi y definită implicit de ecuaţia $f(x \operatorname{tg} z, y \operatorname{tg} z) = 0$, unde $z \neq (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$, iar f este de clasă C^1 pe $D \subset \mathbf{R}^2$, satisface relaţia $x\partial z/\partial x + y\partial z/\partial y = -\sin z \cos z$.

R. Se derivează prima ecuaţie în raport cu x, apoi cu y şi se ţine seama că $z = z(x, y)$, notînd $u = x \operatorname{tg} z$, $v = y \operatorname{tg} z$:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{tg} z + \frac{x}{\cos^2 z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y}{\cos^2 z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\operatorname{tg} z + \left(\frac{x}{\cos^2 z}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{y}{\cos^2 z}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\operatorname{tg} z}{\dfrac{x}{\cos^2 z}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u} + \dfrac{y}{\cos^2 z}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v}} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial u}\cdot\sin z\cos z}{x\cdot\dfrac{\partial f}{\partial u} + y\cdot\dfrac{\partial f}{\partial v}};$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{x}{\cos^2 z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\operatorname{tg} z + \frac{y}{\cos^2 z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}\sin z\cos z}{x\dfrac{\partial f}{\partial u} + y\dfrac{\partial f}{\partial v}}.$$

Relaţia din enunţ este verificată imediat.

6.7. Fie $\varphi : D(\subseteq \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ o funcţie de clasă C^n, z o funcţie de variabile x şi y definită implicit prin relaţia $z - x - y\varphi(z) = 0$ şi $u = f(z)$, unde $f: D \to \mathbf{R}$ este de clasă C^n şi $f'(z) \neq 0$, oricare ar fi $z \in D$. Atunci,

$$\frac{\partial^n u}{\partial y^n} = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[(\varphi(z))^n \frac{\partial u}{\partial x}\right].$$

R. Procedăm prin inducţie. Pentru $n = 1$, trebuie verificată egalitatea $\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(z)\frac{\partial u}{\partial x}$.

Dar $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{df}{dz} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{df}{dz} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x}. \end{cases}$

Deci, $f'(z)\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z) \cdot f'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}$, de unde, cu $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\varphi(z)}{1 - y\varphi(z)}$ şi $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - y\varphi'(z)}$ obţinute din prima ecuaţie a enunţului, rezultă că a doua ecuaţie se verifică pentru $n = 1$.

Presupunem că $\frac{\partial^k u}{\partial y^k} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[(\varphi(z))^k \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right]$ pentru $k < n$ şi arătăm că $\frac{\partial^{k+1} u}{\partial y^{k+1}} = \frac{\partial^k}{\partial x^k}\left[(\varphi(z))^{k+1} \frac{\partial u}{\partial x}\right]$.

Folosindu-ne de criteriul lui Schwarz, obţinem:

$$\frac{\partial^{k+1}_u}{\partial y^{k+1}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^k_u}{\partial y^k}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[(\varphi(z))^k \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\} =$$

$$= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[(\varphi(z))^k \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\} =$$

$$= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{k(\varphi(z))^{k-1} \cdot \varphi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right\};$$

membrul drept al relaţiei precedente devine

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(\varphi(z))^{k+1}\frac{\partial u}{\partial x}\right]\right\} = \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[(\varphi(z))^k \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right]\right\} =$$

$$= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[k(\varphi(z))^{k-1} \cdot \varphi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + (\varphi(z))^k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right] =$$

$$= \frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1}}\left[k(\varphi(z))^{k-1} \cdot \varphi'(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + (\varphi(z))^k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}\right].$$

6.8. Fie D = domeniu $\subset \mathbf{R}^2$, $f \in C^1(D)$ şi funcţiile z şi u de variabile x şi y definite implicit prin sistemul:

$$\begin{cases} f(x-y,\ z+u) = 1 \\ xyz + \ln(x^2+y^2+z^2) = 2,\ x^2+y^2+z^2 > 0. \end{cases}$$

Să se calculeze $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

R. Notăm $v = x - y$ şi $w = z + u$; dacă derivăm sistemul în raport cu x, avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0 \\[2ex] yz + xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{2x + 2z\dfrac{\partial z}{\partial x}}{x^2+y^2+z^2} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \\[2ex] yz + xy\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{2x + 2z\dfrac{\partial z}{\partial x}}{x^2+y^2+z^2} = 0 \end{cases}$$

care ne conduc la

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x + yz(x^2+y^2+z^2)}{2z + xy(x^2+y^2+z^2)},\quad 2z + xy(x^2+y^2+z^2) \neq 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial w}\cdot\dfrac{2x + yz(x^2+y^2+z^2)}{2z + xy(x^2+y^2+z^2)}}{\dfrac{\partial f}{\partial w}},\quad \frac{\partial f}{\partial w} \neq 0.$$

derivăm acum sistemul iniţial în raport cu y:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial v}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\cdot\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0 \\[2ex] xz + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{2y + 2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}}{x^2+y^2+z^2} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial w}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \\[2ex] xz + xy\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{2y + 2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}}{x^2+y^2+z^2} = 0 \end{cases}$$

care ne dau

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y + xz(x^2+y^2+z^2)}{2x + xy(x^2+y^2+z^2)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial w} \cdot \dfrac{2y + xz(x^2+y^2+z^2)}{2z + xy(x^2+y^2+z^2)}}{\dfrac{\partial f}{\partial w}}.$$

6.9. Să se arate că funcţia $z(x, y)$, definită de $F(x + z/y,\ y + z/x) = 0$ satisface ecuaţia: $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

R. Notăm: $\alpha = x + z/y$, $\beta = y + z/x$ şi derivăm întîi în raport cu x apoi în raport cu y, presupunînd că $F(\alpha, \beta)$ este de clasă $C^{(1)}$ în $D \subset \mathbf{R}^2$. Avem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}\left(1 + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial F}{\partial \beta}\left(-\dfrac{z}{x^2} + \dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}\right) = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}\left(-\dfrac{z}{y^2} + \dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) + \dfrac{\partial F}{\partial \beta}\left(1 + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial y}\right) = 0, \end{cases}$$

de unde
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}\left(\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial F}{\partial \beta}\right) = \dfrac{z}{x^2}\dfrac{\partial F}{\partial \beta} - \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}\left(\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial F}{\partial \beta}\right) = \dfrac{z}{y^2}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial F}{\partial \beta}. \end{cases}$$

Înlocuim în ecuaţia dată $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ şi $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ în ipoteza că $\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial F}{\partial \beta} \neq 0$.

Obţinem: $x\dfrac{\dfrac{z}{x^2}\dfrac{\partial F}{\partial \beta} - \dfrac{\partial F}{\partial \alpha}}{\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial F}{\partial \beta}} + y\dfrac{\dfrac{z}{y^2}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} - \dfrac{\partial F}{\partial \beta}}{\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial F}{\partial \alpha} + \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial F}{\partial \beta}} = z - xy$ sau

$$\frac{z}{x}\frac{\partial F}{\partial \beta} - x\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{z}{y}\frac{\partial F}{\partial \alpha} - y\frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{z}{y}\frac{\partial F}{\partial \alpha} + \frac{z}{x}\frac{\partial F}{\partial \beta} - x\frac{\partial F}{\partial \alpha} - y\frac{\partial F}{\partial \beta},$$

relaţie care este adevărată.

6.10. În ce se transformă expresia:

$E = y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y}$ dacă se face schimbarea de variabile $x = ue^v$, $y = ve^u$, $(u, v) \in \mathbf{R}^2$

R. Calculăm derivatele parţiale din transformarea dată:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = e^v \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = ue^v$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = ve^u \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = e^u$$

Avem:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = e^v \frac{\partial z}{\partial x} + ve^u \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = ue^v \frac{\partial z}{\partial x} + e^u \frac{\partial z}{\partial y},$$

de unde deducem $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ în ipoteza că:

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^v & ve^u \\ ue^v & e^u \end{vmatrix} \neq 0$$

Obținem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & ve^u \\ \frac{\partial z}{\partial v} & e^u \end{vmatrix} = \frac{e^u\left(\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v}\right)}{e^u e^v(1-uv)} = \frac{\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v}}{e^v(1-uv)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} e^v & \frac{\partial z}{\partial u} \\ ue^v & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{e^v\left(\frac{\partial z}{\partial v} - u\frac{\partial z}{\partial u}\right)}{e^u e^v(1-uv)} = \frac{\frac{\partial z}{\partial v} - u\frac{\partial z}{\partial u}}{e^u(1-uv)},$$

care introduse în expresia dată conduc la:

$$E = ve^u \frac{\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v}}{e^v(1-uv)} + ue^v \frac{\frac{\partial z}{\partial v} - u\frac{\partial z}{\partial u}}{e^u(1-uv)} =$$

$$= \frac{1}{e^u e^v}\left[ve^{2u}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - v\frac{\partial z}{\partial v}\right) + ue^{2v}\left(\frac{\partial z}{\partial v} - u\frac{\partial z}{\partial u}\right)\right] \text{ cu } 1 - uv \neq 0.$$

6.11. Fie mulțimea $A \subseteq \mathbf{R}^n$ și funcțiile $f, g: A \to \mathbf{R}$ cu proprietatea card. $f(B) >$ card. $g(B)$ pentru orice submulțime $B \subseteq A$. Să se arate că f este independentă de g în orice punct $x \in A$.

R. Presupunînd că f nu este independentă de g într-un punct $x_0 \in A$, există o vecinătate V a lui x_0 pe care f să fie dependentă de g, adică există funcția $\varnothing: g(V) \to \mathbf{R}$, astfel încît $f(x) = \varnothing(g(x))$, oricare ar fi $x \in V$. Din card. $f(V) >$ card. $g(V)$, rezultă card. $f(V) >$ card. $\varnothing(g(V))$; deci, contradicție.

Observație. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție continuă astfel încît restricția lui f la I, f/I, nu este constantă, oricare ar fi intervalul $I \subseteq \mathbf{R}$ și $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ -1, & x \notin \mathbf{Q}, \end{cases}$$

funcția lui Dirichlet. Atunci, f este independentă de g în orice $x \in \mathbf{R}$. Dacă f nu este independentă de g într-un punct $x_0 \in \mathbf{R}$, atunci există un interval I, vecinătate a lui x_0, astfel încît f este dependentă de g pe I. Dar $f/I \neq$ constantă implică existența lui x_1 și x_2 din I cu $x_1 \neq x_2$ și $f(x_1) \neq f(x_2)$. f avînd proprietatea lui Darboux, rezultă că $f(I) \supset [f(x_1), f(x_2)]$. Dar card. $[f(x_1), f(x_2)] = \chi_c >$ card. $g(I) = 2$. Deci, f este independentă de g în orice $x \in \mathbf{R}$.

6.12. Fie funcțiile

$$f(x, y) = \begin{cases} \ln xy, & xy > 0 \\ 0 \; ; & xy \leqslant 0 \end{cases}$$

și $g(x, y) = \sin (x - y)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.
Să se arate că f și g sînt independente în $(0, 0)$.

R: Presupunînd pe f dependentă de g pe o vecinătate V_1 a lui $(0, 0)$, există funcția $\varnothing_1$ astfel încît

$$f(x, y) = \varnothing_0(g(x, y)), \text{ oricare ar fi } (x, y) \in V_1.$$

Deci, $\ln x^2 = f(x, x) = \varnothing_1(g(x, x)) = \varnothing(0)$, oricare ar fi $(x, x) \in V_1$,de unde contradicție.

Dacă g este dependentă de f pe o vecinătate V_2 a lui $(0, 0)$, există $\varnothing_2$ astfel încît $g(x, y) = \varnothing_2(f(x, y))$, oricare ar fi $(x, y) \in V_2$. Deci, $\sin x = g(x, 0) = \varnothing_2(f(x, 0)) = \varnothing(0)$, oricare ar fi $(x, 0) \in V_2$ (sau $-\sin y = \sin (-y) = \varnothing(f(0, y)) = \varnothing(0)$), de unde contradicție. Rezultă că f și g sînt independente în $(0, 0)$.

6.13. Fie mulțimea $M \subseteq \mathbf{R}^3$ și funcțiile $f_1, f_2 : M \to \mathbf{R}_+^*$, $f_3 : M \to \mathbf{R}$, $F_1, F_2, F_3 : M \to \mathbf{R}$, unde $F_1(x_1, x_2, x_3) = \ln f_1(x_1, x_2, x_3)$, $F_2(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{f_2(x_1, x_2, x_3)}$, $F_3(x_1, x_2\, x_3) = \operatorname{arctg} f_3(x_1, x_2, x_3)$. Să se arate că rang $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant 3} = 3$ dacă și numai dacă rang $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant 3} = 3$.

R: Avem

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant 3} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{f_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{f_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \cdot \frac{1}{f_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{f_2}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{f_2}} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{f_2}} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \cdot \frac{1}{1 + f_3^2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} \cdot \frac{1}{1 + f_3^2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \cdot \frac{1}{1 + f_3^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2f_1 \sqrt{f_2}\,(1 + f_3^2)} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2f_1 \sqrt{f_2}\,(1 + f_3^2)} \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant 3},$$

de unde rezultă că primul şi ultimul determinant sînt diferiţi de zero simultan.

Observaţie. În mod asemănător, se arată că rangul celor două matrici este simultan egal cu 1 sau cu 2.

6.14. Fie funcţiile $f, g, h: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = x - y$, $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2z$, $h(x, y, z) = -xy - z$.

a) Să se arate că h depinde de f şi g pe $\mathbf{R}^3$;

b) să se determine mulţimile pe care funcţiile sînt independente cîte două.

R: a) Matricea funcţională pentru funcţiile f, g, h este

$$M(f, g, h) = \begin{pmatrix} f'_x & f'_y & f'_z \\ g'_x & g'_y & g'_z \\ h'_x & h'_y & h'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2x & 2y & 2 \\ -y & -x & -1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece det. $M(f, g, h) = 0$ pentru orice punct (x, y, z) din $\mathbf{R}^3$, rezultă că f, g, h nu sînt independente în nici un punct din $\mathbf{R}^3$.

Avînd $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2y & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, deducem că rang $M(f, g) = 2$ pentru orice $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Prin urmare, f şi g sînt independente pe $\mathbf{R}^3$, iar pentru orice $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbf{R}^3$, găsim o vecinătate U_0 a sa astfel încît h să fie dependentă de f şi g pe U_0.

Mai mult, observăm că, deoarece $f^2(x, y, z) - g(x, y, z) = 2h(x, y, z)$ pentru orice punct $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, în acest caz h depinde de f şi g chiar pe $\mathbf{R}^3$.

b) La punctul a), am arătat că f şi g sînt independente pe $\mathbf{R}^3$. Analog, se arată că f şi h sînt independente pe $\mathbf{R}^3$. Deoarece

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ -y & -x \end{vmatrix} = -2(x^2 - y^2), \quad \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ -y & -1 \end{vmatrix} = -2(x - y),$$

$$\begin{vmatrix} 2y & 2 \\ -x & -1 \end{vmatrix} = -2(y - x),$$

rang $M(g, h) = 2$ pentru orice punct $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ cu $x \neq y$ şi rezultă că g şi h sînt dependente în planul $x = y$ şi independente în rest.

6.15. Fie $M = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ \frac{x}{2} + y \leq 1\right\}$ şi funcţia $f: M \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = (x - 1)^3 + 2y$. Să se găsească $\max\limits_{(x, y) \in M} f(x, y)$ şi $\min\limits_{(x, y) \in M} f(x, y)$.

R. Deoarece funcţia f este continuă şi M este compact, rezultă că f este mărginită şi îşi atinge marginile. În int. M, funcţia f fiind diferenţiabilă, punctele de extrem, dacă există, se găsesc printre punctele staţionare ale funcţiei, soluţii ale sistemului: $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$. Dar $f'_y = 2 \neq 0$. Funcţia f

neavînd puncte staţionare, în int. M, nu are nici puncte de extrem, pe care le vom căuta pe frontiera lui M: Fr. $M = [OA] \cup \cup [AB] \cup [BO]$; (fig. 6.1). Considerăm $f_1 : [0, 2] \to \mathbf{R}$, $f_1(x) = (f/[OA])(x, 0) = (x-1)^3$. Dacă sînt puncte de extrem în int. $[OA]$, acestea anulează pe $f_1' : f_1'(x) = 3(x-1)^2 = 0$, de unde $x = 1$ şi, deoarece $P_0(1, 0) \in$ int. $[OA]$, acesta ar putea fi punct de extrem pentru funcţia f. Pe $[OA]$, puncte de extrem ar mai putea fi $O(0, 0)$ şi $A(2, 0)$ care aparţin frontierei Fr. $[OA]$.

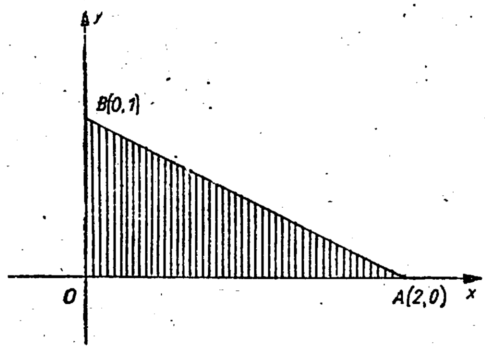


Fig. 6.1

Căutăm punctele de extrem pe $[OB]$ şi considerăm funcţia $f_2 : [0, 1] \to \mathbf{R}$, $f_2(y) = f(0, y) = -1 + 2y$ şi, deoarece $f_2'(y) \neq 0$ pentru orice $y \in [0, 1]$, pe compactul $[OB]$, funcţia f_2 îşi atinge extremele în $O(0, 0)$ sau $B(0, 1)$.

Căutăm punctele de extrem pe $[AB]$ şi considerăm funcţia $f_3 : [0, 2] \to \mathbf{R}$, $f_3(x) = (f/AB)(x, y) = f\left(x, 1 - \frac{x}{2}\right) = (x-1)^3 + 2 - x$.

Deoarece $f_3'(x) = 3(x-1)^2 - 1 = 0$ are soluţiile $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$, iar $P_1\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$, $P_2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) \in$ int. $[AB]$, acestea ar putea fi puncte de extrem în int. $[AB]$. Pe $[AB]$, am mai putea avea puncte de extrem în A, $B \in$ Fr. $[AB]$.

Aşadar, pe mulţimea M punctele posibile de extrem pentru f sînt O, A, B, P_0, P_1, P_2. Deoarece $f(0, 0) = -1$, $f(2, 0) = 1$, $f(0, 1) = 1$, $f(1, 0) = 0$, $f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}, \frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = 1 - \frac{2}{3\sqrt{3}}$, $f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}, \frac{3+\sqrt{3}}{6}\right) = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}$, avem $\max\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(P_2)$, iar $\min\limits_{(x,y)\in M} f(x, y) = f(0)$.

6.16. Să se studieze extremele funcţiei

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx, \ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3,$$

cu legăturile $-x + y + z = 1$; $x - z = 0$.

R. Folosim metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Se consideră funcţia ataşată

$$F(x, y, z, \lambda, \mu) = xy + yz + zx + \lambda(-x + y + z - 1) + \\ + \mu(x - z).$$

Dacă există, extremele se găsesc printre punctele staționare, soluții ale sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = y + z - \lambda + \mu = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = x + z + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = x + y + \lambda - \mu = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = -x + y + z - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu} = x - z = 0. \end{cases}$$

Soluția sistemului este $x = -1$, $y = 1$, $z = -1$, $\lambda = 2$, $\mu = 2$. Fie $A(-1, 1, -1, 2, 2)$. Avem $F''_{x^2}/_A = F''_{y^2}/_A = F''_{z^2}/_A = 0$, $F''_{xy}/_A = F''_{xz}/_A = F''_{yz}/_A = 1$, $d^2F/A = 2(dx\,dy + dy\,dz + dz\,dx)$.
Diferențiem legăturile în punctul $(-1, 1, -1)$:

$$-dx + dy + dz = 0,$$
$$dx - dz = 0,$$

de unde $dz = dx$, $dy = 0$.
Rezultă $d^2F/A = 2dx^2 > 0$, adică $(-1, 1, -1)$ este punct de extrem și anume de minim.

6.17. Fie funcția de două variabile $z = z(x, y)$ definită implicit prin ecuația $x^2 + y^2 + 2x - 4y + z^2 + z + 3 = 0$. Să se studieze extremele acestei funcții.

R. Fie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2x - 4y + z^2 + z + 3$.

Se observă că F verifică toate condițiile din teorema de existență a funcției $z = z(x, y)$ dacă se impune și condiția

$$\partial F/\partial z = 2z + 1 \neq 0.$$

Pentru studiul extremelor, calculăm derivatele parțiale de ordinul întîi ale lui z:

$$\begin{cases} 2x + 2 + 2z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 2y - 4 + 2z \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0; \end{cases}$$

deci, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{2(x+1)}{2z+1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{2(2-y)}{2z+1}$. Există un singur punct staționar: $x = -1$, $y = 2$, pentru care $z^2 + z - 2 = 0$, care ne dă $z_{1,2} = -2, 1$.

Calculăm derivatele parțiale de ordinul doi ale lui z:

$$2+2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

ne dă $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{2\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]}{2z+1}$; $2+2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$

Obținem $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{2\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]}{2z+1}$;

$$2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

și $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{2\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}}{2z+1}$.

Fie $A(-1, 2, -2)$ și $B(-1, 2, 1)$.

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_A\cdot\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_A-\left(\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_A\right)^2=4/9>0.$$

Deci, A reprezintă un punct de extrem; dar $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_A>0$, adică este un minim, $z(-1, 2)=-2$.

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_B\cdot\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_B-\left(\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_B\right)^2=4/9>0.$$

Deci, B reprezintă un punct de extrem; dar $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_B<0$, adică este un punct de maxim, $z(-1, 2)=1$.

6.18. Să se găsească extremele funcției:

$$u=x^2+y^2+z^2 \text{ cu legătura } 2x+3y-z=1.$$

(Examen)

R. Problema se poate reduce la o problemă de extremum liber înlocuind în expresia lui u pe z din legătura $z=2x+3y-1$. Obținem: $u=x^2+y^2+(2x+3y-1)^2$.

Pentru a determina extremele funcției $u(x, y)$ rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=2x+4(2x+3y-1)=0\\ \frac{\partial u}{\partial y}=2y+6(2x+3y-1)=0\end{cases}\quad\text{sau}\quad\begin{cases}5x+6y-2=0\\ 6x+10y-3=0\end{cases}$$

cu soluția $x=1/7$ și $y=3/14$. Punct staționar $A(1/7, 3/14)$.

Calculăm derivatele parțiale de ordinul II:

$$r = \partial^2 u/\partial x^2 = 10;\ s = \partial^2 u/\partial x \partial y = 12;\ t = \partial^2 u/\partial y^2 = 20.$$

Deoarece $rt - s^2$ în punctul $A(1/7, 3/14)$ este $r_0 t_0 - s_0^2 = 56 > 0$ și $r_0 = 10 > 0$ rezultă că $A(1/7, 3/14)$ este punct de minim.

Observații:

a) Deoarece $u = x^2 + y^2 + z^2$ reprezintă pătratul distanței de la un punct $M(x, y, z)$ din spațiu la origine rezultă că extremul cerut este egal cu pătratul distanței minime de la origine la planul:

$$2x + 3y - z - 1 = 0 \tag{1}$$

(întrucît maximul este infinit).

Distanța de la origine la plan este:

$$\sqrt{u} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(1/7)^2 + (3/14)^2 + (1/14)^2} = \sqrt{14}/14$$

(deoarece este un minim).

b) Normala la planul ce exprimă legătura trece prin punctul $N(1/7, 3/14, -1/14)$. Ecuația normalei la plan este $x/2 = y/3 = z/-1$ (2). Intersecția normalei la planul (2) cu planul (1) este punctul $N(1/7, 3/14, -1/14)$ deci reprezintă soluția problemei enunțate.

c) Problema poate fi tratată și ca o problemă de extremum cu legături.

6.19. Să se dimensioneze un canal descoperit cu secțiunea un trapez de debit dat, astfel încît perimetrul udat să fie minim.

R. Secțiunea este un trapez isoscel de arie constantă egală cu a^2 (vezi figura 6.2).

$$a^2 = \frac{(b + b + 2\,\mathrm{ctg}\,\alpha)h}{2} = (b + \mathrm{ctg}\,\alpha)h \tag{1}$$

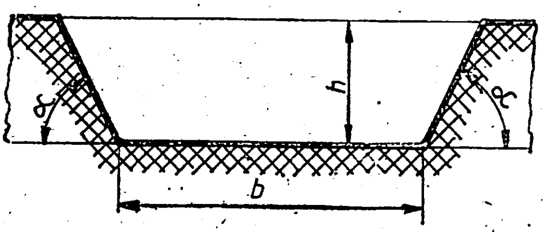


Fig. 6.2

Trebuie studiată funcția $P(\alpha, b, h) = b + 2\dfrac{h}{\sin\alpha}$, care reprezintă perimetrul udat.

Problema dată este o problemă de extremum cu legături ce se poate reduce la o problemă de extremum liber dacă înlocuim:

$$b = \frac{a^2}{h} - \mathrm{ctg}\,\alpha$$

Din relația (1) în expresia funcției $P(\alpha, b, h)$. Avem:

$$P(\alpha, h) = \frac{a^2}{h} - h\,\mathrm{ctg}\,\alpha + \frac{2h}{\sin\alpha} = \frac{a^2\sin\alpha + h^2(2 - \cos\alpha)}{h\sin\alpha}.$$

Extremele lui P se găsesc printre punctele staționare ale sistemului:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial \alpha} = \dfrac{(a^2\cos\alpha + h^2\sin\alpha)h\sin\alpha - h\cdot\cos\alpha(a^2\sin\alpha + 2h^2 - h^2\cos\alpha)}{h^2\sin^2\alpha} = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial h} = \dfrac{2h^2(2-\cos\alpha)\sin\alpha - \sin\alpha(a^2\sin\alpha + 2h^2 - h^2\cos\alpha)}{h^2\sin^2\alpha} = 0 \end{cases}$$

sau:

$$\begin{cases} \dfrac{h(1-2\cos\alpha)}{\sin\alpha} = 0 \\ \dfrac{h^2(\cos\alpha - 2) + a^2\sin\alpha}{h^2\sin\alpha} = 0 \end{cases}$$

Din prima ecuație deducem $h = 0$ şi $\alpha = \pm\arccos\frac{1}{2} + k,\ k \in \mathbf{Z}$.
Din motive constructive luăm $h \neq 0$ şi $\alpha = \pi/3$.
Obținem din a doua ecuație:

$$h^2 = \frac{-a^2\sin(\pi/3)}{\cos\frac{\pi}{3} - 2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3} \quad \text{sau } h = \frac{a}{\sqrt[4]{3}} = \pm a\cdot 3^{-1/4}$$

Deci soluția acceptată a sistemului este: $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $h = a\cdot 3^{-1/4}$, iar punctul staționar $A\left(\frac{\pi}{3}, a\cdot 3^{-1/4}\right)$. Calculăm derivatele parțiale de ordin II.

$$r = \frac{\partial^2 P}{\partial\alpha^2} = \frac{2h\sin^2\alpha - h\cos\alpha(1-2\cos\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{2h - h\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{h(2-\cos\alpha)}{\sin^2\alpha},$$

$$s = \frac{\partial^2 P}{\partial h\partial\alpha} = \frac{1-2\cos\alpha}{\sin\alpha};\quad t = \frac{\partial^2 P}{\partial h^2} = \frac{2a^2}{h^2}$$

În punctul $A(\pi/3, a\cdot 3^{-1/4})$ expresia $r_0t_0 - s_0^2 = \frac{2a}{\sqrt[4]{3}}\cdot\frac{2\sqrt[4]{3^3}}{a} - 0 =$ $= 4\sqrt{3} > 0$ şi $r_0 = 2a/\sqrt[4]{3} > 0$, deci P este minim în acest punct.

6.20. Să se construiască dintr-un material cu suprafața a^2 o cisternă în formă de paralelipiped dreptunghic, fără capac.

R. Dimensiunile cisternei fiind cele indicate în fig. 6.3. rezultă că aria suprafeței cisternei este:

$$a^2 = xy + 2(x+y)z \qquad (1)$$

Volumul paralelipipedului este:

$$V(x, y, z) = xyz,$$
$$x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \qquad (2).$$

Trebuie studiată funcția (2) cu legătura (1). Folosim metoda multiplicatorilor lui Lagrange. Funcția lui Lagrange este: $\varnothing(x, y, z, \lambda) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - a^2)$.

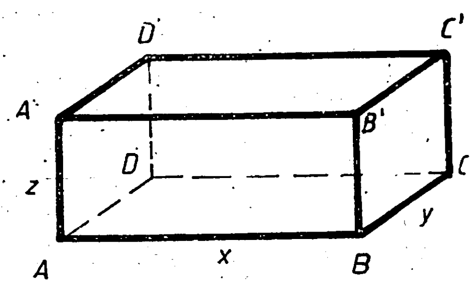


Fig. 6.3

Calculăm derivatele parțiale:

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial x} = yz + \lambda(y + 2z); \quad \frac{\partial \varnothing}{\partial y} = xz + \lambda(x + 2z);$$

$$\frac{\partial \varnothing}{\partial y} = xy + 2\lambda(x + y); \quad \frac{\partial \varnothing}{\partial \lambda} = xy + 2xz + 2yz - a^2$$

şi rezolvăm sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varnothing}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \varnothing}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \varnothing}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \varnothing}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} yz + \lambda(y + 2z) = 0 \\ xz + \lambda(x + 2z) = 0 \\ xy + 2\lambda(x + y) = 0 \\ xy + 2xz + 2yz - a^2 = 0 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} 1 + \lambda\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{y}\right) = 0 \\ 1 + \lambda\left(\dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{x}\right) = 0 \\ 1 + \lambda\left(\dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{x}\right) = 0 \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{2}{y} + \dfrac{2}{x} - \dfrac{a^2}{xyz} = 0 \end{cases}$$

sistem care admite soluțiile:

$$x = a\sqrt{3}/3; \quad y = a\sqrt{3}/3; \quad z = a\sqrt{3}/6; \quad \lambda = -a\sqrt{3}/12. \tag{5}$$

Pentru a stabili dacă este punct de maxim sau de minim calculăm diferențiala a doua a funcției $V(x, y, z)$. Avem:

$$d^2V = x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

în care înlocuim x, y, z din (5) şi obținem:

$$d^2V = \frac{a\sqrt{3}}{3}\,dy\,dz + \frac{a\sqrt{3}}{3}\,dz\,dx + \frac{a\sqrt{3}}{6}\,dx\,dy.$$

Diferențiem legătura (1):

$$y\,dx + x\,dy + 2z\,dy + 2y\,dz + 2z\,dx + 2x\,dz = 0$$

şi înlocuim x, y, z din (5):

$$\frac{a\sqrt{3}}{3}(dx + dy) + \frac{2a\sqrt{3}}{6}(dx + dy) + \frac{4a\sqrt{3}}{3}\,dz = 0$$

de unde: $dz = -\frac{1}{2}(dx + dy)$. În final obținem:

$$d^2V = -\frac{a\sqrt{3}}{6}(dx + dy)^2 + \frac{a\sqrt{3}}{6}\,dx\,dy = \frac{-a\sqrt{3}}{6}(dx^2 + dy^2 + dx\,dy) < 0.$$

Pentru $x = a\sqrt{3}/3$, $y = a\sqrt{3}/3$, $z = a\sqrt{3}/6$ volumul este maxim:

$$V_{\max} = 3a^3\sqrt{3}/54 = a^3\sqrt{3}/18.$$

CAPITOLUL 7

TRANSFORMĂRI PUNCTUALE. SCHIMBĂRI DE VARIABILE

7.1. Fie transformarea

$$f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = (u(x, y),\ v(x, y)),$$

unde $u(x, y) = e^x \cdot \cos y$, $v(x, y) = e^x \cdot \sin y$.

a) Să se arate că f este regulată şi nu este injectivă;

b) să se verifice că

$$\left.\frac{D(u, v)}{D(x, y)}\right|_{\substack{x=1\\ y=0}} = \left(\left.\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right|_{\substack{u=e\\ v=0}}\right)^{-1};$$

c) să se găsească în ce se transformă prin f dreptele

$$A = \{(x, y) \mid x = a\},\quad B = \{(x, y) \mid y = b\}$$

şi domeniile $D = \{(x, y) \mid y \in (0, \pi)\}$, $\Delta = \{(x, y) \mid y \in (0, \pi),\ x < 0\}$.

R. Considerăm

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = u - e^x \cdot \cos y = 0 \\ F_2(x, y, u, v) = v - e^x \cdot \sin y = 0. \end{cases}$$

a) Transformarea f este regulată deoarece admite derivate parţiale continue în cîte o vecinătate a oricărui punct $(x, y) \in \text{int.}\, \mathbf{R}^2$ şi

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^x \neq 0$$

pentru orice $(x, y) \in \text{int.}\, \mathbf{R}^2$. Din $f(x, y) = f(x, y + 2k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$, rezultă că transformarea f nu este injectivă. Observăm că transformarea restricţie $f/\mathbf{R}^*(2k\pi, 2(k + 1)\pi)$ este regulată şi injectivă, oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}$.

b) Transformarea f este regulată în $(1, 0)$ şi $f(1, 0) = (e, 0)$; deci, există vecinătăţile U_0 şi V_0 ale lui $(1, 0)$, respectiv $(e, 0)$ astfel încît $f/U_0 : U_0 \to V_0$ este bijectivă.

Avem $\left.\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|_{\substack{x=1\\y=0}} = e$, $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

Din teorema de existență pentru sisteme de funcții implicite, rezultă că:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,y)} \Big/ \frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{D(F_1,F_2)}{D(v,y)} \Big/ \frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,u)} \Big/ \frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)} \Big/ \frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)},$$

pentru $\dfrac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)} \neq 0$. Avem

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e^x \cos y & e^x \sin y \\ -e^x \sin y & -e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

pentru orice punct $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Analog,

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(u,y)} = -e^x \cdot \cos y, \quad \frac{D(F_1,F_2)}{D(v,y)} = -e^x \cdot \sin y,$$

$$\frac{D(F_1,F_2)}{D(x,u)} = e^x \cdot \sin y, \quad \frac{D(F_1,F_2)}{D(x,v)} = -e^x \cdot \cos y.$$

Deci, $\dfrac{\partial x}{\partial u} = e^{-x} \cdot \cos y$, $\dfrac{\partial x}{\partial v} = e^{-x} \sin y$, $\dfrac{\partial y}{\partial u} = -e^{-x} \cdot \sin y$, $\dfrac{\partial y}{\partial v} = e^{-x} \cdot \cos y$, iar $\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)} = e^{-x}$. Pe U_0, V_0, avem $u = e^{x(u,v)} \cdot \cos y(u,v)$, $v = e^{x(u,v)} \sin y(u,v)$, deci

$$\left.\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|_{\substack{u=e\\v=0}} = \left. e^{-x(u,v)} \right|_{\substack{u=e\\v=0}} = e^{-1}.$$

Atunci, se verifică egalitatea de la b).

c) Dacă $x = a$, se observă că $u^2 + v^2 = e^{2a}$, deci $f(A)$ reprezintă cercul $\{(u, v) \mid u^2 + v^2 = e^{2a}\}$. (fig. 7.1)

Dacă $y = b$, se observă că $v = u \cdot \operatorname{tg} b$, deci $f(B)$ reprezintă semidreapta $\{(u, v) \mid v = u \operatorname{tg} b\}$. (fig. 7.2)

Dacă $y \in (0, \pi)$, se observă că $v > 0$, deci $f(D)$ reprezintă semiplanul $\{(u, v) \mid v > 0\}$. (fig. 7.3)

Dacă $y \in (0, \pi)$ și $x \in (-\infty, 0)$, se observă că $v > 0$ și $u^2 + v^2 = e^{2x} < 1$, deci $f(\Delta)$ reprezintă deschisul $\{(u, v) \mid v > 0, u^2 + v^2 < 1\}$. (fig. 7.4)

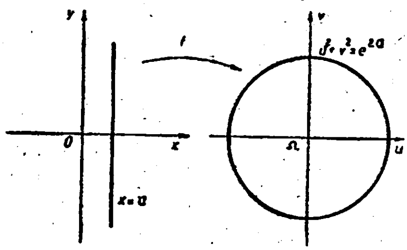


Fig. 7.1

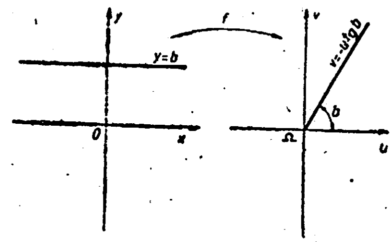


Fig. 7.2

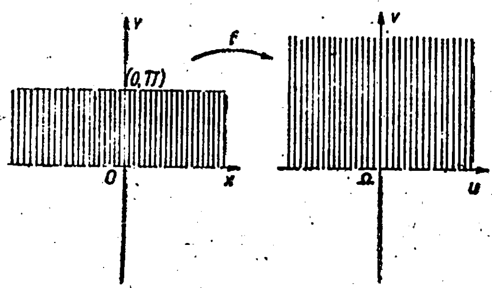


Fig. 7.3

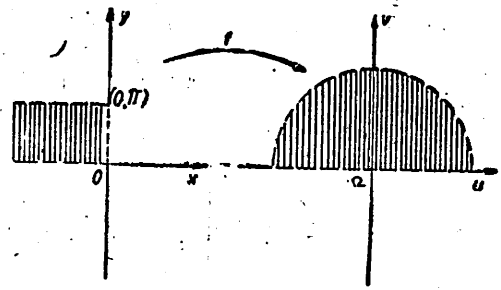


Fig. 7.4

7.2. Fie transformarea

$$f\colon (\mathbf{R} - \{0\}) \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2,\ f(x, y) = \left(\frac{x^2 + y^2}{2x},\ y/x\right).$$

a) Să se găsească mulţimea pe care f este transformare regulată;
b) să se expliciteze transformarea inversă;
c) dacă $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2ax \leqslant 0,\ a > 0\}$ şi $\Delta = \{(x, y) \mid x > 0, y < x,\ y > x^2\}$, să se găsească $f(D)$ şi $f(\Delta)$.

R. a) Observăm că f are derivate parţiale continue pe tot domeniul de definiţie. Notăm $u = \dfrac{x^2 + y^2}{2x}$, $v = y/x$.

Atunci, $\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)} = \dfrac{x^2 + y^2}{2x^3} \neq 0$, pentru orice punct $(x, y) \in (\mathbf{R} - \{0\}) \times \mathbf{R}$. Deci, f este o transformare regulată pe tot domeniul de definiţie.

b) Pentru fiecare $(x_0, y_0) \in (\mathbf{R} - \{0\}) \times \mathbf{R}$, există o vecinătate U_0 şi pentru $f(x_0, y_0)$ o vecinătate V_0 astfel încît

$$f/U_0\colon U_0 \to V_0 \text{ este difeomorfism, iar}$$

$$(f/U_0)^{-1}\colon V_0 \to U_0,\ (f/U_0)^{-1}(u, v) = (x(u, v),\ y(u, v)),$$

unde $x(u, v) = \dfrac{2u}{v^2 + 1}$, $y(u, v) = \dfrac{2uv}{v^2 + 1}$.

c) Înlocuind pe $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ în reprezentarea analitică a lui D, se obține

$$\frac{4u^2}{(v^2+1)^2} + \frac{4u^2v^2}{(v^2+1)^2} - 2a\frac{2u}{v^2+1} \leqslant 0, \quad a > 0.$$

Deci, $(v^2 + 1)\, u(u - a) \leqslant 0$, $a > 0$, adică $u(u - a) \leqslant 0$, $a > 0$, de unde

$$u \leqslant 0, \; u - a \geqslant 0, \; a > 0$$

ceea ce nu se poate, sau $u \geqslant 0$, $u - a \leqslant 0$, $a > 0$, ceea ce reprezintă banda cuprinsă între dreptele $u = 0$ și $u = a$. Domeniul Δ are imaginea dată în fig. 7.5. Din $x > 0$, rezultă $u > 0$. Deoarece $y < x$, rezultă $2uv < 2u$, $v < 1$. Cum $y > x^2$, se obține $v(v^2 + 1)/2 > u$. Atunci, $f(\Delta)$ are imaginea dată în fig. 7.6.

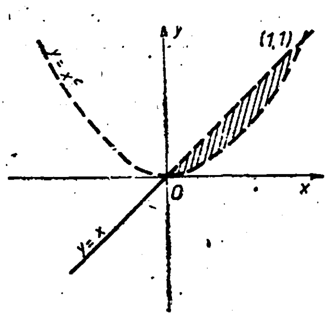


Fig. 7.5

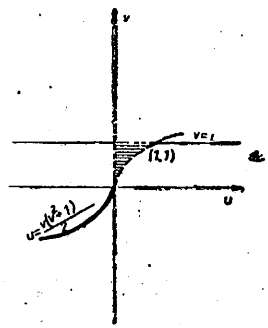


Fig. 7.6

7.3. Să se arate ce devine ecuația

$$y'' + y'2/x = 0, \quad x \neq 0,$$

după schimbarea succesivă de funcții $y = z^2/x$ și $z'/z = u$, unde $z = z(x)$.

R. Căutăm transformarea ecuației după prima schimbare de funcție:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{2zz'x - z^2}{x^2},$$

$$y''_{x^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{(2z'^2 \cdot x + 2zz''x + 2zz' - 2zz') \cdot x^2}{x^4} - \frac{2x(2zz' \cdot x - z^2)}{x^4} =$$

$$= 2 \cdot \frac{(z'^2 + zz'')x^2 - 2zz'x + z^2}{x^3}.$$

Ecuația inițială devine

$$\frac{2x^2z'^2 + 2x^2zz'' - 4xzz' + 2z^2}{x^3} + \frac{4zz'x - 2z^2}{x^3} = 0,$$

$$z'^2 + zz'' = 0.$$

În ecuația transformată, se face a doua schimbare de funcție:

$$z' = zu\,;\ z'' = z'u + zu' = (zu)u + zu' = z(u^2 + u')$$

și obținem $z^2u^2 + z^2(u^2 + u') = 0$ sau $u' + 2u^2 = 0$.

7.4. Ce devine ecuația $x^3y'' + x^2y' - 2y = 0$ după schimbarea de variabilă $x = 1/t,\ t \neq 0$?

R: $\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{t^2}\mathrm{d}t,\quad \dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = -t^2$,

$$y'_x = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = y'\cdot(-t^2)$$

$$y''_{x^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-t^2y')\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} =$$

$$= (-2ty' - t^2y'')\cdot(-t^2) = t^3(2y' + ty'').$$

Ecuația devine $\dfrac{1}{t^3}\cdot t^3(2y' + ty'') + \dfrac{1}{t^2}(-t^2)y' - 2y(t) = 0$,

$ty'' + y' - 2y(t) = 0$, unde derivarea se face în raport cu t.

7.5. Să se transforme ecuația

$$y'y'' + y'^4 = 0,\ \text{unde } y = y(x),$$

considerînd pe y ca nouă variabilă independentă.

R. Exprimăm derivatele lui y relativ la x cu ajutorul derivatelor lui x relativ la y:

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y} = \frac{1}{x'},\quad x' \neq 0,$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}y^2}{(\mathrm{d}x/\mathrm{d}y)^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}y} = \frac{-x''}{x'^3}$$

Înlocuind, ecuația inițială devine: $\dfrac{1}{x'}\left(-\dfrac{x''}{x'^3}\right) + \dfrac{1}{x'^4} = 0,\ 1 - x'' = 0.$

7.6. Să se arate ce devine expresia

$$E = \frac{y''(x)}{y'^3(x)},\quad y' \neq 0,$$

după schimbarea de variabilă independentă și funcție

$$\begin{cases} x = \rho\cos t \\ y = \rho\sin t, & \rho = \rho(t). \end{cases}$$

R: Avem

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = (\rho'\cos t - \rho\sin t)\,\mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}y = (\rho'\sin t + \rho\cos t)\,\mathrm{d}t. \end{cases}$$

Deci,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\rho' \sin t + \rho \cos t}{\rho' \cos t - \rho \sin t};$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho' \sin t + \rho \cos t}{\rho' \cos t - \rho \sin t}\right) \cdot \frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{(\rho'' \sin t + 2\rho' \cos t - \rho \sin t)(\rho' \cos t - \rho \sin t)}{(\rho' \cos t - \rho \sin t)^3} -$$

$$- \frac{(\rho'' \cos t - 2\rho' \sin t - \rho \cos t)(\rho' \sin t + \rho \cos t)}{(\rho' \cos t - \rho \sin t)^3} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho' \cos t - \rho \sin t)^3},$$

$$\rho' \cos t - \rho \sin t \neq 0.$$

Atunci, $E = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho' \cos t - \rho \sin t)^3} \cdot \frac{(\rho' \cos t - \rho \sin t)^3}{(\rho' \sin t + \rho \cos t)^3} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho' \sin t + \rho \cos t)^3},$

$$\rho' \sin t + \rho \cos t \neq 0.$$

7.7. În ce se transformă ecuația

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

dacă se face schimbarea de variabile independente

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{y} \\ v = \ln\dfrac{y}{x}, \quad xy > 0 \end{cases} ?$$

R. Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y};$$

dar

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{y}.$$

Deci,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{1}{y} - \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{x}{y^2} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{1}{y}.$$

Înlocuind în ecuația inițială, obținem $u\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$

7.8. Ce devine ecuația

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

după schimbarea de variabile independente

$$\begin{cases} x = u - v \\ y = e^{u+v} \end{cases}, \quad (u, v) \in \mathbf{R}^2 ?$$

R: Avem

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v};$$

deci $\dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + e^{u+v} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y}$; $\dfrac{\partial z}{\partial v} = -\dfrac{\partial z}{\partial x} + e^{u+v} \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Se impune condiţia

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & e^{u+v} \\ -1 & e^{u+v} \end{vmatrix} = 2e^{u+v} \neq 0, \quad \text{oricare ar fi } (u, v) \in \mathbf{R}^2.$$

Rezultă

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & e^{u+v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} & e^{u+v} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{\partial z}{\partial v}}{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ -1 & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{1}{2e^{u+v}} \left(\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \right).$$

Am obţinut operatorii:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2e^{u+v}} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Apoi:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} \right) \right] \right\} =$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \right).$$

Am obținut operatorul: $\dfrac{\partial}{\partial x^2} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial}{\partial u} - \dfrac{\partial}{\partial v}\right)^2;$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2e^{u+v}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2e^{u+v}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{2e^{u+v}}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{2e^{u+v}}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{4e^{2(u+v)}} = \left(-2\frac{\partial z}{\partial u} - 2\frac{\partial z}{\partial v} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right),$$

de unde $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{1}{4e^{2(u+v)}}\left[-2\dfrac{\partial}{\partial u} - 2\dfrac{\partial}{\partial v} + \left(\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}\right)^2\right];$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{2e^{u+v}}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{2e^{u+v}}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right)\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{2e^{u+v}} \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) + \frac{1}{2e^{u+v}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\right) + \frac{1}{2e^{u+v}}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2e^{u+v}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\right\} = \frac{1}{4e^{u+v}}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right),$$

de unde $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \dfrac{1}{4e^{u+v}}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial u^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial v^2}\right).$

Înlocuind în ecuația din enunț, obținem

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0,$$

adică $4\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 3\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0.$

7.9. Să se arate ce devine ecuația

$$b\frac{\partial z}{\partial x} + a\frac{\partial z}{\partial y} - xy + \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{2}{ba}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 1\right) = z$$

dacă u și v sînt noile variabile independente, iar w noua funcție, legate prin relațiile:

$$\begin{cases} u = ax + by \\ v = ax - by \\ w = z + xy. \end{cases}$$

R. Prima metodă. Diferențiind noua funcție w, obținem:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}du + \frac{\partial w}{\partial v}dv; \quad dw = dz + x\,dy + y\,dx.$$

Dar $du = a\,dx + b\,dy$, $dv = a\,dx - b\,dy$.

Obținem $\frac{\partial w}{\partial u}(adx + bdy) + \frac{\partial w}{\partial v}(adx - bdy) = dz + xdy + ydx$.

Deci, $dz = \left[a\left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right) - y\right]dx + \left[b\left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}\right) - x\right]dy$.

Folosindu-ne și de relația $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$, obținem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right) - y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = b\left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}\right) - x.$$

Se calculează derivatele de ordin doi ale lui z:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = a\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x}\right] = a\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cdot a + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}\cdot a + \frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\cdot a + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\cdot a\right) =$$

$$= a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = b^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = b\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial u}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right] - 1 = ab\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right) - 1.$$

Înlocuind derivatele de ordin întîi și doi ale lui z în ecuația inițială, iar pe x și y în funcție de u și v, obținem

$$2ab\frac{\partial w}{\partial u} + 4\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} - u = w.$$

A doua metodă. Pentru calculul lui $\frac{\partial z}{\partial x}$ și $\frac{\partial z}{\partial y}$ se derivează $w = z + xy$ în raport cu x și apoi cu y:

$$\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} + y, \quad \frac{\partial w}{\partial u}\cdot a + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot a = \frac{\partial z}{\partial x} + y,$$

de unde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = a\left(\frac{\partial w}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial v}\right) - y$$

și

$$\frac{\partial w}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} + x, \quad \frac{\partial w}{\partial u}\cdot b - \frac{\partial w}{\partial v}\cdot b = \frac{\partial z}{\partial y} + x,$$

de unde $\frac{\partial z}{\partial y} = b\left(\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{\partial w}{\partial v}\right) - x$. Restul calculelor, ca mai sus.

INTEGRALA RIEMANN. INTEGRALA STIELTJES

8.1. Pornind de la definiţia integralei Riemann, să se arate că funcţiile de mai jos sînt integrabile pe intervalul indicat şi să se determine valoarea integralei:

a) $f(x) = x^2,\qquad x \in [a, b]$;

b) $f(x) = \operatorname{tg} x,\qquad x \in [0, \pi/4]$;

c) $f(x) = \dfrac{\cos x}{1 + \sin^2 x},\qquad x \in [0, \pi/2]$.

R. a) Fie $d: a = x_0 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b$ o diviziune arbitrară a intervalului $[a, b]$ şi $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Suma Riemann a funcţiei f relativă la diviziunea d şi la punctele ξ_k este

$$\sigma_{d,\xi}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k^2(x_{k+1} - x_k).$$

Aplicînd funcţiei $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ teorema Lagrange pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$, rezultă că există $c_k \in (x_k, x_{k+1})$ astfel încît $\frac{1}{3}(x_{k+1}^3 - x_k^3) = c_k^2(x_{k+1} - x_k)$. Însumînd şi adunînd la $\sigma_{d,\xi}(f)$, obţinem

$$\sigma_{d,\xi}(f) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n-1}(x_{k+1}^3 - x_k^3) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k^2(x_{k+1} - x_k) + \sum_{k=0}^{n-1}\xi_k^2(x_{k+1} - x_k) =$$

$$= \frac{1}{3}(b^3 - a^3) + \sum_{k=0}^{n-1}(\xi_k^2 - c_k^2)(x_{k+1} - x_k).$$

Funcţia $f(x) = x^2$ este uniform continuă pe $[a, b]$, deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru $x', x'' \in [a, b]$ cu $|x' - x''| < \eta(\varepsilon)$ să avem $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Luînd $\|d\| < \eta(\varepsilon)$, rezultă $|\xi_k - c_k| \leqslant |x_{k+1} - x_k| \leqslant \|d\| \leqslant \eta(\varepsilon)$ şi, deci,

$$\left|\sigma_{d,\xi}(f) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}|f(\xi_k) - f(x_k)|(x_{k+1} - x_k) \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\cdot(b-a) = \varepsilon,$$

de unde

$$\sigma_{d,\xi}(f) \to \frac{1}{3}(b^3 - a^3) = \int_a^b x^2 dx \text{ dacă } \|d\| \to 0.$$

b) Procedînd în mod asemănător pentru funcţia $F(x) = \ln \cos x$ pentru diviziunea $d: 0 = x_0 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = \pi/4$ şi folosind uniform continuitatea funcţiei $f(x) = \operatorname{tg} x$ pe intervalul de definiţie, obţinem:

$$\sigma_{d,\xi}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = -\sum_{k=0}^{n-1} (\ln \cos x_{k+1} - \ln \cos x_k) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} (\operatorname{tg} \xi_k)(x_{k+1} - x_k) - \sum_{k=0}^{n-1} (\operatorname{tg} c_k)(x_{k+1} - x_k) =$$

$$= -\ln \cos \frac{\pi}{4} + \ln \cos 0 + \sum_{k=0}^{n-1} (\operatorname{tg} \xi_k - \operatorname{tg} c_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Obţinem $\left|\sigma_{d,\xi}(f) - \frac{1}{2}\ln 2\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\operatorname{tg} \xi_k - \operatorname{tg} c_k|(x_{k+1} - x_k).$

Dar pentru $\varepsilon > 0$, există $\eta(\varepsilon) > 0$, astfel ca pentru orice $x', x'' \in [0, \pi/4]$ cu $|x' - x''| < \eta(\varepsilon)$ să rezulte $|\operatorname{tg} x' - \operatorname{tg} x''| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, de unde obţinem $\left|\sigma_{d,\xi}(f) - \frac{1}{2}\ln 2\right| < \varepsilon$, alegînd $x' = \xi_k$, $x'' = c_k$ şi însumînd.

c) Se procedează asemănător, alegînd o diviziune arbitrară a intervalului $[0, \pi/2]$, folosind teorema creşterilor finite pentru funcţia $F(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$ pe fiecare subinterval $[x_k, x_{k+1}]$ şi uniform continuitatea funcţiei f pe intervalul $[0, \pi/2]$.

8.2. Se consideră şirul $(a_n)_n$ cu termenul general $a_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$. Să se arate că este convergent şi să i se calculeze limita. Calculînd efectiv integrala, să se demonstreze că

$$1 - 1/2 + 1/3 - \ldots + (-1)^{n-1} 1/n + \ldots = \ln 2.$$

R: Avem

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x} dx \leqslant 0,$$

deci şirul este descrescător. Cum el este şi cu termeni pozitivi, rezultă că şirul $(a_n)_n$ este convergent.

Există deci $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ şi $l \in [0, a_0]$, $a_0 = \ln 2$.

Deoarece

$$a_{n+1} + a_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1},$$

rezultă prin trecere la limită, $l + l = 0$, deci $l = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
Pentru calculul integralei ne folosim de identitatea

$$\frac{x^n}{1+x} = x^{n-1} - x^{n-2} + \ldots + (-1)^{n-2} x + (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^n}{1+x}$$

de unde prin integrare pe intervalul $[0, 1]$, obţinem:

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{2} + \frac{(-1)^{n-1}}{1} + (-1)^n \ln 2.$$

Deoarece $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^{n-1} a_n = 0$ şi, deci, deducem că şirul cu termenul general

$$1 - \frac{1}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$$

este convergent şi are limita $\ln 2$, rezultat echivalent cu cel din enunţ.

8.3. Se consideră integrala $I_n = \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^n x \mathrm{d}x$, $n \in N$.

a) Să se găsească o relaţie de recurenţă a numerelor I_{2n}.
b) Folosind rezultatul precedent să se calculeze I_{2n}.
c) Să se arate că

$$1 + 1/2^2 + 1/3^2 + \ldots + 1/n^2 + \ldots = \pi^2/6$$

R. a) Integrăm prin părţi în integrala $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \mathrm{d}x$ şi avem

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \mathrm{d}x = x \cos^{2n} x \Big|_0^{\pi/2} + 2n \int_0^{\pi/2} x \cos^{2n-1} x \sin x \mathrm{d}x =$$

$$= n \int_0^{\pi/2} 2x \cos^{2n-1} x \sin x \mathrm{d}x = n x^2 \cos^{2n-1} x \sin x \Big|_0^{\pi/2} - n \int_0^{\pi/2} x^2 (\cos^{2n-1} x \sin x)' \mathrm{d}x =$$

$$= n(2n-1) \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n-2} x \mathrm{d}x - 2n^2 \int_0^{\pi/2} x^2 \cos^{2n} x \mathrm{d}x =$$

$$= n(2n-1) I_{2n-2} - 2n^2 I_{2n}.$$

Însă (conform cu ex. 8.22.c)

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x = \frac{1}{2}\,\beta\left(1/2,\ n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\Gamma(1/2)\cdot\Gamma(n+1)(n+1/2) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\cdot(2n-1)!!\cdot\sqrt{\pi}}{2^n\cdot n!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Rezultă următoarea relație de recurență

$$2n^2 I_{2n} - n(2n-1)I_{2n-2} = -\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

b) Rezultatul precedent se mai scrie

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n} - \frac{(2n-2)!!}{(2n-3)!!}I_{2n-2} = -\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{n^2}$$

Dînd valorile $n = 1, 2, \ldots, n$ și adunînd, obținem

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n} - I_0 = -\frac{\pi}{4}(1 + 1/2^2 + \ldots + 1/n^2).$$

Dar $I_0 = \int_0^{\pi/2} x^2 \mathrm{d}x = \pi^3/24$ de unde obținem

$$I_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left[\pi^3/24 - \frac{\pi}{4}(1 + 1/2^2 + \ldots + 1/n^2)\right]$$

c) Din rezultatul de la punctul precedent, avem:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n} = \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4}(1 + 1/2^2 + \ldots + 1/n^2)$$

și rezultă că este suficient să arătăm că

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}I_{2n} = 0$$

Folosim majorarea, $x^2 \leqslant \frac{\pi^2}{4}\sin^2 x$, $x \in [0, \pi/2]$, inegalitate care se poate demonstra ușor.

Avem (ex. 8.22.c)

$$I_{2n} = \int_0^{\pi/2} x^2\cos^{2n} x\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi/2}\frac{\pi^2}{4}\sin^2 x\cos^{2n} x\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\cdot\cos^{2n} x\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}\cdot\frac{1}{2}\,\beta\left(\frac{3}{2},\ \frac{2n+1}{2}\right) = \frac{\pi^3}{8}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\cdot$$

Rezultă

$$0 < \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cdot I_{2n} < \frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{1}{2n+2}$$

de unde obținem $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} I_{2n} = 0$ și apoi rezultatul cerut.

8.4. Fie $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcție integrabilă Riemann care satisface condiția

$$f(a - x) + f(a + x) = 2b, \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}, \ a \text{ și } b \in \mathbf{R}.$$

Să se arate că

$$\int_{a-c}^{a+c} f(x)\,\mathrm{d}x = 2bc \text{ pentru orice } c \in \mathbf{R}.$$

R. Avem $\int\limits_{a-c}^{a+c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a-c}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a}^{a+c} f(x)\,\mathrm{d}x.$

Pentru prima integrală facem schimbarea de variabilă $x = a - t$ iar pentru cea de a doua $x = a + t$. Obținem

$$\int_{a-c}^{a+c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_c^0 f(a-t)(-\mathrm{d}t) + \int_0^c f(a+t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^c (f(a-t) + f(a+t))\,\mathrm{d}t = \int_0^c 2b\,\mathrm{d}t = 2bc.$$

8.5. Fie $f: [a, b] \to [\alpha, \beta]$, derivabilă cu $f'(x) \neq 0$, $x \in [a, b]$ și $f(a) = \alpha$ și $f(b) = \beta$. Să se arate că f este inversabilă și să se demonstreze relația:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = b\beta - a\alpha,$$

unde $f^{-1}: [\alpha, \beta] \to [a, b]$ este funcția inversă.

R. Deoarece $f'(x) \neq 0$ rezultă f injectivă. Fie $y \in [\alpha, \beta]$.

Funcția $h: [a, b] \to \mathbf{R}$, $h(x) = f(x) - y$ este continuă și $h(a) = f(a) - y = \alpha - y \leqslant 0$, $h(b) = f(b) - y = \beta - y \geqslant 0$, deci există $x \in [a, b]$ astfel încît $h(x) = 0$ sau $f(x) = y$, adică f este surjectivă. În integrala $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ facem schimbarea de variabilă $f(x) = y$, pentru $x = a$, $y = f(a) = \alpha$ și pentru $x = b$, $y = f(b) = \beta$. Avem $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_\alpha^\beta y(f^{-1})'(y)\,\mathrm{d}y.$

Integrala în raport cu y o efectuăm prin părţi şi obţinem

$$\int_a^b f(x)\,dx = yf^{-1}(y)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f^{-1}(y)\,dy.$$

Ţinînd seama de faptul că $f^{-1}(\beta) = b$ şi $f^{-1}(\alpha) = a$, relaţia obţinută este echivalentă cu cea din enunţ.

8.6. Dacă $f\colon [a, b] \to \mathbf{R}$ este o funcţie continuă şi $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$, să se arate că există $n + 1$ puncte $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n \in [a, b]$, astfel încît $f(\xi_0) = \dfrac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \ldots + f(\xi_n)}{n}$.

Dacă în plus $f(x) > 0$, $x \in [a, b]$ să se arate că există o proprietate asemănătoare şi pentru media geometrică.

R. Funcţia f fiind continuă este integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Folosind o diviziune echidistantă a intervalului $[a, b]$, realizată de punctele $x_k = a + \dfrac{b-a}{n}k$, $k = 0, \ldots, n$, avem:

$$(1)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx.$$

Pentru fiecare din integralele scrise aplicăm proprietatea de medie. Există punctele $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, $\xi_0 \in [a, b]$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, \ldots, n$, astfel încît

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi_0) \quad \text{şi} \quad \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\,dx = (x_k - x_{k-1})f(\xi_k).$$

Introducînd aceste evaluări în relaţia (1) şi ţinînd seama că $x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$, $k = 1, \ldots, n$, după simplificare cu $b - a$, obţinem relaţia din enunţ. Dacă $f(x) > 0$, $x \in [a, b]$, folosim proprietatea deja demonstrată pentru funcţia $g(x) = \ln f(x)$ (g este şi ea continuă), Relaţia: $g(\xi_0) = \dfrac{g(\xi_1) + \ldots + g(\xi_n)}{n}$, devine $f(\xi_0) = \sqrt[n]{f(\xi_1)f(\xi_2)\ldots f(\xi_n)}$.

8.7. Să se determine funcţia $f\colon (0, \infty) \to \mathbf{R}$ derivabilă ştiind că

$$\int_0^x f(t)\,dt = 2xf(x), \text{ oricare ar fi } x \in (0, \infty).$$

R. Funcţia f fiind derivabilă, este continuă şi, deci, integrala din membrul stîng reprezintă o funcţie derivabilă F cu $F'(x) = f(x)$. Derivînd relaţia din enunţ, obţinem

$$f(x) = 2f(x) + 2xf'(x)$$

adică $2xf'(x) = -f(x)$, $x \in (0, \infty)$.

Pentru $x \in (0, \infty)$, avem $\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1}{2x}$, adică

$$(\ln f(x))' = -\frac{1}{2x} \quad \text{deci} \quad \ln f(x) = -\frac{1}{2}\ln x + \ln c.$$

Rezultă $f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}$, $c \in \mathbf{R}$, $c \neq 0$, arbitrar.

8.8. Să se calculeze cu 3 zecimale exacte integralele:

a) $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$; b) $\int\limits_0^1 x^x\mathrm{d}x$; c) $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 x}}$.

R. a) Avem $e^{-x^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$, serie care este uniform convergentă pe $[0, 1]$ și, deci, putem integra termen cu termen.

$$I = \int\limits_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}\Big|_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)}.$$

Am obținut valoarea integralei ca sumă a seriei alternate cu termenul general $u_n = \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$.

Alegem n astfel ca $|u_{n+1}| < 1/10^3$, adică

$$\frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < 1/10^3 \text{ deci, } n \geqslant 4.$$

Obținem:

$$I \approx 1 - \frac{1}{1!3} + \frac{1}{2!5} - \frac{1}{3!7} + \frac{1}{4!9} =$$
$$= 1 - 0{,}3333 + 0{,}1 - 0{,}0238 + 0{,}0046 = 0{,}7475.$$

b) Integrandul se mai scrie

$$x^x = e^{x\ln x} = \sum_{k=0} (x\ln x)^k/k!.$$

Seria fiind uniform convergentă pe $[0, 1]$, putem integra termen cu termen, obținem:

$$I = \int\limits_0^1 x^x\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\int\limits_0^1 (x\ln x)^k\mathrm{d}x.$$

Dacă notăm $I_{k,n} = \int_0^1 x^k \ln^n x dx$ şi o calculăm prin părţi, obţinem relaţia de recurenţă

$$I_{k,n} = -\frac{n}{k+1} I_{k,n-1}, \quad n \geqslant 1,$$

de unde deducem $I_{k,n} = (-1)^n \dfrac{n!}{(k+1)} \cdot I_{k,0}$.

Dar $I_{k,0} = \int_0^1 x^k dx = \dfrac{1}{k+1}$.

Deci $I_{k,n} = (-1)^n \cdot \dfrac{n!}{(k+1)^{n+1}}$.

Făcînd $k = n$, obţinem $I = \int_0^1 x^x dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot 1/(k+1)^{k+1}$.

Rezultă condiţia $|u_{n+1}| < 1/10^3$ pentru a fi suficient să însumăm n termeni. Rezultă $1/(n+1)^{n+1} \leqslant 1/10^3$, adică $n = 4$.

Obţinem $I = \int_0^1 x^x dx \approx 1 - 1/2^2 + 1/3^3 - 1/4^4 = 0{,}779$.

c) Dezvoltăm în serie

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}} = \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 x\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2^2}\sin^2 x + \ldots +$$

$$+ \frac{(2n-1)!!}{2^{2n} \cdot n!}\sin^{2n} x + \ldots$$

Seria obţinută este uniform convergentă pe $[0, \pi/2]$ deci

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 x}} dx = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2^2}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx + \ldots +$$

$$+ \frac{(2n-1)!!}{2^{3n} \cdot n!}\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx + \ldots$$

Dar $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x dx = \dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}$, deci,

$$I = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{1}{2^3} + \ldots + \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \cdot \frac{1}{2^n} + \ldots\right].$$

Notînd u_n termenul general al seriei din partea dreaptă, avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot 2^n=\frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2<\frac{1}{2}.$$

Restul seriei de ordin n este:

$$R_n=u_{n+1}+u_{n+2}+\ldots<u_n(1/2+1/2^2+1/2^3+\ldots)=u_n.$$

Precizia cerută va fi realizată dacă $u_n<\frac{1}{10^3}$, adică

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\cdot 2^n>10^3.\ \text{Rezultă } n=6.$$

8.9. Să se arate că integrala

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx$$

este convergentă și să i se calculeze valoarea.

R. Vom studia convergența integralelor

$$I_1=\int_{-1}^{0-0}\frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx,\quad I_2=\int_{0+0}^{1}\frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Pentru I_1, funcția de sub semnul integral păstrînd semn constant pe $[-1, 0)$, calculăm $\lim\limits_{x\nearrow 0}(0-x)^\alpha\frac{\ln(2+\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}$, care, pentru $\alpha=1/3<1$, este finită $(-\ln 2)$; rezultă I_1 convergentă. Analog, obținem și convergența lui I_2, deci convergența lui I. Pentru calculul lui I_1, considerăm φ_1: $[-1, 0)\to$ $\to[-1, 0)$, $\varphi_1(x)=\sqrt[3]{x}$ strict monotonă, $\varphi_1^{-1}(y)=y^3$, $(\varphi_1^{-1})'(y)=3y^2$. Avem

$$I_1=\int_{-1}^{0-0}\frac{\ln(2+\varphi_1(x))}{\varphi_1(x)}\,dx=\int_{\varphi_1(-1)}^{0-0}\frac{\ln(2+y)}{y}\cdot 3y^2dy=3\int_{-1}^{0-0}y\ln(2+y)\,dy.$$

Verificîndu-se condițiile din teorema de integrare prin părți, rezultă

$$I_1=3\int_{-1}^{0-0}\left(\frac{y^2}{2}\right)'\ln(2+y)\,dy=$$

$$=3\lim_{y\nearrow 0}\frac{y^2}{2}\ln(2+y)-\frac{1}{2}\ln 1-\int_{-1}^{0-0}\frac{y^2}{2(y+2)}dy\Bigg]=$$

$$=-6\ln 2+15/4.$$

Analog, rezultă

$$I_2 = 3\int_{0+0}^{1} y \ln (y+2)\, dy =$$

$$= 3\left[\frac{y^2}{2}\ln(2+y)\Big|_{y=1} - \lim_{y\searrow 0}\frac{y^2}{2}\ln(2+y) - \int_{0+0}^{1}\frac{y^2}{2(y+2)}\,dy\right] =$$

$$= -\frac{9}{2}\ln 3 + \frac{9}{4} + 6\ln 2.$$

Deci, $I = I_1 + I_2 = -\frac{9}{2}\ln 3 + 6.$

8.10. Să se arate convergența și să se calculeze:

$$I = \int_0^2 \frac{\ln x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

R. Deoarece $\lim\limits_{x\searrow 0}\ln x = -\infty$ și numitorul se anulează pentru $x = 2$, vom studia natura integralelor

$$I_1 = \int_{0+0}^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx,\quad I_2 = \int_{1}^{2-0}\frac{\ln x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

Notăm $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{4-x^2}}$ și scriem $f(x) = g(x)\cdot h(x)$, unde $g(x) = \frac{\ln x}{x^{1/3}}$, $h(x) = \frac{x^{1/3}}{\sqrt{4-x^2}}$.

Avem $\lim\limits_{x\searrow 0} x^{\alpha}\left|\frac{\ln x}{x^{1/3}}\right| = -\lim\limits_{x\nearrow 0} x\cdot\frac{\ln x}{x^{1/3}}$. Pentru $\alpha = \frac{2}{3} < 1$, ultima limită este

$$-\lim_{x\searrow 0} x^{2/3}\frac{\ln x}{x^{1/3}} = -\lim_{x\searrow 0}\frac{\ln x}{x^{-1/3}} = -\lim_{x\searrow 0}\frac{1/x}{-\frac{1}{3}x^{-4/3}} = 0;$$

deci, integrala $\int_{0+0}^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ este absolut convergentă. Din $\lim\limits_{x\searrow 0} h(x) = 0$, rezultă că h mărginită pe o mulțime $V(0)\cap[0, 1]$, unde $V(0)$ este o vecinătate a lui 0. Deoarece $\int_{0+0}^{1} g(x)\,dx$ este absolut convergentă, iar $f/g = h$

este mărginită pe $V(0) \cap [0, 1]$, știm că rezultă convergența absolută a integralei $\int\limits_{0+0}^{1} f(x)\, dx$. Pentru integrala I_2, avem

$$\lim_{x \nearrow 2} (2 - x)^{1/2} \left| \frac{\ln x}{(2-x)^{1/2}(2+x)^{1/2}} \right| = \lim_{x \nearrow 2} (2-x)^{1/2} \frac{\ln x}{(2-x)^{1/2}(2+x)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\ln 2}{2} = \ln \sqrt{2} = \text{finit},$$

de unde rezultă absolut convergența integralei I_2. Deci, $I = I_1 + I_2$ este absolut convergentă.

Calculăm integrala I cu schimbarea de variabilă

$$x = 2 \sin t, \quad [0, 2) \to [0, \pi/2); \quad dx = 2 \cos t\, dt$$

și avem

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} (\ln (2 \sin t)\, dt = \int\limits_0^{\pi/2} (\ln 2 + \ln \sin t)\, dt.$$

Integrăm:

$$\frac{\pi}{2} \ln 2 + \int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin t\, dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int\limits_0^{\pi/4} \ln \sin 2u\, du =$$

$$= \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int\limits_0^{\pi/4} (\ln 2 + \ln \sin u + \ln \cos u)\, du =$$

$$= \pi \ln 2 + 2\left(\int\limits_0^{\pi/4} \ln \sin u\, du + \int\limits_0^{\pi/4} \ln \sin (\pi/2 - u)\, du \right) =$$

$$= \pi \ln 2 + 2\left(\int\limits_0^{\pi/4} \ln \sin u\, du - \int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \ln \sin v\, dv \right) =$$

$$= \pi \ln 2 + 2\left(\int\limits_0^{\pi/4} \ln \sin u\, du + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin v\, dv \right) = \ln 2 + 2 \cdot \int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin t\, dt;$$

din primul și ultimul membru, rezultă $\int\limits_0^{\pi/2} \ln \sin t\, dt = -\frac{\pi}{2} \ln 2$. Deci, $I = 0$.

8.11. Să se discute convergența integralei

$$\int_{a>0}^{\infty}\left(\alpha^{1/x}\cdot\frac{x^\beta+x-1}{x^\beta}\right)^{x^2+x}dx,$$

unde α și β parametri cu $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$.

R: Aplicăm criteriul rădăcinii; obținem

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(\alpha^{1/x}\cdot\frac{x^\beta+x-1}{x^\beta}\right)^{x^2+x}\right]^{1/x} = \lim_{x\to\infty}\alpha^{\frac{x+1}{x}}\cdot\left(\frac{x^\beta+x-1}{x^\beta}\right)^{x+1}.$$

Pentru $\beta < 0$, avem

$$\alpha\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^\beta+x-1}{x^\beta}\right)^{x+1} = \alpha\lim_{x\to\infty}(1+x^{-\beta}(x-1))^{x+1} = \infty.$$

Dacă $\beta = 0$, obținem $\alpha\lim\limits_{x\to\infty}x^{x+1} = \infty$.

Dacă $0 < \beta < 1$, rezultă $\alpha\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-1}{x^\beta}\right)^{x+1} = \infty$.

Dacă $\beta = 1$, rezultă

$$\alpha\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{x+1} = \alpha\lim_{x\to\infty}2^{x+1}\left[\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{-2x}\right]^{\frac{x+1}{-2x}} = \infty.$$

Pentru $\beta > 1$, obținem

$$\alpha\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{x-1}{x^\beta}\right)^{\frac{x^\beta}{x+1}}\right]^{\frac{x-1}{x^\beta}(x+1)} = \alpha e^{\lim\frac{x^2-1}{x^\beta}} = \begin{cases}\infty, & 1<\beta<2\\ \alpha e, & \beta=2\\ \alpha, & \beta>2.\end{cases}$$

În cazul $\beta = 2$, dacă $\alpha < 1/e$, integrala este convergentă, dacă $\alpha > 1/e$ integrala este divergentă, iar dacă $\alpha = 1/e$, avem

$$\int_0^\infty\left(e^{-1/x}\cdot\frac{x^2+x-1}{x^2}\right)^{x^2+x}dx.$$

Deoarece

$$\lim_{x\to\infty}e^{-\frac{x^2+x}{x}}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2}\right)^{x^2+x} = \frac{1}{e}\lim_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{x-1}{x^2}\right)^{x^2+x} =$$

$$= \frac{1}{e}\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{x-1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}\right]^{(x^2+x)\cdot\frac{x-1}{x^2}}}{e^x} = \frac{1}{e}\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{x-1}{x^2}\right)^{\frac{x^2}{x-1}}\right]^{\frac{x^2-1}{x}}}{e^x} = 1/e,$$

ultima integrală este divergentă.

În cazul $\beta > 2$, dacă $0 < \alpha < 1$, integrala este convergentă, dacă $\alpha > 1$, integrala este divergentă, iar dacă $\alpha = 1$, avem

$$\int_0^\infty \left(\frac{x^\beta + x - 1}{x^\beta}\right)^{x^2+x} dx.$$

Deoarece

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^\beta + x - 1}{x^\beta}\right)^{x^2+x} = \lim_{x\to\infty} \left[\left(1 + \frac{x-1}{x^\beta}\right)^{\frac{x^\beta}{x-1}}\right]^{\frac{x-1}{x^\beta}(x^2+x)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{(x-1)(x^2+x)}{x^\beta}} = \begin{cases} \infty, & 2 < \beta < 3 \\ e, & \beta = 3 \\ 1, & \beta > 3, \end{cases}$$

integrala ultimă este divergentă.

Deci, integrala este convergentă pentru $(\alpha, \beta) \in (0, 1/e) \times \{2\} \cup (0, 1) \times (2, \infty)$ și divergentă pentru $(\alpha, \beta) \in (0, \infty) \times (-\infty, 2) \cup [1/e, \infty) \times \{2\} \cup [1, +\infty) \times (2, \infty)$.

Observație. În cele de mai sus, pentru divergență, ne-am folosit de faptul că dacă $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ există și este nenulă, atunci integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ nu este convergentă. Spre deosebire de seriile numerice, din convergența integralei $\int_a^\infty f(x)\,dx$ nu rezultă că $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ există și este nulă (dacă însă funcția f este uniform continuă pe $[a, \infty)$ atunci, analog cu seriile numerice, există $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ și este nulă cînd integrala $\int_a^\infty f(x)\,dx$ este convergentă).

8.12. Să se discute convergența integralei

$$\int_0^\infty x^2 e^{-x^\alpha} dx, \quad \alpha \text{ parametru real.}$$

R: Criteriul logaritmic ne dă:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{x^2 e^{-x^\alpha}}}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln e^{x^\alpha} - \ln x^2}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\ln x} - 2 = \begin{cases} -2, & \alpha \leqslant 0 \\ \infty, & \alpha > 0. \end{cases}$$

Deci, pentru $\alpha \leqslant 0$ integrala este divergentă, iar pentru $\alpha > 0$ este convergentă.

8.13. Să se discute convergența integralei

$$\int_{b>0}^{\infty} \frac{[x]!}{a(a+1)(a+2)\dots(a+[x])\cdot x^{\alpha}}\,dx,$$

unde a este o constantă > 0, iar α parametru real.

R: Pentru a folosi criteriul lui d'Alembert, arătăm că funcția $f:[b,\infty)\to\mathbf{R}_+$,

$$f(x) = \frac{[x]!}{a(a+1)\dots(a+[x])\cdot x^{\alpha}}$$

este integrabilă pe orice compact din $[b,\infty)$.

Luăm $\varphi,\psi:[b,\infty)\to\mathbf{R}$, $\varphi(x) = \dfrac{[x]!}{a(a+1)\dots(a+[x])}$, $\psi(x) = \dfrac{1}{x^{\alpha}}$.

Deoarece φ este constantă pe $[b,[b]+1)$ și pe orice interval $[k,k+1)\subset \subset [b,\infty)$, k întreg $\geqslant [b]+1$, rezultă că φ este integrabilă pe orice interval compact inclus în $[b,\infty)$, ca și ψ, care este continuă; deci, $f=\varphi\psi$ satisface condiția. Avem

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{([x]+1)!}{a(a+1)\dots(a+[x])(a+[x]+1)(x+1)^{\alpha}}\cdot\frac{a(a+1)\dots(a+[x])x^{\alpha}}{[x]!} =$$

$$= \frac{[x]+1}{a+[x]+1}\cdot\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\alpha}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1,$$

de unde rezultă că acest criteriu nu este concludent. Vom folosi criteriul lui Gauss:

$$\frac{f(x)}{f(x+1)} = \frac{[x]+1+a}{[x]+1}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha} = \left(1+\frac{a}{[x]+1}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\alpha}.$$

Fie $y = 1/x$ și $g(y) = (1+y)^{\alpha}$. Folosind formula lui Taylor în jurul originii, cu restul lui Lagrange, obținem:

$$g(y) = 1 + \frac{\alpha}{1!}y + \frac{y^2}{2!}g''(\xi),\ \ \xi = \delta y \in (0,y),\ \ 0<\delta<1.$$

Dar $g''(y) = \alpha(\alpha-1)(1+y)^{\alpha-2}$, de unde

$$g(y) = 1 + \alpha y + \frac{y^2}{2}\alpha(\alpha-1)(1+\delta y)^{\alpha-2}$$

și

$$g\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2x^2}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\alpha-2}.$$

Rezultă

$$\frac{f(x)}{f(x+1)} = \left(1 + \frac{a}{[x]+1}\right)\left[1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2x^2}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\alpha-2}\right] =$$

$$= 1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2x^2}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\alpha-2} + \frac{a}{[x]+1} + \frac{\alpha a}{x([x]+1)} +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)a}{2x^2([x]+1)}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\alpha-2} > 1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2x^2}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\alpha-2} +$$

$$+ \frac{a}{x+1} + \frac{\alpha a}{x(x+1)} + \frac{\alpha(\alpha-1)a}{2x^2(x+1)}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\alpha-2} >$$

$$> 1 + \frac{\alpha+a}{x+1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2(x+1)^2}\left(1+\frac{\delta}{x+1}\right)^{\alpha-2} + \frac{\alpha a}{(x+1)^2} +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)a}{2(x+1)^3}\left(1+\frac{\delta}{x+1}\right)^{\alpha-2} = 1 + \frac{\alpha+a}{x+1} +$$

$$+ \frac{1}{(x+1)^2}\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(1+\frac{\delta}{x+1}\right)^{\alpha-2} + \alpha a + \frac{\alpha(\alpha-1)a}{2(x+1)}\left(1+\frac{\delta}{x+1}\right)^{\alpha-2}\right],$$

unde, notînd cu $\theta_1(x)$ ultima paranteză dreaptă, observăm că $\theta_1(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \alpha a$, o constantă, deci θ este mărginită.

Conform criteriului lui Gauss, pentru $\alpha + a > 1$, $\alpha > 1 - a$, integrala este convergentă. Analog,

$$\frac{f(x)}{f(x+1)} < 1 + \frac{\alpha+a}{x} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2x^2}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\alpha-2} + \frac{\alpha a}{x^2} +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)}{2x^3}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\alpha-2} = 1 + \frac{\alpha+a}{x} + \frac{1}{x^2}\left[\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\alpha-2} +\right.$$

$$\left. + \alpha a + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2x}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)^{\alpha-2}\right].$$

unde, notînd cu $\theta_2(x)$ ultima paranteză dreaptă, observăm că $\theta_2(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} + \alpha a$, θ_2 fiind astfel mărginită. Integrala va fi, deci, divergentă pentru $\alpha + a \leqslant 1$, $\alpha \leqslant 1 - a$.

8.14. Să se arate că integrala

$$I_n = \int_0^\infty e^{ax} \sin^n x dx,$$

unde $n \in \mathbf{N}$, iar a este o constantă reală negativă, este convergentă şi să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} I_n.$$

R: Deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{ax} = 0$, $a < 0$, rezultă convergența integralei $\int\limits_0^\infty e^{ax}dx$; dar $|e^{ax}\sin^n x| \leqslant e^{ax}$. Deci, integrala din enunț este convergentă fiind absolut convergentă.

Căutăm o relație de recurență pentru calculul primitivelor

$$F_n(x) = \int e^{ax}\sin^n x dx,\ n \in \mathbf{N}.$$

Avem

$$F_n(x) = \int e^{ax}\sin^{n-2}x(1-\cos^2 x)\,dx =$$

$$= F_{n-2}(x) - \int e^{ax}\sin^{n-2}x\cos x\,d(\sin x) =$$

$$= F_{n-2}(x) - e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x + a\int e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x\,dx +$$

$$+ (n-2)\int e^{ax}\sin^{n-2}x\cos^2 x dx - \int e^{ax}\sin^n x dx;$$

dar

$$J_{n-1}(x) = \int e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x dx = \int e^{ax}\sin^{n-1}x d(\sin x) =$$

$$= e^{ax}\sin^n x - aF_n(x) - (n-1)J_{n-1}(x),$$

de unde $J_{n-1}(x) = \frac{1}{n}e^{ax}\sin^n x - \frac{a}{n}F_n(x)$, $n \in \mathbf{N}^*$; deci,

$$F_n(x) = F_{n-2}(x) - e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{a}{n}e^{ax}\sin^n x - \frac{a^2}{n}F_n(x) +$$

$$+ (n-2)F_{n-2}(x) - (n-1)F_n(x),$$

de unde

$$F_n(x) = \frac{a}{n^2+a^2}e^{ax}\sin^n x - \frac{n}{n^2+a^2}e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x +$$

$$+ \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\cdot F_{n-2}(x),\ \text{oricare ar fi } n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 2.$$

Dintre primitivele $\int e^{ax}dx$, respectiv $\int e^{ax}\sin x dx$, alegem

$$F_0(x) = \frac{1}{a}e^{ax},$$

respectiv

$$F_1(x) = \frac{a}{1+a^2}e^{ax}\sin x - \frac{1}{1+a^2}e^{ax}\cos x.$$

Notînd $I_n(r) = \int\limits_0^r e^{ax}\sin x dx$, $n \in \mathbf{N}$, avem

$$I_n = \lim_{r\to\infty} I_n(r) = \lim_{r\to\infty}(F_n(r) - F_n(0)) =$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left[\frac{a}{n^2+a^2}e^{ar}\cdot\sin^n r - \frac{n}{n^2+a^2}\cdot e^{ar}\cdot\sin^{n-1} r\cdot\cos r +\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\cdot I_{n-2}(r)\right] = \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\cdot\lim_{r\to\infty} I_{n-2}(r),$$

oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$; deoarece

$$I_0(r) = \frac{1}{a}(e^{ar} - 1),$$

$$I_1(r) = \frac{a}{1+a^2}e^{ar}\cdot\sin r - \frac{1}{1+a^2}\cdot e^{ar}\cos r + \frac{1}{1+a^2},$$

avem $I_0 = \lim\limits_{r\to\infty} I_0(r) = 0$, $I_1 = \lim\limits_{r\to\infty} I_1(r) = \frac{1}{1+a^2}$.

Pentru $n = 2m$, obținem

$$I_{2m} = \frac{2m(2m-1)}{(2m)^2+a^2}\cdot\frac{(2m-2)(2m-3)}{(2m-2)+a^2}\cdots\frac{2\cdot 1}{2^2+a^2}\cdot\lim_{r\to\infty} I_0(r) =$$

$$= \frac{(2m)!}{[(2m)^2+a^2][(2m-2)^2+a^2]\dots[2^2+a^2]}\cdot\left(-\frac{1}{a}\right).$$

Folosind formula lui Wallis,

$$\lim_{m\to\infty}\left[\frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2m+1} = \pi/2,$$

avem

$$0 \leqslant \frac{(2m)!}{[(2m)^2+a^2][(2m-2)^2+a^2]\dots[2^2+a^2]} < \frac{(2m)!}{[(2m)!!]^2} =$$

$$= \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\sqrt{2m+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\xrightarrow[m\to\infty]{}\sqrt{2/\pi}\cdot 0 = 0,$$

de unde $\lim\limits_{m\to\infty} I_{2m} = 0$.

Pentru $n = 2m+1$, obținem

$$I_{2m+1} = \frac{(2m+1)!}{[(2m+1)^2+a^2][(2m-1)^2+a^2]\dots[3^2+a^2]}\cdot\lim_{r\to\infty} I_1(r);$$

deci

$$0 < I_{2m+1} < \frac{(2m+1)!}{[(2m+1)!!]^2}\cdot\frac{1}{1+a^2} =$$

$$= \frac{(2m)!!}{(2m-1)!!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2m+1}}\cdot\frac{1}{1+a^2}\xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

Deci, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

8.15. Fie funcţia $f\colon [0, 1] \times (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = \dfrac{x}{y\left(1 + \dfrac{x^2}{y^2}\right)}$. Să se arate că

$$\lim_{y\to 0} \int_0^1 f(x, y)\, dx = \int_0^1 \lim_{y\to 0} f(x, y)\, dx.$$

R: Avem

$$\int_0^1 \frac{x}{y\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right)}\, dx = \frac{y}{2}\int_0^1 \frac{2x/y^2}{1+\dfrac{x^2}{y^2}}\, dx = \frac{y}{2}\ln\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1} = \frac{y}{2}\ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right).$$

Obţinem $\lim_{y\to 0}\int_0^1 f(x, y)\, dx = \lim_{y\to 0}\frac{y}{2}\ln\left(1+\frac{1}{y^2}\right)$. Ultimei limite îi putem aplica regula lui l'Hospital şi rezultă

$$\frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{y^2}\right)}{1/y} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{1+y^2} = 0.$$

Apoi, $\lim_{y\to 0}\dfrac{x}{y\left(1+\dfrac{x^2}{y^2}\right)} = x\lim_{y\to 0}\dfrac{1/y}{1+\dfrac{x^2}{y^2}} = x\lim_{y\to 0}\dfrac{y}{2x^2} = 0$ pentru orice $x \in (0, 1]$, iar pentru $x = 0$, avem, evident, $\lim_{y\to 0} f(0, y) = 0$. Obţinem

$$\int_0^1 \lim_{y\to 0} f(x, y)\, dx = 0.$$

Observaţie. Egalitatea din enunţ este adevărată deşi nu este îndeplinită condiţia din teorema de trecere la limită sub integrală şi anume, funcţia $f\colon [0, 1] \times (0, \infty)$ să aibă limita uniformă în punctul $y_0 = 0$. Presupunem că limita este uniformă. Atunci, pentru $\varepsilon = 1/4$, există $\delta_{1/4} > 0$ astfel încît $|f(x, y)| < 1/4$, pentru orice $x \in [0, 1]$ şi orice $y \in (0, \delta_{1/4})$ ceea ce este în contradicţie cu

$$\left|f\left(\frac{1}{2}\delta_{1/4}, \frac{1}{2}\delta_{1/4}\right)\right| = 1/2.$$

Deci, condiţia de limită uniformă din ipoteză este suficientă nu şi necesară.

8.16. Să se calculeze derivata funcţiei

$$F\colon (0, \infty) \to \mathbf{R},\ F(t) = \int_{3t}^{t^2}\left(\int_1^{xt} e^{xyt}\,dy\right) dx,\ (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty).$$

R: Considerăm funcțiile:

$$f_1: (0, \infty) \times \mathbf{R} \times (0, \infty) \to \mathbf{R}, \ f_1(x, y, t) = e^{xyt} \text{ și}$$

$$F_1: (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbf{R}, \ F_1(x, t) = \int_1^{xt} f_1(x, y, t)\, dy.$$

Funcția f_1 are derivate parțiale în raport cu x și t continue pe $(0, \infty) \times (0, \infty)$ în raport cu x, t. Deci, F_1 are derivate parțiale continue pe $(0, \infty) \times (0, \infty)$ și, mai departe, avînd și $\alpha(t) = 3t$, $\beta(t) = t^2$ de clasă C^1 pe $(0, \infty)$, rezultă că funcția F cu $F(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} F_1(x, t)\, dx$ este de clasă C^1 pe $(0, \infty)$. Atunci, putem aplica formula lui Leibniz:

$$F'(t) = \int_{3t}^{t^2} \frac{\partial F_1}{\partial t} dx + 2t \cdot F_1(t^2, t) - 3F_1(3t, t).$$

Dar

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \int_1^{xt} \frac{\partial f_1}{\partial t} dy + \frac{\partial}{\partial t}(xt) \cdot f_1(x, xt, t) =$$

$$= \int_1^{xt} xye^{xyt} dy + xe^{x^2t^2} = 2xe^{x^2t^2} - \frac{e^{x^2t^2}}{xt^2} - \frac{e^{xt}}{t} + \frac{e^{xt}}{xt^2}.$$

Prin urmare,

$$F'(t) = \int_{3t}^{t^2} \left(2xe^{x^2t^2} - \frac{e^{x^2t^2}}{xt^2} - \frac{e^{xt}}{t} + \frac{e^{xt}}{xt^2}\right) dx + 2tF_1(t^2, t) - 3F_1(3t, t) =$$

$$= \frac{e^{x^2t^2}}{t^2}\Bigg|_{x=3t}^{x=t^2} - \frac{e^{xt}}{xt^2}\Bigg|_{x=3t}^{x=t^2} - \int_{3t}^{t^2} \left(\frac{e^{x^2t^2}}{xt^2} - \frac{e^{xt}}{xt^2}\right) dt + 2t\int_1^{t^3} e^{t^2y} dy - 3\int_1^{3t^2} e^{3t^2y} dy =$$

$$= \frac{1}{t^2}\left(2e^{3t^2} - 3e^{t^3} - 2e^{9t^4} + 3e^{t^6}\right) - \int_{3t}^{t^2} \left(\frac{e^{x^2t^2}}{xt^2} - \frac{e^{xt}}{xt^2}\right) dx.$$

8.17. Folosindu-se derivarea integralei

$$I_{1,a}(\alpha) = \int_0^a \frac{dx}{x^2 + \alpha^2}, \text{ unde } \alpha, a \in \mathbf{R}^*,$$

ca funcţie de parametrul α, să se calculeze

$$I_{n,a}(\alpha) = \int_0^a \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n}, \quad n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$$

şi $I_{n,\alpha} = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^n}$.

R: Avem $I_{1,a}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg}\frac{a}{\alpha}$, de unde $I'_{1,a}(\alpha) = -\frac{1}{\alpha^2}\operatorname{arctg}\frac{a}{\alpha} - \frac{a}{\alpha(a^2+\alpha^2)}$.

Derivăm pe $I_{1,a}$ din enunţ: $I'_{1,a}(\alpha) = \int_0^a \frac{-2\alpha dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$. Din ultimele două relaţii, obţinem:

$$I_{2,a}(\alpha) = \int_0^a \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2} = \frac{a}{2\alpha^2(a^2+\alpha^2)} + \frac{1}{2\alpha^2} I_{1,a}(\alpha),$$

de unde

$$I'_{2,a}(\alpha) = \int_0^a \frac{-4\alpha}{(x^2+\alpha^2)^3} dx = -\frac{a(2\alpha^2+a^2)}{\alpha^3(a^2+\alpha^2)^2} - \frac{1}{\alpha^3} I_{1,a}(\alpha) + \frac{1}{2\alpha^2} I'_{1,a}(\alpha);$$

$$4\alpha I_{3,a}(\alpha) = \frac{a(2\alpha^2+a^2)}{\alpha^3(a^2+\alpha^2)^2} + \frac{1}{\alpha^4}\operatorname{arctg}\frac{a}{\alpha} + \frac{1}{2\alpha^2}\left[\frac{1}{\alpha^2}\operatorname{arctg}\frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha(a^2+\alpha^2)}\right].$$

$$I_{3,a}(\alpha) = \frac{a(5\alpha^2+3a^2)}{8\alpha^4(\alpha^2+a^2)^2} + \frac{3}{8\alpha^5}\cdot\operatorname{arctg}\frac{a}{\alpha} =$$

$$= \frac{a}{4\alpha^2(\alpha^2+a^2)^2} + \frac{3}{4\alpha^2}\left[\frac{1}{2\alpha^3}\operatorname{arctg}\frac{a}{\alpha} + \frac{a}{2\alpha^2(\alpha^2+a^2)}\right],$$

$$I_{3,a}(\alpha) = \frac{a}{4\alpha^2(\alpha^2+a^2)^2} + \frac{3}{4\alpha^2} I_{2,a}(\alpha).$$

Considerăm că pentru $I_{k,a}(\alpha) = \int_0^a \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^k}$ avem

$$I_{k,a}(\alpha) = \frac{a}{2(k-1)\alpha^2(\alpha^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2}\cdot I_{k-1,a}(\alpha) \tag{1}$$

şi arătăm că

$$I_{k+1,a}(\alpha) = \frac{a}{2k\alpha^2(\alpha^2+a^2)^k} + \frac{2k-1}{2k\alpha^2} I_{k,a}(\alpha).$$

Pe de o parte,

$$I'_{k,a}(\alpha) = \int_0^a \frac{-2k\alpha}{(x^2+\alpha^2)^{k+1}} dx = -2k\alpha I_{k+1,a}(\alpha), \tag{2}$$

iar pe de altă parte,

$$I'_{k,a}(\alpha) = -\frac{a(a^2 + k\alpha^2)}{(k-1)\alpha^3(\alpha^2 + a^2)^k} - \frac{2k-3}{(k-1)\alpha^3} \cdot I_{k-1,a}(\alpha) + \frac{2k-3}{2(k-1)\alpha^2} \cdot I'_{k-1,a}(\alpha). \quad (3)$$

Dar

$$I'_{k-1,a}(\alpha) = -2(k-1)\alpha \int_0^a \frac{dx}{(x^2+\alpha^2)^k} = -2(k-1)\alpha I_{k,a}(\alpha),$$

iar din (1), avem

$$I_{k-1,a}(\alpha) = \frac{2(k-1)\cdot\alpha^2}{2k-3} \cdot I_{k,a}(\alpha) - \frac{a}{(2k-3)(a^2+\alpha^2)^{k-1}},$$

care, înlocuite în (3), ne dau:

$$I'_{k,a}(\alpha) = -\frac{a(a^2 + k\alpha^2)}{(k-1)\alpha^3(\alpha^2 + a^2)^k} - \frac{2}{\alpha} I_{k,a}(\alpha) + \frac{a}{(k-1)\alpha^3(a^2+\alpha^2)^{k-1}} -$$

$$-\frac{2k-3}{\alpha} \cdot I_{k,a}(\alpha) = -\frac{a}{\alpha(a^2+\alpha^2)^k} - \frac{2k-1}{\alpha} \cdot I_{k,a}(\alpha) \quad (4)$$

Din (2) şi (4), obţinem relaţia căutată.

Deci, $I_{n,a}(\alpha) = \frac{a}{2(n-1)\alpha^2(a^2+\alpha^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)\alpha^2} \cdot I_{n-1,a}(\alpha)$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^* - \{1\}$. Pentru calculul lui $I_{n,\alpha}$, observăm mai întîi că integrala este convergentă deoarece $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x^2+\alpha^2)^n} = 0$. Avem

$$I_{n,\alpha} = \lim_{a\to\infty} I_{n,a}(\alpha) = \lim_{a\to\infty} \frac{2n-3}{2(n-1)\alpha^2} \cdot I_{n-1,a}(\alpha) =$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\alpha^{2n-2}} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} I_{1,a}(\alpha) = \frac{1}{\alpha^{2n-2}} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \operatorname{arctg} \frac{a}{\alpha} \Big|_{a=0}^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\alpha^{2n-2}} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2\alpha} = \frac{\pi}{2\alpha^{2n-1}} \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}.$$

8.18. Folosind derivarea sub semnul integral, să se calculeze

$$I(a) = \int_0^{1-0} \varphi(x, a)\, dx,$$

unde

$$\varphi(x, a) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax)}{x\sqrt{1-x^2}}, & x \in (0, 1) \\ a, & x = 0, \end{cases}$$

cu $a \in (-1, 1)$ parametru.

R: Deoarece $\lim_{x \nearrow 1} (1-x)^{1/2} \frac{\ln(1+ax)}{x\sqrt{(1-x)(1+x)}} = \frac{\ln(1+a)}{\sqrt{2}} =$ finită, integrala este convergentă. Pentru că $\frac{\partial \varphi}{\partial a}(x, a) = \frac{1}{(1+ax)\sqrt{1-x^2}}$, $x \in [0, 1)$ şi sînt îndeplinite condiţiile de derivare a integralei în raport cu parametrul a, avem $I'(a) = \int_0^{1-0} \frac{dx}{(1+ax)\sqrt{1-x^2}}$. Cu schimbarea de variabilă $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = t$, $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $[0, 1) \to (0, 1]$, $dx = \frac{-4t}{(1+t^2)^2} dt$, obţinem

$$I'(a) = -2 \int_1^{0+0} \frac{dt}{1+a+(1-a)t^2} = \frac{2}{1-a} \int_{0+0}^{1} \frac{dt}{\frac{1+a}{1-a} + t^2} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} t \cdot \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}} \Bigg|_{t \searrow 0}^{t=1} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \operatorname{arctg} \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

Deci, $I(a) \in \int \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}} da$. Facem schimbarea de variabilă $a = \cos u$, $u = \arccos a$, $(-1, 1) \to (0, \pi)$ şi obţinem

$$\int \frac{2}{\sin u} \cdot \operatorname{arctg} \frac{1-\cos u}{\sin u} (-\sin u) du = -2 \int \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg} \frac{u}{2}\right) du =$$

$$= -\int u du = -u^2/2 + C = -\frac{1}{2} (\arccos a)^2 + C.$$

Deci, trebuie determinată constanta C_0 astfel încît

$$I(a) = -\frac{1}{2} (\arccos a)^2 + C_0.$$

Luînd în enunţ pe $a = 0$, rezultă $I(0) = 0$, de unde

$$-\frac{1}{2} (\arccos 0)^2 + C_0 = 0, \ C_0 = \pi^2/8.$$

Deci, $I(a) = -\frac{1}{2} (\arccos a)^2 + \pi^2/8$.

8.19. Să se calculeze

$$I = \int_{-1+0}^{3-0} \frac{x dx}{(x-5)\sqrt{-x^2+2x+3}}.$$

R: Deoarece

$$\lim_{x \searrow -1} (x+1)^{1/2} \frac{x}{(x-5)\sqrt{-(x+1)(x-3)}} = 1/12$$

respectiv $\lim\limits_{x \nearrow 3} |x-3|^{1/2} \cdot \frac{x}{(x-5)\sqrt{-(x+1)(x-3)}} = -3/4$, integralele $I_1 = \int\limits_{-1+0}^{0} \frac{x\mathrm{d}x}{(x-5)\sqrt{-x^2+2x+3}}$ respectiv $I_2 = \int\limits_{0}^{3-0} \frac{x\mathrm{d}x}{(x-5)\sqrt{-x^2+2x+3}}$ sînt convergente. Rezultă integrala I este convergentă.

Cu schimbarea de variabile

$$\sqrt{\frac{x+1}{3-x}} = t, \quad x = \frac{3t^2-1}{1+t^2}, \quad (-1,\ 3) \to (0,\ \infty), \quad \mathrm{d}x = \frac{8t}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t,$$

obținem

$$I = -\int\limits_0^\infty \frac{(3t^2-1)\mathrm{d}t}{(t^2+1)(t^2+3)} = 2\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} - 5\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{3+t^2} =$$

$$= 2 \operatorname{arctg} t \Big|_0^\infty - \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{3}} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}\left(2 - \frac{5}{\sqrt{3}}\right).$$

8.20. Să se calculeze integrala

$$I = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\sin x}}.$$

R: Facem schimbarea de variabilă

$$1 - \sin x = 2\sqrt{t}, \quad x = \arcsin(1 - 2\sqrt{t}), \quad [-\pi/2,\ \pi/2] \to [0,\ 1],$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-\frac{1}{\sqrt{t}} \cdot \mathrm{d}t}{\sqrt{1-(1-2\sqrt{t})^2}} = \frac{-t^{-1/2}\mathrm{d}t}{\sqrt{4\sqrt{t}-4t}} = \frac{-t^{-1/2}\mathrm{d}t}{2\sqrt{\sqrt{t}(1-\sqrt{t})}}.$$

Obținem

$$I = -1/2\int\limits_{1-0}^{0+0} \frac{t^{-1/2}\mathrm{d}t}{\sqrt{(3-1+2\sqrt{t})}\sqrt{\sqrt{t}(1-\sqrt{t})}} = 1/2\int\limits_{0+0}^{1-0} \frac{t^{-3/4}\mathrm{d}t}{\sqrt{2(1-t)}} =$$

$$= 1/2\sqrt{2}\int\limits_{0+0}^{1-0} t^{-3/4}(1-t)^{-1/2}\mathrm{d}t = 1/2\sqrt{2}\,\beta(1/4,\ 1/2) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}.$$

Dar $\Gamma(1/4)\Gamma(3/4) = \Gamma(1/4)\Gamma(1-1/4) = \frac{\pi}{\sin \pi/4} = 2\pi/\sqrt{2}$, de unde

$$\Gamma(3/4) = \frac{2\pi}{2\Gamma(1/4)}.$$

Deci, $I = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2.$

Observație. Se poate arăta imediat că integrala $J = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3 - \cos x}}$ are aceeași valoare. Avem $J = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{3 - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}$. Facem schimbarea de variabilă

$$x = \pi/2 - u,\ [0, \pi] \to (-\pi/2, \pi/2],\ dx = -du$$

și obținem $J = -\int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{du}{\sqrt{3 - \sin u}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{3 - \sin u}} = I.$

8.21. Să se calculeze integrala

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{(\sin x + 2)^2 \sqrt[3]{\sin x\,(1 - \sin x)^2}},$$

arătîndu-se în prealabil că este convergentă.

R. Arătăm că integrala este convergentă:

$$\lim_{x \searrow 0} x^{1/3} \frac{\cos x}{(\sin x + 2)^2 \sqrt[3]{\sin x(1 - \sin x)^2}} = 1/4;$$

$$\lim_{x \nearrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\alpha} \frac{\cos x}{(\sin x + 2)^2 \sqrt[3]{\sin x(1 - \sin x)^2}} =$$

$$= \lim_{x \nearrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\alpha} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{(\sin x + 2)^2 \sqrt[3]{\sin x\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^2}} =$$

$$= \lim_{x \nearrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{\alpha} \frac{2\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{2} \cdot \cos\dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{2}}{(\sin x + 2)^2 \sqrt[3]{\sin x \cdot 4\sin\dfrac{\frac{\pi}{2} - x}{2}}}.$$

Pentru $\alpha = 1/3 < 1$, ultima limită este $2\ (3^2\sqrt[3]{2})$. Deci, integrala este convergentă. Facem schimbarea de variabilă $\sin x = t$, $\cos x\, dx = dt$ și obținem

$$I = \int_0^1 \frac{dt}{(t + 2)^2 \sqrt[3]{t(1 - t)^2}}.$$

Deoarece suma exponenților puterilor de sub radical este egală cu indicele radicalului, căutăm o schimbare de variabilă de tipul

$$t = \frac{au+b}{cu+d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad (0,\ 1) \to (0,\ 1).$$

Din condiția $t = 0 \Rightarrow u = 0$, rezultă $b = 0$ și, deci, $t = \dfrac{au}{cu+d}$.

Adăugînd condiția $t = 1 \Rightarrow u = 1$, rezultă $1 = \dfrac{a}{c+d}$, $a = c + d$.

Luăm $c = 1$, $a = 1 + d$ și obținem $t = \dfrac{(1+d)u}{u+d}$, $d \in \mathbf{R}^*$ (pentru $d = 0$, obținem $t = u$). Pe d îl determinăm punînd condiția ca, după trecerea la variabila u, $t + 2$ să nu conțină variabila la numărător:

$$t + 2 = \frac{(1+d)u}{u+d} + 2 = \frac{(3+d)u + 2d}{u+d}.$$

Cu $d = -3$, obținem: $t = \dfrac{-2u}{u-3}$, $dt = 6du/(u-3)^2$,

$$I = \int_0^1 \frac{\dfrac{6du}{(u-3)^2}}{\left(\dfrac{-6}{u-3}\right)^2 \cdot \sqrt[3]{\dfrac{-2u}{u-3} \cdot \left(1 + \dfrac{2u}{u-3}\right)^2}} = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt[3]{\dfrac{2u}{3-u} \cdot \dfrac{[3(u-1)]^2}{(3-u)^2}}} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt[3]{18}} \int_0^1 \frac{du}{\dfrac{u^{1/3}|u-1|^{2/3}}{3-u}} = \frac{1}{6\sqrt[3]{18}} \int_0^1 \frac{(3-u)\,du}{u^{1/3}(1-u)^{2/3}} =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt[3]{18}} \left(3\int_0^1 u^{-1/3}(1-u)^{-2/3}du - \int_0^1 u^{2/3}(1-u)^{-2/3}du\right) =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt[3]{18}} [3\beta(2/3,\ 1/3) - \beta(5/3,\ 1/3)] = \frac{1}{6\sqrt[3]{18}} \left[3\frac{\Gamma(2/3)\Gamma(1/3)}{\Gamma(1)} - \frac{\Gamma(5/3)\Gamma(1/3)}{\Gamma(2)}\right] =$$

$$= \frac{1}{6\sqrt[3]{18}} \left(\frac{3\pi}{\sin \pi/3} - \frac{2\pi}{3\sin \pi/3}\right) = \frac{7\pi}{3^2\sqrt{3}\sqrt[3]{18}},$$

unde am ținut seama că $\Gamma(2/3)\Gamma(1/3) = \Gamma(1 - 1/3)\Gamma(1/3) = \pi/\sin\dfrac{\pi}{3}$,

$$\Gamma(5/3)\Gamma(1/3) = \Gamma\left(1 + \frac{2}{3}\right)\Gamma(1/3) = \frac{2}{3}\Gamma(2/3)\Gamma(1/3) \text{ și } \Gamma(2) = \Gamma(1) = 1.$$

3.22. Să se calculeze folosind funcţiile lui Euler Γ şi β:

a) $\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^\alpha dx, \ \alpha \in \mathbf{R}, \ \alpha > -1;$

b) $\int\limits_0^\infty \frac{x^m}{1+x^n} dx, \ m, \ n \in \mathbf{R}, \ n < m+1 < 0;$

c) $\int\limits_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx, \ m, \ n \in \mathbf{R}, \ m < -1, \ n < -1;$

d) $\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-ax^\beta} dx, \ a, \ \alpha, \ \beta \in \mathbf{R}, \ a > 0, \ \beta > 0, \ \alpha > -1;$

e) $\int\limits_0^1 (1 - x^m)^n dx, \ n \in \mathbf{N}, \ m \in \mathbf{R}, \ m > 0.$

R. a) Facem schimbarea de variabilă $t = \ln \frac{1}{x}$, $t \in (0, \infty)$. Obţinem $x = e^{-t}$ şi

$$\int\limits_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^\alpha dx = \int\limits_\infty^0 t^\alpha(-e^{-t})\, dt = \int\limits_0^\infty t^\alpha e^{-t} dt = \Gamma(\alpha + 1).$$

b) Cu schimbarea de variabilă

$$t = \frac{x^n}{1+x^n}, \ t \in (0, 1), \ x = \left(\frac{t}{1-t}\right)^{1/n},$$

obţinem

$$\int\limits_0^\infty \frac{x^m}{1+x^n} dx = \int\limits_0^\infty \frac{x^n}{1+x^n} \cdot x^{m-n} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 t\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{m-n}{n}} \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{t}{1-t}\right)^{\frac{1}{n}-1} \cdot \frac{1}{(1-t)^2} dt =$$

$$= \frac{1}{n}\int\limits_0^1 t^{\frac{m+1}{n}-1} \cdot (1-t)^{\frac{n-m-1}{n}-1} \cdot dt = \frac{1}{n}\, \beta\left(\frac{m+1}{n}, \frac{n-m-1}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n-m-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+1}{n} + \frac{n-m-1}{n}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin \pi \frac{m+1}{n}}.$$

c) Notăm $\sin^2 x = t$, $t \in [0, 1]$, $2\sin x \cos x dx = dt$. Avem

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \sin x \cos x dx =$$

$$= 1/2 \int_0^1 t^{\frac{m-1}{2}} (1-t)^{\frac{n-1}{2}} dt = 1/2 \beta\left(\frac{m+1}{2}, \frac{n+1}{2}\right).$$

d) Facem schimbarea de variabilă $ax^\beta = t$, $t \in (0, \infty)$

$$x = \frac{1}{a^{1/\beta}} \cdot t^{1/\beta}, \; dx = \frac{1}{\beta \cdot a^{1/\beta}} \cdot t^{\frac{1}{\beta}-1} dt.$$

Obținem

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-ax^\beta} dx = \int_0^\infty \left(\frac{1}{a^{1/\beta}} \cdot t^{1/\beta}\right)^\alpha e^{-t} \cdot \frac{1}{\beta \cdot a^{1/\beta}} \cdot t^{\frac{1}{\beta}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{\beta \cdot a^{\frac{\alpha+1}{\beta}}} \cdot \int_0^\infty t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1} \cdot e^{-t} dt = \frac{1}{\beta \cdot a^{\frac{\alpha+1}{\beta}}} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right).$$

e) Notăm $x^m = t$, $x = t^{1/m}$

$$\int_0^1 (1-x^m)^n dx = \int_0^1 (1-t)^n \frac{1}{m} t^{\frac{1}{m}-1} dt =$$

$$= \frac{1}{m} \beta(1/m, n+1) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Gamma(1/m)\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+n+1\right)} =$$

$$= \frac{1}{m} \cdot \frac{n!\Gamma(1/m)}{\left(\frac{1}{m}+n\right)\left(\frac{1}{m}+n-1\right) \ldots \left(\frac{1}{m}+1\right) \frac{1}{m} \Gamma(1/m)} =$$

$$= \frac{n! m^n}{(m+1)(2m+1) \ldots (nm+1)}.$$

8.23. Folosind definiția, să se arate că următoarele funcții sînt cu variație mărginită pe intervalele menționate

a) $f(x) = x^2$, $x \in [-1, 0]$;

b) $f(x) = \sin x$, $x \in [0, \pi]$;

c) $f(x) = \ln x$, $x \in [1, e]$.

R. a) Fie d o diviziune arbitrară $-1 = x_0 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = 0$ a intervalului $[-1, 0]$. Avem

$$V_d = \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |x_{k+1}^2 - x_k^2|.$$

Deoarece $x_k \in [-1, 0]$ şi $x_k < x_{k+1}$ rezultă $x_k^2 > x_{k+1}^2$. Obţinem $V_d = \sum_{k=0}^{n-1} (x_k^2 - x_{k+1}^2) = x_0^2 - x_n^2 = 1.$

Rezultă că $f(x) = x^2$ este cu variaţie mărginită şi $\bigvee_{-1}^{0} (x^2) = 1.$

b) Fie o diviziune arbitrară d a intervalului $[0, \pi]$

$$d: 0 = x_0 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = \pi$$

există p astfel ca $x_p \leqslant \pi/2 < x_{p+1}$.
Avem

$$V_d = \sum_{k=0}^{n} |\sin x_{k+1} - \sin x_k| = \sum_{k=0}^{p-1} |\sin x_{k+1} - \sin x_k| +$$

$$+ \sum_{k=p}^{n-1} |\sin x_{k+1} - \sin x_k| = \sum_{k=0}^{p-1} (\sin x_{k+1} - \sin x_k) + |\sin x_{p+1} - \sin x_p| +$$

$$+ \sum_{k=p+1}^{n-1} (\sin x_k - \sin x_{k+1}) = \sin x_p - \sin x_0 + |\sin x_{p+1} - \sin x_0| +$$

$$+ \sin x_{p+1} - \sin x_n \leqslant 2\sin x_p + 2\sin x_{p+1} - \sin 0 - \sin \pi \leqslant 4.$$

c) Procedăm asemănător $d: 1 = x_0 < \ldots < x_k < x_{k+1} < \ldots < x_r = e$

$$V_d = \sum_{k=0}^{n-1} |\ln x_{k+1} - \ln x_k| = \sum_{k=0}^{n-1} (\ln x_{k+1} - \ln x_k) = \ln e - \ln 1 = 1.$$

8.24. Să se arate că funcţia $f: [0, 1] \Rightarrow \mathbf{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{\pi}{2x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este continuă dar nu este cu variaţie mărginită.

R. Deoarece $\left| x \sin \dfrac{\pi}{2x} \right| \leqslant |x|$ rezultă $\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$ şi deci f este continuă în origine. De asemenea se continuă şi în restul punctelor din intervalul de definiţie. Pentru a arăta că f nu este cu variaţie mărginită vom construi un şir de diviziuni (d_n) ale intervalului $[0, 1]$ astfel încît $\lim\limits_{n\to\infty} V_{d_n} = +\infty$. Să considerăm următorul şir de diviziuni (d_n):

$$0 = 0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \ldots < \frac{1}{2k+1} < \frac{1}{2k} < \frac{1}{2k-1} < \ldots <$$

$$< \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 = 1$$

$$V_{d_n} = \left|\frac{1}{2n}\sin\frac{\pi}{2}\cdot 2n - 0\sin 0\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{2n-1}\sin\frac{\pi}{2}(2n-1) - \frac{1}{2n}\sin\frac{\pi}{2}2n\right| + \ldots +$$

$$+\left|\frac{1}{2k}\sin\frac{\pi}{2}2k - \frac{1}{2k+1}\sin\frac{\pi}{2}(2k+1)\right| +$$

$$+\left|\frac{1}{(2k-1)}\sin\frac{\pi}{2}(2k-1) - \frac{1}{2k}\sin\frac{\pi}{2}2k\right| + \ldots +$$

$$+\left|\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\cdot 2 - \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2}\cdot 3\right| + \left|1\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\cdot 2\right| =$$

$$= |0-0| + \left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} - 0\right| + \ldots + \left|0 - \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| + \left|\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} - 0\right| + \ldots +$$

$$+\left|0 - \frac{-1}{3}\right| + |1-0| = \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n-3} + \ldots + \frac{1}{3} + 1,$$

Dar şirul $a_n = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$ este divergent $(\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty)$ şi deci f nu este cu variaţie mărginită.

8.25. Să se dea un exemplu de şir (f_n) de funcţii care nu sînt cu variaţie mărginită pe un interval $[a, b]$ dar care converge uniform pe acest interval către o funcţie f care este cu variaţie mărginită.

R. Considerăm şirul (f_n):, $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ definit astfel:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b] \cap \mathbf{Q} \\ \frac{1}{n}, & x \in [a, b] \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$$

Fiecare din funcţiile f_n nu este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$. Într-adevăr, alegem un şir de diviziuni (d_m) din $[a, b]$ alternînd punctele de diviziune — raţionale cu iraţionale — d_m avînd $2m$ puncte.

Avem $V_{d_m} \geqslant \frac{m}{n} \to \infty$ cînd $m \to \infty$ (pentru n fixat) şi deci f_n nu este cu variaţie mărginită.

Pe de altă parte $\sup\limits_{x\in[a, b]} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \to 0$ (pentru $n \to \infty$) şi deci $f_n \to 0$ uniform pe $[a, b]$ iar funcţia limită $f(x) = 0$, $x \in [a, b]$ este evident cu variaţie mărginită, fiind constantă.

8.26. Să se calculeze, folosind definiția

$$\int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}g(x), \quad \text{unde } g(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 2, & x\in(0,\,1)\\ 3, & x=1.\end{cases}$$

R. Deoarece funcția $f(x)=\frac{1+x}{1+x^2}$, $x\in\mathbf{R}$ este continuă iar $g(x)$ este cu variație mărginită rezultă că integrala există. Fie (d_n) un șir arbitrar de diviziuni

$$d_n:\ 0=x_0<x_1<\ldots<x_k<x_{k+1}<\ldots<x_m=1$$

unde fiecare punct al diviziunii x_k depinde de și n, dar pentru a nu complica notația nu am mai specificat acest lucru. Alegem $\xi_k\in[x_k,\,x_{k+1}]$ arbitrare, cu $\xi_0=x_0=0$, $\xi_{m-1}=x_m=1$. Avem

$$\sigma_{d_n}(f,\,g)=f(0)(g(x_1)-g(0))+f(\xi_1)(g(x_2)-g(x_1))+\ldots+$$
$$+f(1)(g(1)-g(x_{m-1}))=f(0)(g(x_1)-g(0))+f(1)(g(1)-g(x_{m-1}))$$

deoarece $g(x_{k+1})-g(x_k)=2-2=0$ pentru $k=1,\,\ldots,\,m-2$. Deci $\sigma_{d_n}(f,\,g)=1(2-1)+1(3-2)=2$. La limită, obținem $\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\,\mathrm{d}g(x)=2$.

8.27. Să se calculeze $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ în următoarele cazuri:

a) $f(x)=x^3$, $g(x)=\ln x$, $x\in[1,\,2]$;
b) $f(x)=|x-1|$, $g(x)=x^2+2x$, $x\in[0,\,2]$;
c) $f(x)=\sin x$, $g(x)=2\cos x$, $x\in[0,\,2\pi]$;
d) $f(x)=x^2$, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\in(0,\,\pi/2]\\ 1, & x=0\end{cases}$, $x\in[0,\,\pi/2]$.

R. a) Funcția $g(x)=\ln x$ este derivabilă pe $[1,\,2]$ și deci putem calcula integrala Stieltjes transformînd-o într-o integrală Riemann.

$$\int_1^2 x^3\mathrm{d}g(x)=\int_1^2 x^3g'(x)\,\mathrm{d}x=\int_1^2 x^3\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=x^3/3\Big|_1^2=\frac{7}{3}$$

b) $$\int_0^2|x-1|\,\mathrm{d}g(x)=\int_0^2|x-1|\,g'(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)(2x+2)\,\mathrm{d}x+$$
$$+\int_1^2(x-1)(2x+2)\,\mathrm{d}x=2\int_0^1(1-2x+x^2)\,\mathrm{d}x+2\int_1^2(x^2-1)\,\mathrm{d}x=$$
$$=2(x-x^3/3)\Big|_0^1+2(x^3/3-x)\Big|_1^2=4.$$

c) Aplicăm formula de integrare prin părţi

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dg(x) = [2\cos x]\sin x\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} g(x)\,df(x) = -\int_0^{2\pi} [2\cos x]\cdot\cos x\,dx$$

$$\text{Deoarece } [2\cos x] = \begin{cases} 0, & x \in (\pi/3, \pi/2] \cup [3\pi/2, 5\pi/3] \\ -2, & x \in (2\pi/3, 4\pi/3) \\ 1, & x \in (0, \pi/3] \cup [5\pi/3, 2\pi) \\ 2, & x = 0, 2\pi \\ -1, & x \in (\pi/2, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 3\pi/2) \end{cases}$$

rezultă

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dg(x) = -\int_0^{\pi/3} 1\cdot\cos x dx - \int_{\pi/3}^{\pi/2} 0\cdot\cos x dx - \int_{\pi/2}^{2\pi/3} (-1)\cdot\cos x dx -$$

$$-\int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (-2)\cos x dx - \int_{4\pi/3}^{3\pi/2} (-1)\cos x dx - \int_{3\pi/2}^{5\pi/3} 0\cdot\cos x dx -$$

$$-\int_{5\pi/3}^{2\pi} 1\cdot\cos x dx = -\sqrt{3} - 1.$$

d) Se poate observa că g este derivabilă şi cu derivata continuă. Într-adevăr, avem $g'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, dacă $x \neq 0$ şi

$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2} = 0.$$

Rezultă

$$\int_0^{\pi/2} f(x)\,dg(x) = \int_0^{\pi/2} x^2\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\,dx = (x\sin x + 2\cos x)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 2.$$

8.28. Fie $f, g\colon [a, b] \to \mathbf{R}$. Se ştie că dacă f este integrabilă Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$ atunci pentru orice $c \in (a, b)$ f este integrabilă Stieltjes în raport cu g atît pe $[a, c]$ cît şi pe $[c, b]$ şi

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = \int_a^c f(x)\,dg(x) + \int_c^b f(x)\,dg(x).$$

Să se dea un exemplu prin care să se arate că reciproca acestei afirmaţii nu este adevărată.

R. Fie $f, g: [-1, 1] \to \mathbf{R}$ definite astfel:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ 1, & 0 < x \leqslant 1 \end{cases} \quad \text{şi } g(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leqslant x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Avem $\int\limits_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = 0$ şi $\int\limits_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}g(x) = 0$, deoarece, pentru orice diviziune d a intervalului $[-1, 0]$, $d: -1 = x_0 < \ldots < x_n = 0$,

$$\sigma_d(f, g) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k)) = 0$$

(analog pentru intervalul $[0, 1]$).

Fie acum o diviziune d a intervalului $[-1, 1]$ pentru care $k=1, \ldots, n$, $x_k \neq 0$. Fie i astfel ca $0 \in (x_i, x_{i+1})$

$$\sigma_d(f, g) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k)) = f(\xi_i)(g(x_{i+1})) - g(x_i))$$

deoarece pentru $k < i$ termenii sumei sînt nuli datorită lui $f(\xi_k)$ iar pentru $k > i$ termenii sumei sînt nuli deoarece $g(x_{k+1}) - g(x_k) = 1 - 1 = 0$. Rezultă $\sigma_d(f, g) = f(\xi_i)(1 - 0) = f(\xi_i)$.

Dacă alegem $\xi_i \leqslant 0$, rezultă $\sigma_d(f, g) = 0$ iar dacă alegem $\xi_i > 0$, rezultă $\sigma_d(f, g) = 1$ şi deci $\sigma_d(f, g)$ nu are limită.

8.29. Fie $g: [a, b] \to [a, b]$ o funcţie derivabilă şi $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ o funcţie continuă astfel încît $f \circ g$ este cu variaţie mărginită. Să se arate că

$$\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}(f \circ g)(x) = (f \circ g)(x)\Big|_a^b - (F \circ g)(x)\Big|_a^b$$

unde F este o primitivă a lui f pe $[a, b]$.

R. g fiind derivabilă rezultă că este continuă şi, deci $f \circ g$ este continuă. Fiind şi cu variaţie mărginită rezultă că integrala Stieltjes din enunţul problemei are sens iar pentru calculul ei aplicăm formula de integrare prin părţi.

$$\int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}(f \circ g)(x) = (f \circ g)(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(g(x))\,\mathrm{d}g(x)$$

Deoarece g este derivabilă, obţinem

$$\int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}(f \circ g)(x) = (f \circ g)(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ţinînd seama că f admite o primitivă, F, rezultă că integrala Riemann din relaţia precedentă se poate calcula cu

$$\int\limits_a^b f(g(x))\,g'(x)\,\mathrm{d}x = (F \circ g)(x)\Big|_a^b$$

de unde se obţine rezultatul cerut.

CAPITOLUL 9

INTEGRALE CURBILINII

9.1. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{\widehat{AB}} \frac{dy}{x+3}$$

pe arcul de pe elipsa $x^2/4 + y^2 - 1 = 0$ cuprins între $A(2, 0)$ şi $B(0, 1)$.

R. O reprezentare parametrică a arcului $\widehat{AB}$ (fig. 9.1) este

$$\widehat{AB}: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, \pi/2].$$

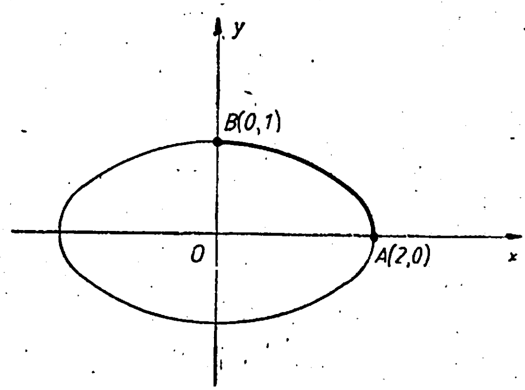


Fig. 9.1

Avem $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{2\cos t + 3} dt$. Schimbarea de variabilă $\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) = u$ transformă $[0, \pi/2]$ în $[0, 1]$, iar integrala devine $I = 2\int_0^1 \frac{1-u^2}{(u^2+1)(u^2+5)} du$. Folosind descompunerea în fracţii simple

$$\frac{1-u^2}{(u^2+1)(u^2+5)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{u^2+1} - \frac{3}{2} \frac{1}{u^2+5},$$

obținem

$$I = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} - 3\int_0^1 \frac{du}{u^2+5} = \left(\operatorname{arctg} u - \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{5}}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{3}{\sqrt{5}} \cdot \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

9.2. Să se calculeze integrala curbilinie $I = \int_C \frac{y\,dx}{1+y^2}$, unde C este arcul $y^2 = x$ cu $y \geqslant 0$.

R. Pe arcul de parabolă (fig. 9.2) avem reprezentarea parametrică

$$C: \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}, \quad t \in [0, \infty),$$

deci

$$I = \int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^4}\,dt.$$

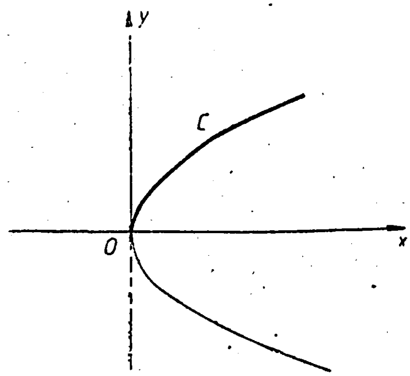


Fig. 9.2

Deoarece funcția de sub semnul integral este pozitivă, iar

$$\lim_{t\to\infty} t^\alpha \frac{t^2}{1+t^4} = 1 \text{ (finit)},$$

pentru $\alpha = 2 > 1$,

integrala este convergentă. Facem schimbarea de variabilă $t = 1/z$ și obținem

$$I = \int_\infty^0 \frac{-\frac{dz}{z^4}}{1+\frac{1}{z^4}} = \int_0^\infty \frac{dz}{1+z^4}.$$

Folosind descompunerea

$$\frac{1}{1+z^4} = \frac{A_1 z + B_1}{z^2+\sqrt{2}z+1} + \frac{A_2 z + B_2}{z^2-\sqrt{2}z+1}$$

cu

$$A_1 = 1/(2\sqrt{2}),\ B_1 = 1/2,\ A_2 = -1/(2\sqrt{2}),\ B_2 = 1/2,$$

rezultă

$$I = \int_0^\infty \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}z + \frac{1}{2}}{z^2 + \sqrt{2}z + 1}\,dz + \int_0^\infty \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}z + \frac{1}{2}}{z^2 - \sqrt{2}z + 1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{z + \sqrt{2}}{z^2 + \sqrt{2}z + 1}\,dz - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{z - \sqrt{2}}{z^2 - \sqrt{2}z + 1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{(2z + \sqrt{2}) + \sqrt{2}}{z^2 + \sqrt{2}z + 1}\,dz - \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^\infty \frac{(2z - \sqrt{2}) - \sqrt{2}}{z^2 - \sqrt{2}z + 1}\,dz =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{z^2 + \sqrt{2}z + 1}{z^2 - \sqrt{2}z + 1}\Bigg|_0^\infty + \frac{1}{4}(I_1 + I_2),$$

unde

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{dz}{z^2 + \sqrt{2}z + 1} = \int_0^\infty \frac{dz}{\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{2}(z + \sqrt{2}/2)\Big|_0^\infty = \sqrt{2}\pi/4$$

şi

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{dz}{z^2 - \sqrt{2}z + 1} = \int_0^\infty \frac{dz}{\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{2}\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{2}(z - \sqrt{2}/2)\Big|_0^\infty = 3\sqrt{2}\pi/4$$

şi deci $I = 1/4(I_1 + I_2) = \sqrt{2}\pi/4$.

9.3. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_C yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz,$$

unde C este arcul de elice

$$\bar{\mathbf{r}}(t) = (R\cos t)\bar{\mathbf{i}} + (R\sin t)\bar{\mathbf{j}} + \frac{at}{2\pi}\bar{\mathbf{k}}$$

din punctul A în care elicea intersectează planul $z = 0$, pînă în punctul B în care elicea intersectează planul $z = a$.

R. În planul $z = 0$ parametrul $t = 0$ şi $A(R, 0, 0)$, în planul $z = a$ parametrul $t = 2\pi$ şi $B(R, 0, a)$ (fig. 9.3). Arcul de elice cuprins între A şi B are reprezentarea parametrică

$$\widehat{AB}: \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t, \ t \in [0, 2\pi] \\ z = \dfrac{a}{2\pi}t, \end{cases}$$

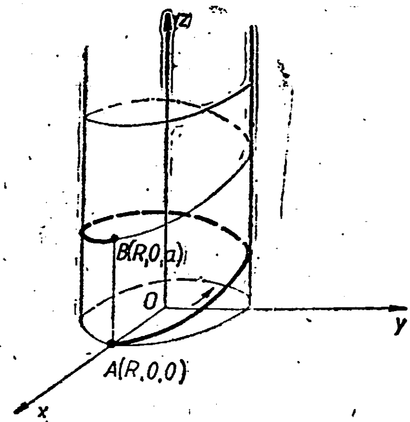


Fig. 9.3

Rezultă

$$I = \int_0^{2\pi} \Big((R\sin t)\frac{at}{2\pi}(-R\sin t) +$$

$$+ (R\cos t)\cdot\frac{at}{2\pi}(R\cos t) + R^2\sin t\cdot\cos t\cdot\frac{a}{2\pi}\Big)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{aR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\cos 2t\mathrm{d}t + \frac{aR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2t}{2}\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{aR^2}{2\pi}\left(\frac{t}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t\mathrm{d}t\right) - \frac{aR^2}{2\pi}\cdot\frac{\cos 2t}{4}\Big|_0^{2\pi},$$

deci $I = 0$.

9.4. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_\Gamma xy\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y - x\mathrm{d}z,$$

unde Γ este curba închisă dată în figura 9.4, parcursă în sens direct.

R. Avem

$$\Gamma = \widehat{AB} \cup \widehat{BC} \cup \widehat{CA}$$

iar

$$I = \int_{\widehat{AB}} \bar{\mathbf{v}}\cdot\mathrm{d}\bar{\mathbf{r}} + \int_{\widehat{BC}} \bar{\mathbf{v}}\cdot\mathrm{d}\bar{\mathbf{r}} +$$

$$+ \int_{\widehat{CA}} \bar{\mathbf{v}}\cdot\mathrm{d}\bar{\mathbf{r}},$$

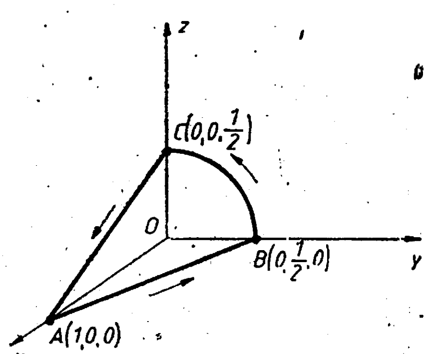


Fig. 9.4

în care am notat $\bar{\mathbf{v}} = xy\bar{\mathbf{i}} + z\bar{\mathbf{j}} - x\bar{\mathbf{k}}$.

Dacă folosim reprezentările parametrice

$$\widehat{AB}:\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}, \quad t \in [0,\ 1/2]$$

$$\widehat{BC}:\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2}\cos t \\ z = \dfrac{1}{2}\sin t \end{cases}, \quad t \in [0,\ \pi/2]$$

$$\widehat{CA}:\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = \dfrac{1-t}{2} \end{cases}, \quad t \in [0,\ 1]$$

obținem

$$I = \int_0^{1/2} (1-2t)\,t(-2\mathrm{d}t) + \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin t \cdot \left(-\frac{1}{2}\sin t\right)\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_0^1 -t\left(-\frac{1}{2}\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{12} - \frac{\pi}{16} + \frac{1}{4} = \frac{1}{6} - \frac{\pi}{16}.$$

9.5. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \oint_C \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{d}\bar{\mathbf{r}},$$

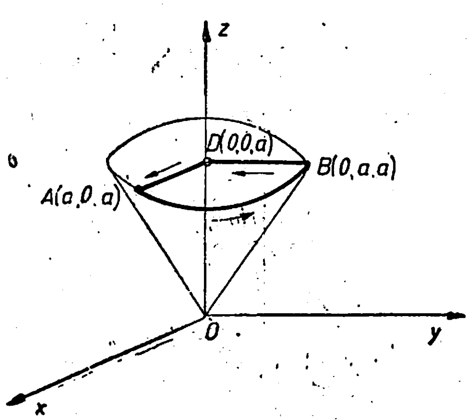


Fig. 9.5

unde $\bar{\mathbf{v}} = yz\bar{\mathbf{i}} + xz\bar{\mathbf{j}} + xy\bar{\mathbf{k}}$, iar C este curba închisă din planul $z = a$ dată în figura 9.5, în care arcul $\widehat{AB}$ este intersecția conului $x^2 + y^2 = z^2$ cu planul $z = a (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$.

R. Avem: $C = \widehat{AB} \cup \widehat{BD} \cup \widehat{DA}$, deci putem scrie

$$\oint_C \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{d}\bar{\mathbf{r}} = \oint_C yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z =$$

$$= \int_{\widehat{AB}} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{d}\bar{\mathbf{r}} + \int_{\widehat{BD}} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{d}\bar{\mathbf{r}} + \int_{\widehat{DA}} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{d}\bar{\mathbf{r}}.$$

Folosind reprezentările parametrice

$$\widehat{AB}: \ x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = a,\ t \in [0, \pi/2]$$

$$\widehat{DB}: \ x = 0,\ y = y,\ z = a,\ y \in [0, a].$$

$$\widehat{DA}: \ x = x,\ y = 0,\ z = a,\ x \in [0, a]$$

integrala devine

$$\int_{\widehat{AB}} \overline{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathbf{r}} = \int_0^{\pi/2} [a^2 \sin t(-a \sin t) + a^2 \cos t(a \cos t)]\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{\widehat{BD}} \overline{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathbf{r}} = \int_0^a 0 \cdot \mathrm{d}y = 0, \quad \int_{\widehat{DA}} \overline{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathbf{r}} = \int_0^a 0 \cdot \mathrm{d}x = 0,$$

deci $\oint_C \overline{\mathbf{v}} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathbf{r}} = 0.$

Observaţie. Notăm: $P(x, y, z) = yz$, $Q(x, y, z) = xz$, $R(x, y, z) = xy$. Funcţiile P, Q şi R sînt de clasa C^1 în $\mathbf{R}^3$ şi

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = x.$$

În acest caz $yz\,\mathrm{d}x + xz\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$ este o diferenţială totală, iar C fiind o curbă închisă, rezultă $\oint_C yz\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z = 0$.

9.6. Să se calculeze lucrul mecanic L efectuat de forţa $\overline{\mathbf{F}} = 2xy\overline{\mathbf{i}} + y^2\overline{\mathbf{j}} - x^2\overline{\mathbf{k}}$ de-alungul arcului $\widehat{AB}$, intersecţia hiperboloidului $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ cu planul $y=x$, unde $A(a, a, 0)$ şi $B(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$ (fig. 9.6).

R. Lucrul mecanic căutat este dat de integrala curbilinie

$$L = \int_{\widehat{AB}} \overline{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\overline{\mathbf{r}} = \int_{\widehat{AB}} 2xy\,\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y - x^2\mathrm{d}z.$$

O reprezentare parametrică a arcului $\widehat{AB}$ este

$$\widehat{AB}: \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = \sqrt{t^2 - a^2} \end{cases}, \quad t \in [a, a\sqrt{2}]$$

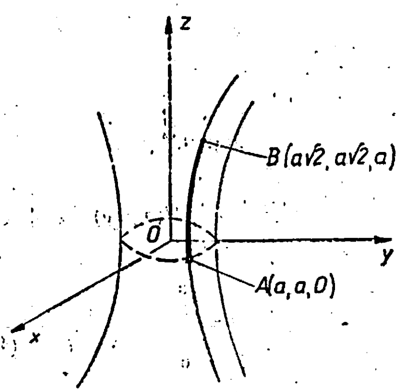


Fig. 9.6

iar $L = \int_a^{a\sqrt{2}} \left(2t^2 + t^2 - t^2 \cdot \frac{t}{\sqrt{t^2 - a^2}}\right) dt = \int_a^{a\sqrt{2}} 3t^2 dt - I$, unde am notat

$$I = \int_a^{a\sqrt{2}} t^2 \frac{t}{\sqrt{t^2 - a^2}} dt.$$

Cu schimbarea de variabilă $\sqrt{t^2 - a^2} = u$, obținem $I = \int_0^a (a^2 + u^2)\, du = \frac{4a^3}{3}$

deci $L = t^3\Big|_a^{a\sqrt{2}} - \frac{4a^3}{3} = 2\sqrt{2}a^3 - \frac{7}{3}a^3$.

9.7. Să se arate că integrala curbilinie

$$I = \int_{AB} \left[\frac{x - 2y}{(y - x)^2} + x\right] dx + \left[\frac{y}{(y - x)^2} - y^2\right] dy, \quad y - x \neq 0$$

nu depinde de drum. Să se calculeze I pentru $A(0, 1)$ și $B(3, 4)$.

R. Notăm $P(x, y) = \frac{x - 2y}{(y - x)^2} + x$, $Q(x, y) = \frac{y}{(y - x)^2} - y^2$

Într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^2$, simplu conex, care nu conține dreapta $y = x$, funcțiile P și Q sînt de clasă C^1. În plus, deoarece $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2y}{(y - x)^3}$, integrala I nu depinde de drumul dintre A și B din domeniul D. Alegem drumul $\Gamma = AC \cup CB$ (fig. 9.7) în care

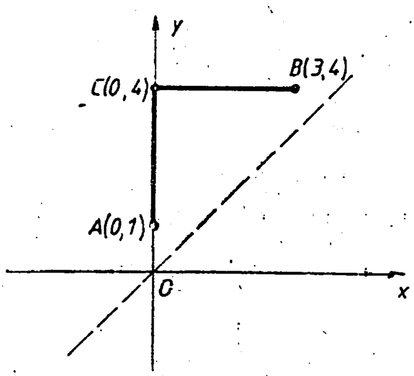


Fig. 9.7

$$AC: x = 0, \ y = t, \ t \in [1, 4];$$

$$CB: x = t, \ y = 4, \ t \in [0, 3]$$

Avem $I = I_1 + I_2$ unde

$$I_1 = \int_{AC} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy =$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{1}{t} - t^2\right) dt = \ln 4 - 21$$

și
$$I_2 = \int_{CB} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_0^3 \left[\frac{t - 8}{(4 - t)^2} + t\right] dt =$$

$$= \int_0^3 \left[-\frac{1}{4 - t} - \frac{4}{(4 - t)^2} + t\right] dt = -\ln 4 + \frac{3}{2}.$$

Deci $I = \ln 4 - 21 - \ln 4 + 3/2 = -39/2$.

9.8. Să se determine mulţimea în care expresia

$$(*) \qquad (2x\cos y - y^2\sin x)\,\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\,\mathrm{d}y$$

este o diferenţială totală; să se afle funcţiile $U(x, y)$ ale căror diferenţială este (*).

R. Notăm: $P(x, y) = 2x\cos y - y^2\sin x$; $Q(x, y) = 2y\cos x - x^2\sin y$. Funcţiile P şi Q sînt de clasă C^1 în $\mathbf{R}^2$. În plus, deoarece

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x\sin y - 2y\sin x,$$

rezultă că expresia (*) este o diferenţială totală în $\mathbf{R}^2$ şi deci există funcţia $U(x, y)$, diferenţiabilă în D, astfel încît

$$\mathrm{d}U = (2x\cos y - y^2\sin x)\,\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\,\mathrm{d}y.$$

Fie $O(0, 0)$ un punct fix şi $M(x, y)$ un punct variabil în $\mathbf{R}^2$. Integrala curbilinie

$$\int_{OM}\mathrm{d}U = \int_{OM}(2x\cos y - y^2\sin x)\,\mathrm{d}x + (2y\cos x - x^2\sin y)\,\mathrm{d}y$$

este independentă de drumul dintre O şi M. Alegem drumul poligonal OAM (fig. 9.8) unde segmentul OA este paralel cu axa Ox şi AM paralel cu Oy.

Folosim reprezentările parametrice

$$OA: x = t,\ y = 0,\ t \in [0, x],$$

$$AM: x = x,\ y = t,\ t \in [0, y],$$

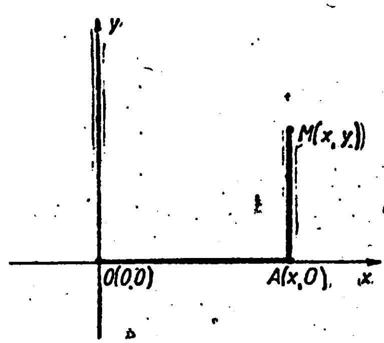


Fig. 9.8

şi obţinem:

$$\int_{OM}\mathrm{d}U = \int_0^x 2t\,\mathrm{d}t + \int_0^y (2t\cos x - x^2\sin t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= t^2\Big|_0^x + (\cos x)t^2\Big|_0^y - x(-\cos t)\Big|_0^y = x^2\cos y + y^2\cos x,$$

şi deci $U(x, y) = x^2\cos y + y^2\cos x + C,\ C \in \mathbf{R}$.

9.9. Să se determine mulţimea în care expresia

$$(*) \qquad \frac{\mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y}{z} + \frac{3y - x + z^2}{z^2}\,\mathrm{d}z,\ z \neq 0$$

este o diferenţială totală şi să se afle funcţia a cărei diferenţială este (*).

R. Notăm:

$$P(x, y, z) = \frac{1}{z},\ Q(x, y, z) = -\frac{3}{z},\ R(x, y, z) = \frac{3y - x + z^2}{z^2};$$

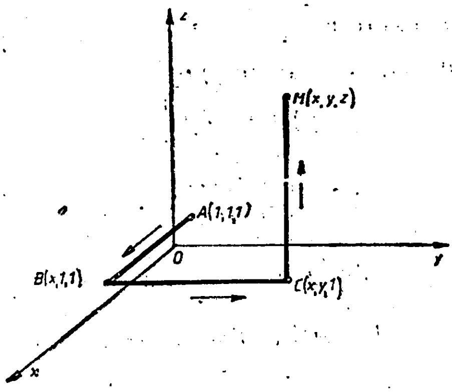


Fig. 9.9

Funcţiile P, Q şi R sînt de clasă C^1 într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^3$, simplu conex, care nu conţine planul $z = 0$. În plus, avem

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{1}{z^2},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{3}{z^2}.$$

Rezultă că expresia (*) este o diferenţială totală pe D, deci există o funcţie $U(x, y, z)$ astfel încît

$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y}{z} + \frac{3y - x + z^2}{z^2}\,\mathrm{d}x.$$

Fie $A(1, 1, 1)$ un punct fix şi $M(x, y, z)$ un punct variabil în D. Integrala curbilinie

$$\int_{AM} \mathrm{d}U = \int_{AM} \frac{\mathrm{d}x - 3\mathrm{d}y}{z} + \frac{3y - x + z^2}{z^2}\,\mathrm{d}z$$

este independentă de drumul dintre A şi M. Alegem drumul poligonal din figura 9.9, unde segmentul AB este paralel cu axa Ox, BC paralel cu axa Oy şi CM paralel cu axa Oz. Folosind reprezentările parametrice

$$AB:\ x = t,\ y = 1,\ z = 1,\ t \in [1, x]$$
$$BC:\ x = x,\ y = t,\ z = 1,\ t \in [1, y]$$
$$CM:\ x = x,\ y = y,\ z = t,\ t \in [1, z],$$

se obţine

$$U(x, y, z) = \int_1^x \mathrm{d}t + \int_1^y (-3)\,\mathrm{d}t + \int_1^z \frac{3y - x + t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t,$$

sau $U(x, y, z) = x - 1 - 3(y - 1) + \left[(x - 3y)\frac{1}{t} + \frac{t^2}{2}\right]_1^z$.

Deci $U(x, y, z) = x/z - 3y/z + z^2/2 + K$, $K \in \mathbf{R}$.

9.10. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_{\widehat{AB}} xy\,\mathrm{d}s,$$

unde $\widehat{AB}$ este segmentul de dreaptă care uneşte punctele $A(1, 2)$, $B(2, 4)$.

R. O reprezentare parametrică a segmentului $\widehat{AB}$ este

$$\widehat{AB}:\begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}, \quad t \in [1, 2],$$

cu elementul de arc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{5}\,dt$. Integrala devine

$$I = \int_1^2 t \cdot 2t \cdot \sqrt{5}dt = 2\sqrt{5}\,\frac{t^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{14\sqrt{5}}{3}.$$

9.11. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_C (x - y) \ln (x + y) ds,$$

unde C este curba închisă formată din semicercul cu centrul în (a, a) şi de rază a, situat sub prima bisectoare, reunit cu segmentul de pe prima bisectoare cuprins între punctele

$$A_1\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{2-\sqrt{2}}{2}a\right) \text{ şi } A_2\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{2+\sqrt{2}}{2}a\right) \text{ (fig. 9.10).}$$

R. Întrucît $C = \widehat{A_1A_3A_2} \cup \widehat{A_2A_1}$, rezultă

$$I = \int_{\widehat{A_1A_3A_2}} (x - y) \ln (x + y) ds +$$

$$+ \int_{\widehat{A_2A_1}} (x - y) \ln (x + y) ds.$$

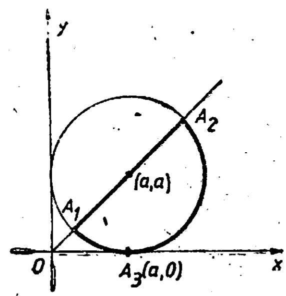


Fig. 9.10

Folosind reprezentările parametrice

$$\widehat{A_1A_3A_2}:\begin{cases} x = a + a\cos\theta \\ y = a + a\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in [-3\pi/4, \pi/4]$$

cu elementul de arc $ds = a d\theta$ şi $\widehat{A_2A_1}:\begin{cases} x = x \\ y = x \end{cases}$, $x \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}a,\ 2a\right]$.

Cu elementul de arc $ds = \sqrt{2}\,dx$, integrala curbilinie devine

$$I = \int_{-3\pi/4}^{\pi/4} a(a\cos\theta - a\sin\theta) \ln (a + a\cos\theta + a + a\sin\theta)\, d\theta +$$

$$+ \int_{(2-\sqrt{2})\cdot a/2}^{2a} 0 \cdot \sqrt{2}dx.$$

Facem schimbarea de variabilă

$$2a + a(\cos\theta + \sin\theta) = t$$

cu $dt = a(\cos\theta - \sin\theta)\,d\theta$. Avem $I = a\int\limits_{(2-\sqrt{2})a}^{(2+\sqrt{2})a} \ln t\,dt$. Integrăm prin părţi şi obţinem:

$$I = a\left(t\ln t\Big|_{(2-\sqrt{2})a}^{(2+\sqrt{2})a} - \int\limits_{(2-\sqrt{2})a}^{(2+\sqrt{2})a} dt\right) =$$

$$= a[a(2+\sqrt{2})\ln(2+\sqrt{2})a - a(2-\sqrt{2})\ln(2-\sqrt{2})a - 2a\sqrt{2}] =$$

$$= a^2[(2+\sqrt{2})\ln a + (2+\sqrt{2})\ln(2+\sqrt{2}) -$$

$$- (2-\sqrt{2})\ln a - (2-\sqrt{2})\ln(2-\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}],$$

deci $I = a^2[\sqrt{2}\ln 2a^2 + 2\ln(3+2\sqrt{2}) - 2\sqrt{2}]$.

9.12. Să se calculeze masa şi coordonatele centrului de greutate ale firului material C dat de arcul de cicloidă

$$C: x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$$

cu densitatea $\mu(x, y) = \sqrt{y}$ (fig. 9.11).

R. Masa firului este dată de integrala curbilinie

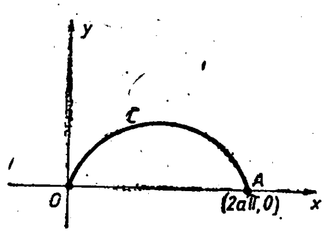


Fig. 9.11

$$M = \int\limits_C \mu(x, y)\,ds$$

iar coordonatele centrului de greutate G sînt

$$x_G = \frac{1}{M}\int\limits_C x\mu(x, y)\,ds,\quad y_G = \frac{1}{M}\int\limits_C y\mu(x, y)\,ds,$$

unde elementul de arc

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = \sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,dt.$$

Obţinem

$$M = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{a(1-\cos t)}\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,dt =$$

$$= \sqrt{2}a^{3/2}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)\,dt = \sqrt{2}a^{3/2}\cdot 2\pi,$$

iar

$$x_G = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi} a(t - \sin t)\sqrt{a(1-\cos t)}\,\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}a^{3/2}\pi}\,a^{5/2}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}(t - t\cos t - \sin t + \sin t\cos t)\,\mathrm{d}t = a\pi$$

şi

$$Y_G = \frac{1}{M}\int_0^{2\pi}[a(1-\cos t)]^{3/2}\sqrt{2}a\sqrt{1-\cos t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2^{3/2}a^{3/2}\pi}\sqrt{2}a^{5/2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{3a}{2}.$$

9.13. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \int_C \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}s,$$

unde C este arcul de pe spirala lui Arhimede $\rho = 2\theta$, conţinut în interiorul cercului de rază R şi centru $O(0, 0)$ (fig. 9.12).

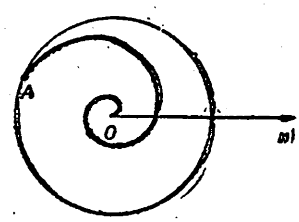


Fig. 9.12

R. Spirala intersectează cercul în punctul A pentru care $\rho = R$, dec, $\theta = \frac{R}{2}$. Avem $C: \rho = 2\theta,\ \theta \in [0, R/2]$. Întrucît $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$ obţinem reprezentarea parametrică a curbei

$$C: \begin{cases} x = 2\theta\cos\theta \\ y = 2\theta\sin\theta \end{cases},\quad \theta \in [0, R/2],$$

cu elementul de arc

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{(2\cos\theta - 2\theta\sin\theta)^2 + (2\sin\theta - 2\theta\cos\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

sau $\mathrm{d}s = 2\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta$. Integrala devine

$$I = \int^{R/2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\theta)\cdot 2\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{R/2}2\theta\sqrt{1+\theta^2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}(1+\theta^2)^{3/2}\Big|_0^{R/2},$$

deci

$$I = (1/12)[(4 + R^2)^{3/2} - 8].$$

9.14. Să se determine masa M a firului material C:

$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (lemniscata lui Bernoulli) de densitate

$$\mu(x, y) = k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

R. Avem

$$M = \int_C k\sqrt{x^2 + y^2}\,ds.$$

Datorită simetriei curbei C față de axele de coordonate

$$M = 4\int_{C_1} k\sqrt{x^2 + y^2}\,ds,$$

unde C_1: $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Folosind ecuația lemniscatei în coordonate polare

$$C : \rho^2 = a^2 \cos 2\theta$$

obținem reprezentarea parametrică a arcului C_1 (fig. 9.13).

$$C_1 : \begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta \\ y = a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

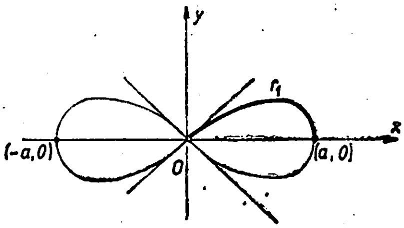


Fig. 9.13

cu

$$dx = a\left(-\sin\theta\sqrt{\cos 2\theta} - \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos\theta\right)d\theta,$$

$$dy = a\left(\cos\theta\sqrt{\cos 2\theta} - \frac{\sin 2\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\sin\theta\right)d\theta,$$

și elementul de arc $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}d\theta$. Rezultă

$$M = 2k\int_0^{\pi/4}\sqrt{a^2\cos 2\theta}\frac{a}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta = 2ka^2\theta\Big|_0^{\pi/4},$$

deci $M = ka^2\pi$.

INTEGRALE DUBLE ŞI INTEGRALE DE SUPRAFAŢĂ

10.1. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \frac{y\,dx\,dy}{1+xy},$$

unde D este dreptunghiul $[0, 1] \times [0, 2]$.

R. Aplicăm formula de reducere a integralei duble la o integrală iterată, în ordinea x, y. Obţinem:

$$I = \int_0^2 dy \int_0^1 \frac{y\,dx}{1+xy} = \int_0^2 [\ln(1+xy)]\Big|_0^1 dy =$$

$$= \int_0^2 \ln(1+y)\,dy = y\ln(1+y)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{y}{1+y}\,dy,$$

deci $I = 3\ln 3 - 2$.

10.2. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D e^{x-y}\,dx\,dy,$$

unde D este reprezentat în figura 10.1.

R. Descompunem pe D într-o reuniune de patru dreptunghiuri D_1, D_2, D_3, D_4 şi aplicăm proprietatea de aditivitate a integralei duble. Obţinem:

$$I = \iint_{D_1} e^{x-y}\,dxdy + \iint_{D_2} e^{x-y}\,dxdy +$$

$$+ \iint_{D_3} e^{x-y}\,dxdy + \iint_{D_4} e^{x-y}\,dxdy =$$

$$= \int_{-a}^{-b} dx \int_{-b}^{b} e^{x-y}\,dy + \int_{-a}^{a} dx \int_{b}^{a} e^{x-y}\,dy +$$

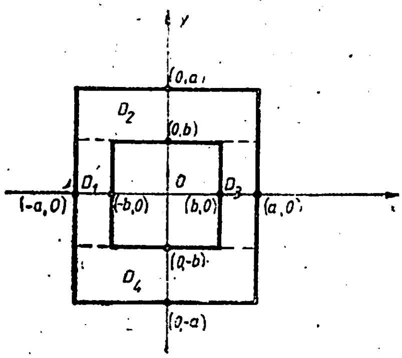


Fig. 10.1

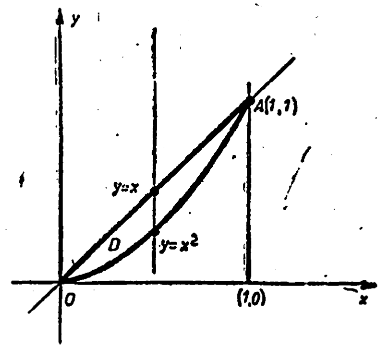


Fig. 10.2

$$+\int_{b}^{a} \mathrm{d}x \int_{-b}^{b} e^{x-y}\,\mathrm{d}y + \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{-a}^{-b} e^{x-y}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_{-a}^{-b} (-e^{x-y} + e^{x+b})\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{a} (-e^{x-y} + e^{x-b})\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_{b}^{a} (-e^{x-b} + e^{x+b})\,\mathrm{d}x + \int_{-a}^{a} (-e^{x+b} + e^{x+a})\,\mathrm{d}x,$$

deci

$$I = -e^{-2b} + e^{-2a} - e^{2b} + e^{2a}.$$

10.3. Să se calculeze integrala dublă

$$\iint_D (2x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

unde D este domeniul mărginit de dreapta $y = x$ şi de parabola $y = x^2$.

R. Domeniul D este reprezentat în figura 10.2. Avem

$$\iint_D (2x - y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} (2x - y)\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^1 \left[2xy - \frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{x^2}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(2x^2 - \frac{x^2}{2} - 2x^3 + \frac{x^4}{4}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{10}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{10}.$$

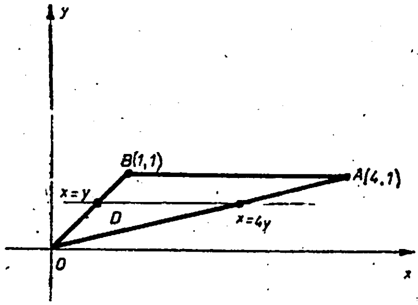


Fig. 10.3

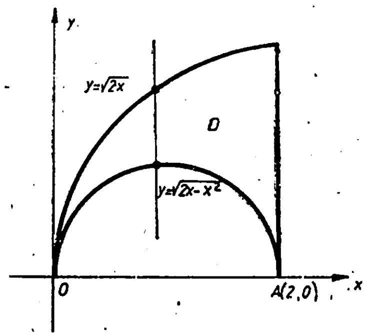


Fig. 10.4

10.4. Să se calculeze integrala dublă

$$\iint_D \sqrt{xy - y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde D este mărginit de triunghiul cu vîrfurile $O(0, 0)$, $A(4, 1)$ și $B(1, 1)$ (fig. 10.3).

R. Avem

$$\iint_D \sqrt{xy - y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{4y} \sqrt{xy - y^2}\, \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3}\, \frac{(xy - y^2)^{3/2}}{y}\Bigg|_y^{4y} \mathrm{d}y = \frac{4\sqrt{2}}{3} \int_0^1 y^2 \mathrm{d}y = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

10.5. Să se calculeze integrala dublă

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde domeniul D este mărginit de parabola $y^2 = 2x$, cercul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ și dreapta $x = 2$.

R. Domeniul D este reprezentat în figura 10.4.
Avem

$$\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x - x^2}}^{\sqrt{2x}} y\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\sqrt{2x - x^2}}^{\sqrt{2x}} \mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x^2}{2}\, \mathrm{d}x = \frac{4}{2}.$$

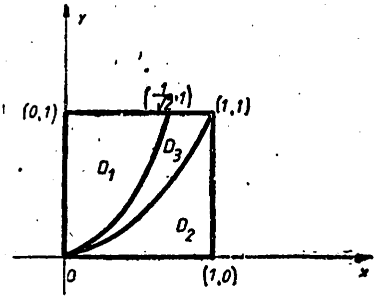


Fig. 10.5

10.6. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D f(x, y)\, dxdy,$$

unde $D = [0, 1] \times [0, 1]$, iar

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{pentru } (x, y) \in D, \text{ cu } x^2 \leqslant y \leqslant 2x^2 \\ x+y, & \text{pentru restul punctelor din } D \end{cases}$$

R. Ţinînd seama de modul în care este definită funcţia $f(x, y)$, vom scrie $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ (fig. 10.5). Întrucît $f(x, y) = 0$, pentru $(x, y) \in D_3$, integrala

$$\iint_{D_3} f(x, y)\, dxdy = 0.$$

Aşadar,

$$I = \iint_{D_1} (x + y)\, dxdy + \iint_{D_2} (x + y)\, dxdy =$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_{2x^2}^{1} (x + y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x + y)\, dy =$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{2x^2}^{1} dx + \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{x^2} dx =$$

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(x + \frac{1}{2} - 2x^3 - 2x^4\right) dx + \int_0^1 \left(x^3 + \frac{x^4}{2}\right) dx = \frac{19}{40} + \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

10.7. Să se schimbe ordinea de integrare în integrala dublă

$$I = \int_0^2 dy \int_{y^2}^{2y} f(x, y)\, dx.$$

R. Pentru fiecare y din intervalul $[0, 2]$ integrăm în raport cu x de la $x = y^2$. la $x = 2y$. Deci, domeniul de integrare D este mărginit de parabola $x = y^2$ şi de dreapta $x = 2y$ (fig. 10.6). Schimbînd ordinea de integrare, avem

$$I = \int_0^4 dx \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x, y)\, dy.$$

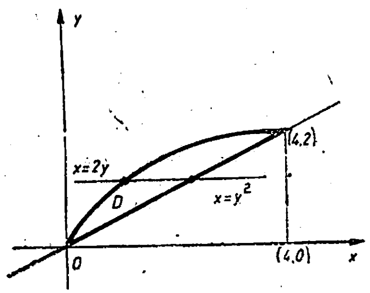


Fig. 10.6

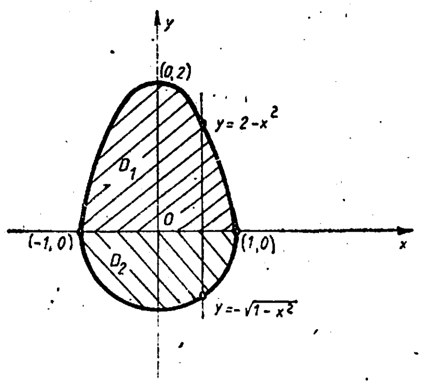


Fig. 10.7

10.8. Să se schimbe ordinea de integrare în integrala dublă

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{2-x^2} f(x, y)\, \mathrm{d}y.$$

R. Pentru fiecare x din intervalul $[-1, 1]$ integrăm în raport cu y, de la $y = -\sqrt{1-x^2}$ la $y = 2 - x^2$. În consecință, domeniul de integrare D este mărginit de semicercul $y = -\sqrt{1-x^2}$ și de parabola $y = 2 - x^2$. Cu descompunerea $D = D_1 \cup D_2$ (fig. 10.7), obținem

$$I = \iint_{D_1} f(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y =$$

$$= \int_{0}^{1} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{2-y}}^{\sqrt{2-y}} f(x, y)\, \mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\, \mathrm{d}x.$$

10.9. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_{D} \sqrt{x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde $D: x^2 + y^2 \leqslant a^2$.

R. Folosind schimbarea de variabile în coordonare polare dată de transformarea

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

cu $D': 0 \leqslant \rho \leqslant a,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi$ (fig. 10.8) și

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\rho \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho.$$

$$I = \iint_{D'} \rho^2\, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta = \int_{0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{0}^{a} \rho^2\, \mathrm{d}\rho = 2\pi \left(\frac{\rho^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{a} = \frac{2\pi a^3}{3}.$$

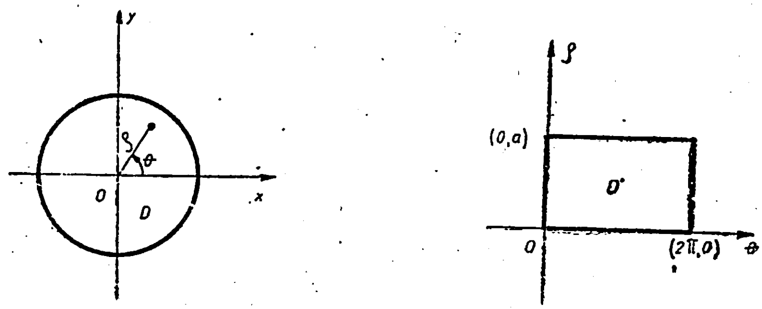


Fig. 10.8

10.10. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint\limits_D \sqrt{2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde D:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

R. Folosind schimbarea de variabile dată de transformarea

$$T : \begin{cases} x = a\rho \cos\,\theta \\ y = b\rho \sin\,\theta \end{cases},$$

cu $D' : 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ (fig. 10.9) şi

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = ab\rho,$$

obţinem:

$$I = \iint\limits_{D'} \sqrt{2 - \rho^2}\, ab\rho\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta = ab \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \sqrt{2 - \rho^2}\, \rho \mathrm{d}\rho =$$

$$= ab \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} (2 - \rho^2)^{3/2} \Bigg|_0^1 \mathrm{d}\theta = -\frac{ab}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - 2\sqrt{2})\, \mathrm{d}\theta$$

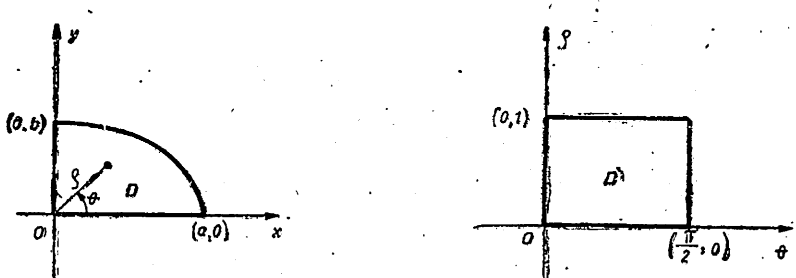


Fig. 10.9

şi deci

$$I = \frac{(2\sqrt{2} - 1)\, ab\pi}{6}.$$

10.11. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint\limits_D (x + y)^4 (x - y)^2 \, dx \, dy$$

unde D este pătratul mărginit de dreptele $x + y = 1$, $x + y = -1$, $x - y = -1$, $x - y = -3$.

R. Ecuaţiile dreptelor care mărginesc pătratul D, cît şi expresiile $x + y$ şi $x - y$ în integrala dublă, sugerează schimbarea de variabilă dată de transfromarea regulată

$$T: \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \quad \text{cu} \quad \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

T transformă pătratul D în pătratul D' din planul uOv, mărginit de dreptele $u = -1$, $u = 1$, $v = -3$, $v = -1$ (fig. 10.10). Ţinînd seama că pentru transformarea inversă T^{-1} determinantul funcţional

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{\dfrac{D(u, v)}{D(x, y)}} = -\frac{1}{2},$$

rezultă

$$I = \iint\limits_{D'} u^4 v^2 \frac{1}{2} \, du dv = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} u^4 du \int_{-3}^{-1} v^2 dv =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^5}{5} \Bigg|_{-1}^{1} \cdot \frac{v^3}{3} \Bigg|_{-3}^{-1} = \frac{26}{15}.$$

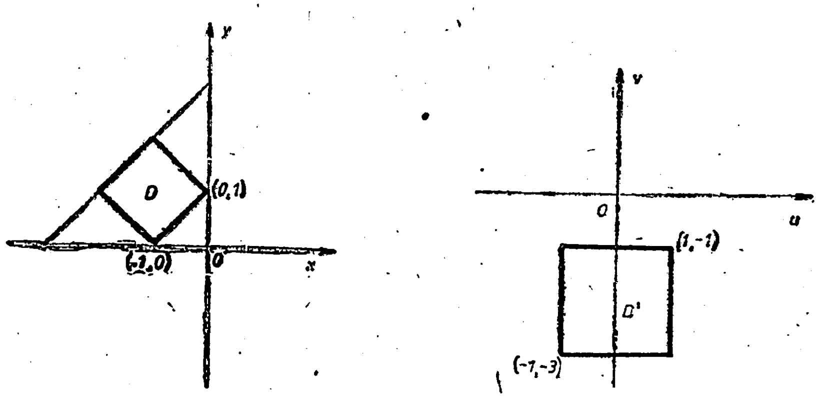


Fig. 10.10

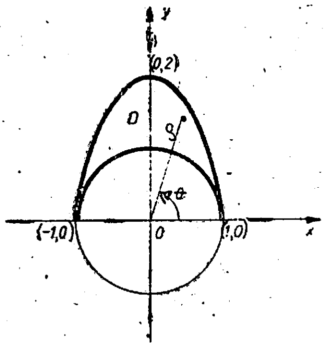


Fig. 10.11

10.12. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint\limits_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy,$$

unde D: $4x^2 + y^2 \leqslant 4$, $x^2 + y^2 \geqslant 1$, $y \geqslant 0$ (fig. 10.11).

R. Considerăm transformarea în coordonate polare

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases},$$

cu D': $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$,

$$1 \leqslant \rho < \frac{2}{\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}} \text{ și } \frac{D(x,\,y)}{D(\rho,\,\theta)} = \rho.$$

Obținem:

$$I = \int_0^{\pi} d\theta \int_1^{\frac{2}{\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}}} \rho \sin\theta\, d\rho =$$

$$= \int_0^{\pi} \sin\theta \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_1^{\frac{2}{\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}}} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{4\sin\theta}{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta.$$

Pentru calculul primei integrale facem schimbarea de variabilă $\cos\theta = t$.

$$I = -2\int_{+1}^{-1} \frac{dt}{4t^2 + 1 - t^2} + \frac{1}{2}\cos\theta\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= 2\int_{-1}^{1} \frac{dt}{3t^2+1} - 1 = \frac{2}{3}\sqrt{3}\operatorname{arg\,tg}\sqrt{3}\,t\Bigg|_{-1}^{1} - 1,$$

sau

$$I = 4\sqrt{3}\pi/9 - 1.$$

10.13. Să se determine aria mulțimii plane D limitată de lemniscata lui Bernoulli $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

R. Ținînd seama de simetria lemniscatei în raport cu cele două axe de coordonate (fig. 10.12), aria este dată de integrala

$$A_d = 4\iint\limits_{D_1} dxdy.$$

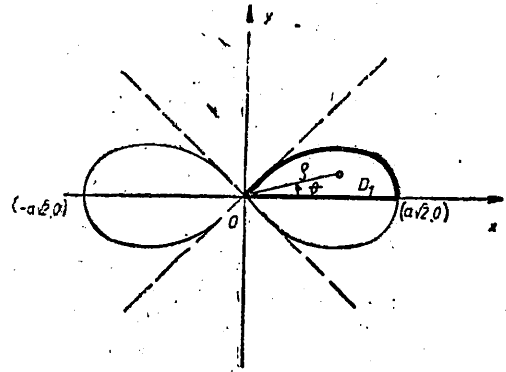


Fig. 10.12

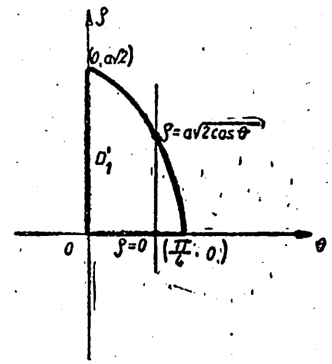


Fig. 10.13

Facem schimbarea de variabile

$$x = \rho \cos \theta,\ y = \rho \sin \theta, \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho$$

cu $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$, $0 \leqslant \rho < a\sqrt{2 \cos 2\theta}$ (D_1') (fig. 10.13).

Integrala dublă devine

$$A_D = 4 \iint\limits_{D_1'} \rho \, d\rho \, d\theta = 4 \int\limits_0^{\pi/4} d\theta \int\limits_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho d\rho =$$

$$= 4 \int\limits_0^{\pi/4} \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_0^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta = 4a^2 \int\limits_0^{\pi/4} \cos 2\theta \, d\theta = 2a^2.$$

Altfel. Aria mărginită de curba

$$C: \rho^2 = 2a^2 \cos 2\theta \ \text{cu} \ -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4$$

poate fi calculată folosind integrala curbilinie

$$A_1 = \frac{1}{2} \int\limits_C x dy - y dx.$$

O reprezentare parametrică a crubei C este

$$C: \begin{cases} x = a\sqrt{2 \cos 2\theta} \cos \theta \\ y = a\sqrt{2 \cos 2\theta} \sin \theta \end{cases}, -\pi/4 \leqslant \theta \leqslant \pi/4,$$

cu

$$dx = -a\sqrt{2}\frac{+\sin 2\theta \cos\theta + \cos 2\theta \sin\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta,$$

$$dy = a\sqrt{2}\frac{-\sin 2\theta \sin\theta + \cos 2\theta \cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\,d\theta.$$

Integrala curbilinie devine:

$$A_1 = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2a^2 \cos 2\theta \, d\theta = a^2 \frac{1}{2}\sin 2\theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = a^2$$

şi deci

$$A = 2A_1 = 2a^2.$$

10.14. Să se calculeze aria patrulaterului curbiliniu mărginit de parabolele $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = cx$, $y^2 = dx$, unde $0 < a < b$ şi $0 < c < d$.

R. Aria patrulaterului curbiliniu D (fig. 10.14) este dată de integrala dublă

$$A_D = \iint_D dx dy,$$

Ecuaţiile curbelor care mărginesc pe D sugerează transformarea punctuală regulată

$$T: \begin{cases} u = x^2/y \\ v = y^2/x \end{cases}$$

cu

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x/y & -y^2/x^2 \\ -x^2/y^2 & 2y/x \end{vmatrix} = 3.$$

T transformă patrulaterul curbiliniu D din planul xOy în dreptunghiul D' din planul uOv mărginit de dreptele $u = a$, $u = b$, $v = c$, $v = d$. Pentru transformarea inversă T^{-1} determinantul funcţional

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \frac{1}{3}$$

şi obţinem:

$$A_D = \iint_{D'} \frac{1}{3}\,du dv = \frac{1}{3}\text{aria } D'.$$

Deci

$$A_D = \frac{1}{3}(b - a)\cdot(d - c).$$

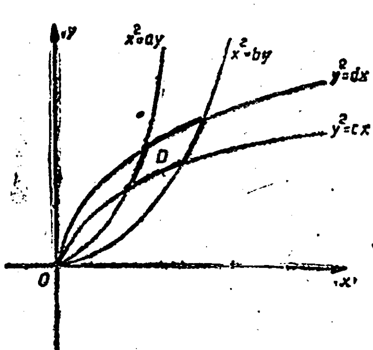


Fig. 10.14

10.15. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate G al plăcii plane omogene D mărginită de astroida $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ şi dreapta $x = 0$ cu $x \geqslant 0$.

R. Avînd în vedere simetria plăcii plane D (fig. 10.15) în raport cu axa Ox, coordonatele centrului de greutate G sînt

$$x_G = \frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}, \quad y_G = 0.$$

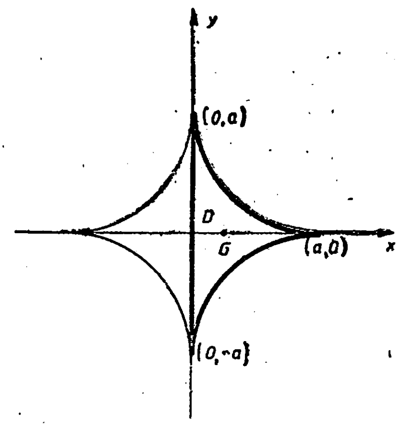


Fig. 10.15

Folosim transformarea în coordonate polare generalizate

$$T: x = \rho \cos^3 \theta,\ y = \rho \sin^3\theta \ \text{ cu } -\pi/2 \leqslant \theta < \pi/2,\ 0 \leqslant \rho \leqslant a \quad (D')$$

şi

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = 3\rho \cos^2\theta \sin^2\theta.$$

Obţinem:

$$I_1 = \iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} 3\rho^2 \cos^5\theta \sin^2\theta \,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta =$$

$$= 3\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^5 \theta \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta \int\limits_0^a \rho^2\mathrm{d}\rho = 3\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{a^3}{3} \cos^5\theta \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta.$$

Cu schimbarea de variabilă $\sin \theta = t$ integrala devine:

$$I_1 = a^3 \int\limits_{-1}^{1} (1 - t^2)^2 t^2 \,dt = \frac{16a^3}{105}$$

iar

$$I_2 = \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{D'} 3\rho \cos^2\theta \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho =$$

$$= 3\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \,\mathrm{d}\theta \int\limits_0^a \rho \,\mathrm{d}\rho = \frac{3}{4}\cdot\frac{a^2}{2} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \mathrm{d}\theta = \frac{3}{16} a^2\pi,$$

deci

$$x_G = \frac{256a}{315\pi}.$$

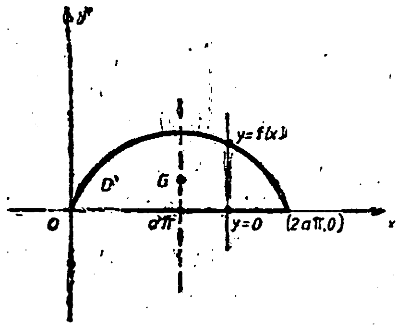


Fig. 10.16

10.16. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al plăcii plane omogene mărginită de cicloida

$$\begin{matrix} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{matrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

şi dreapta $y = 0$ (fig. 10.16).

R. Centrul de greutate G se află pe dreapta $x = a\pi$, deci

$$x_G = a\pi, \quad y_G = \frac{\iint\limits_D y \mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

Calculăm integrala

$$I_1 = \iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2a\pi} \mathrm{d}x \int\limits_0^{f(x)} y\mathrm{d}y.$$

Dacă facem substituţia

$$x = a(t - \sin t)$$

cu

$$\mathrm{d}x = a(1 - \cos t)\,\mathrm{d}t \text{ şi } t \in [0, 2\pi],$$

obţinem:

$$I_1 = \int\limits_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\,\mathrm{d}t \int\limits_0^{a(1-\cos t)} y\,\mathrm{d}y = \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1 - \cos t)^3\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{2\pi}(1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{a^3}{2}\left(t - 3\sin t + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t - \sin t + \frac{\sin^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{5\pi}{2}a^3.$$

Analog

$$I_2 = \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int\limits_0^{f(x)}\mathrm{d}y = \int\limits_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\,\mathrm{d}t\int\limits_0^{a(1-\cos t)}\mathrm{d}y =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2\,\mathrm{d}t = a^2\left(t - 2\sin t + \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2$$

Deci,

$$y_G = 5a/6.$$

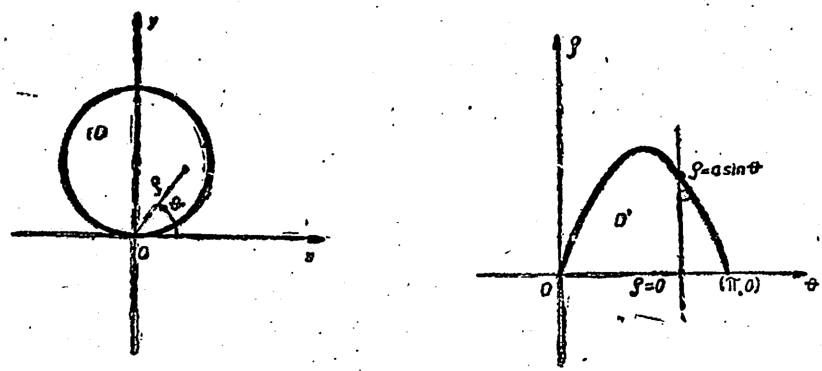


Fig. 10.17

10.17. Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa Ox al plăcii plane de densitate $\mu = 1$, mărginită de cercul $x^2 + y^2 = ay$ $(a > 0)$.

R. Momentul de inerţie I_x este dat de integrala dublă

$$I_x = \iint_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Efectuăm transformarea în coordonate polare

$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \text{cu} \quad \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho.$$

Ecuaţia cercului în coordonate polare este $\rho^2 = a\rho \sin \theta$, deci $D' : 0 \leqslant \theta < \pi$, $0 \leqslant \rho \leqslant a \sin \theta$ (fig. 10.17).

Obţinem:

$$I_x = \iint_{D'} \rho^3 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\theta = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \int_0^{a \sin \theta} \rho^3 \sin^2\theta \, \mathrm{d}\rho =$$

$$= \frac{a^4}{4} \int_0^\pi \sin \theta^6 \, \mathrm{d}\theta = \frac{a^4}{6} \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)^3 \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{a^4}{32} \int_0^\pi (1 - 3 \cos 2\theta + 3 \cos^2 2\theta - \cos^3 2\theta) \, \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{a^4}{32} \left[\left(\theta - \frac{3}{2} \sin 2\theta\right) \Bigg|_0^\pi + 3 \int_0^\pi \frac{1 + \cos 4\theta}{2} \, \mathrm{d}\theta - \right.$$

$$\left. - \int_0^\pi (1 - \sin^2 2\theta) \cos 2\theta \, \mathrm{d}\theta \right] = \frac{5\pi a^4}{64}.$$

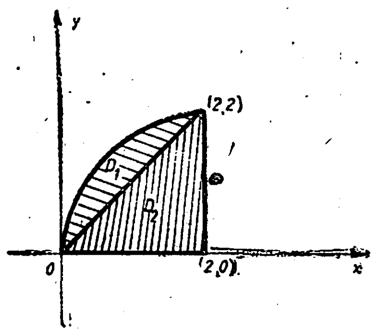


Fig. 10.18

10.18. Să se determine momentul de inerție în raport cu axa Ox al plăcii plane de densitate $\mu(x, y) = |x - y|$, mărginită de $y = \sqrt{2x}$, $y = 0$ cu $0 \leqslant x \leqslant 2$.

R. Momentul de inerție este dat de integrala dublă

$$I_x = \iint_D y^2|x - y|\, dx\, dy.$$

Ținînd seama de

$$|x - y| = \begin{cases} x - y, & \text{pentru } x - y \geqslant 0 \\ -x + y, & \text{pentru } x - y < 0, \end{cases}$$

rezultă descompunerea $D = D_1 \cup D_2$ (fig. 10.18), iar integrala devine

$$I_x = \iint_{D_1} y^2(-x + y)\, dx dy + \iint_{D_2} y^2(x - y)\, dx dy =$$

$$= \int_0^2 dx \int_x^{\sqrt{2x}} y^2(y - x)\, dy + \int_0^2 dx \int_0^x y^2(x - y)\, dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y^4}{4} - x\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_x^{\sqrt{2x}} + \int_0^2 \left(x\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^x dx =$$

$$= \int_0^2 \left(x^2 - \frac{2x^2\sqrt{2x}}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^4}{3}\right) dx + \int_0^2 \left(\frac{x^4}{3} - \frac{x^4}{4}\right) dx,$$

deci

$$I_x = 24/35.$$

10.19. Să se determine volumul corpului Ω mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, cilindrul $x^2 + y^2 - 2x = 0$ și planul xOy cu $z \geqslant 0$ (fig. 10.19).

R. Nătou cu S_2 partea din sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ decupată de cilindrul $x^2 + y^2 - 2x = 0$.

Avem

$$S_2 \colon z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},\ (x, y) \in D,$$

unde

$$D \colon x^2 + y^2 - 2x \leqslant 0 \quad \text{(fig. 10.20)}.$$

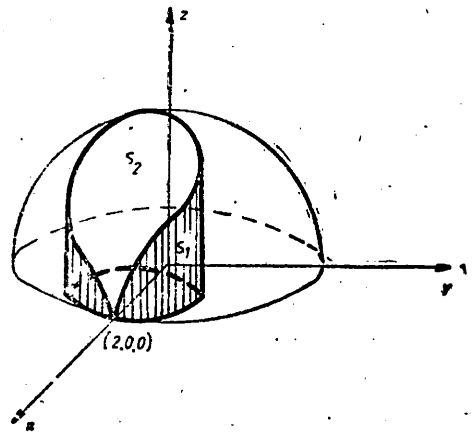


Fig. 10.19

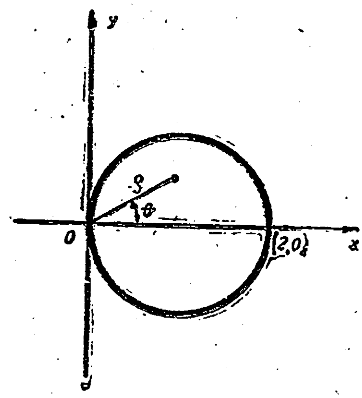


Fig. 10.20

Volumul căutat este dat de integrala dublă

$$V = \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Schimbarea de variabile în coordonate polare

$x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ cu $-\pi/2 \leqslant \theta < \pi/2$, $0 \leqslant \rho \leqslant 2 \cos \theta$, ne dă

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \sqrt{4 - \rho^2}\, \rho \mathrm{d}\rho = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\frac{(4-\rho^2)^{3/2}}{3}\right)\Bigg|_0^{2\cos\theta} \mathrm{d}\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^3\theta)\, \mathrm{d}\theta = \frac{8}{3}\,\theta\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{8}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos^2\theta)\, \mathrm{d}(\cos\theta)$$

$$V = 8\pi/3.$$

10.20. Să se determine volumul corpului mărginit de suprafețele $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$ (fig. 10.21).

R. Notăm cu S_3 partea din paraboloidul eliptic $z = x^2 + y^2$ decupată de cilindrul drept $S_1 : y = x^2$ și de planul $S_2 : y = 1$. Dacă D este proiecția suprafeței S_3 în planul xOy, atunci

$$S_3 : z = x^2 + y^2,\ (x, y) \in D$$

și volumul corpului este dat de integrala dublă

$$V = \iint_D (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

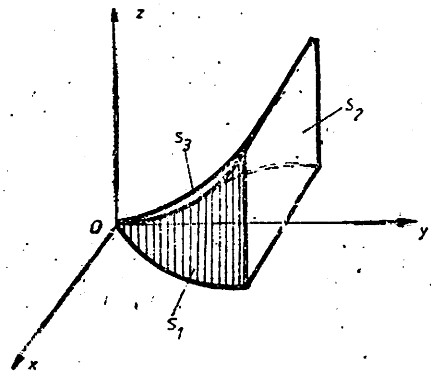


Fig. 10.21

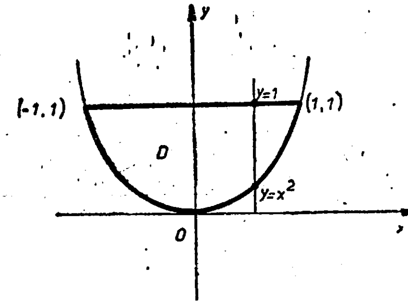


Fig. 10.22

unde D este reprezentat în fig. 10.22. Cu acestea

$$V = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \int_{x^2}^{1} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{1} \mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{88}{108}.$$

10.21. Se dă un cilindru drept cu baza o elipsă de semiaxe a şi b $(a<o)$. Să se determine volumul corpului obţinut prin secţiunea acestui cilindru cu un plan care conţine semiaxa mică a elipsei (fig. 10.23).

R. Alegem axa Ox pe direcţia semiaxei mici a elipsei şi axa Oy pe direcţia semiaxei mari. Ecuaţia planelor care conţin axa Ox este $z = \lambda y$, $\lambda \in \mathbf{R}$. Notăm cu S_2 partea din planul $z = \lambda y$ decupată de cilindrul drept S_1: $x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1 = 0$ şi cu D proiecţia lui S_2 în planul xOy (fig. 10.24). Volumul corpului este dat de integrala dublă

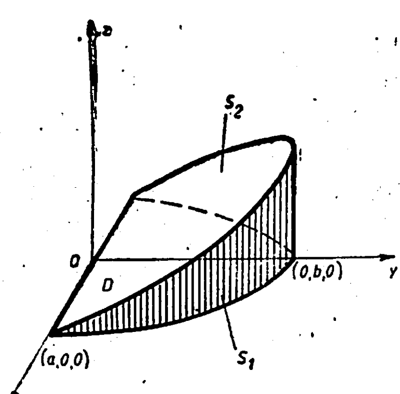


Fig. 10.23

$$V = \iint_D \lambda y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \lambda \int_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int_{0}^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} y\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{\lambda}{2} \int_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{\lambda b^2}{2}\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{2ab^2\lambda}{3}, \quad \lambda > 0.$$

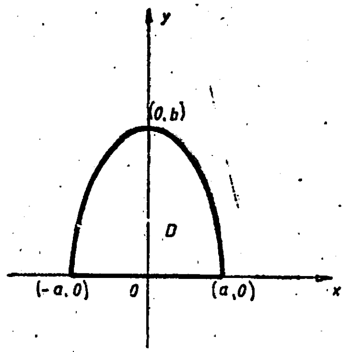


Fig. 10.24

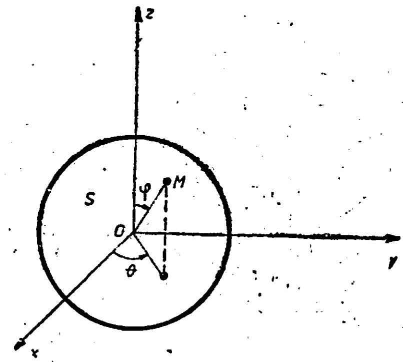


Fig. 10.25

10.22. Să se calculeze integrala de suprafaţă

$$I = \iint\limits_S (x^2 + y^2)\, d\sigma,$$

unde S este suprafaţa sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ (fig. 10.25).

R. Folosim reprezentarea parametrică a sferei

$$S: \begin{cases} x = a \cos \theta \sin \varphi \\ y = a \sin \theta \sin \varphi, \\ z = a \cos \varphi \end{cases}$$

cu $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, (D) şi elementul de arie

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, d\theta\, d\varphi,$$

unde

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = a^2 \sin^2\varphi,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = a^2.$$

Rezultă $d\sigma = a^2 \sin \varphi\, d\theta\, d\varphi$, iar integrala de suprafaţă devine

$$I = \iint\limits_D a^2 \sin^2\varphi \cdot a^2 \sin \varphi\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= a^4 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\, d\varphi = \frac{8\pi a^4}{3}.$$

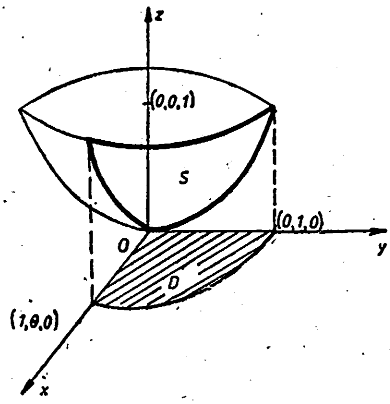


Fig. 10.26

10.23. Să se calculeze integrala de suprafață

$$I = \iint_S xyz \, d\sigma,$$

unde S este suprafața paraboloidului $x^2 + y^2 = z$ situată între planele $z = 0$, $z = 1$ cu $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

R. Suprafața S este reprezentată în figura 10.26.

Notăm cu D proiecția suprafeței S în planul xOy. Avem:

$$S: z = x^2 + y^2, \ (x, y) \in D,$$

unde

$$D: x^2 + y^2 \leqslant 1, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0.$$

Folosind elementul de arie al suprafeței S

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \, dxdy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dxdy,$$

obținem

$$I = \iint_D xy(x^2 + y^2)\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dxdy.$$

Schimbarea de variabile: $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ cu

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1, \ 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2} \text{ și } \frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = \rho,$$

ne dă

$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \rho^5 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cos \theta \sin \theta \, d\rho =$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} \cdot \int_1^5 \left(\frac{t-1}{4}\right)^2 t^{1/2} \frac{dt}{8} = \frac{125\sqrt{5} - 1}{1680}.$$

10.24. Să se calculeze integrala de suprafață

$$I = \iint_S \left(2x + \frac{4}{3}y + z\right) d\sigma,$$

unde $S: x/2 + y/2 + z/4 = 1$ cu $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

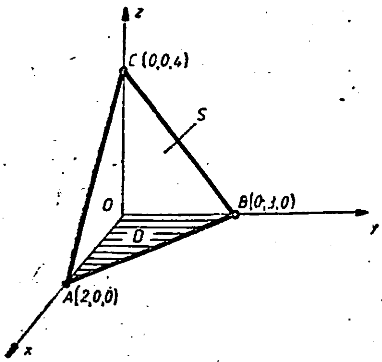


Fig. 10.27

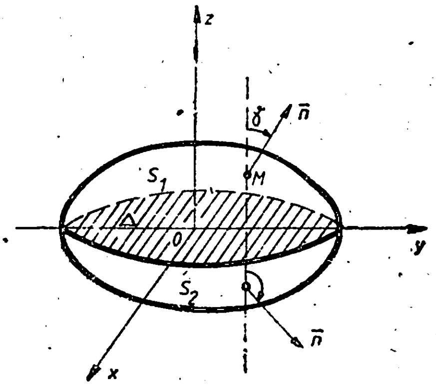


Fig. 10.28

R. Triunghiul ABC (fig. 10.27) limitează suprafaţa plană S. Notînd cu D proiecţia suprafeţei S în planul xOy, putem scrie

$$S:\ z = 4(1 - x/2 - y/3),\ (x, y) \in D.$$

Calculăm

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = -2,\quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4}{3},\qquad d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy = \frac{\sqrt{61}}{3}\, dxdy$$

şi obţinem

$$I = \iint_D \left(2x + \frac{4}{3}y + 4 - 2x - \frac{4}{3}y\right)\frac{\sqrt{61}}{3}\, dxdy =$$

$$= \frac{4\sqrt{61}}{3}\iint_D dxdy = \frac{4\sqrt{61}}{3}\text{aria } D.$$

Aria $D = 3$, deci $I = 4\sqrt{61}.$

10.25. Să se calculeze integrala de suprafaţă

$$I = \iint_S z^2\, dxdy,$$

unde S este faţa exterioară a elipsoidului $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1.$

R. O reprezentare parametrică a elipsoidului S (fig. 10.28) este

$$S: \begin{cases} x = a\cos\theta\sin\varphi \\ y = b\sin\theta\sin\varphi, \\ z = c\cos\varphi \end{cases}\quad \begin{matrix} 0 \leqslant \theta < 2\pi \\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi. \end{matrix}$$

Putem scrie

$$I = \iint_S z^2 \cos\gamma\, d\sigma,$$

unde elementul de arie al suprafeței este

$$d\sigma = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, d\theta\, d\varphi$$

iar γ este unghiul pe care îl face normala $\bar{n}$ la fața exterioară a elipsoidului cu semiaxa pozitivă Oz. Avem

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

în care

$$C = \frac{D(x,\ y)}{D(\varphi,\ \theta)} = ab \sin\varphi \cos\varphi = \frac{ab}{2} \sin 2\varphi.$$

Dacă luăm semnul + în fața radicalului, pe fața exterioară a elipsoidului (S_1) situată deasupra planului xOy $(0 < \varphi < \pi/2)$ $\cos\gamma$ este pozitiv, iar pe fața exterioară (S_2) situată sub planul xOy $(\pi/2 < \varphi < \pi)$ $\cos\gamma$ este negativ. Folosind aceste elemente, obținem:

$$I = \iint_D c^2 \cos^2\varphi \frac{ab}{2} \sin 2\varphi \cdot d\theta\, d\varphi,$$

unde $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$.

Deci,

$$I = abc^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos^3\varphi \sin\varphi\, d\varphi = 0.$$

10.26. Să se calculeze integrala de suprafață

$$I = \iint_S x^2\, dy\, dz + y^2\, dx\, dz + z^2\, dx\, dy,$$

unde S reprezintă fața exterioară a semisferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ cu $z \geqslant 0$.

R. Ecuația vectorială a suprafeței S este

$$S: \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, \bar{k},\ (x, y) \in D,$$

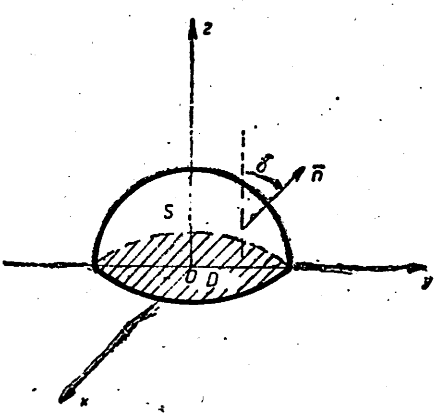


Fig. 10.29

unde $D: x^2 + y^2 \leqslant a^2$ (proiecția suprafeței S în planul xOy) este reprezentată în figura 10.29.

$$I = \iint_S (x^2 \cos\alpha + y^2 \cos\beta + z^2 \cos\gamma)\, d\sigma$$

în care $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ sînt componentele normalei $\bar{n}$ la fața exterioară a semisferei S. Avem

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|} = \frac{x}{a}\bar{i} + \frac{y}{a}\bar{j} + \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}{a}\bar{k},$$

(întrucît pe fața exterioară a semisferei $S \cos\gamma > 0$). Elementul de arie al suprafeței este

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy$$

și integrala

$$I = \iint_D \left(\frac{x^3 + y^3}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} + a^2 - x^2 - y^2 \right) dx\, dy.$$

Trecînd la coordonate polare, rezultă

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \frac{\rho^4(\cos^3\theta + \sin^3\theta)}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\, d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a (a^2 - \rho^2)\rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^3\theta + \sin^3\theta) d\theta \int_0^a \frac{\rho^4}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\, d\rho + \int_0^{2\pi} \left(a^2 \frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right)\Bigg|_0^a d\theta =$$

$$= 0 \cdot \int_0^a \frac{\rho^4}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}\, d\rho + 2\pi \left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4} \right) = \frac{\pi a^4}{2}.$$

10.27. Să se determine momentul de inerție, în raport cu axa Oz, al suprafeței conice $z^2 = x^2 + y^2$ cuprinsă între planele $z = 0$ și $z = 4$, de densitate $\mu(x, y, z) = 1$.

R. Momentul de inerție este dat de integrala de suprafață

$$I_z = \iint_S \mu(x\ y\ z) \cdot (x^2 + y^2)\, d\sigma.$$

Putem scrie

$$S : z = \sqrt{x^2 + y^2},\ (x\ y) \in D$$

unde $D: x^2 + y^2 \leqslant 4$ este proiecția suprafeței conice S în planul xOy, iar elementul de arie al suprafeței S:

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2}}\, dx\, dy = \sqrt{2}\, dx\, dy.$$

Cu acestea

$$I_z = \sqrt{2} \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, xy.$$

Schimbarea de variabile

$$x = \rho \cos 0 \quad y = \rho \sin\theta \text{ cu } 0 \leqslant \theta < 2\pi \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 2$$

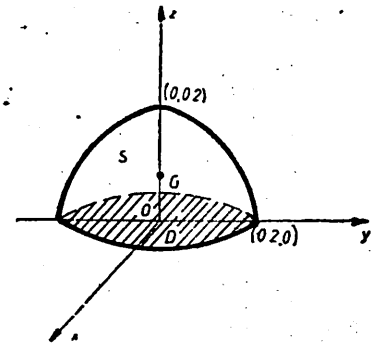


Fig. 10.30.

ne conduce la integrala

$$I_z = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3\, d\rho = 8\sqrt{2}\pi.$$

10.28. Să se determine coordonatele centrului de greutate al suprafeței omogene

$$S: x^2/2 + y^2/2 = 2 - z \text{ cu } z \geqslant 0.$$

R. Paraboloidul eleptic (fig. 10.30) fiind simetric față de axa Oz centrul de greutate $G \in Oz$ deci

$$x_G = y_G = 0,\quad z_G = \frac{\iint\limits_S z\,d\sigma}{\iint\limits_S d\sigma}.$$

Avem

$$S: z = 2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2},\quad (x, y) \in D,$$

unde $D: x^2 + y^2 \leqslant 4$ este proiecția suprafeței S în planul xOy. Elementul de arie al suprafeței S

$$d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy = \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\,dy.$$

Calculăm

$$I_1 = \iint\limits_S d\sigma = \iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\,dy.$$

Schimbarea de variabile în coordonate polare

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 2,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

ne conduce la integrala

$$I_1 = \int_1^{2\pi} d\theta \int_0^2 \sqrt{1 + \rho^2}\,\rho\, d\rho = \frac{2\pi}{3}(5\sqrt{5} - 1)$$

Analog,

$$I_2 = \iint\limits_S z\,d\sigma = \iint\limits_D \left(2 - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}\right)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\,dy =$$

$$= 2I_1 - \frac{1}{2}\iint\limits_D (x^2 + y^2)\sqrt{1 + x^2 + y^2}\, dx\,dy =$$

$$= 2I_1 - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3\sqrt{1 + \rho^2}\, d\rho = \frac{2\pi}{3}\left(5\sqrt{5} - \frac{11}{5}\right),$$

deci

$$z_G = \frac{\frac{2\pi}{3}\cdot\left(5\sqrt{5}-\frac{11}{5}\right)}{\frac{2\pi}{3}\cdot(5\sqrt{5}-1)} = \frac{307-15\sqrt{5}}{310}.$$

10.29. Să se calculeze aria porțiunii de pe suprafața $z = x^2$ decupată de planele $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$ și $y = 0$ (fig. 10.31).

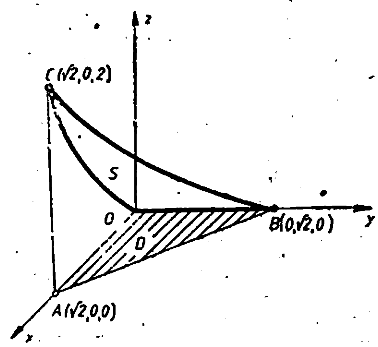


Fig. 10.31

R. Notăm cu S partea de pe suprafața cilindrului $z = x^2$ decupată de planele $x + y = \sqrt{2}$, $x = 0$, $y = 0$. Aria suprafeței S este dată de integrala de suprafață

$$A = \iint_S \mathrm{d}\sigma$$

Putem scrie

$$S : z = x^2,\ (x, y) \in D,$$

unde $D : x + y \leqslant \sqrt{2}$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, iar elementul de arie al suprafeței

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Cu acestea,

$$A = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2}-x} \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{2} - x)\sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sqrt{2}\,I - \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\,I - \frac{1}{12}(1 + 4x^2)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2}},$$

unde

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1 + 4x^2}{\sqrt{1 + 4x^2}}\,\mathrm{d}x$$

$$I = \frac{1}{2}\ln\left(2x + \sqrt{1 + 4x^2}\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} + x\sqrt{1 + 4x^2}\Big|_0^{\sqrt{2}} - \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4x^2}\,\mathrm{d}x,$$

sau

$$2I = \frac{1}{2} \ln (2\sqrt{2} + 3) + \frac{3\sqrt{2}}{4},$$

deci

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4} \ln (2\sqrt{2} + 3) + \frac{5}{6}.$$

10.30. Să se determine masa pînzei paraboloidului hiperbolic $x^2 - y^2 = 2az$ cuprinsă în interiorul cilindrului $x^2+y^2 = a^2$, de densitatea $\mu(x, y, z) = k|z|$.

R. Notăm cu S partea de pe paraboloid decupată de cilindrul drept $x^2 + y^2 = a^2$ şi care este situată în octantul IV şi VIII (fig. 10.32). Ţinînd seama de simetria paraboloidului în raport cu planele yOz şi xOz, masa plăcii este dată de intetrala de suprafaţă

$$M = 4\iint_S \mu(x, y, z)\, d\sigma = 4\iint_S k|z|\, d\sigma.$$

Suprafaţa S se poate scrie ca reuniunea suprafeţelor S_1 şi S_2. Supraiaţa S_1 este aceă parte a suprafeţei S pentru care $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$, far rpoiecţia ei în planul xOy este $D_1 : x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $-y \leqslant x, y \leqslant 0$ ($x=-y$ este generatoarea rectilinie a paraboloidului care trece prin origine). Suprafaţa S_2 este acea parte a suprafeţei S pentru care $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$, iar proiecţia ei în planul xOy este $D_2 : x^2 + y^2 \leqslant a^2$, $-y \geqslant x$, $x \geqslant 0$.

Pe suprafeţele S_1 şi S_2 elementul de arie este

$$d\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^1}}\, dxdy,$$

Integrala de suprafaţă devine

$$M = 4k\left(\iint_{S_1} z\, d\sigma - \iint_{S_2} z d\sigma\right) =$$

$$= 4k\left(\iint_{D_1} \frac{x^2 - y^2}{2a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a}\, dx\, dy -\right.$$

$$\left. - \iint_{D_2} \frac{x^2 - y^2}{2a} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + x^2 + y^2}}{a}\, dxdy\right),$$

D_1 şi D_2 sînt date în figura 10.33.

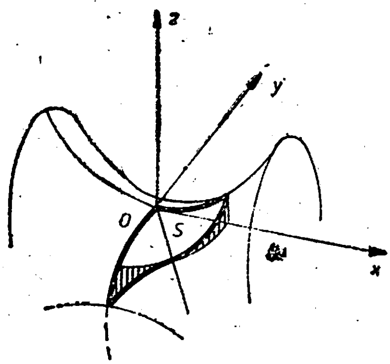


Fig. 10.32

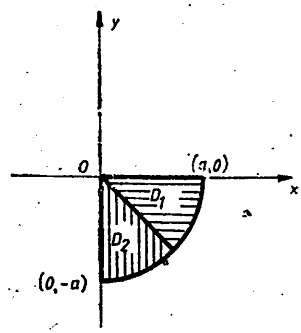


Fig. 10.33

Trecînd la coordonate polare: $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, obținem

$$M = \frac{2k}{a^2}\left(\int\limits_{-\pi/4}^{0} d\theta \int\limits_{0}^{a} \rho^3 \sqrt{a^2+\rho^2} \cos 2\theta \, d\rho - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-\pi/2}^{-\pi/4} d\theta \int\limits_{0}^{a} \rho^3 \sqrt{a^2+\rho^2} \cos 2\theta \, d\rho\right).$$

Pentru calculul integralei

$$I = \int\limits_{0}^{a} \rho^3 \sqrt{a^2+\rho^2} \, d\rho$$

facem schimbarea de variabilă $a^2 + \rho^2 = t$, $2\rho \, d\rho = dt$ și obținem

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{a^2}^{2a^2} (t - a^2) t^{1/2} \, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} t^{5/2} - \frac{2}{3} a^2 t^{3/2}\right)\Bigg|_{a^2}^{2a^2}$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}+1)}{15} a^5.$$

Rezultă

$$M = \frac{2k}{a^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta \Bigg|_{-\pi/4}^{0} - \frac{1}{2}\sin 2\theta \Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right) \frac{2(\sqrt{2}+1)}{15} a^5$$

sau

$$M = \frac{4ka^3}{15}(\sqrt{2}+1).$$

10.31. Să se calculeze momentul de inerţie, faţă de axa Oz, al pînzei paraboloidului de rotaţie $x^2 + y^2 = 4hz$ cu $0 \leqslant z \leqslant h$ de densitate $\mu(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$.

R. Proiecţia suprafeţei S în planul xOy este discul $D: x^2 + y^2 \leqslant 4h^2$. Momentul de inerţie cerut este dat de integrala de suprafaţă

$$I_z = \iint_S \mu(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2)\, \mathrm{d}\sigma$$

unde

$$S: z = \frac{x^2 + y^2}{4h}, \quad (x, y) \in D, \text{ (fig. 10.34)},$$

cu elementul de arie

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4h^2} + \frac{y^2}{4h^2}}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2h} \sqrt{4h^2 + x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Folosind aceste elemente, obţinem

$$I_z = \iint_S z(x^2 + y^2)^2\, \mathrm{d}\sigma =$$

$$= \frac{1}{2h} \iint_D \frac{x^2 + y^2}{4h} (x^2 + y^2)^2 \sqrt{4h^2 + x^2 + y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Cu schimbarea de variabile

$$x = \rho \cos \theta,\ y = \rho \sin \theta,\ 0 \leqslant \rho \leqslant 2h,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

integrala devine

$$I_z = \frac{1}{8h^3} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{2h} \rho^6 \sqrt{4h^2 + \rho^2}\, \rho \mathrm{d}\rho.$$

Mai facem schimbarea de variabilă

$$4h^2 + \rho^2 = u,\ 2\rho\, \mathrm{d}\rho = \mathrm{d}u$$

şi obţinem

$$I_z = \frac{1}{2} \frac{\pi}{4h^2} \int_{4h^2}^{8h^2} (u - 4h^2)^3 \sqrt{u}\, \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{\pi}{8h^2} \int_{4h^2}^{8h^2} (u^3 - 12h^2u^2 + 48h^4u - 64h^6) \sqrt{u}\, \mathrm{d}u =$$

$$= \frac{\pi}{8h^2} \left(\frac{2}{9} u^{9/2} - 12 \frac{2}{7} u^{7/2}h^2 + 48 \frac{2}{9} u^{3/2}h^4 - 64 \frac{2}{3} u^{3/2}h^6 \right) \Bigg|_{4h^2}^{8h^2}$$

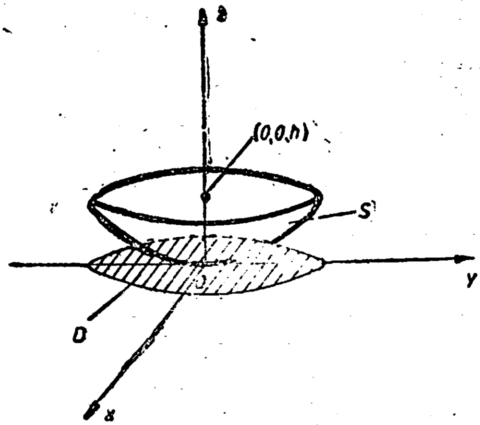


Fig. 10.34

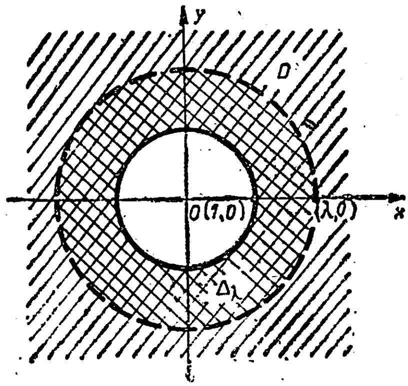


Fig. 10.35

sau

$$I_z = \pi h^7 A,$$

unde am notat

$$A = \frac{1}{8}\left[\frac{2}{9}\left((2\sqrt{2})^9 - 2^9\right) - \frac{24}{7}\left((2\sqrt{2})^7 - 2^7\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{96}{5}\left((2\sqrt{2})^5 - 2^5\right) - \frac{128}{3}\left((2\sqrt{2})^3 - 2^3\right)\right] = \frac{256}{315}(13\sqrt{2} + 8).$$

10.32. Să se caulculeze integrala dublă

$$I = \iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2)^3},$$

unde $D: x^2 + y^2 \geqslant 1$ (fig. 10.35).

R. Mulţimea D este nemărginită, iar funcţia

$$f(x, y) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^3}$$

este continuă şi pozitivă pentru $(x, y) \in D$. Considerăm mulţimile $\Delta_\lambda \subset D$, $\Delta_\lambda: 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant \lambda^2$ şi calculăm limita

$$\lim_{\lambda\to\infty} \iint\limits_{\Delta_\lambda} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2)^3}.$$

Facem schimbarea de variabile: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ cu $1 \leqslant \rho \leqslant \lambda$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Limita devine:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_1^{\lambda} \frac{\rho\mathrm{d}\rho}{(\rho^2)^3} = 2\pi \lim_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\,\frac{1}{\rho^4}\right)\Bigg|_1^{\lambda} =$$

$$= 2\pi \lim_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{\lambda^4} - 1\right) = \frac{\pi}{2}.$$

deci integr la I este convergentă şi $I = \pi/2$.

10.33. Să se arate că integrala dublă

$$I = \iint_{\mathbf{R}^2} \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}$$

este divergentă.

R. Funcția

$$f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}$$

este continuă și pozitivă pentru $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ (nemărginit). Considerăm mulțimile $\Delta_\lambda : x^2 + y^2 \leqslant \lambda$, $\Delta_\lambda \subset \mathbf{R}^2$ și calculăm limita

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{\Delta_\lambda} \frac{dx dy}{1 + x^2 + y^2}.$$

Schimbarea de variabile: $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ cu $0 \leqslant \rho \leqslant \lambda$ și $0 \leqslant \theta < 2\pi$ ne dă:

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\lambda} \frac{\rho}{1 + \rho^2} d\rho = 2\pi \lim_{\lambda \to \infty} \int_0^{\lambda} \frac{\rho}{1 + \rho^2} d\rho =$$

$$= 2\pi \lim_{\lambda \to \infty} \left[\frac{1}{2} \ln (1 + \rho^2) \right] \Big|_0^{\lambda} =$$

$$= \pi \lim_{\lambda \to \infty} \ln (1 + \lambda^2) = \infty,$$

deci integrala I este divergentă.

10.34. Să se calculeze integrala dublă

$$I = \iint_D \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx\, dy,$$

unde D este discul $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

R. Funcția

$$f(x, y) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

este pozitivă în D și nemărginită în origine: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \infty$.

Integrala improprie I este convergentă dacă

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\Delta_\varepsilon} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx\, dy$$

există și este finită, unde Δ este coroana circulară $\varepsilon \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1$ (fig. 10.36).

Cu schimbarea de variabile: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $\varepsilon \leqslant \rho \leqslant 1$, limita devine

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^1 \left(\ln\frac{1}{\rho}\right)\rho\, d\rho =$$

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\rho^2}{2}\ln\frac{1}{\rho} + \frac{\rho^2}{4}\right]\Bigg|_\varepsilon^1 =$$

$$= 2\pi \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\varepsilon^2\cdot\ln\frac{1}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Deci, integrala I este convergentă și $I = \pi/2$.

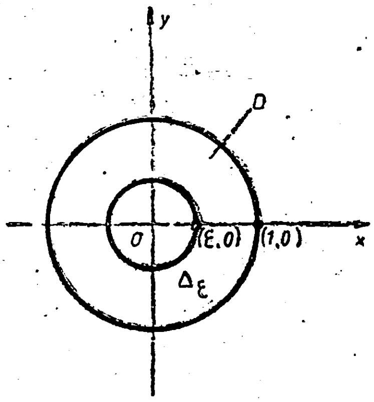


Fig. 10.36

10.35. Să se studieze convergența integralei duble

$$\iint_D \frac{dx dy}{(x^2+y^2)^\alpha (x^2+y^2+R^2)^\beta},$$

cu $D = [0, \infty) \times [0, \infty)$ după α și β apoi să se calculeze pentru $\alpha = 1/2$ și $\beta = 2$.

R. Deoarece $(0, 0) \in D$ și în acest punct integrantul este nemărginit trebuie să avem

$$\lim_{(x^2+y^2)\to 0} (x^2+y^2)^\gamma \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha (x^2+y^2+R^2)^\beta} = A \text{ (finit)}$$

pentru $\gamma < 1$, ceea ce cere ca $\alpha < 1$. Integrala este improprie și pentru că D este nemărginit. Dacă punem

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,$$

D este parcurs pentru

$$0 \leqslant \rho < \infty,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2.$$

$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty \frac{\rho d\rho}{\rho^{2\alpha}(\rho^2+R^2)^\beta}$$

și trebuie să avem

$$\frac{\rho}{\rho^{2\alpha}(\rho^2+R^2)^\gamma} \leqslant \frac{M}{(\rho^2+R^2)^\gamma},\ \gamma > 1,\ M > 0,$$

sau $-1 + 2\alpha + 2\beta > \gamma > 1$ sau $\alpha + \beta > 1$.

Pentru $\alpha = 1/2$, $\beta = 2$ această condiție este îndeplinită. Obținem efectiv

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty}\frac{d\rho}{(\rho^2+R^2)^2} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2R^2}\cdot\frac{\rho}{\rho^2+R^2}+\frac{1}{2R^3}\operatorname{arctg}\frac{\rho}{R}\right)\Bigg|_0^{\infty};$$

$$I = \pi/8 \cdot 1/R^3.$$

10.36. Să se calculeze integrala de suprafață

$$I = \iint_S \frac{x^2 d\sigma}{\sqrt{1+x^2+y^2}\,(x^2+y^2+a^2)^3}$$

unde S este partea din pînza paraboloidului $x^2+y^2=2z$, cu $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

R. Avem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = y,\quad \text{deci}\quad d\sigma = \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Integrala devine

$$I = \iint_D \frac{x^2\sqrt{1+x^2+y^2}}{\sqrt{1+x^2+y^2}\,(x^2+y^2+a^2)^3}\,dx\,dy,$$

unde D este primul cadran din planul xOy, deci $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$. Mulțimea de integrare fiind nemărginită trebuie să ne asigurăm de convergența ei. Facem schimbarea de variabile

$$x = \rho\cos\theta,\quad y = \rho\sin\theta,\quad dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\theta$$

cu

$$0 \leqslant \rho < \infty,\quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2;$$

integrala dublă se scrie în noile variabile astfel

$$I = \int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\infty}\frac{\rho^2}{(\rho^2+a^2)^3}\,\rho\,d\rho.$$

Observăm că integrala în raport cu ρ are sens deoarece gradul numitorului întrece cu trei unități gradul numărătorului. Obținem succesiv

$$I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\infty}\left[\frac{\rho}{(\rho^2+a^2)^2}-\frac{a^2\rho}{(\rho^2+a^2)^3}\right]d\rho$$

$$= \frac{\pi}{4}\left[-\frac{1}{2}\,\frac{1}{\rho^2+a^2}+\frac{a^2}{4}\cdot\frac{1}{(\rho^2+a^2)^2}\right]\Bigg|_0^{\infty};$$

$$I = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{2a^2}-\frac{1}{4}\,\frac{1}{a^2}\right) = \frac{\pi}{16\cdot a^2}.$$

10.37. În peretele plan şi vertical al unui rezervor cu lichid se află o deschidere plană în formă de trapez isoscel cu bazele $a = 8$ cm, $b = 3$ cm şi înălţimea $h = 5$ cm. Deschiderea se află la adîncimea $c = 4$ cm. Să se determine debitul pe secundă prin această deschidere pentru un curent constant.

R. Dacă axa Ox ne dă nivelul lichidului atunci debitul pe secundă prin deschiderea plană $D = ABB'A'$ (fig. 10.37) este dat de integrala

$$Q = \sqrt{2g} \iint\limits_D \sqrt{y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

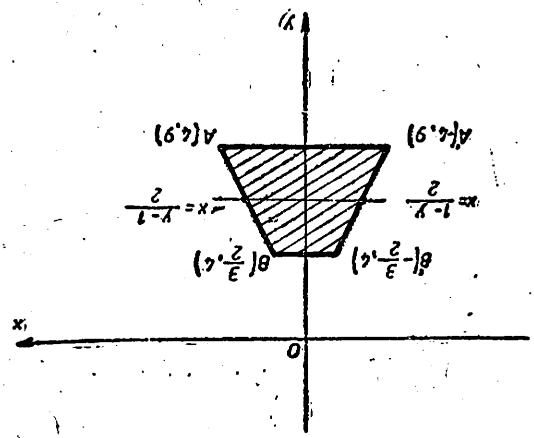


Fig. 10.37

unde y este adîncimea (distanţa verticală la nivelul lichidului) la care se află un punct curent din D, iar $g = 9{,}81$ m/s² este acceleraţia gravitaţională. Avem

$$Q = \sqrt{2g} \int_4^9 \mathrm{d}y \int_{-\frac{y-1}{2}}^{\frac{y-1}{2}} \sqrt{y} = \mathrm{d}x =$$

$$\sqrt{2g} \int_4^9 (y-1)\sqrt{y}\, \mathrm{d}x = \sqrt{2g}\left(\frac{2}{5} y^{5/2} - \frac{2}{3} y^{3/2}\right)\Bigg|_4^9 =$$

$$= \sqrt{2 \cdot 9{,}81}\left[\frac{2}{5}(3^5 - 2^5) - \frac{2}{3}(3^3 - 2^3)\right],$$

deci

$$Q = 3{,}18 \text{ l/s}.$$

INTEGRALE TRIPLE. FORMULE INTEGRALE

11.1. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3},$$

unde Ω este domeniul mărginit de planele $x + y + z = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

R. Notînd cu D proiecția domeniului Ω (fig. 11.1) în planul xOy, integrala devine

$$I = \iint_{D} dxdy \int_{0}^{1-x-y} \frac{dz}{(1 + x + y + z)^3},$$

unde D: $x + y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ (fig. 11.2).

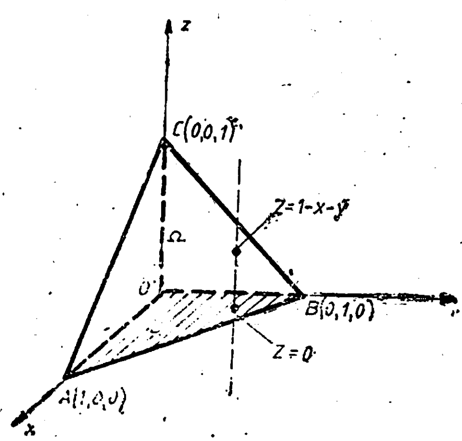


Fig. 11.1

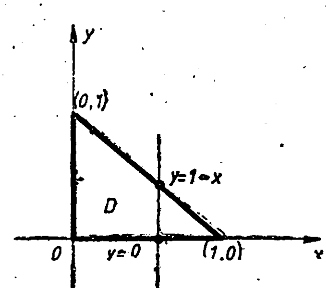


Fig. 11.2

Obținem:

$$I=\iint_D\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_D\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$$

$$=-\frac{1}{8}\text{aria } D+\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}=$$

$$=-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x+y}\right)\Bigg|_0^{1-x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{16}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right)\mathrm{d}x,$$

deci $I=-5/16+1/2\cdot\ln 2$.

11.2. Să se determine volumul corpului omogen mărginit de sfera $x^2+y^2+z^2=4$ și paraboloidul $x^2+y^2=3z$.

R. Notăm cu Ω corpul mărginit de sferă și paraboloid (fig. 11.3) și cu D proiecția lui Ω în planul xOy. Volumul căutat este dat de integrala triplă

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Putem scrie

$$V=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{(x^2+y^2)\frac{1}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\mathrm{d}z=\iint_D\left(\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{x^2+y^2}{3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde $D: x^2+y^2\leqslant 3$.

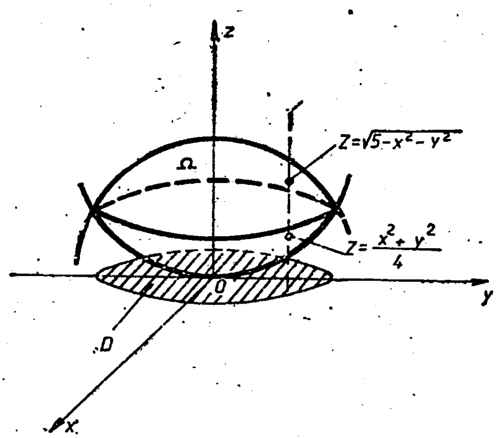


Fig. 11.3

Facem schimbarea de variabile

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \sqrt{3},\ 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

şi obţinem

$$V = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-\rho^2} - \frac{\rho^2}{3}\right)\rho\, d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{1}{3}(4-\rho^2)^{3/2} - \frac{\rho^4}{12}\right]\Bigg|_0^{\sqrt{3}} d\theta,$$

deci $V = 19\pi/6$

11.3. Corpul omogen Ω de densitate $\mu = k$ este mărginit de conul $x^2 + y^2 = z^2$ şi de planele $z = 0$ şi $z = h$. Să se arate că centrul de greutate G al corpului Ω este la distanţa $h/4$ de baza conului.

R. Datorită simetriei corpului Ω (fig. 11.4) în raport cu axa Oz, centrul de greutate G se află pe axa Oz, deci

$$x_G = y_G = 0, \quad z_G = \frac{\iiint\limits_\Omega kz\,dx\,dy\,dz}{\iiint\limits_\Omega k\,dx\,dy\,dz}$$

Notînd cu D proiecţia lui Ω în planul xOy, putem scrie

$$I_1 = \iiint\limits_\Omega z\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z\,dz =$$

$$= \iint\limits_D \frac{1}{2}\left[h^2 - (x^2 + y^2)\right] dx\,dy,$$

unde $D:\ x^2 + y^2 \leqslant h^2$.

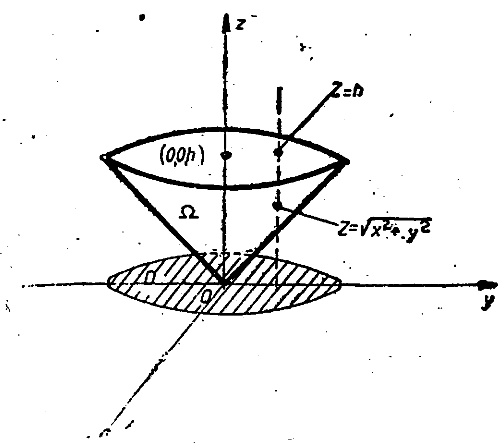


Fig. 11.4

Facem schimbarea de variabile

$$x = \rho \cos \theta,\ y = \rho \sin \theta,\ 0 \leqslant \rho \leqslant h,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

şi obţinem

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h (h^2 - \rho^2)\rho d\rho =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(h^2\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^h d\theta = \frac{4h^4}{4}.$$

Analog,

$$I_2 = \iiint_\Omega dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h dz =$$

$$= \iint_D (h - \sqrt{x^2 + y^2})\, dx dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h (h - \rho)\rho d\rho = \frac{\pi h^3}{3}.$$

Deoarece $z_G = 3h/4$, distanţa de la centrul de greutate G la baza conului este $h/4$.

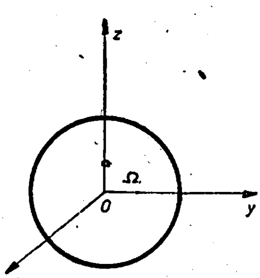
11.4. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_\Omega \sqrt{1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}\, dx dy dz,$$

unde $\Omega :\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$ (fig. 11.5).

R. Facem schimbarea de variabile în coordonare sferice

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi,$$
$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi,$$
$$z = \rho \cos \varphi,$$



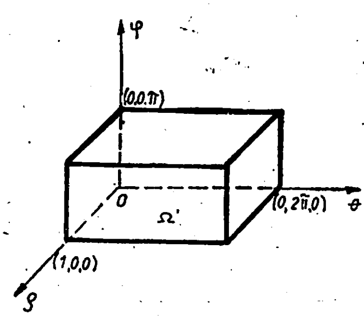


Fig. 11.5

cu

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \qquad (\Omega').$$

În plus,

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\varphi$$

Aplicăm formula schimbării de variabile la integrala triplă și obținem:

$$I = \iiint_{\Omega'} \sqrt{1 + (\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi)^{3/2}}\ \rho^2\sin\varphi d\rho d\theta d\varphi$$

sau

$$I = \iiint_{\Omega'} \sqrt{1+\rho^3}\ \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\ d\varphi \int_0^1 (1+\rho^3)^{1/2}\rho^2 d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi \cdot \left[\frac{2}{9}(1+\rho^3)^{3/2}\right]\Bigg|_0^1 d\varphi =$$

$$= \frac{2}{9}(2^{3/2} - 1) \cdot 2\pi \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} = \frac{8\pi}{9}(2\sqrt{2} - 1).$$

11.5. Să se determine momentul de inerție, față de axa Oz, a corpului Ω de masă M, mărginit de cilindrul circular drept $x^2 + y^2 = a^2$ și de planele $z = 0$ și $z = h$. Densitatea în fiecare punct Q (x, y, z) din Ω este $\mu(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

R. Corpul Ω este reprezentat în figura 11.6. Momentul de inerție este dat de integrala triplă

$$I_z = \iiint_{\Omega} k\sqrt{x^2 + y^2}\,(x^2 + y^2)\, dx dy dz = \iiint_{\Omega} k\,(x^2 + y^2)^{3/2}\, dx dy dz$$

Pe de altă parte, masa corpului Ω este

$$M = \iiint_{\Omega} k\sqrt{x^2 + y^2}\, dx dy dz.$$

Facem schimbarea de variabile în coordonate cilindrice

$$x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta,\ z = z,$$

cu

$$0 \leqslant \rho \leqslant a,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ 0 \leqslant z \leqslant h$$

$$\text{şi } \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \rho$$

şi obţinem

$$M = k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^a \rho^2\, d\rho$$

sau

$$M = 2/3 \cdot k\pi a^3 h.$$

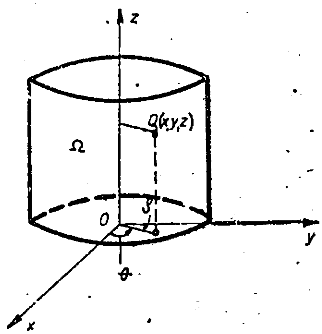


Fig. 11.6

Analog,

$$I_z = k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^a \rho^4\, d\rho =$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \frac{1}{5} a^5\, dz = \frac{2k\pi a^5}{5} h.$$

Întrucît se dă masa M, rezultă $h = \frac{3M}{2\pi k a^3}$, deci

$$I_z = Ma^2 \cdot 3/5.$$

11.6. Să se calculeze momentul de inerţie, faţă de origine, al corpului omogen Ω mărginit de elipsoidul $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$.

R. Momentul de inerţie faţă de origine este dat de integrala triplă

$$I_0 = \iiint_\Omega \mu(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2)\, dx dy dz,$$

în care densitatea $\mu(x, y, z) = k$. Facem schimbarea de variabile

$$x = a\rho \cos\theta \sin\varphi,\ y = b\rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = c\rho \cos\varphi,$$

$$\text{cu } 0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi \text{ şi } \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc\rho^2 \sin\varphi$$

şi obţinem:

$$I_0 = abck \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 (a^2 \cos^2\theta \sin^2\varphi +$$

$$+ b^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + c^2 \cos^2\varphi)\rho^2 \sin\varphi\, d\rho =$$

$$= \frac{abck}{5}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} [a^2 \cos^2 \theta\,(1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi +$$

$$+ b^2 \sin^2 \theta (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi + c^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi]\, d\varphi =$$

$$= \frac{abck}{5}\int_0^{2\pi}\left[(a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)\left(- \cos \varphi + \frac{1}{3}\cos^3 \varphi\right)\Bigg|_0^{\pi} -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{3} c^2 \cos^3 \varphi\right)\Bigg|_0^{\pi}\right] d\theta = \frac{abck}{15}\int_0^{2\pi}(4a^2 \cos^2 \theta + 4b^2 \sin^2 \theta + 2c^2)\, d\theta$$

Deci, momentul de inerţie căutat este

$$I_0 = \frac{4abck}{5}(a^2 + b^2 + c^2)\pi.$$

11.7. Să se determine masa corpului Ω cuprins între sferele concentrice de raze a şi b cu $0 < a < b$, dacă densitatea în fiecare punct $Q \in \Omega$ este proporţională cu pătratul distanţei de la punctul Q la centrul O.

R. Alegem originea sistemului de coordonate în centrul sferelor. Dacă punctul $Q(x, y, z)$ aparţine lui Ω, atunci $\|OQ\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ şi densitatea în punctul Q este $\mu(x, y, z) = k(x^2 + y^2 + z^2)$. Masa corpului Ω este dată de integrala triplă

$$M = k \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx dy dz.$$

Schimbarea de variabile în coordonate sferice

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi,\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi,\ z = \rho \cos \varphi \text{ cu}$$

(Ω'): $a \leqslant \rho \leqslant b$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ şi $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \rho^2 \sin \varphi$, ne conduce la integrala

$$M = k \iiint_{\Omega'} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \varphi\, d\rho d\theta d\varphi,$$

sau

$$M = k \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_a^b \rho^4 \sin \varphi\, d\varphi =$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \frac{b^5 - a^5}{5} \sin \varphi\, d\varphi = \frac{k(b^5 - a^5)}{5}\int_0^{2\pi}(-\cos \varphi)\Bigg|_0^{\pi} d\theta,$$

deci

$$M = \frac{4\pi}{5} \cdot (b^5 - a^5)\, k.$$

11.8. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_{\Omega} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

unde Ω este mărginit de cilindrul $x^2 + y^2 = R^2$ şi de planele $z = 0$, $z = 1$, $y = x$, $y = \sqrt{3}\,x$ (fig. 11.7).

R. Facem schimbarea de variabile în coordonate cilindrice
$x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $z = z$, cu $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $\pi/4 \leqslant \theta < \pi/3$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, (Ω'), iar jacobianul

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho.$$

Integrala devine

$$I = \iiint_{\Omega'} \rho^3 \cos\theta \sin\theta \,\mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}z =$$

$$= \int_0^R \rho^3\, \mathrm{d}\rho \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin\theta\cos\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}z =$$

$$= \left(\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^R \left(\frac{\sin^2\theta}{2}\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{R^4}{32}.$$

11.9. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}},$$

unde Ω este corpul mărginit de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$ (fig. 11.8).

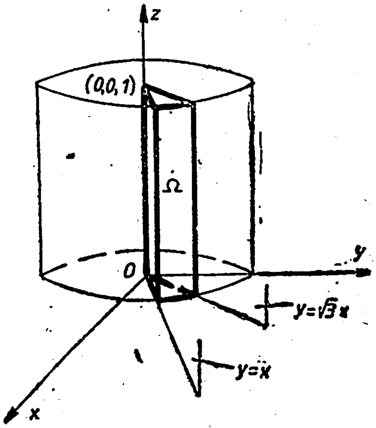


Fig. 11.7

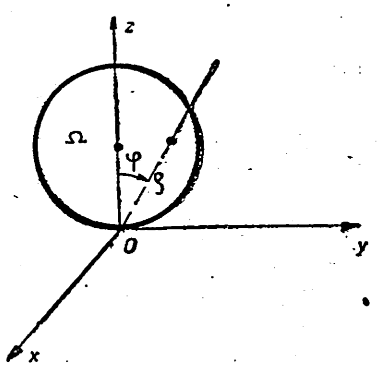


Fig. 11.8

R. Facem schimbarea de variabile în coordonate sferice

$$x = \rho \cos\theta \sin\varphi,$$
$$y = \rho \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = \rho \cos\varphi.$$

Ecuaţia sferei Ω în coordonate sferice este $\rho^2 = \rho \cos\varphi$. Rezultă

$$0 \leqslant \theta < 2\pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \cos\varphi \quad (\Omega'),$$

cu

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \rho^2 \sin\varphi. \text{ Obţinem}$$

$$I = \iiint\limits_{\Omega'} \frac{\rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \sin\varphi}{\sqrt{1+\rho^2}} \, d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \frac{\rho^3}{\sqrt{1+\rho^2}} \, d\rho \int_0^{2\pi} d\theta =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{\cos\varphi} \frac{\rho^2}{\sqrt{1+\rho^2}} \rho \, d\rho =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \cos\varphi \sin\varphi \left[\frac{2}{3}(1+\rho^2)^{3/2} - 2(1+\rho^2)^{1/2}\right]\Bigg|_0^{\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \pi \int_0^{\pi/2} \left[\frac{2}{3}(1+\cos^2\varphi)^{3/2} - 2(1+\cos^2\varphi)^{1/2}\right]\cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi +$$

$$+ \pi \int_0^{\pi/2} \frac{4}{3} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi.$$

În prima integrală facem schimbarea de variabilă

$$1 + \cos^2\varphi = t, \quad -2\cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi = dt$$

şi obţinem

$$I = \pi \int_2^1 \left(\frac{2}{3} t^{3/2} - 2t^{1/2}\right) dt + \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi \frac{6 - 4\sqrt{2}}{5}.$$

11.10. Aplicînd formula lui Green, să se calculeze integrala curbilinie

$$\oint_\Gamma \sqrt{x^2+y^2} \, dx + y\left[xy + \ln\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)\right] dy,$$

unde Γ este conturul dreptunghiului $ABCD$ (fig. 11.9) parcurs în sens direct.

R. Notăm cu D domeniul mărginit de curba Γ și

$$P(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \; Q(x, y) = y\,[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]$$

$P(x, y)$ și $Q(x, y)$ sînt funcții de clasă C^1 pe domeniul D. Aplicînd formula lui Green, obținem

$$\oint_\Gamma \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + y\,[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]\,\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D \left[y\left(y + \frac{1}{\sqrt{x + y^2}}\right) - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_1^4 \mathrm{d}x \int_0^2 y^2\mathrm{d}y = 8.$$

11.11. Să se calculeze integrala curbilinie

$$I = \oint_\Gamma \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \oint_\Gamma (x + y)^2\,\mathrm{d}x - (x - y)^2\,\mathrm{d}y,$$

unde Γ este curba închisă de parabola $y = x^2$ și dreapta $y = x$, parcursă în sens direct (fig. 11.10).

R. Parabola intersectează dreapta în punctele $O(0, 0)$ și $A(1, 1)$. Întrucît $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, folosind reprezentările parametrice

$$\Gamma_1:\; x = t,\; y = t^2,\; t \in [0, 1]$$

$$\Gamma_2:\; x = x,\; y = x,\; x \in [0, 1]$$

avem

$$I = \int_{\Gamma_1} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} - \int_{\Gamma_2} \mathbf{v}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}.$$

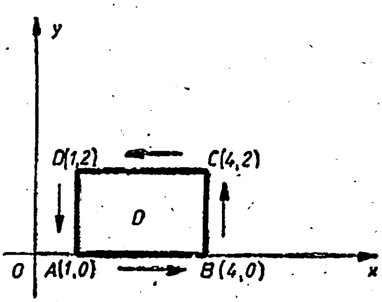


Fig. 11.9

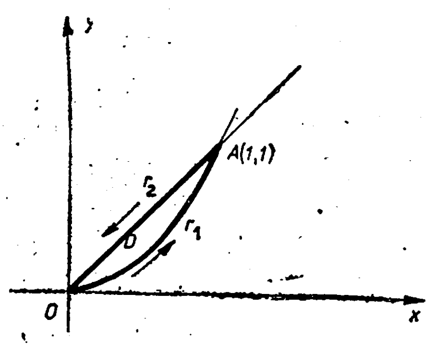


Fig. 11.10

Calculăm succesiv integralele

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 [(t + t^2)^2 - (t - t^2)^2 2t]\mathrm{d}t = 1$$

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^1 (x + x)^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{3}$$

Rezultă:

$$I = \int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = I_1 - I_2 = -\frac{1}{3}.$$

Astfel. Notăm

$$P(x, y) = (x + y)^2, \; Q(x, y) = -(x - y)^2.$$

Funcţiile P şi Q fiind de clasă C^1 pe $\mathbf{R}^2$, iar Γ o curbă închisă, aplicăm formula lui Green şi obţinem

$$I = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D (-4x)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde D este domeniul plan mărginit de curba Γ. Rezultă

$$I = -4\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x} x\mathrm{d}y = -4\int_0^1 x(x - x^2)\mathrm{d}x,$$

deci $I = -1/3$.

11.12. Să se calculeze circulaţia cîmpului vectorial $\mathbf{v} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ în lungul curbei C, intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ cu planul $x + y + z = 0$, parcursă astfel încît proiecţia curbei în planul xOy să fie orientată pozitiv.

R. Fluxul cerut este dat de integrala curbilinie

$$I = \oint_C \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oint y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z,$$

unde C este cercul cu centrul în origine

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

Cilindrul Σ care proiectează curba C (fig. 11.11) în planul xOy are generatoarele paralele cu Oz şi se sprijină pe curba C. Ecuaţia cilindrului este

$$\Sigma: \; x^2 + y^2 + xy = \frac{R^2}{2}$$

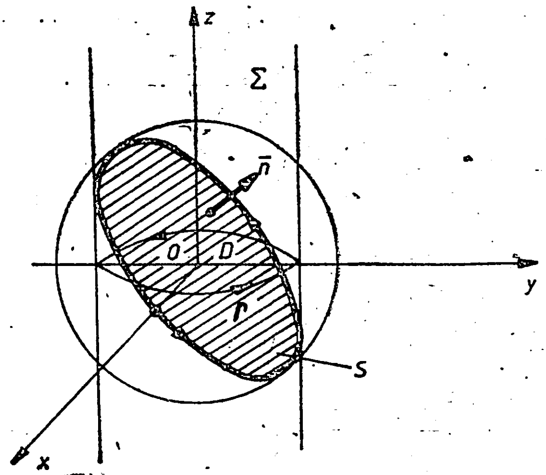


Fig. 11.11

Fie $\Gamma = \Sigma \cap xOy$ proiecţia curbei C în planul xOy. Avem

$$\Gamma : \begin{cases} x^2 + y^2 + xy = \dfrac{R^2}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

sau

$$\Gamma : \begin{cases} \left(x + \dfrac{1}{2}y\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2 = \dfrac{R^2}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

Notăm: $x' = x + \dfrac{1}{2}y$, $x' = y$ şi obţinem.

$$\Gamma : \begin{cases} x'^2 + \dfrac{3}{4}y'^2 = \dfrac{R^2}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

o elipsă de semiaxe $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{2R}{\sqrt{6}}$.

Folosind reprezentarea parametrică a elipsei

$$\Gamma : \begin{cases} x' = \dfrac{R}{\sqrt{2}} \cos t \\ y' = \dfrac{2R}{\sqrt{6}} \sin t, \qquad t \in [0, 2\pi] \\ z = 0 \end{cases}$$

şi ţinînd seama că C este în planul $z = -x - y$, obţinem

$$C: \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}R}{2}\cos t - \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{6}R}{3}\sin t \\ y = \dfrac{\sqrt{6}R}{3}\sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = -\dfrac{\sqrt{2}R}{2}\cos t - \dfrac{\sqrt{6}}{6}R\sin t \end{cases}$$

Integrala curbilinie devine

$$I = \int_0^{2\pi}\left[\frac{\sqrt{6}R}{3}\sin t\left(-\frac{\sqrt{2}R}{2}\sin t - \frac{\sqrt{6}R}{6}\cos t\right) + \right.$$

$$+\left(-\frac{\sqrt{2}R}{2}\cos t - \frac{\sqrt{6}}{6}R\sin t\right)\left(\frac{\sqrt{6}R}{3}\cos t\right) +$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\cos t - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}R}{3}\sin t\right)\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}\sin t - \frac{\sqrt{6}R}{6}\cos t\right)\right] dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -\frac{3\sqrt{12}}{12}R^2\, dt = -\sqrt{3}\, R^2\pi.$$

Altfel. Notăm

$$P(x, y, z) = y,\ Q(x, y, z) = z,\ R(x, y, z) = x$$

şi folosind formula lui Stokes,

$$I = \oint_C \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}\, d\sigma,$$

unde S este discul $z = -x - y$, $(x, y) \in D$ (D este domeniul din planul xOy mărginit de elipsa Γ). Discul S are raza R şi normala

$$\mathbf{n} = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\},\ \text{iar } \operatorname{rot}\mathbf{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

$$I = \iint_S\left(-\frac{3}{\sqrt{3}}\right)d\sigma = -\sqrt{3}\iint_S d\sigma = -\sqrt{3}\,\text{aria } S,$$

deci

$$I = -\sqrt{3}\pi R^2.$$

11.13. Să se calculeze integrala de suprafaţă

$$I = \iint_S \frac{x \text{ ocs } \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} d\sigma$$

unde S este faţa exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

R. Folosim formula lui Gauss—Ostrogradski

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma = \iiint_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v}\, dx dy dz,$$

unde

$$\mathbf{v} = \frac{x\bar{\mathbf{i}} + y\bar{\mathbf{j}} + z\bar{\mathbf{k}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$\mathbf{n} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$ este versorul normalei la faţa exterioară a sferei iar Ω este domeniul mărginit de suprafaţa închisă S. Calculăm

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

sau

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Integrala devine

$$I = 2\iiint_\Omega \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Facem schimbarea de variabile:

$$x = \rho \cos \theta \sin \varphi,\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi,\ z = \rho \cos \varphi$$

cu

$$0 \leqslant \rho \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

şi

$$\left|\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)}\right| = \rho^2 \sin \varphi$$

şi obţinem,

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^1 \rho\, d\rho = 4\pi.$$

11.14. Cacă S este faţa exterioară a suprafeţei $x^2/a^2 + y^2/b^2 - z^2/c^2 = 0$ cuprinsă între planele $z = 0$ şi $z = b$, să se calculeze integrala de suprafaţă

$$J = \iint_S x^2\, dy dz + y^2 dx dz + z^2 dx dy.$$

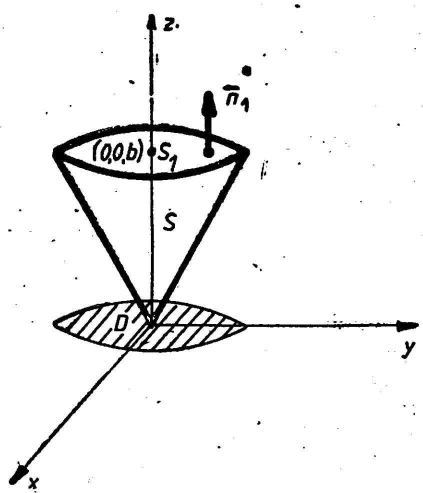


Fig. 11.12

R. Închidem suprafața S cu discul S_1 din planul $z=b$. Fie $\Sigma = S \cup S_1$ (fig. 11.12). Pe fața exterioară a suprafeței Σ (folosind formula lui Gauss—Ostrogradski), avem

$$I = \iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy =$$

$$= \iiint_{\Omega} (2x + 2y + 2z) dxdydz,$$

unde Ω este domeniul mărginit de suprafața Σ. Notînd cu

$$D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{b^2}{c^2} \leqslant 0$$

(proiecția lui Ω în planul xOy), obținem

$$I = 2\iint_D dxdy \int_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{b} (x + y + z)dz =$$

$$= 2\iint_D \left[(x + y)\left(b - c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\right) + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right] dxdy.$$

Cu schimbarea de variabile

$$x = a\rho \cos \theta,\ y = b\rho \sin \theta,\ \text{cu } 0 \leqslant \rho \leqslant b/c,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi,$$

integrala devine

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{b/c} \left[(a\rho \cos \theta + b\rho \sin \theta)(b - c\rho) + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2}\rho^2\right] \rho d\rho$$

sau

$$I = 2\int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{b^2}{2} \cdot \frac{\rho^2}{2} - \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\rho^4}{4}\right]\Bigg|_0^{b/c} =$$

$$= 4\pi\left(\frac{b^4}{4c^2} - \frac{b^4}{8c^2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b^4}{c^2},$$

Pe de altă parte

$$I = J + \iint_{S_1} x^2 dydz + y^2 dxdz + z^2 dxdy,$$

unde $S_1: z = b$, $(x, y) \in D$, cu normala $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ şi elementul de arie $d\sigma = dxdy$. Putem scrie

$$\iint_{S_1} (x^2 \cdot 0 + y^2 \cdot 0 + z^2)\, d\sigma = \iint_D b^2\, dx\, dy =$$

$$= b^2 \cdot \text{aria } D = b^2 \cdot \frac{ab}{c} \cdot \frac{b^2}{c}\pi.$$

Urmează că

$$J = \frac{\pi}{2}\frac{b^4}{c^2} - \frac{\pi a b^5}{c^2} = \frac{\pi b^4(1 - 2ab)}{2c^2}.$$

11.15. Să se calculeze direct şi cu formula lui Stokes integrala curbilinie

$$I = \oint_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz,$$

unde C este elipsa obţinută prin intersecţia cilindrului $x^2 + y^2 = 1$ cu planul $x + z = 1$, parcursă astfel încît proiecţia curbei C în planul xOy să fie orientată pozitiv.

R. O reprezentare parametrică a curbei C (fig. 11.13) este

$$C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi] \\ z = 1 - \cos t \end{cases}$$

Integrala curbilinie devine

$$I = \int_0^{2\pi} [(\sin t - 1 + \cos t)(-\sin t) +$$

$$+ (1 - \cos t - \cos t)\cos t +$$

$$+ (\cos t - \sin t)\sin t]dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2 + \sin t + \cos t)dt = -4\pi.$$

Altfel. Notăm:

$$P(x, y, z) = y - z,$$

$$Q(x, y, z) = z - x,$$

$$R(x, y, z) = x - y$$

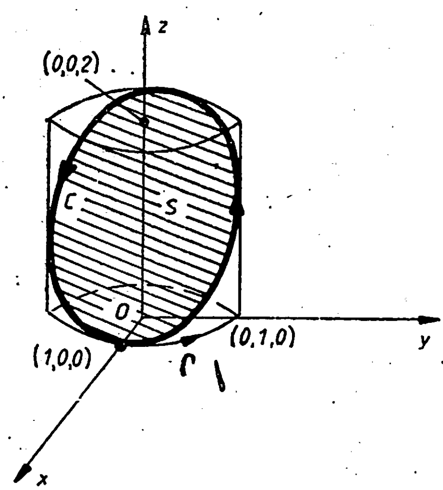


Fig. 11.13

şi folosind formula lui Stokes, integrala devine

$$I = \iint_S - 2\mathrm{d}y\mathrm{d}z - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}z - 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde $S: z = 1 - x$, $(x, y) \in D$ (D este discul din planul xOy mărginit de curba Γ — proiecţia curbei C în acest plan). Integrala se calculează pe faţa superioară a suprafeţei S cu normala

$\bar{\mathbf{n}} = \{1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}\}$ şi elementul de arie $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Obţinem:

$$I = -2\iint_S \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}\sigma = -\frac{4}{\sqrt{2}}\iint_D \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -4 \cdot \text{aria } D = -4\pi$$

11.16. Fie φ şi ψ funcţii de clasă C^2 pe $\Omega \subset \mathbf{R}^3$.

a) Să se demonstreze identitatea

$$\iiint_\Omega (\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial \mathbf{n}}\right)\mathrm{d}\sigma,$$

unde Ω este un domeniu cu frontiera suprafaţa închisă S (pe care orice paralelă la axele de coordonate o întîlneşte în două puncte), iar $\bar{\mathbf{n}}$ este versorul normalei la faţa exterioară a suprafeţei S.

b) Să se arate că dacă $\varphi(x, y, z)$ este o funcţie armonică pentru $(x, y, z) \in \Omega$, atunci

$$\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}}\mathrm{d}\sigma = 0.$$

R. Se ştie că

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}, \Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

şi

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma,$$

unde

$$\bar{\mathbf{n}} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}.$$

Putem scrie

$$\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi = \psi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) - \varphi\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial z}\right).$$

Notăm:

$$P(x, y, z) = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$Q(x, y, z) = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$R(x, y, z) = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

atunci

$$I = \iiint_{\Omega} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

şi utilizînd formula lui Gauss—Ostrogradski, rezultă:

$$I = \iint_{S} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \mathrm{d}\sigma.$$

Dar

$$P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma = \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \gamma \right) -$$

$$- \varphi \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \psi}{\partial z} \cos \gamma \right) = \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}$$

În consecinţă,

(*) $$\iiint_{\Omega} (\psi \Delta \varphi - \varphi \Delta \psi) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{S} \left(\psi \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} \right) \mathrm{d}\sigma.$$

Dacă în formula (*) luăm $\psi = 1$, atunci $\Delta \psi = 0$ şi obţinem

(**) $$\iiint_{\Omega} \Delta \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{S} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}\sigma.$$

b) Funcţia $\varphi(x, y, z)$ este armonică pe Ω dacă verifică ecuaţia lui Laplace $\Delta \varphi = 0$ pentru orice $(x, y, z) \in \Omega$. În acest caz (**) devine

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \mathrm{d}\sigma = 0.$$

11.17. Să se determine fluxul cîmpului vectorial $\overline{\mathbf{F}} = 2x\overline{\mathbf{i}} + y\overline{\mathbf{j}} - z\overline{\mathbf{k}}$ prin suprafaţa $\Sigma: y^2 + z^2 = ax,\ 0 \leqslant x \leqslant a$ după normala $\overline{\mathbf{n}}$ la suprafaţă, care face un unghi ascuţit cu semiaxa negativă Ox.

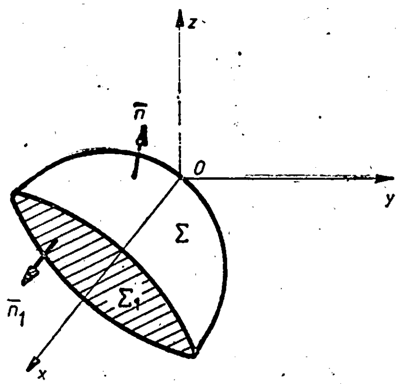


Fig. 11.14

R. Fluxul $\varnothing$ al cîmpului vectorial $\overline{\mathbf{F}}$ prin suprafaţa Σ este dat de integrala de suprafaţă

$$\varnothing = \iint_{\Sigma} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}}\, d\sigma.$$

Închidem suprafaţa Σ cu discul Σ_1 situat în planul $x = a$ (fig. 11.14). Notăm: $S = \Sigma \cup \Sigma_1$ şi folosim formula lui Gauss—Ostrogradski

$$\iint_{S} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{N}}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \overline{\mathbf{F}}\, dx dy dz,$$

unde $\overline{\mathbf{N}}$ este nornala exterioară la suprafaţa S, $\Omega \cap \mathbf{R}^3$ cu fr $\Omega = S$. Calculăm

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(-z) = 2$$

şi obţinem

$$\iint_{S} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{N}}\, d\sigma = \iiint_{\Omega} 2dx\, dy\, dz = 2\iint_{D} dy\, dz \int_{(y^2+z^2)/a}^{a} dx =$$

$$= 2\iint_{D}\left(a - \frac{y^2+y^2}{a}\right) dz\, dy,$$

unde

$$D : y^2 + z^2 \leqslant a.$$

Schimbarea de variabile

$y = \rho \cos \theta,\ z = \rho \sin \theta$, cu $0 \leqslant \rho \leqslant a,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi$ ne dă

$$\iint_{S} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{N}}\, d\sigma = 2\int_{0}^{2\pi} d\theta \int_{0}^{a}\left(a - \frac{\rho^2}{a}\right) \rho\, d\rho = \pi a^3.$$

Dar

$$\iint_{S} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{N}}\, d\sigma = \iint_{\Sigma} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}}\, d\sigma + \iint_{\Sigma_1} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}}_1\, d\sigma,$$

unde $\overline{\mathbf{n}}_1(1, 0, 0)$ este normala la suprafaţa Σ_1. Rezultă

$$\iint_{\Sigma} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}}\, d\sigma = \pi a^3 - \iint_{\Sigma_1} \overline{\mathbf{F}} \cdot \overline{\mathbf{n}}_1\, d\sigma.$$

Pe suprafaţa $\Sigma_1: x = a$, $(y, z) \in D$, cu elementul de arie $d\sigma = dy\, dz$, obţinem

$$\iint_{\Sigma_1} \bar{F} \cdot \bar{n}_1\, d\sigma = \iint_{\Sigma_1} 2x\, d\sigma = \iint_D 2a\, dz\, dy = 2a \cdot \text{aria } D = 2\pi a^3$$

şi deci

$$\iint_{\Sigma} \bar{F} \cdot \bar{n}\, d\sigma = \pi a^3 - 2\pi a^3 = -\pi a^3.$$

11.18. Să se determine fluxul cîmpului vectorial $\bar{F} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ prin suprafaţa închisă de cilindru $x^2 + y^2 = R^2$ şi planele $z = 0$ şi $z = a$, după normala exterioară la suprafaţă.

R. Fluxul cîmpului vectorial $\bar{F}$ prin suprafaţa închisă S (fig. 11.15) este

$$\Phi = \iint_S \bar{F} \cdot \bar{n}\, d\sigma.$$

Folosind formula lui Gauss—Ostrogradski, avem

$$\Phi = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \bar{F}\, dx\, dy\, dz,$$

unde Ω este domeniul închis de suprafaţa S.

Calculăm

$$\operatorname{div} \bar{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 3.$$

Cu acestea,

$$\Phi = \iiint_{\Omega} 3\, dx\, dy\, dz = 3 \cdot \text{vol } \Omega = 3\pi R^2 a.$$

Astfel. Dacă S_1 este baza cilindrului cu normala $\bar{n}_1 = (0, 0, -1)$, S_2 este baza cilindrului cu normala $\bar{n}_2 = (0, 0, 1)$ şi S_3 este suprafaţa laterală a cilindrului cu normala $\bar{n}_3$ şi dacă ţinem seama că $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, rezultă

$$\Phi = \iint_{S_1} \bar{F} \cdot \bar{n}_1\, d\sigma + \iint_{S_2} \bar{F} \cdot \bar{n}_2\, d\sigma + \iint_{S_3} \bar{F} \cdot \bar{n}_3\, d\sigma.$$

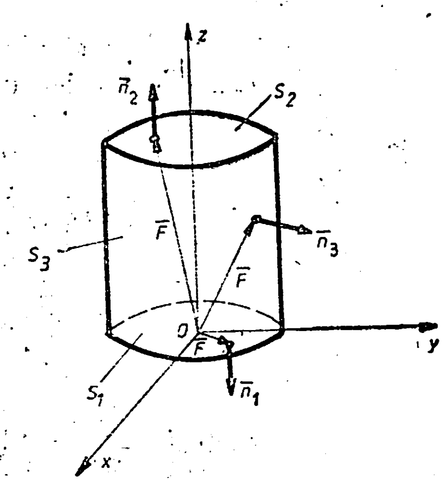


Fig. 11.15

Dar

$$\overline{\mathbf{F}}\cdot\overline{\mathbf{n}}_1 = \mathrm{pr}_{\overline{\mathbf{n}}_1}\overline{\mathbf{F}} = 0$$

$$\overline{\mathbf{F}}\cdot\overline{\mathbf{n}}_2 = \mathrm{pr}_{\overline{\mathbf{n}}_2}\overline{\mathbf{F}} = a$$

$$\overline{\mathbf{F}}\cdot\overline{\mathbf{n}}_3 = \mathrm{pr}_{\overline{\mathbf{n}}_3}\overline{\mathbf{F}} = R$$

deci

$$\Phi = \iint_{S_2} a\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{S_3} R\,\mathrm{d}\sigma = a\cdot\text{aria } S_2 + R \text{ aria } S_3$$

sau

$$\Phi = a\pi R^2 + R\cdot 2\pi R a = 3\pi R^2 a.$$

11.19. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint_{\Omega} e^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

unde Ω este tot spaţiul $\mathbf{R}^3$.

R. Mulţimea de integrare Ω este nemărginită, iar funcţia $f(x, y, z) = e^{-x^2-y^2-z^2}$ este mărginită pentru $(x, y, z) \in \Omega$. În plus, $f(x, y, z)$ fiind pozitivă şi continuă în Ω, integrala I are sens dacă

$$\lim_{\lambda\to\infty}\iiint_{\Delta_\lambda} e^{-x^2-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

există şi este finită, unde $\Delta_\lambda : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \lambda^2$, $\lambda > 0$, $\Delta_\lambda \subset \Omega$. Schimbarea de variabile:

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi,\quad y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\quad z = \rho\cos\varphi,$$
$$\text{cu } 0 \leqslant \theta < 2\pi,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi,\ 0 \leqslant \rho \leqslant \lambda,$$

ne dă

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\lambda} e^{-\rho^2}\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho =$$

$$= \lim_{\lambda\to\infty} 2\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi}\left[-\frac{\rho}{2}e^{-\rho^2}\Big|_0^{\lambda} + \frac{1}{2}\int_0^{\lambda} e^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho\right] =$$

$$= 4\pi\lim_{\lambda\to\infty}\left(-\frac{\lambda}{2e^{\lambda^2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\lambda} e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho\right) = 4\pi\left(\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho\right)$$

şi folosind integrala lui Euler—Poisson

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\, d\rho = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

obţinem

$$\lim_{\lambda\to\infty} \iiint_{\Omega} e^{-x^2-y^2-z^2}\, dx\, dy\, dz = \pi\sqrt{\pi},$$

deci integrala I are sens şi $I = \pi\sqrt{\pi}$.

11.20. Să se calculeze integrala triplă

$$I = \iiint \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\,(x^2+y^2+z^2+R^2)^3}\, dx\, dy\, dz,$$

unde Ω este definit de $x \geqslant 0$ $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, arătîndu-se mai întîi că integrala are sens.

R. Observăm că în origine, care aparţine lui Ω, integrantul nu este mărginit; dacă facem schimbarea de variabile

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta,$$

cu

$$(\Omega')\ 0 \leqslant \rho < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ şi } \left|\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)}\right| = \rho^2 \sin\theta$$

integrala se scrie

$$\iiint_{\Omega'} \frac{\rho^4 \cdot \sin\theta\cos^2\theta}{\rho^3(\rho^2+R^2)^3} \cdot d\rho\, d\theta\, d\varphi.$$

Avem însă

$$\lim_{\rho\to 0} \rho^{\alpha} \frac{\rho^4 \sin\theta\cos^2\theta}{\rho^3(\rho^2+R^2)^3} = \frac{\sin\theta\cos^2\theta}{R^6},\ \text{(finit)},$$

dacă $\alpha = -1 < 1$, deci integrala I are sens în orice Ω'_k mărginit, $(0, 0, 0) \in \Omega'_k$, $\Omega'_k \subset \Omega'$. Integrala este improprie şi pentru faptul că Ω este nemărginit; avem însă:
$\lim\limits_{\rho\to\infty} \rho^{\beta} \frac{\rho^4 \sin\theta\cos^2\theta}{\rho^3(\rho^3+R^2)^3} = \sin\theta\cos^2\theta$, (finit) dacă $\beta = 5 > 1$ deci, conform criteriilor suficiente de convergenţă, integrala are şi în această situaţie sens. Obţinem

$$I = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{\rho^4 \cos^2\theta\sin\theta}{\rho^3(\rho^2+R^2)^3}\, d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\cos^2\theta\, d\theta \int_0^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2+R^2)^3} = \frac{\pi}{6}\cdot \left.\frac{-1}{4(\rho^2+R^2)^2}\right|_0^{\infty};$$

deci

$$I = \frac{\pi}{24} \cdot \frac{1}{R^4}$$

11.21. Să se calculeze integrala triplă

$$\iiint_{\Omega} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 + y^2 + z^2 + R^2)^2},$$

unde Ω este tot spaţiul $\mathbf{R}^3$, arătîndu-se mai întîi că are sens.

R. Observăm că $(0, 0, 0) \in \Omega$ şi integrantul este nemărginit în origine. Avem însă

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(x^2 + y^2 + z^2 + R^2)^2} < \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\alpha}} \cdot \frac{1}{R^4},$$

în Ω cu $\alpha = 1/2$ deci integrala are sens în orice Ω', mărginit, cu $(0, 0, 0) \in \Omega'$.
Mulţimea de integrare Ω este nemărginită. Observăm că

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}(x^2 + y^2 + z^2 + R^2)^2} > \frac{A}{(x^2 + y^2 + z^2 + R^2)^{\alpha}},\ A > 0.$$

în $\Omega - \Omega'$, cu $\alpha = 5/2 < 3/2$ deci şi în această situaţie integrala are sens. Pentru a o calcula facem schimbarea de variabile:

$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta,\ \text{cu } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$
$$0 \leqslant \rho < \infty,\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi;$$

Obţinem

$$I = \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 \sin\theta}{\rho(\rho^2 + R^2)^2}\, d\varphi =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + R^2)^2} = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + R^2)^2};$$

$$I = 4\pi \left.\frac{-1}{2(\rho^2 + R^2)}\right|_0^{\infty} = \frac{2\pi}{R^2}.$$

11.22. Să se determine momentul de inerţie faţă de axa Oz al corpului omogen Ω mărginit de torul obţinut prin rotirea unui cerc din planul yOz în jurul axei Oz.

R. Considerăm cercul C din planul yOz cu centrul în punctul $(0, a, 0)$ şi de rază R. Torul S este generat de cercurile

$$\Gamma_{\lambda,\mu} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2, \\ z = \mu\,. \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbf{R}$$

care se sprijină pe cercul

$$C:\begin{cases}(y-a)^2+z^2=R^2\\ x=0\end{cases}$$

Se obține ecuația torului

$S: x^2+y^2+z^2+a^2-R^2-$

$-2a\sqrt{x^2+y^2}=0$ (figura 11.16)

Dacă densitatea corpului Ω este $\mu=k$, momentul de inerție căutat este dat de integrala

$$I_z=\iiint_\Omega k(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz.$$

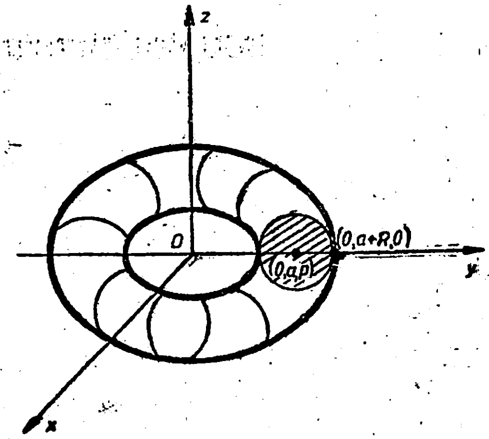


Fig. 11.16

Proiecția torului în planul xOy este coroana circulară

$$D: (a-R)^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant (a+R)^2:$$

$$I_z=2\iint_D dx dy \int_0^{\sqrt{2a\sqrt{x^2+y^2}+R^2-a^2-x^2-y^2}} k(x^2+y^2)\,dz=$$

$$=2k\iint_D 2k\ (x^2+y^2)\ \sqrt{2a\sqrt{x^2+y^2}+R^2-a^2-x^2-y^2}\,dx\,dy.$$

Schimbarea de variabile $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$, cu $a-R\leqslant\rho\leqslant a+R$ și $0\leqslant\theta<2\pi$, ne dă

$$I_z=2k\int_0^{2\pi}d\theta\int_{a-R}^{a+R}\rho^3\sqrt{R^2-(\rho-a)^2}\,d\rho.$$

Mai facem schimbarea la variabilă

$$\rho-a=R\sin t,\ d\rho=R\cos t\,dt \text{ cu } t\in[-\pi/2,\pi/2]$$

$$I_z=4k\pi R^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^2 t(a^3+3a^2R\sin t+3aR^2\sin^2 t+R^3\sin^3 t)\,dt$$

$$I_z=4k\pi R^2\left[a^3\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin^2 t}{4}\right)-a^2R\cos^3 t+\frac{3aR^2}{4}\left(\frac{t}{2}-\frac{\sin 4t}{8}\right)+\right.$$

$$\left.+R^2\left(-\frac{\cos^3 t}{3}+\frac{\cos^5 t}{5}\right)\right]\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2},$$

deci

$$I_z=2\pi^2kR^2a\left(a^2+\frac{3}{4}R^2\right).$$

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

12.1. Fie ecuația diferențială

$$yy' + xe^y = 0.$$

Să se afle soluția problemei Cauchy $y(0) = 1$.

R. Observăm cu $y' = \frac{dy}{dx}$ că ecuația se scrie

$$y\, e^{-y}\, dy = -x\, dx,$$

deci se separă variabilele. Integrăm cei doi membrii ai ecuației

$$\int ye^{-y}\, dy = -\int x\, dx - C$$

și obținem forma canonică a integralei generale

$$ye^{-y} + e^{-y} - x^2/2 = C.$$

Ținînd seama de condiția inițială, rezultă $C = 2e^{-1}$. Deci soluția particulară este

$$(y + 1)e^{-y} = x^2/2 + 2/e, \quad x \in \mathbf{R}.$$

12.2. Să se afle ecuația curbei care trece prin punctul (1, 2), dacă pentru orice interval $[1, x]$, aria trapezului curbiliniu mărginit de arcul corespunzător al acestei curbe este de trei ori produsul coordonatelor unui punct $M(x, y)$ de pe curbă ($x > 0$, $y > 0$).

R. Din ipoteză avem

$$\int_1^x y(t)\, dt = 3x\, y(x).$$

Derivăm această ecuație în raport cu x

$$y = 3(y + xy'), \quad y' = -2y/3x\cdot$$

Integrăm

$$x^2y^3 = C$$

şi impunem condiţia

$$y(1) = 2, \quad x^2y^3 = 8.$$

12.3. Să se studieze mişcarea unui punct material M, de masă m, aruncat pe verticala locului în sus cu o viteză iniţială v_0, ştiind că rezistenţa aerului este proporţională cu pătratul vitezei v.

R. Asupra punctului acţionează forţa gravitaţională mg şi rezistenţa aerului kv^2; ecuaţia diferenţială a mişcării este

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - kv^2,$$

care cu $a^2 = \frac{mg}{k}$, se scrie

$$m \frac{dv}{dt} = -k(a^2 + v^2),$$

unde se separă variabilele

$$m \frac{dv}{v^2 + a^2} = -k\,dt,$$

cu soluţia generală

$$\frac{m}{a} \operatorname{arctg} \frac{v}{a} = -kt + C_1.$$

Pentru determinarea constantei de integrare, ţinem seama de condiţiile iniţiale: pentru $t = 0$, $v = v_0$, $C_1 = m/a \operatorname{arctg} v_0/a$; introdusă în rezultatul obţinut, implică

$$\frac{m}{a} \operatorname{arctg} \frac{v}{a} - \frac{m}{a} \operatorname{arctg} \frac{v_0}{a} = -kt,$$

sau

$$\operatorname{arctg} \frac{v_0}{a} - \operatorname{arctg} \frac{v}{a} = \frac{gt}{a};$$

trecem la funcţia directă

$$\operatorname{tg} \frac{gt}{a} = a \frac{v_0 - v}{a^2 + v_0 v},$$

care ne dă pe v:

$$v = a \frac{\frac{v_0}{a} - \operatorname{tg} \frac{gt}{a}}{1 + \frac{v_0}{a} \operatorname{tg} \frac{gt}{a}}, \quad v = \frac{ds}{dt},$$

din care deducem ecuaţia diferenţială a spaţiului s

$$ds/dt = v = a \operatorname{tg}(\varphi - gt/a), \operatorname{tg} \varphi = v_0/a.$$

Prin integrare obţinem spaţiul parcurs

$$s = \int a \operatorname{tg}\left(\varphi - \frac{gt}{a}\right) dt$$

sau

$$s = \frac{a^2}{g} \ln \cos\left(\varphi - \frac{gt}{a}\right) + C_2.$$

Pentru

$$t = 0,\ s = 0,\ C_2 = -\frac{a^2}{g} \ln \cos \varphi;$$

cu

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + v_0^2}},\ \sin \varphi = \frac{v_0}{\sqrt{a^2 + v_0^2}}$$

rezultă expresia spaţiului parcurs

$$s = \frac{a^2}{g} \ln \left[\frac{\sqrt{a^2 + v_0^2}}{a}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \cos \frac{gt}{a} + \frac{v_0}{\sqrt{a^2 + v_0^2}} \sin \frac{gt}{a}\right]\right],$$

care se mai scrie

$$s = \frac{a^2}{g} \ln \left(\cos \frac{gt}{a} + \frac{v_0}{a} \sin \frac{gt}{a}\right).$$

Să aflăm înălţimea la care se ridică obiectul şi timpul necesar urcării. Fie $s = H$ şi timpul necesar T. Avem $v = 0$ pentru $s = H$ şi $t = T$. Din expresiile lui v şi s obţinem

$$T = \frac{a}{g} \operatorname{arctg} \frac{v_0}{a},\ H = \frac{a^2}{2g} \ln\left(1 + \frac{v_0^2}{a}\right).$$

12.4. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$(2x^3 + 2xy^2 + y)dx + (2y^3 + 2x^2y - x)dy = 0.$$

R. Fie $y = y(x)$ o soluţie. Dacă $r = r(t)$ este ecuaţia acestei soluţii în coordonate polare, atunci ţinînd seama că

$$x = r \cos t,\ y = r \sin t$$

şi că

$$\frac{dy}{dx} = \frac{r \cos t + r' \sin t}{-r \sin t + r' \cos t},\ \text{ecuaţia devine } 2r\, dr = dt.$$

Soluţia acestei ecuaţii cu variabile separabile este

$$r^2 + C = t;$$

dacă revenim la coordonate carteziene

$$C + x^2 + y^2 = \operatorname{Arctg} y/x.$$

12.5. Să se afle soluţia ecuaţiei

$$\int_0^x (2x - t)y(t)\, dt = 2x + \int_0^x y(t)\, dt,$$

unde $y: (0, 1) \to \mathbf{R}$ este derivabilă.

R. Derivăm ecuaţia de două ori în raport cu variabila x

$$2\int_0^x y(t)\, dt + xy(x) = 2 + y(x),$$

$$2\int_0^x y(t)\, dt = 2 + (1 - x)y(x),$$

$$2y(x) = -y(x) + (1 - x)y'(x)$$

sau

$$(1 - x)y' - 3y = 0.$$

Scriem ecuaţia sub formă normală

$$y' = \frac{3y}{1 - x}$$

şi separăm variabilele

$$\frac{dy}{y} = \frac{3}{1 - x}\, dx.$$

Integrăm

$$y(x - 1)^3 = C.$$

Impunem condiţia ca y să verifice ecuaţia dată şi obţinem $C = 2$.

Deci soluţia este

$$y = 2/(x - 1)^3.$$

12.6. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$xy' - y = y^2 - x^2, \quad x \neq 0.$$

R. Fie $y = y(x)$ o soluţie. Atunci $z = y/x$ este tot o soluţie. Înlocuim în ecuaţia iniţială

$$y = zx \text{ şi } y' = z'x + z.$$

Ecuaţia devine o ecuaţie cu variabile separate

$$z' = z^2 - 1, \frac{dz}{z^2 - 1} = dx.$$

Prin integrare şi revenire la funcţia y, obţinem:

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = x + C, \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y-x}{y+x}\right| - x = C.$$

Dreptele $y = \pm x$ sînt de asemenea soluţii.

12.7. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale:

$$xyy' = y^2 - 4x^2, \ x \neq 0.$$

R. Scrisă sub forma normală

$$y' = \frac{y^2 - 4x^2}{xy}.$$

se recunoaşte că este o ecuaţie omogenă. Facem substituţia $y = z \cdot x$, noua funcţie fiind z. Obţinem $y' = z + xz'$ care înlocuită în ecuaţie ne dă

$$z + xz' = \frac{z^2 - 4}{z},$$

sau

$$zz' = -4/x,$$

obţinem

$$z^2/2 = -4 \ln |x| + C.$$

Revenind la funcţia y, găsim

$$\frac{y^2}{2x^2} + 4 \ln |x| = C, \ x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}.$$

12.8. Fie ecuaţia diferenţială

$$(y^4 - 3x^2)\, dy + xy\, dx = 0$$

pentru care se consideră o soluţie $y: (0, \infty) \to \mathbf{R}^+$.

Să se facă schimbarea de variabile

$$x = u^\lambda, \ \lambda \in \mathbf{R}, \ u \in (0, \infty)$$
$$y = v^\mu, \ \mu \in \mathbf{R}, \ v \in (0, \infty)$$

astfel încît să devină omogenă.

R. $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\mu v^{\mu-1} dv}{\lambda u^{\lambda-1} du}$.

Înlocuim în ecuaţie

$$(v^{4\mu} - 3u^{2\lambda})\mu v^{\mu-1}\, dv + u^\lambda v^\mu \lambda u^{\lambda-1}\, du = 0,$$

de unde

$$\frac{dv}{du} = \frac{\lambda u^{2\lambda-1}v^{\mu}}{\mu\left(3u^{2\lambda}v^{\mu-1} - v^{5\mu-1}\right)}.$$

Condiţia de omogenitate este

$$2\lambda + \mu - 1 = 5\mu - 1,\ \lambda = 2\mu.\ \text{Luăm}\ \mu = 1,\ \lambda = 2.$$

Ecuaţia omogenă obţinută este

$$(y^4 - 3u^4)\,dy + 2u^3y\,du = 0.$$

Cu substituţia $y = zu$, $z = z(u)$, obţinem

$$z'u = \frac{z^5 - z}{3 - z^4},\quad \frac{3 - z^4}{z^5 - z}\,dz = \frac{du}{u}.$$

Descompunem în fracţii simple

$$\left[-\frac{3}{z} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z+1}\right) + \frac{4}{3}\cdot\frac{z}{z^2+1}\right]dz = \frac{du}{u}.$$

Integrînd, obţinem

$$2\ln(z^4 - 1) - 9\ln z = 3\ln u + C,$$

$$(z^4 - 1)^2 = Cu^3z^9,\ (y^4 - x^2)^2 = Cxy.$$

$z = \pm 1$ conduce la soluţiile $y = \pm\sqrt{x}$ care sînt soluţii particulare, deoarece se obţin din soluţia genrală pentru $C = 0$. Ecuaţia se poate rezolva şi căutînd un factor integrant $\mu = \mu(y) = 1/y^7$.

12.9. Să se găsească curba ce trece prin $A(0, 1)$, astfel încît triunghiul format cu axa Oy, tangenta la curbă într-un punct oarecare şi raza vectoare a punctului de tangenţă să fie un triunghi isoscel a cărui bază este segmentul de tangentă cuprins între punctul de tangenţă şi axa Oy (fig. 12.1).

R: Fie $y = y(x)$ ecuaţia curbei căutate. Tangenta într-un punct oarecare $M(x, y)$ intersectează axa Oy în punctul N. Trebuie să avem

$$|ON| = |OM|;\ \text{dar}\ |OM| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

şi în ecuaţia tangentei

$$Y - y = y'(x)(X - x)$$

punem $X = 0$; rezultă

$$Y = |ON| = y - xy'.$$

Obţinem ecuaţia omogenă

$$\sqrt{x^2 + y^2} = y - xy'.$$

Cu $y = tx$, după schimbarea şi separarea variabilelor, obţinem

$$\frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} = -\frac{dx}{x}.$$

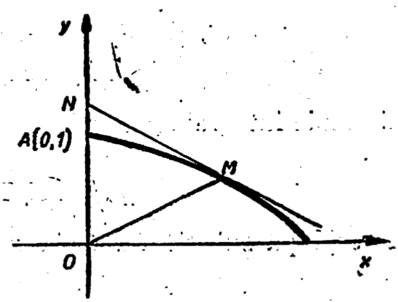


Fig. 12.1

Integrăm

$$\ln\left(t + \sqrt{t^2 + 1}\right) = \ln C - \ln |x|.$$

De unde

$$x^2 = C(C - 2y)$$

(familie de parabole).

Înlocuim coordonatele punctului A în soluţia găsită. Obţinem

$$C = 0, \ C = 2.$$

$C = 0$ conduce la o parabolă degenerată.

Astfel curba căutată este parabola

$$y = 1 - x^2/4, \ x \in \mathbf{R}.$$

12.10. Să se afle soluţia generală a ecuaţiilor diferenţiale

$$1^0. \ (4x + y + 1)dx + (2x + y - 1)dy = 0$$

$$2^0. \ (x + y + 2)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$$

R: 1°. Scriem ecuaţia sub formă normală

$$y' = \frac{-4x - y - 1}{2x + y - 1}.$$

Este o ecuaţie reductibilă la o ecuaţie omogenă

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Aflăm punctul de intersecţie al dreptelor

$$4x + y + 1 = 0 \text{ şi } 2x + y - 1 = 0, \ x = \alpha = -1, y = \beta = 3.$$

Facem schimbarea de variabilă şi de funcţie în ecuaţia iniţială

$$x = u + \alpha = u - 1, \ y = v + \beta = v + 3, \ dx = du, \ dy = dv.$$

În ecuaţia omogenă obţinută

$$(4u + v)du + (2u + v)dv = 0,$$

punem $v = ut$, $dv = u\,dt + t\,du$;

$$(t^2 + 3t + 4)u\,du + u^2(2 + t)\,dt = 0,$$

de unde integrala generală este

$$u\sqrt{t^2 + t + 1} = Ce^{-\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2t + 3}{\sqrt{7}}},$$

sau (după substituţia $t = v/u$ şi ridicarea la pătrat)

$$u^2 + uv + v^2 = C^2 e^{-\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arc\,tg} \frac{3u + 2v}{\sqrt{7}\,u}}.$$

Revenind la variabilele x şi y ($u = x + 1$, $v = y - 3$), obţinem:

$$x^2 + y^2 + xy - x - 5y + 7 = C^2 e^{-\frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{3x + 2y - 3}{\sqrt{7}\,(x+1)}}.$$

2°. Deoarece $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$, punem $y + x = t$, $dy = dt - dx$ şi obţinem

$(t + 2)dx + (2t - 1)(dt - dx) = 0$; $(3 - t)dx + (2t - 1)dt = 0$.

Separăm variabilele şi integrăm. Obţinem

$$\int \frac{2t - 1}{3 - t} dt + \int dx = -C;$$

$$-2t - 5 \ln |t - 3| + x = -C.$$

Revenind la x şi y ($t = x + y$),

$$x + 2y + 5 \ln |x + y - 3| = C, \ x + y - 3 \neq 0.$$

12.11. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$(y^2 - x^2 - 2xy)dy + (y^2 - x^2 + 2xy)dx = 0$$

căutînd un factor integrant de forma $\mu(x, y) = \mu(u)$, $u = x^2 + y^2$.

R: Se determină μ din condiţia:

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mu(u)\,(y^2 - x^2 - 2xy)] = \frac{\partial}{\partial y}[\mu(u)\,(y^2 - x^2 + 2xy)].$$

Efectuăm calculele:

$$2x\mu'(u)\,(y^2 - x^2 - 2xy) + \mu(u)\,(-2x - 2y) =$$
$$= 2y\mu'(u)(y^2 - x^2 + 2xy) + \mu(u)(2y + 2x),$$
$$\mu'(u)(x^2 + y^2) = -2\mu(u).$$

Deci

$$u\mu'(u) = -2\mu(u), \ \mu'(u)/\mu(u) = -2/u,$$

de unde

$$\mu(u) = 1/u^2, \ \mu(x^2 + y^2) = 1/(x^2 + y^2)^2.$$

Se multiplică ecuaţia iniţială cu $1/(x^2 + y^2)^2$, rezultă

$$\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}(y^2 - x^2 - 2xy)dy + (y^2 - x^2 + 2xy)\frac{1}{(x^2 + y^2)^2}dx = 0$$

care este o ecuaţie cu diferenţială totală exactă pe un domeniu simplu conex $\subset \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Determinăm U astfel încît

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2 + 2x}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Integrăm,

$$U(x, y) = \int \frac{y^2 - x^2 + 2xy}{(x^2 + y^2)^2} dx + C(y), \; U(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2} + C(y).$$

Impunem condiția ca U să verifice a doua ecuație:

$$-\frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{2xy - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} + C'(y) = \frac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2 + y^2)^2}\; ; \; C'(y) = 0 ; \; C(y) = C_1.$$

Deci soluția generală este

$$U(x, y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2} + C_1 \text{ sau } x^2 + y^2 = C(x - y).$$

12.12. Să se afle integrala ecuației diferențiale:

$$y\, dx - (x + y^2)\, dy = 0$$

știind că admite un factor integrant de forma $\mu = \varphi(y)$.

R: Înmulțind ecuația inițială cu $\varphi(y)$, obținem

$$\varphi(y)\, y\, dx - \varphi(y)(x + y^2)\, dy = 0,$$

și punem condiția să fie o diferențială totală, adică

$$\frac{\partial}{\partial y} [\varphi(y) \cdot y] = \frac{\partial}{\partial x} [-\varphi(y)(x + y^2)].$$

Efectuînd calculele avem:

$$\varphi'(y)y + \varphi(y) = -\varphi(y) \text{ sau } \varphi'(y)y + 2\varphi(y) = 0.$$

Separăm variabilele și integrăm, obținînd

$$\frac{\varphi'(y)}{\varphi(y)} = -\frac{2}{y}, \; \ln|\varphi(y)| = -2 \ln|y|, \; y^2\varphi(y) = C.$$

Luăm $\varphi(y) = \frac{1}{y^2}$; $dU = \frac{1}{y} dx - \frac{x + y^2}{y^2} dy = 0.$

Integrînd ecuația $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{y}$, obținem

$$U(x, y) = x/y + C(y) \text{; înlocuim în } \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} - 1,$$

$$-x/y^2 + C'(y) = -x/y^2 - 1 \text{ sau } C'(y) = -1,$$

adică $C(y) = -y - C_1$. Deci soluția generală a ecuației este

$$x/y - y = C_1 \text{ sau } x = y(C_1 + y), \; y \neq 0.$$

12.13. 1°. Să se arate că dacă P și Q sînt funcții omogene de gradul m, derivabile, atunci

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)}$$

este un factor integrant al ecuației diferențiale

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

(Domeniul de definiție al lui $\mu(x, y)$ cere ca $xP(x, y) + yQ(x, y) \neq 0$).

2°. Să se afle curbele integrale ale ecuației diferențiale

$$(xy^2 - x^3)dx - 2(x^2y + y^3)dy = 0$$

R: 1°. Funcțiile P și Q fiind omogene, satisfac ecuația lui Euler

$$x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y} = mP, \quad x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y} = mQ.$$

Pentru ca μ să fie factor integrant trebuie să avem

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{xP + yQ}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{xP + yQ}\right)$$

fapt adevărat, deoarece

$$P\left(x\frac{\partial Q}{\partial x} + y\frac{\partial Q}{\partial y}\right) - Q\left(x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}\right) = mPQ - mPQ = 0.$$

2°. Factorul integrant este

$$\mu(x, y) = -\frac{1}{x^4 + x^2y^2 + 2y^4}, \text{ pentru } (x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Soluția ecuației este

$$\int_{x_0}^{x}\frac{dt}{t} + 2\int_{0}^{y}\frac{t^3 + x^2t}{2t^4 + x^2t^2 + x^4}\,dt = C, \; x_0 \neq 0$$

$$\frac{1}{4}\ln(2y^4 + x^2y^2 + x^4) + \frac{3}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4y^2 + x^2}{\sqrt{7}\,x^2} = C,$$

$$2y^4 + x^2y^2 + x^4 = Ce^{-2\frac{3}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{4y^2+x^2}{\sqrt{7}\,x^2}}$$

Se observă că ecuația poate fi rezolvată și ca o **ecuație omogenă cu substituția** $y = x \cdot z(x)$.

12.14. Să se arate că ecuațiile diferențiale de forma

$$yf(xy)dx - xg(xy)dy = 0$$

cu

$$f, g \in C^1(D), \; D \subset \mathbf{R},$$

admit pe

$$\mu(x, y) = \frac{1}{x \cdot y[f(xy) + g(xy)]},$$

ca factor integrant.

R. Înmulțind cu μ ecuația dată, obținem:

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{f(xy)dx}{f(xy)+g(xy)}-\frac{1}{y}\cdot\frac{g(xy)dy}{f(xy)+g(xy)}=0$$

sau, punînd

$$d(xy)=x\,dy+y\,dx,$$

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{\frac{1}{y}f(xy)d(xy)-\frac{x}{y}f(xy)dy}{f(xy)+g(xy)}-\frac{1}{y}\,\frac{g(xy)dy}{f(xy)+g(xy)}=0$$

de unde

$$\frac{1}{xy}\,\frac{f(xy)d(xy)}{f(xy)+g(xy)}-\frac{1}{y}\,dy=0$$

care este diferențiala totală exactă a lui

$$\int\frac{1}{xy}\,\frac{f(xy)}{f(xy)+g(xy)}\,d(xy)-\ln|y|=C.$$

Aplicație. Fie ecuația

$$(xy^2+y)\,dx-2(x^2y-x)\,dy=0$$

cu $f(xy)=1+xy$, $g(xy)=2(xy-1)$.

Obținem

$$\int\frac{1}{xy}\cdot\frac{1+xy}{1+xy+2(xy-1)}\,d(xy)-\ln|y|=C$$

$$-\ln|xy|+4/3\ln|3\,xy-1|-\ln|y|=\ln|C|$$

$$\frac{\sqrt[3]{|3xy-1|^4}}{xy^2}=C,\text{ sau }(3xy-1)^4=C^3x^3y^6.$$

12.15. Să se integreze ecuația diferențială

$$y'+4xy=xe^{-x^2}.$$

R. Este o ecuație liniară. Integrăm ecuația omogenă atașată

$$y'+4xy=0.$$

Separăm variabilele

$$\frac{dy}{y}=-4x\,dx,\ y=Ce^{-2x^2}.$$

Căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$u(x)=C(x)\,e^{-2x^2},$$

unde $C(x)$ este o funcție necunoscută.

Înlocuim în ecuaţia iniţială

$$u(x) = C(x)e^{-2x^2},$$

$$u'(x) = C'(x)e^{-2x^2} - C(x)4xe^{-2x^2};$$

obţinem

$$e^{-2x^2}C'(x) - C(x)4xe^{-2x^2} + 4xC(x)e^{-2x^2} = xe^{-x^2}$$

sau

$$C'(x) = xe^{x^2}, \text{ de unde } C(x) = e^{x^2}/2.$$

Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este

$$y(x) = (e^{x^2}/2 + C)e^{-2x^2}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

12.16. Să se integreze ecuaţia diferenţială:

$$(1 + y^2)\,\mathrm{d}x = (\sqrt{1 + y^2}\cos y - xy)\,\mathrm{d}y.$$

R. Scrisă sub forma

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{y}{1 + y^2}x = \frac{\cos y}{\sqrt{1 + y^2}}$$

se vede că este o ecuaţie liniară în x. Soluţia ei generală este

$$x = e^{-\int \frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y}\left(C + \int \frac{\cos y}{\sqrt{1+y^2}} e^{-\int \frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}\left(C + \int \cos y\,\mathrm{d}y\right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}(C + \sin y),$$

sau

$$x\sqrt{1 + y^2} - \sin y = C, \quad x \in \mathbf{R}.$$

12.17. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$xy' + 1 = e^{x-y}, \quad x \neq 0.$$

R. Punem ecuaţia sub forma

$$xe^y y' + e^y = e^x.$$

Cu substituţia $z = e^y$ devine o ecuaţie liniară

$$xz' + z = e^x.$$

Soluţia generală este

$$z = e^{-\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}\left(C + \int \frac{e^x \cdot e^{\int \frac{\mathrm{d}x}{x}}}{x}\,\mathrm{d}x\right),$$

sau

$$z = e^{-\ln x}\left(C + \int e^x \, dx\right) = 1/x(C + e^x).$$

Revenim la funcţia y, obţinem

$$xe^y = C + e^x.$$

12.18. 1°. Fie ecuaţia diferenţială liniară neomogenă (afină)

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

$P, Q : I\ (\subset \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ continue şi $y_1, y_2 : I \to \mathbf{R}$ două soluţii distincte ale acesteia. Atunci orice soluţie a ecuţiei diferenţiale este dată de

$$y(x) = K[y_2(x) - y_1(x)] + y_1(x),\ K \in \mathbf{R}.$$

2°. Se cunosc integralele particulare distincte

$$y_1(x) = x \text{ şi } y_2(x) = x \cos x,\ x \in (0, 2\pi)$$

ale unei ecuaţii diferenţiale liniare. Se cere:

i) soluţia generală;

ii) să se scrie ecuaţia diferenţială;

iii) soluţia particulară care trece prin $(\pi, 2\pi)$.

R. 1°. Ştim că soluţia generală a unei ecuaţii diferenţiale liniare este de forma

$$y = Cf(x) + g(x)\ y, f, g : I \to \mathbf{R}.$$

Cum y_1 şi y_2 sînt soluţii, rezultă că

$$y_1 = C_1 f(x) + g(x)\ y_2 = C_2 f(x) + g(x),\ C_1 \neq C_2,$$

de unde

$$f(x) = \frac{y_2 - y_1}{C_2 - C_1},\ g(x) = y_1 - \frac{C_1}{C_2 - C_1}(y_2 - y_1).$$

Astfel soluţia generală este

$$y = \frac{C - C_1}{C_2 - C_1}(y_2 - y_1) + y_1.$$

2°. i) $y = Kx(\cos x - 1) + x;$ (1)

ii) Derivăm în raport cu x soluţia generală

$$y' = (K \cos x - K + 1) - Kx \sin x \qquad (2)$$

şi apoi prin eliminarea lui K între (1) şi (2) obţinem ecuaţia liniară

$$y' = (\cos x - 1 - x \sin x)\frac{y - x}{x(\cos x - 1)} + 1,$$

care poate fi scrisă

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{(y - x)\sin x}{\cos x - 1};\ y' = \left(\frac{1}{x} - \frac{\sin x}{\cos x - 1}\right)y + \frac{x \sin x}{\cos x - 1}.$$

iii) Pentru $x = \pi$, $y = 2\pi$, obținem $K = -1/2$.
Soluția particulară este

$$y = -(1/2)x(\cos x - 1) + x.$$

12.19. Să se integreze ecuația diferențială

$$x^2y' - 2xy = y^2$$

cu problema Cauchy $y(1) = 1$.

R. Sub forma normală

$$y' = (2/x)y + (1/x^2)y^2$$

se recunoaște că este o ecuație Bernoulli.

Fie $y: I \to \mathbf{R}$ o soluție a sa. $I \subset (0, \infty)$ sau $I \subset (-\infty, 0)$. Atunci $z = \frac{1}{y}$ este soluție a ecuației liniare

$$z' = -\frac{2}{x}z - \frac{1}{x^2}$$

a cărei soluție generală este

$$z = e^{-\int 2/x\mathrm{d}x}\left(C - \int \frac{1}{x^2} e^{\int 2/x\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right),$$

$$z = \frac{1}{x^2}(C - x).$$

Revenim la funcția y. Soluțiile sînt

$$y = 0 \text{ și } y = \frac{x^2}{C - x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0, C\}$$

Impunem condiția $y(1) = 1$; obținem $C = 1$, deci

$$y = \frac{x^2}{1 - x}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 1\}.$$

12.20. Să se integreze ecuația diferențială

$$y' = y \operatorname{tg} x + \frac{2y^4}{\cos x}.$$

R. Este o ecuație Bernoulli. Fie $y: (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbf{R}$ o soluție a sa. Atunci $z(x) = 1/y^3$ este o soluție a ecuației liniare $z' = -3z \operatorname{tg} x - 6/\cos x$.

Integrăm:

$$z = e^{-\int 3\operatorname{tg}x\mathrm{d}x}\left(C - 6\int \frac{1}{\cos x} e^{3\int \operatorname{tg}x\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\right) =$$

$$= \cos^3 x\left(C - 6\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}\right) = \cos^3 x(C - 6 \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{tg}^3 x)$$

și revenim la funcția y: $y^3(C \cos^3 x - 6 \sin x \cos^2 x - 2 \sin^3 x) = 1$.

12.21. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$x(e^y - y') = 2, \ x \neq 0$$

şi să se determine curba integrală care trece prin $(1, 0)$.

R. Facem schimbarea de funcţie $e^y = t$, $y' = t'/t$. Ecuaţia se transformă într-o ecuaţie Bernoulli

$$xt - xt'/t = 2 \text{ sau } t' = -2/xt + t^2.$$

Punem $z(x) = \frac{1}{t(x)}$, obţinem o ecuaţie diferenţială liniară

$$z' = (2/x)z - 1$$

care are soluţia

$$z = e^{\int 2/x \, dx}\left(C - e\int e^{-\int 2/x \, dx} dx\right) = x^2\left(C - \int dx/x^2\right) = x^2(C + 1/x).$$

Revenim la funcţia y:

$$e^y = \frac{1}{x^2C + x} \text{ sau } e^{-y} = x^2C + x.$$

Pentru $x = 1$, $C + 1 = 1$, $C = 0$. Curba care verifică condiţia $y(1) = 0$ are ecuaţia $e^{-y} = x$.

12.22 Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$y\mathrm{d}x + (x + x^2y^2)\,\mathrm{d}y = 0.$$

R: Luăm y ca variabilă şi x ca funcţie necunoscută.

$$y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + x + x^2y^2 = 0, \text{ sau } x' = -x/yx - yx^2.$$

Este o ecuaţie Bernoulli în x. O integrăm făcînd substituţia

$$z = x^{-1}, \ z' = -\frac{1}{x^2}x', \ z' = \frac{1}{y}z + y.$$

Soluţia ecuaţiei liniare obţinute este

$$z = e^{\int \frac{dy}{y}}\left(C + \int ye^{-\int \frac{dy}{y}} dy\right),$$

adică $z = y(y + C)$.

Revenim la x, $xy(y + C) = 1$, $xy \neq 0$.

12.23. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$y' = y^2 - x^2 + 1$$

care admite soluţia particulară $y_1(x) = x$.

R: Facem schimbarea de funcție $y = x + \frac{1}{z(x)}$ și obținem

$$z' + 2xz = -1,$$

care este o ecuație liniară cu soluția generală

$$z(x) = Ce^{-x^2} - e^{-x^2}\int e^{x^2}\,dx.$$

Revenind la funcția y, găsim $y(x) = x + \frac{e^{x^2}}{C - \int e^{x^2}\,dx}$.

12.24. Să se integreze ecuația diferențială:

$$x(2x - 1)y' + y^2 - (4x + 1)y + 4x = 0$$

pentru care se cunosc două soluții particulare: $y_1 = 1$, $y_2 = 2x$.

R. Facem schimbarea de funcție

$$z(x) = \frac{y - 1}{y - 2x}$$

și ajungem la o ecuație cu variabile separate

$$\frac{dz}{z} = \frac{(2x - 1)^2}{x(1 - 2x)^2}\,dx,\quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},\quad z = Cx.$$

Deci $y = \frac{2Cx^2 - 1}{Cx - 1}$, $Cx - 1 \neq 0$.

12.25. Să se demonstreze că:

1°. Soluția generală a ecuației diferențiale Riccati este o transformare omografică în raport cu constanta de integrare.

2°. Dacă y_1, y_2, y_3, y_4 sînt patru soluții particulare ale ecuației Riccati, raportul lor anarmonic este constant.

R: Ecuația lui Riccati

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

se integrează printr-un număr finit de cuadraturi dacă se cunoaște o soluție particulară y_1. În acest caz, cu substituția

$$y = y_1 + 1/z,$$

ecuația se transformă într-o ecuație liniară în z cu soluția generală

$$z = C\varphi(x) + \psi(x),$$

deci

$$y = y_1 + \frac{1}{C\varphi(x) + \psi(x)} = \frac{Cy_1\varphi(x) + 1 + y_1\psi(x)}{C\varphi(x) + \psi(x)} = \frac{C\alpha(x) + \beta(x)}{C\varphi(x) + \psi(x)}.$$

Aşadar, ecuaţia Riccati admite în acest caz soluţia generală o transformare omografică de constantă arbitrară.

2°. Într-adevăr

$$y_2 = \frac{C_2 y_1 \varphi + 1 + y_1 \psi}{C_2 \varphi + \psi}, \; y_3 = \frac{C_3 y_1 \varphi + 1 + y_1 \psi}{C_3 \varphi + \psi},$$

$$y_4 = \frac{C_4 y_1 \varphi + 1 + y_1 \psi}{C_4 \varphi + \psi}.$$

Prin înlocuire obţinem

$$\frac{y_4 - y_1}{y_4 - y_2} : \frac{y_3 - y_1}{y_3 - y_2} = \frac{C_4 - C_1}{C_4 - C_2} : \frac{C_3 - C_1}{C_3 - C_2} = C.$$

12.26. Se dă ecuaţia diferenţială Riccati:

$$y' = p(x) y^2 + q(x) y + r(x), \quad p, q, r \in C^0(I), \; I \subset \mathbf{R}.$$

Să se deducă:

1°. soluţia generală, dacă y_1 şi y_2 sînt soluţii particulare distincte ale sale;

2°. soluţia generală, dacă y_1, y_2, y_3 sînt soluţii particulare distincte ale sale.

R: 1°. Cu substituţia $y = y_1 + 1/z$, ecuaţia Riccati devine

$$z' = -(2p y_1 + q) z - p.$$

Este o ecuaţie liniară pentru care

$$y_2 = y_1 + 1/z_1, \; z_1 = \frac{1}{y_2 - y_1}$$

este o soluţie particulară. Soluţia generală este

$$z = \frac{1}{y_2 - y_1} + C e^{-\int (2p y_1 + q)\, dx}.$$

2°. Cunoaştem $z_1 = \dfrac{1}{y_2 - y_1}$ şi $z_2 = \dfrac{1}{y_3 - y_1}$ soluţii particulare ale ecuaţiei liniare,

$$z' = -(2p y_1 + q) z - p.$$

Conform ex. 12.18;

$$z = C\left(\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_2 - y_1}\right) + \frac{1}{y_2 - y_1},$$

sau $z = \dfrac{C(y_3 - y_2) + y_3 - y_1}{(y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}$.

Revenim la funcţia y şi

$$y = y_1 + \frac{(y_3 - y_1)(y_2 - y_1)}{C(y_3 - y_2) + y_3 - y_1}.$$

12.27. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$xy' = y^2 - (2x + 1)y + x^2 + 2x$$

ştiind că admite o soluţie particulară de forma unui polinom de gradul întîi în x.

R: Determinăm A şi B astfel încît $y_1 = Ax + B$ să verifice ecuaţia

$$Ax = A^2x^2 + 2ABx + B^2 - (2x + 1)(Ax + B) + x^2 + 2x.$$

Rezultă $A = 1$, $B = 0$ sau $B = 1$. Cunoscînd două soluţii particulare $y_1 = x, y_2 = x + 1$ (aplicăm ex. 12.26)

$$z = 1 + Ce^{-\int\left(2 - \frac{2x+1}{x}\right)dx} = 1 + Cx,$$

de unde $(y - x)(1 + Cx) = 1$.

12.28. Să se integreze ecuaţia diferenţială: $y = xy' - 4y'^2$.

R. Este o ecuaţie Clairaut. Punem $y' = p$, $y = px - 4p^2$. O derivăm în raport cu x:

$$p = p + (x - 8p)p', \quad (x - 8p)p' = 0;$$

$p' = 0$ conduce la $p = C$ şi deci soluţia generală este familia de drepte $y = Cx - 4C^2$, iar soluţia singulară (înfăşurătoarea familiei de drepte), curba

$$\begin{cases} x = 8p \\ y = 4p^2 \end{cases} \quad \text{sau } y = x^2/16.$$

Observăm că ecuţia $4y'^2 - xy' + y = 0$ are rădăcinile

$$y' = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 16y}}{8},$$

care sînt reale pentru $x^2 - 16y \geqslant 0$.

Rezultă că graficele curbelor integrale sînt situate în exteriorul parabolei $y = x^2/16$ (fig. 12.2).

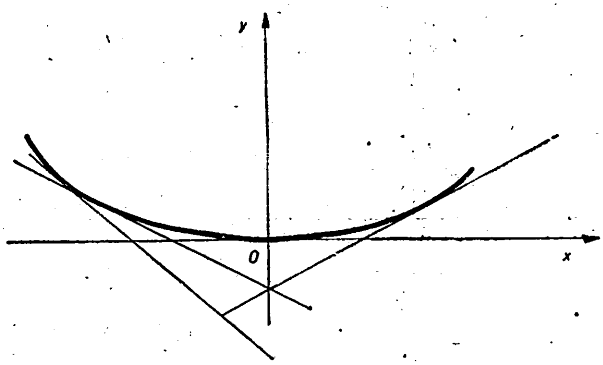


Fig. 12.2

12.29. Să se afle curba plană (Γ) pentru care axele de coordonate decupează pe tangentă un segment de lungime dată l.

R: Fie $y = y(x)$ ($y: I \to \mathbf{R}$ derivabilă cu $y'(x) \neq 0$, $x \in I$) ecuaţia carteziană a curbei căutate. Fie $M(x, y)$ punctul de pe curba (Γ) şi (X, Y) punctul curent de pe tangenta la curbă. Ecuaţia tangentei în (x, y) este

$$Y - y = y'(X - x).$$

Intersectînd cu axa Ox, obţinem $(x - y/y', 0)$, iar cu axa Oy, $(0, y - y'x)$. Condiţia din enunţ dă

$$(x - y/y')^2 + (y - y'x)^2 = l^2.$$

Ecuaţia diferenţială implicită obţinută poate fi rezolvată în raport cu y

$$y = xy' \pm ly'/\sqrt{1 + y'^2}$$

şi obţinem două ecuaţii Clairaut.

Soluţiile generale sînt familiile de drepte

$$y = Cx \pm lC/\sqrt{1 + C^2},$$

iar soluţiile singulare (înfăşurătoarele) se obţin prin eliminarea parametrului C între

$$y = Cx \pm Cl/\sqrt{1 + C^2}$$

şi derivata sa în raport cu C:

$$0 = x \pm l\frac{\sqrt{1 + C^2} - C^2/\sqrt{1 + C^2}}{1 + C^2}.$$

Obţinem:

$$x = \pm l/\sqrt{(1 + C^2)^3}, \quad y = \pm lC^3/\sqrt{(1 + C^2)^3}$$

reprezentarea parametrică a astroidei

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$$

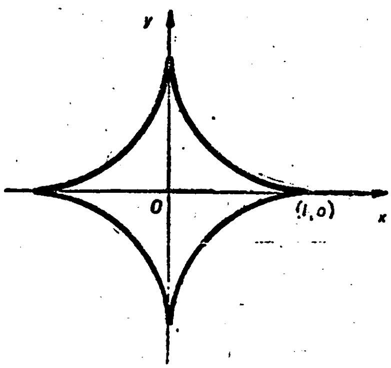


Fig. 12.3

12.30. Să se integreze ecuația diferențială

$$y = xy' + \sqrt{b^2 + a^2y'^2}.$$

R: Este o ecuație Clairaut. Punînd $y' = p$ ecuația se scrie

$$y = px + \sqrt{b^2 + a^2p^2}.$$

O diferențiem, și

$$dy = p\,dx + x\,dp + a^2p\,dp/\sqrt{b^2 + a^2p^2};$$

$dy = p\,dx$; rezultă că ecuația ia forma

$$x\,dp + a^2p\,dp/\sqrt{b^2 + a^2p^2} = 0 \quad \text{sau} \quad (x + a^2p/\sqrt{b^2 + a^2p^2})\,dp = 0.$$

Astfel $dp = 0$ sau

$$x = -a^2p/\sqrt{b^2 + a^2p^2}.$$

Dacă $dp = 0$, atunci $p = C$ și înlocuind valoarea lui p în ecuație, obținem $y = Cx + \sqrt{b^2 + a^2C^2}$, soluția generală a ecuației date. Dacă $x = -a^2p/\sqrt{b^2 + a^2p^2}$, atunci

$$y = -a^2p^2/\sqrt{b^2 + a^2p^2} + \sqrt{b^2 + a^2p^2} = b^2/\sqrt{b^2 + a^2p^2}$$

și rezultă soluția singulară a ecuației inițiale:

$$\begin{cases} x = -a^2p/\sqrt{b^2 + a^2p^2}, \\ y = b^2/\sqrt{b^2 + a^2p^2}. \end{cases}$$

Eliminînd parametrul p, aflăm soluția singulară sub formă implicită

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Verificăm că dreptele definite de soluția generală sînt tangente la elipsa care este integrala singulară. Ecuația tangentei la elipsă în $M_0(x_0, y_0)$

$$(x_0^2/a^2 + y_0^2/b^2 = 1) \quad \text{se scrie}$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} - 1 = 0, \quad \text{sau} \quad y = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}x + \frac{b^2}{y_0}.$$

Punînd $C = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$ și ținînd seama că $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, ecuația familiei tangentelor la curba singulară este

$$y = Cx + \sqrt{b^2 + a^2C^2}.$$

Dacă ecuația diferențială este scrisă ca o ecuație de gradul doi în y'

$$(x^2 - a^2)y'^2 - 2xyy' + y^2 - b^2 = 0,$$

rădăcinile

$$y' = \frac{xy \pm \sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}}{x^2 - a^2}$$

sînt reale $\Leftrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 \geqslant 0$, deci graficele curbelor integrale sînt în exteriorul elipsei (fig. 12.4).

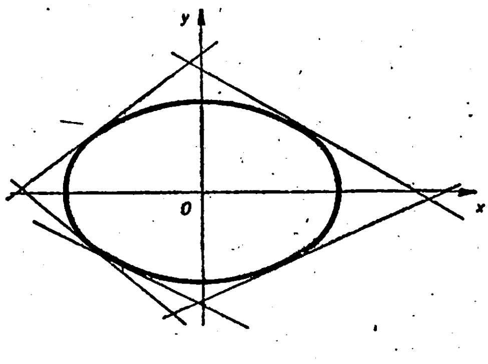


Fig. 12.4

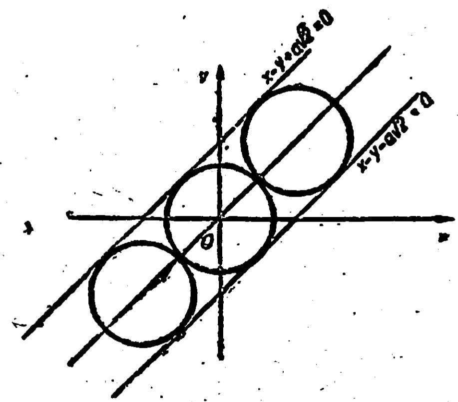


Fig. 12.5

12.31. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$(x - y)^2(1 + y'^2) - a^2(1 + y')^2 = 0, \ a > 0,$$

şi să se afle integralele ei singulare.

R: Scriem ecuaţia sub forma

$$x - y = \pm a \frac{1 + y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Se recunosc două ecuaţii Lagrange. Facem substituţia $y' = p$ şi derivăm în raport cu x:

$$y = x \mp a \frac{1 + p}{\sqrt{1 + p^2}}; \quad p = 1 \mp a \frac{1 - p}{(1 + p^2)\sqrt{1 + p^2}} \cdot \frac{dp}{dx}. \tag{1}$$

Simplificăm cu $1 - p$ şi integrăm

$$\frac{dx}{dp} = \pm a/(1 + p^2)^{3/2}, \quad x - C = \pm ap/\sqrt{1 + p^2}. \tag{2}$$

Înlocuim x în (1) şi deducem y în funcţie de p şi C, anume

$$y - C = \mp a/\sqrt{1 + p^2}. \tag{3}$$

Ecuaţiile (2) şi (3) ne dau forma parametrică a soluţiei generale.

Eliminăm p între ele şi obţinem o familie de cercuri cu centrele pe dreapta $y = x$ (fig. 12.5)

$$(x - C)^2 + (y - C)^2 = a^2.$$

Pentru aflarea soluţiilor singulare scriem sistemul:

$$F(x, y, p) \equiv (x - y)^2(1 + p^2) - a^2(1 + p)^2 = 0$$

$$F_p(x, y, p) \equiv 2p(x - y)^2 - 2a^2(1 + p) = 0$$

$F_x(x, y, p) + pF_y(x, y, p) \equiv 2(x - y)(1 + p^2) - 2p(x - y)(1 + p^2) = 0$ cu $y' = p$.

Soluţiile singulare se află printre curbele discriminante în raport cu p obţinute prin eliminarea lui p între $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$, adică

$$x - y = 0, \; x - y = \pm \sqrt{2}\, a.$$

Dreptele $x - y = \pm \sqrt{2}\, a$ sînt soluţii, înfăşurătoarele familiei de cercuri $(x - C)^2 + (y - C)^2 = a^2$ care dă soluţia generală; deci sînt soluţii singulare; $y = x$ nu este soluţie deoarece nu verifică ecuaţia dată; ea este locul geometric al punctelor de tangenţă ($F_x = 0$, $F_y = 0$) a graficelor curbelor integrale generale.

12.32. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$x - y = 4/9(y')^2 - 8/27(y')^3,$$

soluţiile singulare (dacă există) şi să se construiască graficul.

R: Este o ecuaţie Lagrange. Facem substituţia $y' = p$. Atunci

$$y = x - 4/9p^2 + 8/27p^3.$$

Derivînd în raport cu x,

$$y' = 1 - \frac{4}{9} \cdot 2pp' + \frac{8}{9}p^2 \cdot p', \quad \text{cu } y' = p, \quad p - 1 = 8/9(p - 1)\, pp'.$$

Simplificăm cu $p - 1$, separăm variabilele şi integrăm

$$dx = 8/9p\, dp, \quad x = 4/9p^2 + C.$$

Soluţia generală este

$$\begin{cases} x = 4/9p^2 + C, \; p \in \mathbf{R} \\ y = 8/27p^3 + C. \end{cases} \text{sau } (x - C)^3 = (y - C)^2.$$

Soluţiile singulare verifică ecuaţiile

$$F(x, y, p) \equiv x - y - 4/9p^2 + 8/27p^3 = 0$$

$$F_p(x, y, p) \equiv (p^2 - p)8/9 = 0$$

$$F_x + pF_y \equiv 1 - p = 0$$

Curbele cerute se obţin eliminînd p între $F = 0$, $F_p = 0$. (Locul geometric al punctelor în care condiţia lui Lipschitz nu este îndeplinită). Obţinem $x - y = 0$, $y = x$ nu este soluţie şi $x - y - 4/27 = 0$ este soluţie. Dreapta $x - y = 4/27$ este înfăşurătoarea familiei de parabole semicubice, iar dreapta $y = x$ este locul geometric al punctelor de întoarcere (fig. 12.6).

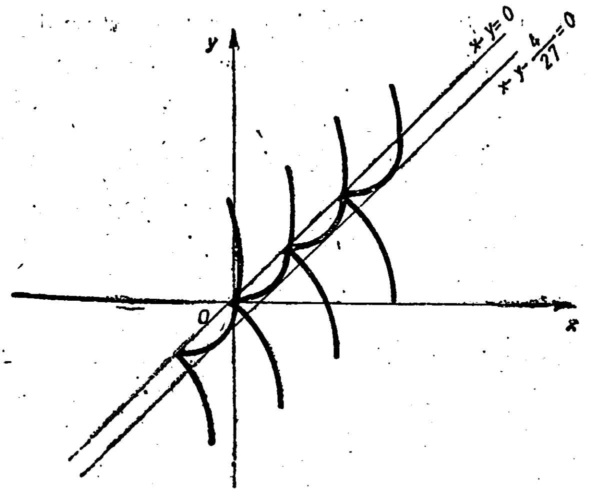


Fig. 12.6

12.33. Să se afle traiectoriile ortogonale ale familiei de parabole $x = ay^2$, $a \in \mathbf{R}$.

R: Diferenţiem ecuaţia familiei de parabole date: $1 = 2ayy'$. Eliminăm parametrul a între ecuaţiile $x = ay^2$; $1 = 2ayy'$ şi aflăm ecuaţia diferenţială a familiei de parabole $2xy' = y$. Înlocuind y' prin $-1/y'$, obţinem ecuaţia diferenţială a traiectoriilor ortogonale:

$$2x + yy' = 0 \text{ sau } 2x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0.$$

Integrăm ecuaţia obţinută şi găsim ecuaţia traiectoriilor ortogonale:

$$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C, \text{ sau } \frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{2C} = 1,$$

deci o familie de elipse asemenea.

12.34. Să se afle traiectoriile ortogonale ale familiei de elipse

$$3x^2 + y^2 = Cx.$$

R: Împărţim cu x şi derivăm în raport cu x. Obţinem

$$3x^2 + 2xyy' - y^2 = 0.$$

Înlocuind y' cu $-1/y'$, avem ecuaţia diferenţială a traiectoriilor ortogonale

$$(y^2 - 3x^2)\,\mathrm{d}y + 2yx\,\mathrm{d}x = 0.$$

Este o ecuaţie omogenă, pe care o integrăm făcînd schimbarea de funcţie $t = y/x$. Rezultă

$$C_1 = \frac{t^3 x}{t^2 - 1},$$

adică ecuaţia traiectoriilor ortogonale este $y^3 = C_1(y^2 - x^2)$.

12.35. Să se afle traiectoriile izogonale care taie sub unghiul constant $\pi/4$ familia de drepte $y = Cx$.

R: Ecuaţia diferenţială a familiei de drepte se obţine eliminînd C din sistemul $y = Cx$, $y' = C$, adică $y'x = y$. Înlocuind y' cu $\frac{y'-1}{1+y'}$ obţinem ecuaţia diferenţială a tuturor izoclinelor

$$y = \frac{y'-1}{y'+1}x \text{ sau } y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Este o ecuaţie omogenă, în care luînd $y = tx$, $t = t(x)$, rezultă

$$t'x + t = \frac{1+t}{1-t}, \quad t' = \frac{t^2+1}{x(1-t)},$$

$$\operatorname{arctg} t - (1/2)\ln(t^2+1) = \ln|x/C_1|.$$

Traiectoriile izogonale sînt spiralele logaritmice

$$\sqrt{x^2+y^2} = C_1 e^{\operatorname{arctg} y/x}.$$

12.36. Să se determine traiectoriile ortogonale ale lemniscatelor

$$r^2 = \lambda \cdot \sin 2\theta.$$

R: Ecuaţia diferenţială a lemniscatelor este

$$2rr' = 2r^2 \operatorname{ctg} 2\theta \text{ sau } r' = r \operatorname{ctg} 2\theta.$$

Formăm ecuaţia diferenţială a traiectoriilor ortogonale schimbînd $r' = \frac{dr}{d\theta}$ cu $-\frac{r^2}{r'}$ în $r' = r\operatorname{ctg} 2\theta$. Obţinem

$$-\frac{r^2}{r'} = r\operatorname{ctg} 2\theta, \quad r' = -\frac{r}{\operatorname{ctg} 2\theta}.$$

Soluţia acestei ecuaţii cu variabile separate este $\ln r = \frac{1}{2}\ln|C\cos 2\theta|$, de unde $r^2 = C\cos 2\theta$.

12.37. Să se determine traiectoriile sub unghiul α ale hiperbolelor echilatere, asimptote axelor Ox şi Oy. (Examen)

R: Ecuaţia diferenţială a hiperbolelor $xy = C$ este

$$xy' + y = 0.$$

Ecuaţia diferenţială a traiectoriilor cerute este

$$x \cdot \frac{y' - \operatorname{tg}\alpha}{1 + y'\operatorname{tg}\alpha} + y = 0,$$

adică

$$(x + y\operatorname{tg}\alpha)y' - x\operatorname{tg}\alpha + y = 0.$$

În această ecuație omogenă facem substituția $y = tx$, $t = t(x)$.

$$t'x + t = \frac{\operatorname{tg}\alpha - t}{1 + t \operatorname{tg}\alpha}; \quad t'x = \frac{-t^2 \operatorname{tg}\alpha - 2t + \operatorname{tg}\alpha}{t \operatorname{tg}\alpha + 1}.$$

Integrăm ultima ecuație cu variabile separate și revenim la funcția y, obținem familia de conice:

$$x^2 - 2xy \operatorname{ctg}\alpha - y^2 = C_1.$$

Scriind-o sub forma

$$(x - y \operatorname{ctg}\alpha)^2 - y^2/\sin^2\alpha = C_1,$$

se vede că familia traiectoriilor izogonale sub unghi α este formată tot din hiperbole echilatere.

12.38. Să se determine traiectoriile ortogonale ale familiei de curbe

$$y^2 = Ce^x + x + 1.$$

R. Prin eliminarea lui C din sistemul

$$\begin{cases} y^2 = Ce^x + x + 1 \\ 2yy' = Ce^x + 1 \end{cases}$$

se obține ecuația diferențială $2yy' = y^2 - x$.

Înlocuim y' cu $-1/y'$ în ultima ecuație, rezultă

$$y' = \frac{2y}{x - y^2}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2y} x - \frac{y}{2}, \quad y \neq 0.$$

Am obținut astfel o ecuație liniară cu soluția generală

$$x = e^{\int \frac{dy}{2y}} \left(C - \frac{1}{2} \int y e^{-\int \frac{dy}{2y}} dy \right),$$

$$x = \sqrt{|y|} \left(C - \frac{1}{3} y \sqrt{|y|} \right), \quad 3x = C\sqrt{|y|} - y^2, \quad y \neq 0.$$

12.39. Să se găsească traiectoriile ortogonale ale familiei de curbe

$$y = Cx + 1/C^2 \quad \text{(Examen).}$$

R: Dacă $F(x, y, y') = 0$ este ecuația diferențială a unei familii de curbe, ecuația diferențială a traiectoriilor ortogonale familiei se obține înlocuind pe y' cu $(-y')^{-1}$ deci este dată de

$$F(x, y, -1/y') = 0.$$

Prin urmare, trebuie să aflăm mai întîi ecuația diferențială a familiei date. Derivăm în raport cu x; obținem

$$y' = C, \text{ deci } y = xy' + 1/y'^2, \quad y' \neq 0,$$

este ecuaţia diferenţială a curbelor din enunţ. Ecuaţia diferenţială a traiectoriilor ortogonale este

$$y = -1/y' \cdot x + y'^2,\ y' \neq 0;$$

am obţinut o ecuaţie de tip Lagrange. O integrăm. Înlocuim pe y' cu p şi diferenţiem:

$$y = -1/px + p^2,\ \mathrm{d}y = 1/p^2 x\,\mathrm{d}p - 1/p\,\mathrm{d}x + 2p\,\mathrm{d}p;$$

punem $\mathrm{d}y = p\,\mathrm{d}x$, obţinem

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}p} - \frac{1}{p^2}x - 2p = 0,$$

care este o ecuaţie liniară în x, p fiind variabila independentă. Avem

$$x = e^{\int \frac{\mathrm{d}p}{p(p^2+1)}}\left(C + \int \frac{2p^2}{p_2 + 1} e^{-\int \frac{\mathrm{d}p}{p(p^2+1)}}\mathrm{d}p\right).$$

Din descompunerea în fracţii simple

$$\frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1},$$

rezultă

$$\int \frac{\mathrm{d}p}{p(p^2+1)} = \ln|p| - \frac{1}{2}\ln(p^2+1) = \ln\frac{|p|}{\sqrt{p^2+1}},$$

deci

$$e^{\int \frac{\mathrm{d}p}{p(p^2+1)}} = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}},\ p \neq 0.$$

Avem şi

$$\int \frac{2p^2}{1+p_2}\cdot\frac{\sqrt{p^2+1}}{p}\mathrm{d}p = \int \frac{2p\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}} = 2\sqrt{1+p^2}.$$

Obţinem ecuaţiile parametrice (p parametru) ale traiectoriilor ortogonale

$$\begin{cases} x(p) = \dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}\left(C + 2\sqrt{1+p^2}\right) \\ y(p) = p^2 - \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}\left(C + 2\sqrt{1+p^2}\right),\ p \neq 0. \end{cases}$$

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

13.1. Să se scrie ecuația diferențială pentru care funcțiile x, $\cos x$, $\sin x$, formează un sistem fundamental de soluții.

R: Formăm Wronskianul sistemului

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos x & \sin x \\ 1 & -\sin x & \cos x \\ 0 & -\cos x & -\sin x \end{vmatrix} = x$$

Deci pentru $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ soluția generală a ecuației este

$$y(x) = C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Ecuația diferențială se obține eliminînd C_1, C_2, C_3 din sistemul

$$\begin{aligned} y &= C_1 x + C_2 \cos x + C_3 \sin x \\ y' &= C_1 - C_2 \sin x + C_3 \cos x \\ y'' &= \quad\; - C_2 \cos x - C_3 \sin x \\ y''' &= \quad\;\;\; C_2 \sin x - C_3 \cos x \end{aligned}$$

Obținem: $xy''' - y'' + xy' - y = 0$, $x \neq 0$.

Observație. Această ecuație se putea obține din condiția ca Wronskianul sistemului de funcții y, x, $\sin x$, $\cos x$ să fie nul:

$$\begin{vmatrix} y & x & \cos x & \sin x \\ y' & 1 & -\sin x & \cos x \\ y'' & 0 & -\cos x & -\sin x \\ y''' & 0 & \sin x & -\cos x \end{vmatrix} = 0$$

13.2. Să se arate că dacă $y_1(x)$ este o soluție particulară a ecuației diferențiale

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \; p, \; q \in C^\circ(I), \; I \subset \mathbf{R},$$

atunci $y_2(x) = y_1(x) \int e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}x}{y_1^2(x)}$ este de asemenea o soluție particulară, iar soluția generală este $y = y_1(x)\left(C_1 + C_2 \int e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}x}{y_1^2(x)}\right)$.

R: Cu substituţia $y = y_1(x)\int z(x)\,\mathrm{d}x$, reducem ordinul ecuaţiei.

Înlocuim în ecuaţia iniţială

$$y'(x) = y_1(x)z(x) + y_1'(x)\int z(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$y''(x) = y_1(x)z'(x) + 2y_1'(x)z(x) + y_1''(x)\int z(x)\,\mathrm{d}x.$$

Obţinem:

$$y_1z' + (2y_1' + py_1)z + (y_1'' + py_1' + qy_1)\int z(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Cum y_1 este o soluţie particulară, rezultă

$$y_1z' + (2y_1' + py_1)z = 0.$$

Separăm variabilele şi integrăm:

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = -\left(2\frac{y_1'}{y_1} + p\right)\mathrm{d}x;\quad z(x) = \frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Revenind la funcţia y rezultă o altă soluţie

$$y_2(x) = y_1(x)\int e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{y_1^2(x)}.$$

Verificăm că $y_1(x)$, $y_2(x)$ formează un sistem fundamental de soluţii, adică Wronskianul

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_1\int e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{y_1^2(x)} \\ y_1' & y_1'\int e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{y_1^2(x)} + \frac{1}{y_1}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_1\int e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{y_1^2(x)} \\ y_1' & y_1'\int e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{y_1^2(x)}\end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \frac{1}{y_1}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\end{vmatrix} = e^{-\int p(x)\mathrm{d}x} \neq 0.$$

Soluţia generală este $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$.

13.3. Să se integreze ecuaţia diferenţială $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$, dacă funcţia x este o soluţie particulară.

R: Scriem ecuaţia sub forma normală

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{2}{1 - x^2}y = 0,$$

cu $x \in I$, unde $I \subset (-\infty, -1)$ sau $I \subset (-1, 1)$ sau $I \subset (1, \infty)$.

Aplicăm exercițiul anterior cu $x \in (-1, 1)$ și

$$y = x\left(C_1 + C_2\int e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx}\frac{dx}{x^2}\right) = x\left(C_1 + C_2\int e^{-\ln(1-x^2)}\frac{dx}{x^2}\right) =$$

$$= x\left[C_1 + C_2\int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}\right)dx\right],$$

$$y = x\left[C_1 + C_2\left(-\frac{1}{x} + \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right].$$

Analog pentru $x \in (-\infty, -1)$ și $x \in (1, \infty)$. În final

$$y(x) = C_1 x + C_2\left(x\ln\sqrt{\left|\frac{1+x}{1-x}\right|} - 1\right), \quad x \in \mathbf{R}\setminus\{-1, 1\}.$$

13.4. Să se afle soluția particulară a ecuației diferențiale $y''' = xe^{-x}$ care verifică condițiile inițiale $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$.

R: Aflăm soluția generală integrînd succesiv ecuația dată:

$$y'' = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y' = \int(-xe^{-x} - e^{-x} + C_1)\,dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1 x + C_2.$$

$$y = \int(xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1 x + C_2)\,dx = -xe^{-x} - e^{-x} - 2e^{-x} +$$

$$+ C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3 = -xe^{-x} - 3e^{-x} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 x + C_3.$$

Folosind condițiile inițiale $C_3 - 3 = 0$, $2 + C_2 = 2$, $-1 + C_1 = 2$, obținem $C_3 = 3$, $C_2 = 0$, $C_1 = 3$.

În consecință, soluția căutată este $y = -xe^{-x} - 3e^{-x} + 3/2x^2 + 3$.

Putem afla soluția și în modul următor:

$$y'' = y''(0) + \int_0^x xe^{-x}\,dx = 2 + (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^x = -xe^{-x} - e^{-x} + 3;$$

$$y' = y'(0) + \int_0^x(-xe^{-x} - e^{-x} + 3)\,dx = 2 + (xe^{-x} + 2e^{-x} + 3x)\Big|_0^x =$$

$$= xe^{-x} + 2e^{-x} + 3x;$$

$$y = y(0) + \int_0^x(xe^{-x} + 2e^{-x} + 3x)\,dx = (-xe^{-x} - 3e^{-x} + 3/2x^2)\Big|_0^x =$$

$$= -xe^{-x} - 3e^{-x} + 3/2x^2 + 3;$$

am obținut același rezultat $y(x) = -(x + 3)e^{-x} + 3/2x^2 + 3$.

13.5. Să se găsească soluția ecuației diferențiale

$$y'''(x-1) - y'' = 0$$

care verifică condițiile inițiale $y(2) = 2$, $y'(2) = 1$, $y''(2) = 1$.

R: Cu $y'' = z(x)$, ecuația devine

$$(x-1)z' - z = 0, \text{ sau } \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x-1}.$$

Integrăm $z = C_1(x-1)$; revenim la y; obținem $y'' = C_1(x-1)$. Din condiția inițială $1 = C_1$. Ecuație integrabilă prin cuadraturi

$$y'(x) = y'(2) + \int_2^x (x-1)\,dx = 1 + (x-1)^2/2 \Big|_2^x = 1/2 + (x-1)^2/2$$

$$y(x) = y(2) + \int_2^x [1/2 + (x-1)^2/2]\,dx = 2 + (x/2 + (x-1)^3/6)\Big|_2^x =$$

$$= x/2 + (x-1)^3/6 + 5/6.$$

Soluția va fi $y = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 6x + 4}{6}$, $x \in \mathbf{R}$.

13.6. Să se determine o grindă de secțiune constantă, de lungime l, încastrată la ambele capete, încărcată la mijloc cu o sarcină concentrată P, cît și ecuația fibrei medii deformate.

R: Ecuația diferețială a fibrei medii deformate este

$$EI \cdot y'' = M_0 - P\frac{x}{2},$$

unde:

a) I este momentul de inerție al grinzii (constant),
b) E este modulul de elasticitate al materialului (constant),
c) M_0 momentul de încastrare în 0, nedeterminat (fig. **13.1**),
d) sarcina concentrată P, cunoscută.

Prin integrare avem:

$$EIy' = M_0x - \frac{1}{4}Px^2 + C_1;$$

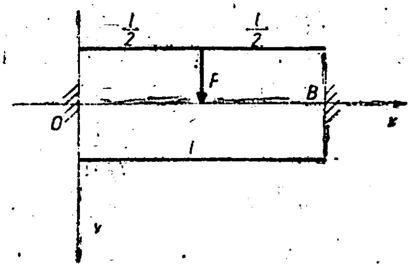


Fig. 13.1

mai integrăm odată:

$$EIy = \frac{1}{2} x^2 M_0 - \frac{1}{12} Px^3 + C_1 x + C_2.$$

Linia elastică trece prin originea $x = 0$ şi în origine este tangentă la axa Ox, fapte care conduc la condiţiile $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, care dau $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Pentru determinarea momentului M_0 (grinda este static nedeterminată), observăm că la mijlocul grinzii $x = \frac{l}{2}$, $y' = 0$ deci

$$M_0 \frac{l}{2} - \frac{1}{4} P \frac{l^2}{4} = 0, M_0 = P \cdot \frac{l}{8}.$$

Ecuaţia fibrei medii deformate este deci

$$y = \frac{P}{48EI} x^2(3l - 4x).$$

Săgeata la mijlocul grinzii este maximă $\left(x = \frac{l}{2}\right)$ şi este dată de

$$y = \frac{P}{192EI} l^3.$$

13.7. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$x = y''' + \ln (2 - y'''), \ y''' < 2 \quad \text{(Examen)}$$

R. Punem $y''' = t$, deci $x = t + \ln (2 - t)$, $t < 2$.
Prin trei integrări succesive obţinem pe y. Scriem

$$y''' \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y'', \text{ deci } \mathrm{d}y'' = t\left(1 - \frac{1}{2 - t}\right)\mathrm{d}t,$$

$$y'' = \int\left(t - \frac{t}{2 - t}\right)\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + t - 2\ln (2 - t) + C_1.$$

În continuare, $y'' \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y'$, din care obţinem

$$\mathrm{d}y' = \left(\frac{t^2}{2} + t - 2\ln (2 - t) + C_1\right)\left(1 - \frac{1}{2 - t}\right)\mathrm{d}t.$$

Prin integrare avem

$$y' = \int\left[\frac{1}{2} t^2 + t - 2\ln (2 - t)\right]\mathrm{d}t -$$

$$- \int\left[\frac{1}{2}\frac{t^2}{2 - t} + \frac{t}{2 - t} + 2\frac{1}{2 - t}\ln (2 - t)\right]\mathrm{d}t + C_1[t + \ln (2 - t)] + C_2$$

$$y' = t^3 \cdot 1/6 + t^2 1/2 - 2[(2 - t)\ln (2 - t) + t - 2] -$$

$$- [t^2/4 - t - 2\ln (2 - t) - t - 2\ln (2 - t) - \ln^2(2 - t)] +$$

$$+ C_1[t + \ln (2 - t)] + C_2.$$

Scriem în sfîrşit, $y'\,dx = dy$, care ne conduce la

$$y = C_3 + \int y'\left(1 - \frac{1}{2-t}\right)dt,$$

care împreună cu $x = t + \ln(2-t)$, $2 > t$, ne dă soluţia generală sub formă parametrică.

13.8. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale:

$$1^\circ\ y''(1+y) = y'^2 + y'$$

$$2^\circ\ y'''^2 + y''^2/4 = 1$$

$$3^\circ\ y'' = 1 + y'^2.$$

R: 1° Punem $y' = z(y(x))$, $y'' = z\dfrac{dz}{dy}$; luăm ca variabilă y şi ca funcţie necunoscută pe z. Ecuaţia devine

$$z\frac{dz}{dy}(1+y) = z^2 + z \quad \text{sau} \quad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{y+1}z + \frac{1}{y+1},\ y \neq -1.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii liniare este

$$z = C_1(y+1) - 1.$$

Revenim la funcţia y'; avem $y' = C_1(y+1) - 1$, unde se separă variabilele $\dfrac{dy}{C_1(y+1)-1} = dx$; obţinem

$$\ln|C_1(y+1) - 1| = C_1(x + C_2),\ C_1(y+1) - 1 \neq 0.$$

2° Curba de ecuaţie $u^2 + v^2/4 = 1$ admite reprezentarea parametrică $u = \cos t$, $v = \sin t/2$ deci luăm $y''' = \cos t$, $y'' = \sin t/2$. Din $dy'' = y'''dx$, obţinem $\cos t\, dt/2 = \cos t\, dx$ şi deci $x = t/2 + C_1$. Din $dy' = y''dx$, $dy' = \sin t\, dt/4$, $y' = -\cos t/4 + C_2$, $dy = y'dx$ sau

$$dy = (-\cos t/4 + C_2)\,dt/2,\ y = -\sin t/8 + 1/2\, tC_2 + C_3.$$

Dar $t = 2x - 2C_1$, deci

$$y = -\sin 2(x - C_1)/8 + C_2(x - C_1) + C_3,\ x \in \mathbf{R}$$

care formează soluţia generală. Parabolele $y = \pm x^2 + Ax + B$ sînt soluţii singulare. Aceasta se poate stabili astfel. Avem

$$y''' = \sqrt{1 - y''^2/4} \equiv f_1(x, y, y', y'')$$

$$y''' = -\sqrt{1 - y''^2/4} \equiv f_2(x, y, y', y'')$$

Se vede că funcţiile f_1 şi f_2 nu au derivate în raport cu y'', mărginite pentru curbele ce au $y'' = \pm 2$, deci pentru parabolele $y = \pm x^2 + Ax + B$. În punctele lor nu sînt îndeplinite condiţiile din teorema de existenţă şi unicitate.

3° Notăm $y' = p(x)$ şi împărţim cu $1 + p^2$: $\frac{dp}{1+p^2} = dx$ care prin integrare ne conduce la

$$\operatorname{arctg} p = x + C_1 \text{ sau } y' = \operatorname{tg}(x + C_1).$$

Ultima ecuaţie are soluţia generală

$$y = -\ln|\cos(x + C_1)| + C_2, \quad \cos(x + C_1) \neq 0.$$

13.9. Să se integreze ecuaţia

$$y'''y^{(V)} - (y^{(IV)})^2 = 0 \quad \text{(Examen)}$$

R. Cu substituţia $y''' = u$, ecuaţia devine

$$uu'' - (u')^2 = 0, \text{ adică } \frac{u''}{u'} = \frac{u'}{u}.$$

Integrînd în ambii membrii, obţinem $u = C_2e^{C_1x}$ şi revenind la vechea variabilă, rezultă $y''' = C_2e^{C_1x}$. O ecuaţie integrabilă prin cuadraturi. Soluţia este

$$y = \frac{C_2}{C_1^3} e^{C_1x} + \frac{C_3}{2} x^2 + C_4x + C_5, \quad x \in \mathbf{R}.$$

13.10. Să se integreze ecuaţia

$$y'' = 3x^2/(x^2 + 4)^2, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0.$$

R. Notînd

$$\frac{2x\,dx}{(x^2+4)^2} = dv, \quad v = -\frac{1}{x^2+4}, \quad u = \frac{3}{2}x, \quad du = \frac{3}{2}dx.$$

Integrînd prin părţi obţinem:

$$y' = -\frac{3x}{2(x^2+4)} + \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C_1$$

Notînd $dx = dv$, $v = x$, $u = \frac{3}{4}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$, $du = \frac{3dx}{2(x^2+4)}$. Integrînd din nou prin părţi, obţinem:

$$y = (-3/2)\ln(x^2 + 4) + (3/4)x \operatorname{arctg} x/2 + C_1x + C_2, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Impunînd condiţiile iniţiale, deducem $C_1 = 0$, $C_2 = 1 + 3\ln 2$.
Astfel curba căutată are ecuaţia

$$y = (-3/2)\ln(x^2 + 4) + (3/4)\, x \operatorname{arctg} x/2 + 1 + 3\ln 2.$$

13.11. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$yy'y'' - y'^3 + xy^3 + yy'^2 = 0 \quad \text{(Examen)}$$

R. Este o ecuaţie omogenă în y, y', y''. Se face substituţia $y' = y \cdot z$, $z = z(x)$. Ecuaţia devine: $z' = y''/y - y'^2/y^2$, $y''/y = z' + z^2$, $zz' + z^2 + x = 0$, o ecuaţie Bernoulli. Cu schimbarea de funcţie $z^2 = t$ se obţine o ecuaţie liniară în t; $t' = -2t - 2x$ cu soluţia $t = Ce^{-2x} - x + 1/2$. Revenim la funcţia z: $z^2 = Ce^{-2x} - x + 1/2$ şi apoi la y: $y'^2 = y^2(Ce^{-2x} - x + 1/2)$. Am obţinut astfel o ecuaţie cu variabile separate:

$$\frac{dy}{y} = \pm\sqrt{Ce^{-2x} + \frac{1}{2} - x}\,dx.$$

Soluţia generală este $y = C_1 e^{\pm\int\sqrt{Ce^{-2x}+1/2-x}\,dx}$.

13.12. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$(y + y')y'' + y'^2 = 0 \quad \text{(Examen)}$$

R. Se poate reduce ordinul, deoarece lipseşte variabila x. Luăm $p = y'$ ca funcţie necunoscută şi y ca variabilă independentă $p = p(y(x))$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Ecuaţia devine

$$p(y + p)\frac{dp}{dy} + p^2 = 0, \quad p\left[(y + p)\frac{dp}{dy} + p\right] = 0.$$

Aflăm soluţiile celor două ecuaţii

$$p = 0 \quad \text{şi} \quad (y + p)\frac{dp}{dy} + p = 0.$$

Soluţiile ecuaţiei $p = 0$ sînt dreptele $y = C_1$. Scrisă sub forma normală $\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y + p}$, $y + p \neq 0$ se vede că a doua ecuaţie este omogenă. Facem substituţia $p = y \cdot t$, $t = t(y)$; $yt' + t = -\frac{t}{t + 1}$ sau $t' = \frac{-t^2 - 2t}{(t + 1)y}$. Integrăm ecuaţia cu variabile separate

$$\frac{t + 1}{t(t + 2)}\,dt = -\frac{dy}{y} \quad \text{şi obţinem} \quad y^2 = \left|\frac{C^2}{t(t + 2)}\right|.$$

Revenim la funcţia p

$$y^2 = \left|\frac{C^2y^2}{p^2 + 2py}\right|, \quad p^2 + 2py = C^2, \quad p = -y + \sqrt{y^2 + C^2}$$

adică $y' = -y \pm\sqrt{y^2 + C^2}$. Integrăm $(y \pm \sqrt{y^2 + C^2})\,dy = C^2dx$,

$$y^2 \pm y\sqrt{y^2 + C^2} \pm C^2 \ln\left(y + \sqrt{y^2 + C^2}\right) = 2C^2x + C_2.$$

Aceasta este soluţia generală a ecuaţiei. (Pentru $C = 0$ regăsim soluţiile ecuaţiei $p = 0$).

13.13. Să se integreze ecuaţiile diferenţiale

1° $y'^2 + yy'' = yy'$

2° $3y'^2 = 4yy'' + y^2$

R. 1° Ecuaţia se pune sub forma $(yy')' = yy'$ sau $\frac{d(yy')}{yy'} = dx$, de unde $\ln(yy') = x + \ln|C_1|$, sau $yy' = C_1e^x$, $ydy = C_1e^x dx$. Soluţia căutată este $y^2 = 2C_1e^x + C_2$, $x \in \mathbf{R}$.

2° Împărţim ambii membrii ai ecuaţiei cu y^2:

$$3(y'/y)^2 - 4y''/y = 1.$$

Facem substituţia $y'/y = z(x)$, de unde $y''/y - y'^2/y^2 = z'$, $y''/y = z' + z^2$. Ecuaţia devine: $3z^2 - 4z' - 4z^2 = 1$ sau $-4z' = 1 + z^2$, adică $\frac{dz}{1+z^2} = -\frac{1}{4}dx$. Prin integrare $\operatorname{arctg} z = C_1 - \frac{1}{4}x$, sau $z = \operatorname{tg}(C_1 - x/4)$, sau $y'/y = \operatorname{tg}(C_1 - x/4)$. Integrăm ultima ecuaţie:

$$\ln|y| = 4\ln|\cos(C_1 - x/4)| + \ln|C_2|,$$

adică $y = C_2 \cos^4(C_1 - x/4)$, $x \in \mathbf{R}$.

13.14. Să se afle curba pentru care raza de curbură este egală cu cubul normalei; curba căutată trebuie să treacă prin punctul $M(0, 1)$ şi să admită în acest punct o tangentă care taie axa Ox sub un unghi de 45°.

R. Raza de curbură a unei curbe plane este dată de $R = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$; lungimea normalei este $N = y\sqrt{1 + y'^2}$.

Ecuaţia se scrie

$$(1 + y'^2)^{3/2}/y'' = (y\sqrt{1 + y'^2})^3, \text{ sau } y''y^3 = 1.$$

Punem $y' = z(y(x))$, $y'' = z\frac{dz}{dy}$. Înlocuim în ecuaţie

$$z\frac{dz}{dy} \cdot y^3 = 1, \quad zdz = y^{-3}dy \text{ sau}$$

$$(1/2)z^2 = -(1/2)y^{-2} + (1/2)C_1, \quad z^2 = C_1 - y^{-2}.$$

Revenim la variabila $y(x)$: $y'^2 = C_1 - y^{-2}$. Impunem condiţia $y'(0) = 1$, deci $1 = C_1 - 1$, $C_1 = 2$, Am obţinut ecuaţia $y' = \frac{\sqrt{2y^2 - 1}}{y}$. Separăm variabilele şi integrăm

$$\frac{ydy}{\sqrt{2y^2 - 1}} = dx, \quad \frac{1}{2}\sqrt{2y^2 - 1} = x + \frac{1}{2}C_2, \quad y^2 = \frac{1}{2}[(2x + C_2)^2 + 1].$$

Determinăm constanta C_2 impunînd condiţia ca curba să treacă prin $M(0, 1)$, adică: $1 = \frac{1}{2}(C_2^2 + 1)$, $C_2 = 1$. Deci curba căutată este definită de ecuaţia $y^2 = 2x^2 + 2x + 1$, $2y^2 - 4(x + 1/2)^2 = 1$ şi reprezintă o hiperbolă.

13.15. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$x^2yy'' - 2x^2y'^2 + xyy' + y^2 = 0.$$

R. Este o ecuaţie omogenă în y, y', y''.

Punem $p(x) = \frac{y'}{y}$, $y' = py$, $y'' = y(p' + p^2)$; obţinem ecuaţia Riccati: $p' - p^2 + \frac{1}{x}p + \frac{1}{x^2} = 0$. Se observă că are soluţiile particulare $p_1 = \frac{1}{x}$, $p_2 = -\frac{1}{x}$. Facem schimbarea $z = \frac{p - p_1}{p - p_2}$ şi obţinem $z = C_1x^2$. Deducem

$$p = \frac{C_1x^2 + 1}{x(1 - C_1x^2)} \text{ şi deci } \frac{y'}{y} = \frac{C_1x^2 + 1}{x(1 - C_1x^2)}.$$

Punem $K_1 = \frac{1}{C_1}$ şi integrăm ecuaţia cu variabile separate

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} + \frac{2x dx}{-x^2 + K_1}.$$

Obţinem soluţia generală $y(K_1 - x^2) = K_2x$.

13.16. Să se integreze ecuaţia

$$x^2y'' = y'^2 - 2xy' + 2x^2.$$

R. Ecuaţia nu conţine funcţia y; facem schimbarea de funcţie $y' = p$, $p = p(x)$ şi obţinem ecuaţia Riccati $p' = p^2/x^2 - 2p/x + 2$. Această ecuaţie are soluţia particulară $p = x$; o integrăm punînd $p = x + \frac{1}{z}$, $z = z(x)$. Obţinem:

$$z'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad z(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{C_1}, \quad p = x + \frac{xC_1}{x + C_1}$$

$$y'(x) = x + \frac{xC_1 + C_1^2 - C_1^2}{x + C_1}, \quad y(x) = \frac{x^2}{2} + C_1x - C_1^2 \ln|x + C_1| + C_2,$$

$$x + C_1 \neq 0.$$

13.17. Să se afle ecuaţia curbei plane, tangentă în origine la axa Ox, ştiind că raza ei de curbură în punctul de abscisă x este e^x.

R. Trebuie să avem $y''/(1 + y'^2)^{3/2} = 1/e^x$. Ecuaţia nu conţine y; punem $y' = p$; obţinem $\frac{dp}{(1 + p^2)^{3/2}} = e^{-x}dx$. Notăm $p = \operatorname{tg} t$, $e^{-x}dx = \cos t dt$ şi rezultă $C_1 - e^{-x} = \sin t$ sau $p/\sqrt{p^2 + 1} = C_1 - e^{-x}$. Condiţia $y'(0) = 0$ ne dă $C_1 = 1$.

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} = 1 - e^{-x}, \quad y' = \frac{e^x - 1}{\sqrt{2e^x - 1}}.$$

Facem schimbarea de variabilă $2e^x - 1 = u^2$, $dy = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}du$.

De aici aflăm $y = C_1 + u - 2\,\mathrm{arctg}\, u$,

$$y(x) = C_1 + \sqrt{2e^x - 1} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2e^x - 1}.$$

Condiția $y(0) = 0$ ne dă $C_1 = \pi/2 - 1$ și curba căutată are ecuația

$$y = \frac{\pi}{2} - 1 + \sqrt{2e^x - 1} - 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2e^x - 1},\ x \in [\ln 2, \infty].$$

13.18. Să se integreze ecuația

$$yy'' - y'^2 = y^2 \ln y,\ y > 0.$$

R. Punem $y' = p$, $p = p(y(x))$ și reducem ordinul ecuației

$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p'(y(x))p$. Ecuația devine $ypp' - p^2 = y^2 \ln y$, adică $p' - (1/y)p = y \ln y \cdot p^{-1}$; o ecuație Bernoulli. Facem substituția $z = p^2$, obținem

$$z' - z/(2y) = 2y \ln y;$$

scriem soluția generală a acestei ecuații liniare

$$z = y^2\left(C_1 + 2\int \frac{\ln y}{y}\,dy\right) = y^2(C_1 + \ln^2 y).$$

Revenim la funcția p, $p^2 = y^2(C_1 + \ln^2 y)$,

$$p = \pm y\sqrt{C_1 + \ln^2 y},\ y' = \pm y\sqrt{C_1 + \ln^2 y},$$

$$\int \frac{dy}{y\sqrt{C_1 + \ln^2 y}} = \int dx,\ \ln\left(\ln y + \sqrt{\ln^2 y + C_1}\right) = x + \ln C_2,\ C_2 > 0;$$

$$\ln y + \sqrt{\ln^2 y + C_1} = C_2 e^x,\ \sqrt{\ln^2 y + C_1} = C_2 e^x - \ln y,$$

de unde, $\ln y = \frac{C_2}{2} e^x - \frac{C_1}{2C_2} e^{-x}$. Deci soluția generală este

$$\ln y = Ce^x + C'e^{-x}\quad \left(C = \frac{C_2}{2},\ C' = -\frac{C_1}{2C_2}\right).$$

13.19. Să se determine valorile parametrului m pentru care ecuația diferențială $y''' + m^2 y' = 0$ cu condițiile $y(0) = y(-1) = y(1) = 0$ admite soluții nebanale.

R. Ecuația caracteristică este $r^3 + m^2 r = 0$ și are rădăcinile $r_1 = 0$, $r_{2,3} = \pm im$. Soluția generală a ecuației este

$$y(x) = C_1 + C_2 \cos mx + C_3 \sin mx.$$

Impunînd condițiile inițiale obținem sistemul

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + C_2 \cos m + C_3 \sin m = 0 \\ C_1 + C_2 \cos m - C_3 \sin m = 0. \end{cases}$$

Determinantul sistemului $\Delta = 2(1 - \cos m) \sin m$ este nul dacă $\cos m = 1$ sau $\sin m = 0$, adică $m \in \{k\pi \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Dacă

$$m = 2k\pi,\ y(x) = C_1 - C_2 \cos 2k\pi x + C_3 \sin 2k\pi x$$

iar dacă $m = (2k + 1)\pi$, $y(x) = C_3 \sin (2k + 1)\pi x$.

13.20. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$y''' + y'' + y' + y = 0.$$

R. Ecuaţia caracteristică asociată ecuaţiei omogene este

$$r^3 + r^2 + r + 1 = 0$$

cu rădăcinile -1 şi $\pm i$, cărora le corespund soluţiile particulare liniar independente e^{-x}, $\cos x$, $\sin x$. Deci soluţia generală a ecuaţiei este $y = C_1 e^{-x} + C_2 \sin x + C_3 \cos x$, $x \in \mathbf{R}$.

13.21. Un obiect de greutate G este suspendat de un resort şi se sprijină cu frecare pe un perete. Se cere să se studieze mişcarea ştiind că resortul se opune mişcării cu o forţă proporţională cu distanţa corpului G la punctul de suspensie, iar frecarea este proporţională cu viteza obiectului.

R. Ecuaţia mişcării este

$$G \frac{d^2y}{dt^2} = -ag \frac{dy}{dt} - bgy;\ G,\ g,\ a,\ b = \text{const.},$$

care se mai scrie $\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{ag}{G} \frac{dy}{dt} + \frac{bg}{G} y = 0$; toţi coeficienţii sînt constanţi. Ecuaţia caracteristică $r^2 + \frac{ag}{G} r + \frac{bg}{G} = 0$, are soluţiile

$$r_1 = \frac{ag}{2G} + \frac{1}{2G} \sqrt{a^2g^2 - 4bg};\ r_2 = \frac{ag}{2G} - \frac{1}{2G} \cdot \sqrt{a^2g^2 - 4bg};$$

dacă $a^2g^2 > 4bg$, avem soluţia

$$y = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t},\ t > 0;$$

dacă $a^2g^2 = 4bg$, avem soluţia $y = e^{-\frac{ag}{2G}t}(C_1 + C_2 t)$, $t > 0$; în fine dacă $a^2g^2 < 4bg$ obţinem

$$y = e^{-\frac{ag}{2G}t}\left[C_1 \cos \frac{\sqrt{4bg - a^2g^2}}{2G} t + C_2 \sin \frac{\sqrt{4bg - a^2g^2}}{2G} t\right],\ t > 0$$

care reprezintă oscilaţii amortizate în timp.

13.22. Să se integreze ecuaţia diferenţială de ordinul doi cu coeficienţi constanţi $\ddot{x} - 4\dot{x} + 3x = 0$ cu condiţiile iniţiale $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$.

R. Ecuaţia caracteristică $r^2 - 4r + 3 = 0$ are rădăcinile 1 şi 3. Soluţia generală este $x = C_1e^t + C_2e^{3t}$. Impunem condiţiile iniţiale şi determinăm C_1 şi C_2 din sistemul

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 + 3C_2 = 1 \end{cases}$$

de unde $-C_1 = C_2 = 1/2$. Soluţia căutată este $x = (1/2)(e^{3t} - e^t)$.

13.23. Să se afle soluţia generală a ecuaţiilor diferenţiale:

1° $y'' + 2y' + 2y = 0$;

2° $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$.

R. 1° Rădăcinile ecuaţiei caracteristice $r^2 + 2r + 2 = 0$ sînt $-1 + i$, $-1 - i$ complex conjugate şi de aceea le corespund soluţiile particulare $e^{-x}\cos x$, $e^{-x}\sin x$. Deci soluţia generală este

$$y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

2° Ecuaţia caracteristică $(r - 2)^3 = 0$, admite rădăcina triplă 2. Soluţia generală este $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x}$.

13.24. Să se afle soluţia particulară a ecuaţiei

$$y'' - 3y' + 2y = e^{5x}$$

care verifică condiţiile la limită $y|_{x=\ln 2} = 1$, $y|_{x=2\ln 2} = 1$.

R. Ecuaţia caracteristică $r^2 - 3r + 2 = 0$ are rădăcinile reale 2 şi 1. Soluţia generală a ecuaţiei omogene asociate este

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x}.$$

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei iniţiale de forma $u = Ae^{5x}$. Atunci $u' = 5Ae^{5x}$, $u'' = 25Ae^{5x}$. Înlocuim în ecuaţie

$$u'' - 3u' + 2u = 12Ae^{5x} \equiv e^{5x}.$$

Deci $A = 1/12$. Astfel, soluţia generală a ecuaţiei este

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + (1/12)e^{5x}.$$

Impunem condiţiile la limită:

$$\begin{cases} C_1e^{\ln 2} + C_2e^{2\ln 2} + (1/12)e^{5\ln 2} = 1; \\ C_1e^{2\ln 2} + C_2e^{4\ln 2} + (1/12)e^{10\ln 2} = 1, \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} 2C_1 + 4C_2 + 32/12 = 1, \\ 4C_1 + 16C_2 + 1024/12 = 1. \end{cases}$$

De unde $C_1 = 233/12$, $C_2 = -81/8$, $y = (1/12)e^{5x} + (233/12)e^x - (81/8)e^{2x}$.

13.25. Să se afle soluţia ecuaţiei

$$y'' + y' - 6y = 2\cos 2x - 10\sin 2x$$

pentru care sînt satisfăcute condiţiile iniţiale

$$y(0) = 1, \; y'(0) = 2.$$

R. Ecualia caracteristică $r^2 + r - 6 = 0$ are rădăcinile -3 şi 2. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$. Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene sub forma

$$u = B\sin 2x + A\cos 2x, \quad u'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$$

$$u'' + u' - 6u = (2B - 10A)\cos 2x + (-10B - 2A)\sin 2x \equiv$$

$$\equiv 2\cos 2x - 10\sin 2x.$$

Din sistemul $\begin{cases} 2B - 10A = 2, \\ 10B + 2A = 10 \end{cases}$ obţinem $A = 0$, $B = 1$

Deci soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} + \sin 2x.$$

Determinăm C_1 şi C_2 aplicînd condiţiile iniţiale:

$$\begin{cases} C_1 e^0 + C_2 e^0 + \sin 0 = 1, \\ 2C_1 e^0 - 3C_2 e^0 + 2\cos 0 = 2, \end{cases} \text{sau} \begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 - 3C_2 = 0. \end{cases}$$

De unde $C_1 = 3/5$, $C_2 = 2/5$, adică $y = 2e^{-3x}/5 + 3e^{2x}/5 + \sin 2x$.

13.26. Să se integreze ecuaţia diferenţială neomogenă:

$$y'' - 2y' = \operatorname{sh} 3x$$

care satisface condiţiile iniţiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

R. Ecuaţia caracteristică are rădăcinile 0 şi 2. Soluţia ecuaţiei omogene este $y = C_1 + C_2 e^{2x}$. Pentru aflarea unei soluţii particulare scriem $\operatorname{sh} 3x = 1/2(e^{3x} - e^{-3x})$ şi aplicăm principiul superpoziţiei, adică căutăm $u = u_1 + u_2$, unde

$$u_1'' - 2u_1' = (1/2)e^{3x}, \text{ iar } u_2'' - 2u_2' = -(1/2)e^{-3x}.$$

Deci $u_1 = A_1 e^{3x}$, $u_2 = A_2 e^{-3x}$.

Soluţia particulară a ecuaţiei neomogene

$$u = A_1 e^{3x} + A_2 e^{-3x} = A_1(\operatorname{ch} 3x + \operatorname{sh} 3x) + A_2(\operatorname{ch} 3x - \operatorname{sh} 3x) =$$

$$= A \operatorname{ch} 3x + B \operatorname{sh} 3x,$$

unde $A = A_1 + A_2$, $B = A_1 - A_2$.

Derivăm şi înlocuim în ecuaţia iniţială

$$u' = 3A \operatorname{sh} 3x + 3B \operatorname{ch} 3x, \quad u'' = 9A \operatorname{ch} 3x + 9B \operatorname{sh} 3x$$

$$u'' - 2u' = (9A - 6B)\operatorname{ch} 3x + (9B - 6A)\operatorname{sh} 3x \equiv \operatorname{sh} 3x.$$

Obținem

$$\begin{cases} 9A - 6B = 0, \\ 9B - 6A = 1. \end{cases} \quad B = 1/5,\ A = 2/15.$$

Soluția generală a ecuației inițiale este

$$y = C_1 + C_2e^{2x} + 1/5 \operatorname{sh} 3x + 2/15 \operatorname{ch} 3x.$$

13.27. Să se găsească soluția ecuației diferențiale neomogene de ordinul doi:

$$y'' - 4y' + 5y = x^2 + 2x.$$

R. Ecuația caracteristică $r^2 - 4r + 5 = 0$ are rădăcini complexe $2 \pm i$. Soluția generală a ecuației omogene este

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

O soluție particulară a ecuației neomogene se caută sub forma

$$u = Ax^2 + Bx + C.$$

Derivăm și înlocuim în ecuație $u' = 2Ax + B,\ u'' = 2A$;

$$u'' - 4u' + 5u = 5Ax^2 + (5B - 8A)x + 5C + 2A - 4B \equiv x^2 + 2x.$$

Obținem

$$\begin{cases} 5A = 1, \\ 5B - 8A = 2 \\ 2A - 4B + 5C = 0 \end{cases} \quad A = 1/5,\ B = 18/25,\ C = 62/125.$$

Soluția generală a ecuației inițiale este

$$y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + (1/5)x^2 + (18/25)x + 62/125.$$

13.28. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y'' + 2y' + 5y = (x + 1)e^x + 2e^{3x}.$$

R. Ecuația caracteristică $r^2 + 2r + 5 = 0$ are rădăcinile $-1 \pm 2i$. Soluția generală a ecuației omogene este

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Aplicăm principiul superpoziției pentru aflarea unei soluții particulare

$$u = u_1 + u_2 = (Ax + B)e^x + Ce^{3x}.$$

Derivăm și înlocuim în ecuația neomogenă

$$u' = (Ax + A + B)e^x + 3Ce^{3x}$$

$$u'' = (Ax + 2A + B)e^x + 9Ce^{3x}$$

$$u'' + 2u' + 5u = (8Ax + 4A + 8B)e^x + 20Ce^{3x} \equiv (x + 1)e^x + 2e^{3x}.$$

De unde $8A = 1$, $4A + 8B = 1$, $20C = 2$, adică $A = 1/8$, $B = 1/16$, $C = 1/10$. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{1}{16}(2x + 1)e^x + \frac{1}{10}e^{3x}.$$

13.29. Să se afle integrala generală a ecuaţiei diferenţiale $y'' + 16y = 2\cos 4x$, care verifică condiţiile la limită $y(0) + y'(0) = 0$, $y(\pi/8) + y'(\pi/8) = 0$.

R. Ecuaţia caracteristică $r^2 + 16 = 0$, are rădăcinile $\pm 4i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este $y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x$. Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma

$$u = x(A \cos 4x + B \sin 4x).$$

Derivăm şi înlocuim în ecuaţie

$$u' = (A + 4Bx) \cos 4x + (B - 4Ax) \sin 4x$$

$$u'' = (8B - 16Ax) \cos 4x + (-8A - 16Bx) \sin 4x$$

$$u'' + 16u = 8B \cos 4x - 8A \sin 4x \equiv 2 \cos 4x.$$

De unde $A = 0$, $B = 1/4$. Soluţia generală a ecuaţiei iniţiale este

$$y = C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x + 1/4x \sin 4x.$$

Impunem condiţiile la limită

$$\begin{cases} C_1 + 4C_2 = 0 & , \quad C_2 = -\frac{1}{17}\left(\frac{\pi}{32} + \frac{1}{4}\right) \\ C_2 + \pi/32 - 4C_1 + 1/4 = 0, & C_1 = \frac{4}{17}\left(\frac{\pi}{32} + \frac{1}{4}\right). \end{cases}$$

În final $y = \frac{4}{17}\left(\frac{\pi}{32} + \frac{1}{4}\right)\cos 4x + \left[\frac{x}{4} - \frac{1}{17}\left(\frac{\pi}{32} + \frac{1}{4}\right)\right]\sin 4x.$

13.30. Să se afle soluţia particulară a ecuaţiei diferenţiale

$$y'' + 9y = \operatorname{tg} 3x,$$

verificînd condiţiile la limită $y(0) = y(\pi/18) = 0$.

R. Ecuaţia caracteristică $r^2 + 9 = 0$ are rădăcinile complexe $\pm 3i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y = A \cos 3x + B \sin 3x.$$

Căutăm o soluţie particulară prin metoda variaţiei constantelor.

$$u = C_1(x) \cos 3x + C_2(x) \sin 3x,$$

unde funcţiile $C_1(x)$, $C_2(x)$ verifică sistemul

$$\begin{cases} C_1'(x) \cos 3x + C_2'(x) \sin 3x = 0, \\ -3C_1'(x) \sin 3x + 3C_2'(x) \cos 3x = \operatorname{tg} 3x. \end{cases}$$

Obţinem

$$C_2'(x) = (1/3)\sin 3x,\ C_1'(x) = -(1/3)\sin 3x \operatorname{tg} 3x,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{9}\cos 3x,\ \ C_1(x) = \frac{1}{9}\left[\sin 3x - \ln|\operatorname{tg}(3x/2 + \pi/4)|\right],$$

$$x \neq (4k-1)\pi/6,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = A\cos 3x + B\sin 3x - 1/9\cos 3x \ln|\operatorname{tg}(3x/2 + \pi/4)|.$$

Determinăm constantele arbitrare A, B din condiţia $y(0) = y\left(\frac{\pi}{18}\right) = 0$ $A = 0$; $\frac{\sqrt{3}}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\ln \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = 0$ de unde $A = 0$, $B = [\sqrt{3}/18]\ln 3$.
Soluţia ecuaţiei care verifică condiţiile la limită date este

$$y = \frac{\sqrt{3}}{18}\ln 3 \sin 3x - \frac{1}{9}\cos 3x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|,$$

$$x \in \mathbf{R} \setminus \{(4k-1)\pi/6 \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

13.31. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale de ordinul trei neomogene cu coeficienţi constanţi:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x\sqrt{x},\ x > 0.$$

R. Ecuaţia caracteristică $r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0$ are rădăcina triplă **1.** Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x.$$

Aplicăm metoda variaţiei constantelor pentru aflarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene. Căutăm soluţia particulară de forma:

$$u(x) = K_1(x)e^x + K_2(x)xe^x + K_3(x)x^2e^x.$$

Funcţiile K_1, K_2, K_3 sînt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} K_1'e^x + K_2'xe^x + K_3'x^2e^x = 0, \\ K_1'e^x + K_2'(xe^x + e^x) + K_3'(2xe^x + x^2e^x) = 0, \\ K_1'e^x + K_2'(xe^x + 2e^x) + K_3'(4xe^x + 2e^x + x^2e^x) = e^x\sqrt{x}. \end{cases}$$

Simplificăm cu e^x, obţinem

$$\begin{cases} K_1' + K_2'x + K_3'x^2 = 0, \\ K_1' + K_2'(x+1) + K_3'(2x + x^2) = 0, \\ K_1' + K_2'(x+2) + K_3'(2 + 4x + x^2) = \sqrt{x}. \end{cases}$$

Soluția sistemului este: $K_1' = x^2\sqrt{x}/2$, $K_2' = -x\sqrt{x}$, $K_3' = \sqrt{x}/2$. Prin integrare $K_1(x) = \frac{1}{7}x^3\sqrt{x}$, $K_2(x) = -\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$, $K_3(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{x}$. Soluția particulară a ecuației neomogene este

$$u(x) = \sqrt{x}e^x(x^3/3 - 2x^3/5 + x^2/7) = 8x^3\sqrt{x}e^x/105,$$

iar soluția generală

$$y(x) = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2 + 8x^3\sqrt{x}/105), \; x > 0.$$

13.32. Să se afle soluția generală a ecuațiilor diferențiale:

1° $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \ln x, \; x > 0$

2° $y^{IV} - 8y'' + 16y = e^{2x}(x + 1)$.

3° $y^{IV} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = 5e^{2x}\cos x$.

R. 1° Soluția generală a ecuației omogene este

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^x.$$

Pentru aflarea unei soluții particulare a ecuației neomogene folosim metoda variației constantelor.

$$\begin{cases} C_1' + C_2'x + C_3'x^2 = 0, \\ C_2' + 2xC_3' = 0, \\ 2C_3' = \ln x. \end{cases}$$

Soluția sistemului este $C_1' = \frac{x^2}{2}\ln x$, $C_2' = -x\ln x$, $C_3' = \frac{\ln x}{2}$. Integrăm

$$C_1 = \frac{x^3}{6}\ln x - \frac{x^3}{18}, \; C_2 = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4}, \; C_3 = \frac{x}{2}\ln x - \frac{x}{2}.$$

Soluția generală este dată de ecuația:

$$y = (C_1 + C_2x + C_3x^2 + x^3\ln x/6 - 11x^3/36)e^x, \; x > 0.$$

2° Ecuația caracteristică $r^4 - 8r^2 + 16 = 0$ are rădăcinile duble 2 și -2. Soluția generală a ecuației omogene este

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3xe^{2x} + C_4xe^{-2x}.$$

Căutăm o soluție particulară de forma $u = e^{2x}(Ax^3 + Bx^2)$. Înlocuim în ecuația neomogenă și identificăm, obținem:

$$A = 1/96, \; B = 1/64,$$

deci soluția generală a ecuației neomogene este

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3xe^{2x} + C_4xe^{-2x} + (1/96)x^3e^{2x} + (1/64)x^2e^{2x},$$

$$x \in \mathbf{R}.$$

3° Ecuaţia caracteristică $(r^2 - 2r + 2)^2 = 0$ are rădăcinile duble $1+i$ şi $1-i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y = C_1e^x \cos x + C_2e^x \sin x + C_3xe^x \cos x + C_4xe^x \sin x.$$

Alegem o soluţie particulară de forma: $u = e^{2x}(A \cos x + B \sin x)$. Înlocuim în ecuaţia neomogenă şi identificăm; obţinem $A = -3/5$, $B = 4/5$, deci soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y = e^x(C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3x \cos x + C_4x \sin x) +$$
$$+ e^{2x}(-3 \cos x/4 + 4 \sin x/5), \quad x \in \mathbf{R}.$$

13.33. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei Euler:

$$(x+1)^2y'' - (x+1)y' + y = x \ln^2 (x+1), \qquad x+1 > 0.$$

(Examen)

R. Substituţia $e^t = x + 1$ ne conduce la

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + y = t^2(e^t - 1).$$

Ecuaţia caracteristică $r^2 - 2r + 1 = 0$ are rădăcina dublă 1, deci soluţia generală a ecuaţiei neomogene este $y = C_1e^t + C_2te^t$. Aplicăm principiul superpoziţiei şi căutăm o soluţie particulară de forma $u = u_1 + u_2$, unde u_1 este soluţia ecuaţiei $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^2e^t$, iar u_2 este soluţia ecuaţiei $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = -t^2$. Deci

$$u_1 = t^2e^t(At^2 + Bt + C), \; u_2 = Dt^2 + Et + F.$$

Înlocuim în ecuaţie şi identificăm, obţinem:

$$A = 1/12, \; B = 0, \; C = 0, \; D = -1, \; E = -4, \; F = -6.$$

Soluţia generală este $y = e^t(C_1 + C_2t + t^4/12) - t^2 - 4t - 6$. Revenim la vechea variabilă

$$y(x) = C_1(x+1) + C_2(x+1)\ln(x+1) + (1/12)(x+1)\ln^4(x+1) -$$
$$- \ln^2(x+1) - 4\ln(x+1) - 6, \qquad x+1 > 0.$$

13.34. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei Euler:

$$x^2y'' + xy' + y = 1/x, \qquad x \neq 0.$$

R. Facem substituţia $|x| = e^t$, $\dfrac{dy}{dx} = e^{-t}\dfrac{dy}{dt}$, $\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\left(\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right)$. Ecuaţia devine: $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = e^{-t}$. Ecuaţia caracteristică $r^2 + 1 = 0$ are rădăcinile $\pm i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este $y(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$. Soluţia particulară se caută de forma $u = Ae^{-t}$. $u'' + u \equiv Ae^{-t} + Ae^{-t} = e^{-t}$, obţinem $A = 1/2$. Soluţia ecuaţiei va fi

$$y(x) = C_1 \cos \ln |x| + C_2 \sin \ln |x| + 1/(2x), \qquad x \neq 0.$$

13.35. Să se integreze ecuaţia Euler:

$$(x+1)^3y''' + 2(x+1)y' - 2y = (x+1)\sin\ln(x+1),\ x+1>0.$$

(Examen)

R. Punînd $x+1=e^t$, $\frac{dy}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$,

$$\frac{d^3y}{dx^3}=e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3}-3\frac{d^2y}{dt^2}+2\frac{dy}{dt}\right).$$

Ecuaţia devine o ecuaţie neomogenă cu coeficienţi constanţi.

$$y'''-3y''+4y'-2y=e^t\sin t.$$

Ecuaţia caracteristică $r^3-3r^2+4r-2=0$ are rădăcinile 1, $1\pm i$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y=e^t(C_1+C_2\sin t+C_3\cos t).$$

Căutăm o soluţie particulară pentru ecuaţia neomogenă de forma

$$u=te^t(A\sin t+B\cos t).$$

Înlocuind în ecuaţie şi identificînd, obţinem $A=-1/2$, $B=0$. Deci soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y=e^t(C_1+C_2\sin t+C_3\cos t)-1/2te^t\sin t.$$

Revenind la vechea variabilă, rezultă:

$$y=(x+1)[C_1+(C_2-1/2\ln(x+1))\sin\ln(x+1)+$$
$$+C_3\cos\ln(x+1)].$$

13.36. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$x^2y^{IV}-y''=1/x.\quad \text{(Examen)}$$

R. Este o ecuaţie Euler. Facem substituţia $|x|=e^t$ şi calculăm

$$\frac{d^2y}{dx^2}=e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^4y}{dx}=e^{-4t}\left(\frac{d^4y}{dt^4}-6\frac{d^3y}{dt^3}+11\frac{d^2y}{dt^2}-6\frac{dy}{dt}\right).$$

Ecuaţia devine $y^{IV}-6y'''+10y''-5y'=e^t$. Ecuaţia caracteristică $r^4-6r^3+10r^2-5r=0$ are rădăcinile 0, 1, $(5\pm\sqrt5)/2$. Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y(t)=C_1+C_2e^t+C_3e^{\frac{5+\sqrt5}{2}t}+C_4e^{\frac{5-\sqrt5}{2}t}.$$

Căutăm o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene de forma $u=e^tAt$. Înlocuim în ecuaţie, obţinem $A=1$, deci $u=te^t$. Soluţia generală este

$$y(x)=C_1+C_2|x|+C_2|x|^{\frac{5+\sqrt5}{2}}+C_4|x|^{\frac{5-\sqrt5}{2}}+x\ln|x|,\ x\neq0.$$

13.37. Să se integreze ecuaţia diferenţială

$$x^2y^{V} - y''' = 1/x^4, \quad x \neq 0 \qquad \text{(Examen)}$$

R. Este o ecuaţie Euler. Punem $|x| = e^t$,

$$y''' = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right),$$

$$y^{V} = e^{-5t}\left(\frac{d^5y}{dt^5} - 10\frac{d^4y}{dt^4} + 35\frac{d^3y}{dt^3} - 50\frac{d^2y}{dt^2} + 24\frac{dy}{dt}\right).$$

Ecuaţia devine

$$y^{V} - 10y^{IV} + 34y''' - 47y'' + 22y' = e^{-t}.$$

Ecuaţia caracteristică $r^5 - 10r^4 + 34r^3 - 47r^2 + 22r = 0$ are rădăcinile $0, 1, 2, (7 \pm \sqrt{5})/2$. Soluţia ecuaţiei neomogene este

$$y(t) = C_1 + C_2e^t + C_3e^{2t} + C_4e^{\frac{7+\sqrt{5}}{2}t} + C_5e^{\frac{7-\sqrt{5}}{2}t}.$$

Soluţia particulară $u = Ae^{-t}$, conduce la $A = -1/114$. Deci soluţia generală a ecuaţiei neomogene este

$$y(x) = C_1 + C_2|x| + C_3x^2 + C_4|x|^{\frac{7+\sqrt{5}}{2}} + C_5|x|^{\frac{7-\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{114|x|}, \qquad x \neq 0.$$

13.38. Să se afle soluţia ecuaţiei diferenţiale

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0 \qquad (\lambda = \text{const}).$$

(ecuaţia lui Bessel).

R. Se caută soluţia ecuaţiei sub forma unei serii generalizate

$$y = x^r\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+r},$$

înlocuind în ecuaţie şi egalînd cu zero coeficienţii fiecărei puteri a lui x, anume x^r, x^{r+1}, x^{r+2}, ..., x^{r+k}, ..., rezultă

$$(r^2 - \lambda^2)a_0 = 0,$$
$$[(r+1)^2 - \lambda^2]a_1 = 0,$$
$$[(r+2)^2 - \lambda^2]a_2 + a_0 = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[(r+k)^2 - \lambda^2]a_k + a_{k-2} = 0.$$

Fie $a_0 \neq 0$, atunci $r = \pm\lambda$. Fie $r_1 = \lambda$, atunci $a_1 = 0$ şi $[(r+k)^2 - \lambda^2]a_k = -a_{k-2}$, $k = 3, 5, 7, \ldots$. Rezultă că $a_3 = a_5 = \ldots = a_{2k+1} = 0$. Pentru coeficienţii pari, obţinem expresiile

$$a_2 = \frac{-a_0}{(2\lambda+2)\cdot 2},\quad a_4 = \frac{-a_0}{(2\lambda+4)\cdot 4} = \frac{a_0}{(\lambda+1)(\lambda+2)\cdot 1\cdot 2\cdot 2^4}, \ldots, a_{2k} =$$

$$= \frac{-a_{2k-2}}{(2\lambda+2)2k} = (-1)^{k+1}\frac{a_0}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2k(2\lambda+2)(2\lambda+4)\ldots(2\lambda+2k)}.$$

Obţinem $y_1 = a_0 \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{\lambda+2k}}{4^k k!(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(\lambda+k)}$, a_0 oarecare.

Pentru $r_2 = -\lambda$, toţi coeficienţii a_k sînt definiţi în acelaşi mod numai în cazul cînd λ nu este număr întreg. Obţinem soluţia înlocuind λ cu $-\lambda$ în soluţia precedentă $y_1(x)$:

$$y_2(x) = a_0 x^{-\lambda}\left[1 - \frac{x^2}{2(-2\lambda+2)} + \frac{x^4}{2\cdot 4(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)} - \right.$$

$$\left. - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6(-2\lambda+2)(-2\lambda+4)(-2\lambda+6)} + \ldots\right] =$$

$$= a_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{-\lambda+2k}}{4^k k!(-\lambda+1)(-\lambda+2)\ldots(-\lambda+k)}.$$

Seria întreagă obţinută converge pentru orice x; $y_1(x)$ şi $y_2(x)$ sînt liniar independente.

Soluţia $y_1(x)$ cu constanta $a_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$ se numeşte *funcţia Bessel de speţa întîi de ordin* λ notată $J_\lambda(x)$. Soluţia $y_2(x)$ se notează $J_{-\lambda}(x)$. Soluţia generală a ecuaţiei va fi

$$y(x) = C_1 J_\lambda(x) + C_2 J_{-\lambda}(x);\ \lambda \neq \mathbf{Z},\ C_1,\ C_2 \in \mathbf{R}.$$

Pentru $\lambda \in \mathbf{N}$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Pentru λ întreg negativ soluţia particulară nu se exprimă prin funcţia lui Bessel de speţa I, ci se schimbă sub forma

$$K_n(x) = J_n(x)\ln x + x^{-n}\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Înlocuind în ecuaţie se determină b_k. $K_n(x)$ se numeşte funcţia Bessel de speţa a doua de ordinul n.

13.39. Aplicînd rezultatul exercițiului anterior să se integreze ecuația diferențială $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$.

R. $\lambda = 1/2$. Soluția generală este $y = C_1J_{1/2} + C_2J_{-1/2}$.

$$J_{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin x}{x}.$$

Analog $J_{-1/2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$. În consecință soluția generală este:

$$y = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} (C_1 \sin x + C_2 \cos x),\ x \neq 0.$$

SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

14.1. Să se construiască sistemul de ecuații diferențiale de ordinul întîi, care admite soluție generală pe

$$x(t) = C_1t + C_2t^2,\ y(t) = 2C_1t^2 + 3C_2t^3,\quad t \neq 0.$$

R. Cele două sisteme de funcții

$$\begin{cases} x_1 = t, \\ y_1 = 2t^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = t^2, \\ y_2 = 3t^3, \quad t \neq 0 \end{cases}$$

formează un sistem fundamental pentru $t \neq 0$, deoarece wronskianul lor

$$W(t) = \begin{vmatrix} t & 2t^2 \\ t^2 & 3t^3 \end{vmatrix} = t^4 \neq 0, \text{ dacă } t \neq 0.$$

Soluția 1. Sistemul de ecuații diferențiale care admite pe (x_1, y_1) și (x_2, y_2) ca soluțiia este

$$\begin{vmatrix} x' & x & y \\ x_1' & x_1 & y_1 \\ x_2' & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y' & x & y \\ y_1' & x_1 & y_1 \\ y_2' & x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0,$$

care în cazul nostru devine

$$\begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} & x & y \\ 1 & t & 2t^2 \\ 2t & t^2 & 3t^3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{dy}{dt} & x & y \\ 4t & t & 2t^2 \\ 9t^2 & t^2 & 3t^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Soluția 2. Se derivează în raport cu t soluțiile date în enunț apoi se elimină C_1 și C_2 între

$$\frac{dx}{dt} = C_1 + 2C_2t,\quad x = C_1t + C_2t^2,\quad y = 2C_1t + 3C_2t^3,$$

și între

$$\frac{dy}{dt} = 4C_1t + 9C_2t,\quad x = C_1t + C_2t,\quad y = 2C_1t^2 + 3C_2t^3;$$

În ambele situații obținem sistemul

$$t^2\frac{dx}{dt}+tx-y=0,\quad t\frac{dy}{dt}+6tx-5y=0,\qquad t\neq 0$$

14.2. Să se găsească soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$\frac{dy}{dx}-3y+8z-4u=1,$$

$$\frac{dz}{dx}+y-5z+2u=-1,$$

$$\frac{du}{dx}+3y-14z+6u=2,$$

apoi să se rezolve problema Cauchy: $y(0)=2,\ z(0)=3,\ u(0)=4$.

R. Pentru sistemul omogen

$$\frac{dy}{dx}-3y+8z-4u=0,$$

$$\frac{dz}{dx}+y-5z+2u=0,$$

$$\frac{du}{dx}+3y-14z+6u=0,$$

căutăm soluții de forma $y=Ae^{rx},\ z=Be^{rx},\ u=Ce^{rx}$, care conduc la ecuația caracteristică în r

$$\begin{vmatrix} r-3 & 8 & -4\\ 1 & r-5 & 2\\ 3 & -14 & r+6\end{vmatrix}=r^3-2r^2-r+2=0,$$

cu rădăcinile $r_1=-1$. $r_2=1$, $r_3=2$. Pentru $r=-1$, $y_1=A_1e^{-x}$, $z_1=B_1e^{-x}$, $u_1=C_1e^{-x}$, unde A_1, B_1, C_1 sînt soluțiile sistemului

$$-4A_1+8B_1-4C_1=0,\quad C_1=1,$$

$$-6B_1+A_1+2C_1=0,$$

deci $A_1=-1/2$, $B_1=1/4$, $C_1=1$. Am obținut soluția particulară

$$y_1=-(1/2)e^{-x},\ z_1=(1/4)e^{-x},\ u_1=e^{-x},\quad x\in\mathbf{R}.$$

Pentru $r=1$ procedăm în mod asemănător

$$y_2=A_2e^x,\quad z_2=B_2e^x,\quad u_2=C_2e^x,$$

cu A_2, B_2, C_2 soluţia sistemului

$$-2A_2 + 8B_2 - 4C_2 = 0,$$
$$3A_2 - 14B_2 + 7C_2 = 0, \quad C_2 = 1,$$

deci $A_2 = 0$, $B_2 = 1/2$, $C_2 = 1$, care ne dă soluţia particulară

$$y_0 = 0, \quad z_2 = 1/2e^x, \quad u_2 = e^x, \; x \in \mathbf{R}.$$

Pentru $r = 2$ avem

$$y_3 = A_3e^{2x}, \; z_3 = B_3e^{3x}, \; u_3 = C_3e^{3x},$$

unde A_3, B_3, C_3 sînt soluţia sistemului

$$-A_3 + 8B_3 - 4C_3 = 0,$$
$$A_3 - 3B_3 + 2C_3 = 0, \qquad C_3 = 1,$$

deci $A_3 = -4/5$, $B_3 = 2/5$, $C_3 = 1$, care ne furnizează a treia soluţie particulară

$$y_3 = -4e^{2x}/5, \; z_3 = 2e^{2x}/5, \; u_3 = e^{2x}, \; x \in \mathbf{R}.$$

Soluţia generală a sistemului omogen este dată de

$$y = -(1/2)Ae^{-x} - (4/5)Ce^{-2x},$$
$$z = (1/4)Ae^{-x} + (1/2)Be^x + (2/5)Ce^{2x},$$
$$u = Ae^{-x} + Be^x + Ce^{2x}, \; x \in \mathbf{R}.$$

Pentru sistemul neomogen căutăm o soluţie particulară de forma

$$y = a, \; z = b, \; u = c, \; a, \; b, \; c \text{ constante}$$

înlocuite în sistemul din enunţ, obţinem

$$\begin{aligned} -3a + 8b - 4c &= 1 \\ a - 5b + 2c &= -1 \\ 3a - 14b + 6c &= 2 \end{aligned}$$

cu soluţia $a = -9$, $b = 5$, $c = 33/2$.
Soluţia generală a sistemului este dată de

$$(\alpha) \quad \begin{cases} y(x) = -(1/2)Ae^{-x} - (4/5)Ce^{2x} - 9, \\ z(x) = (1/4)Ae^{-x} + (1/2)Be^x + (2/5)Ce^{2x} + 5 \\ u(x) = Ae^{-x} + Be^x + Ce^{2x} + 33/2, \; x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

unde A, B, C sînt constante arbitrare.

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy cerem ca soluţia generală (α) să satisfacă condiţiile cerute. Obţinem sistemul algebric în A, B, C, anume

$$-(1/2)A - (4/5)C - 9 = 2,$$
$$(1/4)A + (1/2)B + (2/5)C + 5 = 3,$$
$$A + B + C + 33/2 = 4,$$

care are soluţia

$$A = -46/3,\ B = 7,\ C = -25/6.$$

Soluţia problemei lui Cauchy este dată de

$$(\beta)\quad \begin{cases} y(x) = 23e^{-x}/3 + 10e^{2x}/3 - 9, \\ z(x) = -23e^{-x}/6 + 7e^{x}/2 - 5e^{2x}/3 + 5, \\ u(x) = -46e^{-x}/3 + 7e^{x} - 25e^{2x}/6 + 33/2, \quad x \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Să observăm că satisface condiţiile iniţiale deoarece avem

$$y(0) = 23/3 - 10/3 - 9 = 2,$$
$$z(0) = -23/6 + 7/2 - 5/3 + 5 = 3,$$
$$u(0) = -46/3 + 7 - 25/6 + 33/2 = 4.$$

14.3. Prin metoda aproximaţiilor succesive să se determine primele trei aproximante ale soluţiei sistemului de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dy_1}{dt} = ty_2,\quad \frac{dy_2}{dt} = t^2y_3,\ \ldots,\ \frac{dy_{n-1}}{dt} = t^{n-1}y_n,\ \frac{dy_n}{dt} = t^n y_1,$$

pentru $t \in [-1, 1]$ şi $y_k \in [-1, 1]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, care satisface condiţiile iniţiale

$$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 1,\ \ldots,\ y_n(0) = 1.$$

R. Deoarece $|t^k y_{k+1}| \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n$, rezultă că putem aplica metoda aproximaţiilor succesive pentru $t \in [-1, 1]$. Luăm pentru aproximanta de ordinul zero pe $y_{k_0}(0) = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. În continuare obţinem

$$y_{11} = 1 + \int_0^t t\mathrm{d}t = 1 + t^2/2,$$

$$y_{21} = 1 + \int_0^t t^2\mathrm{d}t = 1 + t^3/3,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y_{n1} = 1 + \int_0^t t^n\mathrm{d}t = 1 + t^{n+1}/(n+1),$$

aproximanta de ordinul doi este dată de

$$y_{12} = 1 + \int_0^t t(1 + t^3/3)\mathrm{d}t = 1 + t^2/2 + t^5/3 \cdot 5,$$

$$y_{22} = 1 + \int_0^t t^2(1 + t^4/4)\,\mathrm{d}t = 1 + t^3/3 + t^7/4 \cdot 7,$$

. . . .

$$y_{n-1,2} = 1 + \int_0^t t^{n-1}(1 + t^{n+1}/(n + 1))\,\mathrm{d}t = 1 + t^n/n + t^{2n+1}/((n + 1)(2n + 1),$$

$$y_{n,2} = 1 + \int_0^t t^n(1 + t^2/2)\,\mathrm{d}t = 1 + t^{n+1}/(n + 1) + t^{n+3}2(n + 3)$$

în fine, aproximanta a treia este

$$y_{13} = 1 + \int_0^t t(1 + t^3/3 + t^7/4 \cdot 7)\mathrm{d}t = 1 + t^2/2 + t^5/3 \cdot 5 + t^9/4 \cdot 7 \cdot 9,$$

$$y_{23} = 1 + \int_0^t t^2(1 + t^4/4 + t^8/4 \cdot 8)\,\mathrm{d}t = 1 + t^3/3 + t^7/4 \cdot 7 + t^{11}/4 \cdot 8 \cdot 11$$

. . . .

$$y_{n-1,3} = 1 + \int_0^t t^{n-1}(1 + t^{n+1}/(n + 1) + t^{n+3}/2(n + 3)\mathrm{d}t =$$

$$= 1 + t^n/n + t^{2n+1}/(1 + 2n)(n + 1) + t^{2n+3}(2(n + 3)(2n + 3)$$

$$y_{n,3} = 1 + \int_0^t t^n(1 + t^2/2 + t^5/3 \cdot 5)\,\mathrm{d}t =$$

$$= 1 + t^{n+1}/(n + 1) + t^{n+3}/2(n + 3) + t^{n+6}/(3 \cdot 5 \cdot (n + 6)).$$

Se vede că se poate construi prin inducție aproximanta de un ordin oarecare p.

14.4. Să se găsească soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale: $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = y, \; \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -z, \; \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = x.$

R. a) Folosim metoda eliminării. Avem

$$\frac{\mathrm{d}^4x}{\mathrm{d}t^4} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -z, \quad \frac{\mathrm{d}^6x}{\mathrm{d}t^6} = -\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = -x,$$

deci x satisface ecuaţia $\frac{d^6x}{dt} + x = 0$; ecuaţia caracteristică $r^6 + 1 = 0$, are rădăcinile

$r_1 = \cos \pi/6 + i \sin \pi/6 = \sqrt{3}/2 + i1/2$, $r_2 = \cos \pi/2 + i \sin \pi/2 = i$,

$r_3 = \cos 5\pi/6 + i \sin 5\pi/6 = -\sqrt{3}/2 + i1/2$,

$r_4 = \cos 7\pi/6 + i \sin 7\pi/6 = -\sqrt{3}/2 - i1/2$, $r_5 = \cos 3\pi/2 + i \sin 3\pi/2 = -i$,

$r_6 = \cos 11\pi/6 + i \sin 11\pi/6 = \sqrt{3}/2 - i1/2$,

care ne dau pe x, anume

$$x(t) = e^{t\sqrt{3}/2}(C_1 \cos t/2 + C_2 \sin t/2) +$$
$$+ e^{-t\sqrt{3}/2}(C_3 \cos t/2 + C_4 \sin t/2) + C_5 \cos t + C_6 \sin t, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Celelalte două funcţii din sistem se obţin numai prin derivări

$$y(t) = \frac{d^2x}{dt^2}, \; z(t) = -\frac{d^4x}{dt^4}.$$

b) Putem căuta direct soluţii de forma

$$x = Ae^{rt}, \; y = Be^{rt}, \; z = Ce^{rt},$$

care, introduse în sistem, conduc la $Ar^2 = B$, $Br^2 = -C$, $Cr^2 = A$, între care dacă eliminăm pe A, B, C obţinem ecuaţia caracteristică

$$\begin{vmatrix} r^2 & -1 & 0 \\ 0 & r^2 & 1 \\ -1 & 0 & r^2 \end{vmatrix} = r^6 + 1 = 0 \text{ etc.}$$

Soluţia generală a sistemului depinde de 6 constante arbitrare.

14.5. Să se determine curbele ortogonale familiei de suprafeţe

$$(x^2 + y^2)^n = Cz.$$

R. Curbele ortogonale familiei de suprafeţe $F(x, y, z) = C$ sînt date de

$$\frac{dx}{F'_x} = \frac{dy}{F'_y} = \frac{dz}{F'_z}.$$

În cazul nostru $F(x, y, z) = \frac{1}{z}(x^2 + y^2)^n$ deci

$$F'_x = 2nx\frac{(x^2+y^2)^{n-1}}{z}, \; F'_y = 2ny\frac{(x^2+y^2)^{n-1}}{z}, \; F'_z = -\frac{1}{z^2}(x^2+y^2)^n.$$

Sistemul de ecuaţii diferenţiale care ne dă curbele ortogonale cerute este

$$\frac{z\,dx}{2nx(x^2+y^2)^{n-1}} = \frac{z\,dy}{2ny(x^2+y^2)^{n-1}} = -\frac{z^2\,dz}{(x^2+y^2)^n},$$

care se mai scrie

$$\frac{1}{2n}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{1}{2n}\cdot\frac{dy}{y}=\frac{-zdz}{x^2+y^2},$$

Avem combinaţia integrabilă $dx/x = dy/y$, care ne dă integrala primă $cy = C_1x$. O altă combinaţie integrabilă este $xdx + ydy = -2nzdz$, are ne dă a doua integrală primă $x^2 + y^2 + 2nz^2 = C_2$. Traiectoriile ortogonale sînt date de familia de curbe ce depinde de doi parametri

$$y = C_1x, \quad x^2 + y^2 + 2nz^2 = C_2 \quad (x, y, z) \in \mathbf{R} - \{0, 0, 0\}$$

Prima ecuaţie reprezintă plane variabile care conţin axa oz, iar a doua o familie de elipsoizi. Curbele ortogonale sînt curbe plane.

14.6. Se dă cîmpul vectorial

$$\overline{V}(x, y, z)=\left(\frac{kx}{x^2+y^2}, \frac{ky}{x^2+y^2}, \frac{g}{z}\right),$$

cu k, g const. şi $x^2 + y^2 \neq 0$, $z \neq 0$. Se se determine liniile de cîmp. Să se găsească apoi linia de cîmp care trece prin punctul (1, 1, 2).

R. Ecuaţiile diferenţiale ale liniilor de cîmp sînt

$$\frac{x^2+y^2}{kx}dx=\frac{x^2+y^2}{ky}dy=\frac{z}{g}dz.$$

Avem combinaţia integrabilă $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}$, care ne dă integrala primă, $y = C_1x$. O a doua combinaţie integrabilă este

$$\frac{(x^2+y^2)(xdx+ydy)}{k(x^2+y^2)}=\frac{z}{g}dz,$$

care se mai scrie $gd(x^2 + y^2) = kd(z^2)$; obţinem a doua integrală primă $z^2 = g/k(x^2 + y^2) + C_2$. Cele două integrale prime ne dau reţeaua liniilor de cîmp cerută $\Gamma\begin{cases} y = C_1x \\ z^2 - g/k(x^2+y^2) = C_2 \end{cases}$. Dacă impuneam soluţiei obţinute condiţia cerută în enunţ, $C_1 = 1$, $4 - 2 \cdot 9/k = C_2$, constantele arbitrare C_1 şi C_2 sînt unic determinate. Avem $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{4k-2g}{k}$. Linia de cîmp cerută este dată de

$$(\Gamma^\alpha)\cdot y = x,\ z^2 - (g/k)(x^2+y^2) = \frac{4k-2g}{k},$$

anume este intersecţia unei cuadrice cu centrul în $O(0, 0, 0)$ cu un plan care îi conţine axa Oz.

14.7. Folosind metoda aproximaţiilor succesive să se găsească primele trei aproximante ale soluţiei sistemului de ecuaţii diferenţiale

$$dy/dx = z^2 + xy,\quad dz/dx = y^2 + xy,$$

definită în $[-1, 1]\times[-1, 1]\times[-1, 1]$, cu condiţiile iniţiale $y(0) = 1$, $z(0) = 1$.

R. În intervalele considerate avem

$$|z^2 + xy| \leqslant 2, \ |y^2 + xz| \leqslant 2,$$

deci pentru $x \in [-1/2, 1/2]$ putem aplica metoda aproximațiilor succesive. Luăm $y_0 = 1$, $z_0 = 1$ apoi

$$y_1 = 1 + \int_0^x (1 + t)\mathrm{d}t, \quad z_1 = 1 + \int_0^x (1 + t)\,\mathrm{d}t$$

$$y_1 = 1 + x + (1/2)x^2, \quad z_1 = 1 + x + (1/2)x^2;$$

în continuare, aproximanta a doua este dată de

$$y_2 = 1 + \int_0^x [(1 + t + t^2/2)^2 + t(1 + t + t^2/2)]\,\mathrm{d}t,$$

$$z_2 = 1 + \int_0^x [(1 + t + t^2/2)^2 + t(1 + t + t^2/2)]\,\mathrm{d}t,$$

unde, dacă efectuăm integrarea, obținem efectiv

$$y_2 = 1 + x + (3/2)x^2 + x^3 + (3/8)x^4 + (1/20)x^5,$$
$$z_2 = 1 + x + (3/2)x^2 + x^3 + (3/8)x^4 + (1/20)x^5; \ x \in [-1/2, 1/2]$$

aproximanta a treia se obține în mod asemănător și este dată de

$$y_3(t) = 1 + \int_0^x [(1 + t + 3t^2/2 + t^3 + 3t^4/8 + t^5/20)^2 +$$
$$+ t(1 + t + 3t^2/2 + t^3 + 3t^4/8 + t^5/20)]\,\mathrm{d}t,$$

$$z_3(t) = 1 + \int_0^x [(1 + t + 3t^2/2 + t^3 + 3t^4/8 + t^5/20)^2 +$$
$$+ t(1 + t + 3t^2/2 + t^3 + 3t^4/8 + t^5/20)]\,\mathrm{d}t.$$

Cu $x \in [-1/2, 1/2]$.

14.8. Să se aproximeze prin polinoame soluția $y(x)$ și $z(x)$ a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2y + xz + 2x, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = x^2z + y + x,$$

într-o vecinătate a punctului $(x = 0, y = 0, z = 0)$ prin metoda Runge-Kutta.

R. Să notăm

$$\varphi(x) = x^2y(x) + xz(x) + 2x, \quad \psi(x) = x^2z(x) + y(x) + x.$$

Folosind formula Mac—Laurin soluţia $y(x)$, $z(x)$ se scrie

$$y(x) = y(0) + \frac{x}{1!} y'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} y^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} y^{(n+1)}(\xi_1),$$

$$z(x) = z(0) + \frac{x}{1!} z'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} z^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} z^{(n+1)}(\xi_2),$$

cu $(\xi_1, \xi_2) \in (0, x)$.
Dacă ne oprim la un polinom de gradul trei trebuie să calculăm pe

$$y^{(k)}(0),\ z^{(k)}(0),\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Din condiţiile iniţiale şi din sistem obţinem succesiv

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 0,\ z(0) = 0,\ z'(0) = 0;$$

$$y''(x) = \varphi'(x) = 2xy + x^2y' + z + xz' + 2,\ y''(0) = 2,$$

$$z''(x) = \psi'(x) = 2xz + x^2z' + y' + 1,\ z''(0) = 1,$$

$$y'''(x) = \varphi''(x) = 2y + 4xy' + x^2y'' + z' + xz'' + z',\ y'''(0) = 0,$$

$$z'''(x) = \psi''(x) = 2z + 2xz' + x^2z'' + y'',\ z'''(0) = 2$$

Aproximaţia soluţiei sistemului dat care trece prin punctul (0, 0, 0) prin polinoame de gradul trei este dată de

$$y^*(x) = x^2,\ z^*(x) = x^2/2 + x^3/3.$$

14.9. Să se găsească soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi.

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = y - 4x + 1,$$

$$\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = 4y + 2x + t,$$

apoi să se determine soluţia particulară care satisface condiţiile iniţiale $x(0) = -1$, $y(0) = 2$. (Examen)

R. Considerăm întîi sistemul omogen

$$\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} = y - 4x,\quad \frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt} = 4y + 2x,$$

căruia îi căutăm soluţii de forma $x = Ae^{rt}$, $y = Be^{rt}$.
Obţinem sistemul în A, B, r

$$Ar - Br = B - 4A,\ Ar + 2Br = 4B + 2A,$$

sau

$$(\alpha)\quad \begin{cases} A(r+4) - B(r+1) = 0, \\ A(r-2) + B(2r-4) = 0. \end{cases}$$

Pentru ca sistemul (α) să aibă în A, B şi altă soluţie în afară de cea banală trebuie ca r să satisfacă ecuaţia

$$\begin{vmatrix} r+4 & -r-1 \\ r-2 & 2r-4 \end{vmatrix} = (r-2)\begin{vmatrix} r+4 & -r-1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3(r-2)(r+3)$$

cu rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = -3$.
Pentru $r = 2$ avem soluţia de forma

$$x_1 = A_1e^{2t},\ y_1 = B_1e^{2t},$$

cu $6A_1 - 3B_1 = 0$; $A_1 = 1$, $B_1 = 2$.
Am obţinut soluţia particulară $x_1 = e^{2t}$, $y_1 = 2e^{2t}$, $t \in \mathbf{R}$.
Pentru $r = -3$, procedăm în mod asemănător. Avem $x_2 = A_2e^{-3t}$, $y_2 = B_2e^{-3t}$, unde $A_2 + 2B_2 = 0$, deci $B_2 = 1$, $A_2 = -2$, care ne dă a doua soluţie particulară $x_2 = -2e^{-3t}$, $y_2 = e^{-3t}$, $t \in \mathbf{R}$.
Soluţia generală a sistemului omogen este

$$\begin{cases} x = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t}, \\ y = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t},\ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Pentru a obţine soluţia generală a sistemului din enunţ, căutăm o soluţie particulară de forma $x_0 = At + B$, $y_0 = Ct + D$, pe care o înlocuim în sistem. Trebuie să avem identităţile

$$A - C \equiv Ct + D - 4(At + B) + 1,$$

$$A + 2C \equiv 4(Ct + D) + 2(At + B) + t,$$

care ne conduc la sistemul în A, B, C, D,

$$C - 4A = 0 \quad , \quad A - C = D - 4B + 1,$$

$$4C + 2A + 1 = 0, \quad A + 2C + 4D + 2B = 0,$$

cu soluţia $A = -1/10$, $B = 27/180$, $C = -4/10$, $D = 11/90$.
Am obţinut soluţia particulară a sistemului din enunţ

$$x_0 = -(1/10)t + 37/180,\ y_0 = -(4/10)t + 11/90,\ t \in \mathbf{R}$$

cu care construim soluţia generală a sistemului dat

$$(\beta) \qquad \begin{cases} x = C_1e^{2t} - 2C_2e^{-3t} - t1/10 + 37/180, \\ y = 2C_1e^{2t} + C_2e^{-3t} - t4/10 + 11/90,\ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Pentru a rezolva problema lui Cauchy cerută impunem lui (β) condiţiile iniţiale din enunţ; obţinem

$$C_1 - 2C_2 + 37/180 = -1,\ 2C_1 + C_2 + 11/90 = 2,$$

cu soluţia

$$C_1 = -48/450,\ C_2 = 941/450.$$

Soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale, cerută, este dată de

$$(\gamma)\quad \begin{cases} x = -e^{2t}48/450 - e^{-3t}941/225 - t1/10 + 37/180, \\ y = -e^{2t}48/225 + e^{-3t}941/450 - t4/10 + 11/90; \ t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

14.10. Să se găsească soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi

$$3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x + 2y = t + 1,$$

$$3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4x + y = 2t + 3,$$

apoi să se găsească soluţia particulară care satisface condiţiile iniţiale $x(0) = 2$, $y(0) = 3$. (Examen).

R. Pentru sistemul omogen

$$3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x + 2y = 0, \quad 3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4x + y = 0,$$

căutăm soluţii de forma $x = Ae^{rt}$, $y = Be^{rt}$; înlocuite în sistem obţinem pentru r ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 3r - 1 & 2 \\ 4 & 3r + 1 \end{vmatrix} = 9r^2 - 1 - 8 = 0,$$

cu rădăcinile $r_1 = +1$, $r_2 = -1$. Pentru $r = 1$ trebuie să avem $(3 - 1)A_1 + 2B_1 = 0$; $A_1 = 1$, $B_1 = -1$, care ne furnizează soluţia particulară $x_1 = e^t$, $y_1 = -e^t$, $t \in \mathbf{R}$. Pentru $r = -1$ trebuie să avem $(-3 - 1)A_2 + 2B_2 = 0$; $A_2 = 1$, $B_2 = 2$, care ne dă a doua soluţie particulară $x_2 = e^{-t}$, $y_2 = 2e^{-t}$, $t \in \mathbf{R}_1$. Soluţia generală a sistemului omogen este

$$\begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-t}, \\ y = -C_1e^t + 2C_2e^{-t}, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Pentru sistemul neomogen căutăm o soluţie particulară de forma

$$x_0 = At + B, \ y_0 = Mt + N;$$

avem $x_0' = A$, $y_0' = M$; le introducem în sistemul din enunţ

$$3A - (At + B) + 2(Mt + N) \equiv t + 1,$$

$$3M + 4(At + B) + Mt + N \equiv 2t + 3,$$

prin identificare obţinem

$$3A - B + 2N = 1, \quad -A + 2M = 1,$$

$$3M + 4B + N = 3, \quad 4A + M = 2;$$

sistem care are soluţia

$$A = 1/3, \ B = -2/3, \ M = 2/3, \ N = -1/3.$$

Soluţia generală a sistemului din enunţ este dată de

$$(\alpha)\qquad \begin{cases} x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t} + t1/3 - 2/3, \\ y(t) = -C_1e^t + 2C_2e^{-t} + t2/3 - 1/3, \qquad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Soluţia particulară cerută se obţine introducînd în (α) condiţiile impuse. Rezultă pentru C_1 şi C_2 sistemul

$$C_1 + C_2 - 2/3 = 2,\ -C_1 + 2C_2 - 1/3 = 3,$$

cu soluţia $C_1 = 2/3$, $C_2 = 2$. Soluţia particulară căutată este

$$\begin{cases} x = e^t2/3 + 2e^{-t} + t1/3 + -2/3, \\ y = -e^t2/3 + 4e^{-t} + t2/3 - 1/3, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

14.11. Să se găsească soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, omogen,

$$\frac{dx}{dt} = x + y - 3z,$$

$$\frac{dy}{dt} = 4x + y - 2z,$$

$$\frac{dz}{dt} = 2x + y - 6z,$$

apoi să se determine soluţia particulară care satisface condiţiile iniţiale $x(0) = 2$, $y(0) = 1$, $z(0) = -1$. (Examen).

R. Căutăm soluţii de forma

$$x = Ae^{rt},\ y = Be^{rt},\ z = Ce^{rt},$$

pe care le înlocuim în sistem; înlăturînd pe e^{rt} obţinem

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} rA &= A + B + 3C, \\ rB &= 4A - B - 2C, \\ rC &= 2A + B - 6C, \end{aligned}$$

cu r, A, B, C necunoscute. Sistemul (α) în A, B, C este omogen şi nu trebuie să aibă numai soluţia banală. Determinantul sistemului trebuie să fie nul. Obţinem ecuaţia

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 & -3 \\ 4 & -1-r & -2 \\ 2 & 1 & -6-r \end{vmatrix} = -(r^3 + 6r^2 + 3r - 10) = 0$$

cu rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = -2$, $r_3 = -5$. Pentru $r_1 = 1$ şi $A_1 = 1$, din (α) obţinem $B_1 = 3/2$, $C_1 = 1/2$ care ne dă soluţia particulară $x_1 = e^t$, $y_1 = e^t3/2$, $z_1 = e^t1/2$, $t \in \mathbf{R}$. Pentru $r_2 = -2$, $A_2 = 1$, obţinem $B_2 = -6$, $C_2 = -1$ care ne dă a doua soluţie particulară

$$x_2 = e^{-2t},\ y_2 = -6e^{-2t},\ z_2 = -e^{-2t},\ t \in \mathbf{R}.$$

Pentru $r_3 = -5$, $A_3 = 1$ obţinem $B_3 = 0$, $C_3 = 2$, care ne dă a treia soluţie particulară

$$x_3 = e^{-5t},\ y_3 = 0,\ z_3 = 2e^{-5t},\ t \in \mathbf{R}.$$

Soluţia generală a sistemului dat este

$$(\beta)\qquad \begin{cases} x = C_1e^t + C_2e^{-2t} + C_3e^{-5t}, \\ y = C_1e^t3/2 - 6C_2e^{-2t}, \\ z = C_1e^t1/2 - C_2e^{-2t} + 2C_3e^{-5t}, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Pentru a obţine soluţia particulară cerută, impunem lui (β) condiţiile din enunţ. Avem sistemul în C_1, C_2, C_3,

$$C_1 + C_2 + C_3 = 2$$

$$C_13/2 - 6C_2 = 1$$

$$C_11/2 - C_2 + 2C_3 = -1$$

cu soluţia

$$C_1 = 22/9,\ C_2 = 4/9,\ C_3 = -8/9.$$

Integrala particulară căutată este dată de

$$x = e^t22/9 + e^{-2t}4/9 - e^{-5t}8/9,$$

$$y = e^t11/3 - e^{-2t}8/3,$$

$$z = e^t11/9 - e^{-2t}4/9 - e^{-5t}16/9, \qquad t \in \mathbf{R}.$$

Se poate verifica imediat că satisface condiţiile cerute.

14.12. Să se găsească soluţia generală a sistemului

$$t\frac{dx}{dt} = y + \frac{1}{t},\quad t\frac{dy}{dt} = -x + t,\ t \neq 0. \text{ (Examen)}$$

R. Este un sistem Euler. Folosim metoda eliminării. Eliminăm pe y din

$$t\frac{dx}{dt} = y + 1/t,\ t\frac{dy}{dt} = -x + t,$$

$$t\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} - 1/t^2,$$

care ne dau

$$y = t\frac{dx}{dt} - 1/t,\quad \frac{dy}{dt} = -1/tx + 1\,;$$

le înlocuim în ultima ecuaţie; obţinem $t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} = -x + t - 1/t$, sau $t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + x = t - 1/t$, care este o ecuaţie Euler neomogenă. Ecuaţia omogenă

$$(\alpha)\qquad t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

are ecuaţia caracteristică $r(r-1)+r+1=0$, $r^2+1=0$, cu rădăcinile $r_1=i$, $r_2=-i$. Soluţiile particulare furnizate de cele două rădăcini sînt $x_1=\sin\ln|t|$, $x_2=\cos\ln|t|$, $t\neq 0$, iar soluţia generală a ecuaţiei (α) este

(β) $$x=C_1\sin\ln|t|+C_2\cos\ln|t|,\quad t\neq 0.$$

Pentru determinarea soluţiei generale a ecuaţiei neomogene folosim metoda variaţiei constantelor. Avem sistemul

$$C_1'\sin\ln|t|+C_2'\cos\ln|t|=0;$$
$$C_1'\cos\ln|t|-C_2'\sin\ln|t|=1-1/t^2;$$

cu soluţia

$$C_1'=(1-1/t^2)\cos\ln|t|,\quad C_2'=(1/t^2-1)\sin\ln|t|,$$

C_1 şi C_2 sînt date de

$$C_1=\int(1-1/t^2)\cos\ln|t|\,\mathrm{d}t+A_1,$$

$$C_2=\int(1/t^2-1)\sin\ln|t|\,\mathrm{d}t+A_2,$$

Introduse în (β) ne dau pe $x\cdot y$ se obţine din

$$y=t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-1/t.$$

Soluţia generală depinde de două constante arbitrare A_1 şi A_2.

14.13. Să se determine soluţia sistemului

$$t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+1,\quad t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4x+2,$$

care satisface condiţiile iniţiale $x(1)=1$, $y(1)=2$. (Examen).

R. Este un sistem Euler. Folosim metoda eliminării, anume eliminăm pe y din ecuaţiile

$$t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y+1,\quad t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4x+2,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+t\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

ultima ecuaţie am obţinut-o din prima prin derivare în raport cu t; avem

$$t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=4x+2,\quad t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+t^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},$$

care ne conduc la ecuaţia în x de tip Euler

(α) $$t^2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-4x=2.$$

Ecuaţia omogenă

$$(\alpha') \qquad t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} - 4x = 0,$$

are ecuaţia caracteristică $r(r-1) + r - 4 = 0$, $r^2 - 4 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = 2$, $r_2 = -2$. Obţinem soluţiile particulare

$$x_1 = t^2,\ x_2 = 1/t^2,\ t \neq 0.$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene (α') este

$$x = C_1t^2 + C_2 1/t^2,\ t \neq 0.$$

Pentru a obţine soluţia generală a ecuaţiei (α) folosim metoda variaţiei constantelor. Avem

$$C_1't^2 + C_2'1/t^2 = 0,$$
$$C_1'2t - 2C_2'1/t^3 = 2/t^2,$$

Din care obţinem

$$4tC_1' = 2/t^2,\quad C_1(t) = A_1 - 1/4t^{-2},$$
$$-4/t^3C_2' = 2/t^2,\quad C_2(t) = A_2 - 1/4t^2,\quad t \neq 0.$$

Introduse în expresia lui x ne dau

$$x = A_1t^2 + A_2 1/t^2 - 1/2,\ t \neq 0$$

Avem şi $y = t\frac{dx}{dt} - 1$ deci $y = t(2A_1t - 2A_2/t^3) - 1 = 2A_1t^2 - 2A_2 1/t^2 - 1$.
Soluţia generală a sistemului din enunţ este dată de

$$\begin{cases} x = A_1t^2 + A_2 1/t^2 - 1/2, \\ y = 2A_1t^2 - 2A_2 1/t^2 - 1,\ t \neq 0. \end{cases}$$

Soluţia particulară căutată se obţine din cea generală impunînd condiţiile iniţiale $x(1) = 1$, $y(1) = 2$, care conduc la sistemul în A_1, A_2

$$1 = A_1 + A_2 - 1/2,\ 2 = 2A_1 - 2A_2 - 1;$$

deducem $A_1 = 3/2$, $A_2 = 0$. Soluţia cerută este

$$\begin{cases} x = t^2 3/2 - 1/2, \\ y = 3t^3 - 1,\quad t \neq 0. \end{cases}$$

14.14. Să se găsească soluţia sistemului de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi $t\frac{dx}{dt} = y - 2x + t$, $t\frac{dy}{dt} = 6x - y + 1/t$, $t \neq 0$, care satisface condiţiile $x(1) = 1$, $y(1) = 2$. (Examen)

R. Folosim metoda reducerii la o ecuaţie. Derivăm prima ecuaţie în raport cu t

$$(\alpha) \qquad t\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} - 2\frac{dx}{dt} + 1,$$

apoi eliminăm pe y şi $\frac{dy}{dt}$ între această relaţie şi ecuaţiile din enunţ. Dacă adunăm cele două ecuaţii din enunţ obţinem

$$t\frac{dx}{dt} + t\frac{dy}{dt} = 4x + t + 1/t,$$

care adunată cu ecuaţia (α) înmulţită cu t,

$$t^2\frac{d^2x}{dt^2} + t\frac{dx}{dt} = t\frac{dy}{dt} - 2t\frac{dx}{dt} + t,$$

ne dă ecuaţia în x de tip Euler

$$(\beta) \qquad t^2\frac{d^2x}{dt^2} + 4t\frac{dx}{dt} - 4x = 2t + 1/t, \ t \neq 0.$$

Pentru ecuaţia omogenă

$$(\gamma) \qquad t^2\frac{d^2x}{dt^2} - 4t\frac{dx}{dt} - 4x = 0,$$

să căutăm soluţii de forma $x = At^r$; obţinem pentru r ecuaţia $r(r-1) + 4r - 4 = 0$, sau $r^2 + 3r - 4 = 0$, cu rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = -4$, care ne conduc la soluţiile particulare $x_1 = t$, $x_2 = 1/t^4$, $t \neq 0$ soluţia generală a ecuaţiei (γ) este

$$x(t) = C_1t + C_21/t^4, \ t \neq 0.$$

Pentru determinarea soluţiei generale a ecuaţiei (β) folosim metoda variaţiei constantelor. Avem sistemul în C_1' şi C_2'

$$C_1't + C_2'1/t^4 = 0,$$

$$C_1' + C_2'(-4/t^5) = 2/t + 1/t^3, \ t \neq 0$$

care ne dă

$$C_1' = \frac{1}{5}(2/t^2 + 1/t^4),$$

$$C_2' = -\frac{t^4}{5}(2/t + 1/t^3) = -\frac{1}{5}(2t^3 + t).$$

Prin integrare obţinem

$$C_1(t) = -\frac{2}{5}1/t - \frac{1}{15}1/t^3 + A_1,$$

$$C_2(t) = -\frac{1}{10}t^4 - \frac{1}{10}t^2 + A_2,$$

cu A_1 şi A_2 constante arbitrare. Soluţia generală a ecuaţiei (β) este dată de $x(t) = A_1t + A_21/t^4 + \left(-\frac{2}{5}1/t - \frac{1}{15}1/t^3\right)t + \left(-\frac{1}{10}t^4 - \frac{1}{10}t^2\right)1/t^4$, sau

$$(\delta) \qquad x(t) = A_1t + A_21/t^4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}1/t^2, \ t \neq 0.$$

Pe y îl obținem din prima ecuație din enunț

$$y = t\frac{dx}{dt} + 2x - t = t\left(A_1 - A_2 4/t^5 + \frac{1}{3}1/t^3\right) + 2A_1 t +$$

$$+ 2A_2 1/t^4 - 1 - \frac{1}{3}1/t^2 - t, \text{ sau}$$

(ε) $$y(t) = 3A_1 t - 2A_2 1/t^4 - 1 - t,\ t \neq 0.$$

Soluția generală a sistemului din enunț este dată de (δ) + (ε). Dacă îi impunem condițiile inițiale cerute în enunț obținem pentru A_1 și A_2 sistemul

$$A_1 + A_2 - 1/2 - 1/6 = 1,$$
$$3A_1 - 2A_2 - 1 - 1 = -2$$

cu soluția $A_1 = 2/3$, $A_2 = 1$. Soluția problemei lui Cauchy este dată de

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}t + 1/t^4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6}1/t^2, \\ y = t - 2/t^4 - 1, \quad t \neq 0. \end{cases}$$

14.15. Să se găsească soluția generală a sistemului de ecuații diferențiale $\frac{d^2y}{dt^2} = x + \sin t$, $\frac{d^2x}{dt^2} = -y + \cos t$ (Examen).

R. Folosim metoda eliminării. Dacă derivăm a doua ecuație de două ori în raport cu t obținem $\frac{d^4x}{dt^4} = -\frac{d^2y}{dt^2} - \cos t$; eliminînd pe y'', rezultă ecuația în x

(α) $$\frac{d^4x}{dt^4} + x = -\sin t + \cos t.$$

Ecuația omogenă $x'''' + x = 0$, are ecuația caracteristică $r^4 + 1 = 0$, cu rădăcinile

$$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i),\ r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i),\ r_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i),\ r_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i),$$

care ne dau soluțiile particulare

$$x_1 = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t,\quad x_2 = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin t,$$

$$x_3 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t,\quad x_4 = e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\sin t,\quad t \in \mathbf{R};$$

soluția generală a ecuației omogene $x'''' + x = 0$ este

$$x^* = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right),$$

$$t \in \mathbf{R}.$$

Căutăm pentru ecuația (α) o soluție particulară de forma

$$x_0 = A\cos t + B\sin t: \text{ avem } x_0'''' = A\cos t + B\sin t,$$

înlocuite în (α) ne dau $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$, încît soluția particulară căutată este $x_0 = \frac{1}{2}(\cos t - \sin t)$, $t \in \mathbf{R}$. Soluția generală a sistemului dat conține pentru constante arbitrare și este dată, pentru $t \in \mathbf{R}$, de

$$x(t) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + C_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}t}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}t + C_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}t\right) + x_0$$

și $y(t) = \cos t - x''(t)$.

14.16. Să se găsească traiectoriile ortogonale ale familiei de suprafețe

$$x^2 + y^2 + z^2 = Cz. \text{ (Examen)}$$

R. Traiectoriile ortogonale ale unei familii de suprafețe $F(x, y, z) = C$ cu $F \subset C^{(1)}$ în D din R^3 sînt date de soluțiile sistemului simetric

$$(\alpha) \qquad \frac{dx}{F'_x} = \frac{dy}{F'_y} = \frac{dz}{F'_z}, \quad F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z \neq 0,$$

În cazul nostru ecuația familiei se scrie

$$\frac{1}{z}(x^2 + y^2 + z^2) = C,$$

deci $F'_x = \frac{2x}{z}$, $F'_y = \frac{2y}{z}$, $F'_z = -\frac{1}{z^2}(x^2 + y^2) + 1$, iar sistemul ($\alpha$) devine

$$\frac{z\,dx}{2x} = \frac{z\,dy}{2y} = \frac{z^2dz}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

Avem combinația integrabilă $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, deci $\ln x = \ln y + \ln C_1$, care ne dă integrala primă $x = C_1y$. O a doua combinație integrabilă este $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{2z\,dz}{z^2 - x^2 - y^2}$ care se mai scrie și astfel, $\frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{2dz^2}{z^2 - x^2 - y^2}$, sau

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{2d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

care ne dă a doua integrală primă, anume

$$x^2 + y^2 = C_2(x^2 + y^2 + z^2)^2;$$

Familia de curbe cerută este dată de

$$(\Gamma) \qquad \begin{cases} x = C_1y, \\ x^2 + y^2 = C_2(x^2 + y^2 + z^2)^2. \end{cases}$$

Se vede că este o familie de curbe plane situate într-un plan variabil ce conține axa Oz.

14.17. Să se găsească soluţia generală a sistemului de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi

$$\frac{dx}{dt} = z + y - 4x + 1,$$

$$\frac{dy}{dt} = 2y + x - z + 1,$$

$$\frac{dz}{dt} = y + z - 2x + 1. \quad \text{(Examen)}$$

R. Căutăm soluţii de forma

$$x = Ae^{rt}, \quad y = Be^{rt}, \quad z = Ce^{rt},$$

pentru sistemul omogen. Obţinem legăturile între A, B, C şi r

$$Ar = C + B - 4A, \; Br = 2B + A - C, \; Cr = B + C - 2A,$$

considerate ca un sistem în A, B, C nu trebuie să admită numai soluţia banală, deci determinantul sistemului să fie nul:

$$\begin{vmatrix} r + 4 & -1 & -1 \\ -1 & r - 2 & 1 \\ 2 & -1 & r - 1 \end{vmatrix} = r^3 + r^2 - 8r + 6 = 0;$$

Cu rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = -1 + \sqrt{7}$, $r_3 = -1 - \sqrt{7}$. Pentru $r = 1$, obţinem soluţia

$$x_1 = A_1e^t, \; y_1 = B_1e^t, \; z_1 = C_1e^t, \text{ cu } A_1, B_1, C_1 = 1,$$

verificînd sistemul $A_1 = B_1 - 4A_1 + 1$, $B_1 = 2B_1 + A_1 - 1$, sau

$$B_1 - 5A_1 + 1 = 0, \; B_1 + A_1 - 1 = 0,$$

$$A_1 = 1/3, \; B_1 = 2/3, \; C_1 = 1,$$

care ne furnizează soluţia particulară

$$x_1 = e^t 1/3, \; y = e^t 1/2, \; z_1 = e^t, \; t \in \mathbf{R}.$$

Pentru $r_2 = -1 + \sqrt{7}$, avem soluţia

$$x_2 = A_2e^{(-1+\sqrt{7})t}, \; y_2 = B_2e^{(-1+\sqrt{7})t}, \; z_2 = C_2e^{(-1+\sqrt{7})t}.$$

Cu $C_2 = 1$, înlocuind-o în primele două ecuaţii din sistem obţinem

$$A_2(-1 + \sqrt{7}) = 1 + B_2 - 4A_2,$$

$$B_2(-1 + \sqrt{7}) = 2B_2 + A_2 - 1,$$

sau

$$A_2(3 + \sqrt{7}) - B_2 = 1,$$

$$A_2 + B_2(3 - \sqrt{7}) = 1,$$

cu soluţia $A_2 = \frac{4-\sqrt{7}}{2}$, $B_2 = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$, $C_2 = 1$, care ne dă soluţia particulară

$$x_2 = \frac{4-\sqrt{7}}{2} e^{(-1+\sqrt{7})t}, \quad y_2 = \frac{3+\sqrt{7}}{2} e^{(-1+\sqrt{7})t}, \quad z_2 = e^{(-1+\sqrt{7})t}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Procedînd în acelaşi mod obţinem a treia soluţie particulară

$$x_3 = \frac{4+\sqrt{7}}{2} e^{(-1-\sqrt{7})t}, \quad y_3 = \frac{3-\sqrt{7}}{2} e^{(-1-\sqrt{7})t}, \quad z_3 = e^{(-1-\sqrt{7})t}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Soluţia generală a sistemului omogen este dată de

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} x = \frac{1}{3} C_1 e^t + \frac{4-\sqrt{7}}{2} C_2 e^{(-1+\sqrt{7})t} + \frac{4+\sqrt{7}}{2} C_3 e^{(-1-\sqrt{7})t}, \\ y = \frac{1}{2} C_1 e^t + \frac{3+\sqrt{7}}{2} C_2 e^{(-1+\sqrt{7})t} + \frac{3-\sqrt{7}}{2} C_3 e^{(-1-\sqrt{7})t}, \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{(-1+\sqrt{7})t} + C_3 e^{(-1-\sqrt{7})t}, \quad t \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Pentru a obţine soluţia generală a sistemului neomogen este suficient să găsim o soluţie particulară a sistemului neomogen. Deoarece termenii liberi nu depind de t, căutăm o soluţie particulară de forma $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$, cu a, b, c constante reale. Introduse în sistem trebuie să-l verifice. Obţinem condiţiile

$$\begin{aligned} -4a + b + c + 1 &= 0, \\ a + 2b - c + 1 &= 0, \\ -2a + b + c + 1 &= 0, \end{aligned}$$

cu soluţia $a = 0$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = -\frac{1}{3}$, care ne furnizează soluţia particulară

$$(\beta) \qquad x_0 = 0, \; y_0 = -\frac{2}{3}, \; z_0 = -\frac{1}{3}.$$

Soluţia generală a sistemului din enunţ este

$$x_G = x + x_0, \; y_G = y + y_0, \; z_G = z + z_0,$$

cu x, y, z daţi de (α) şi x_0, y_0, z_0 daţi de (β).

ECUAŢII CU DERIVATE PARŢIALE LINIARE ŞI CUASILINIARE DE ORDINUL ÎNTÎI

15.1. Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei cu derivate parţiale

$$xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + x^2y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z(x^2 + y^2),$$

apoi să se determine suprafaţa integrală care trece prin dreapta $x = 2y = 3z$.

R. Sistemul caracteristic asociat ecuaţiei este

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{yx^2} = \frac{dz}{2z(x^2 + y^2)}.$$

Avem combinaţia integrabilă

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} \quad \text{sau} \quad \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$$

care ne dă integrala primă $x^2 - y^2 = C_1$. O a doua combinaţie integrabilă este

$$\frac{ydx + xdy}{xy^3 + yx^3} = \frac{dz}{2z(x^2 + y^2)} \quad \text{sau} \quad \frac{d(xy)}{xy} = \frac{1}{2}\frac{dz}{z},$$

care ne dă a doua integrală primă $z = C_2x^2y^2$. Soluţia genreală a ecuaţiei din enunţ este dată de

$$\Phi\left(x^2 - y^2, \frac{x^2y^2}{z}\right) = 0,$$

cu Φ funcţie arbitrară, derivabilă Să observăm că soluţia generală se mai poate scrie $z = x^2y^2\Phi^*(x^2 - y^2)$. Pentru a determina suprafaţa cerută, trebuie să eliminăm pe x, y şi z între relaţiile

$$x = 2y = 3z, \; x^2 - y^2 = C_1, \; z = C_2x^2y^2.$$

Obţinem astfel legătura între constantele arbitrare C_1 şi C_2 anume $27 = 36C_2^2C_1^3$. Dacă în această relaţie înlocuim pe C_1 şi C_2 scoase din integralele prime obţinem soluţia cerută, anume

$$3x^4y^4 - 4z^2(x^2 - y^2)^3 = 0.$$

15.2. Să se găsească soluția generală a ecuației cu derivate parțiale

$$2xy\frac{\partial z}{\partial x} - (x^2 - y^2 + z^2)\frac{\partial z}{\partial y} - 2yz = 0$$

apoi să se determine suprafața integrală care conține curba dată de $y = 1$, $x^2 + z^2 = 1$.

R. Sistemul caracteristic asociat ecuației date

$$\frac{dx}{2xy} = \frac{-dy}{x^2 - y^2 + z^2} = \frac{dz}{2yz},$$

admite combinația integrală $dx/x = dz/z$, care dă integrala primă $z = C_1x$. O altă combinație integrabilă este

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{2x^2y - y(x^2 - y^2 + z^2) + 2z^2y} = \frac{dz}{2yz},$$

care se mai scrie $\dfrac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \dfrac{dz}{z}$; obținem a doua integrală primă:

$$\ln(x^2 + y^2 + z^2) = \ln z + \ln C_2, \text{ sau } x^2 + y^2 + z^2 = C_2z.$$

Soluția generală este dată de $\Phi\left(\dfrac{z}{x}, \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right) = 0$, cu Φ arbitrară, derivabilă și $xz \neq 0$. Pentru a rezolva problema Cauchy pusă trebuie să eliminăm pe x, y, z din sistemul $y = 1$, $x^2 + z^2 = 1$, $z = C_1x$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2z$. Obținem succesiv:

$$x^2 + z^2 = 1, \; z = C_1x, \; x^2 + z^2 + 1 = C_2z,$$

sau $C_2z = 2$, $z^2(1 + 1/C_1^2) = 1$, care ne dă legătura între C_1 și C_2

$$(1 + 1/C_1^2)4/C_2^2 = 1 \text{ sau } 4(C_1^2 + 1) = C_1^2C_2^2,$$

relație care, conform teoriei, ne conduce la soluția cerută

$$4\left(\frac{z^2}{x^2} + 1\right) = \frac{z^2}{x^2}\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right)^2$$

care se mai scrie $4(x^2 + z^2) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

15.3. Să se găsească soluția generală a ecuației cu derivate parțiale

$$2y(1 - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 - y^2 + z^2 - 2x)\frac{\partial z}{\partial y} + 2yz = 0,$$

apoi să se determine suprafața integrală care conține curba definită de $x = 2$, $z^2 = 2y$.

R. Sistemul caracteristic asociat ecuației este

$$\frac{dx}{2y(1 - x)} = \frac{dy}{x^2 - y^2 + z^2 - 2x} = \frac{dz}{-2yz}.$$

Combinația integrabilă

$$\frac{dx}{2y(1-x)} = \frac{dz}{-2yz} \text{ sau } \frac{dx}{x-1} = \frac{dz}{z},$$

ne conduce la integrala primă $z = C_1(x - 1)$. O altă combinație integrabilă este

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{2y(x - x^2) + y(x^2 - y^2 + z^2 - 2x) - 2yz^2} = \frac{dz}{-2yz},$$

care se mai scrie $\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{-(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dz}{-z}$, obținem a doua integrală primă $x^2 + y^2 + z^2 = C_2 z$. Soluția generală a ecuației din enunț este

$$\Phi\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}, \frac{z}{x-1}\right) = 0$$

cu Φ funcție arbitrară derivabilă și $z(x - 1) \neq 0$. Pentru a obține soluția particulară cerută trebuie să eliminăm pe x, y, z din sistemul

$$x = 2, \quad z^2 = 2y, \quad z = C_1(x - 1), \quad x^2 + y^2 + z^2 = C_2 z.$$

Obținem succesiv

$$2y = z^2, \ z = C_1, \quad 4 + y^2 + z^2 = C_2 z, \text{ sau } 2y = C_1^2, \ 4 + y^2 + C_1^2 = C_1 C_2,$$

sau $4 + \frac{1}{4}C_1^4 + C_1^2 = C_1 C_2$. Soluția particulară cerută se obține din relația obținută, înlocuind pe C_1 și C_2 cu $C_1 = \frac{z}{x-1}$, $C_2 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}$. Rezultatul înlocuirii ne conduce la

$$16 + \left(\frac{z}{x-1}\right)^4 + 4\left(\frac{z}{x-1}\right)^2 = 4\frac{(x-1)(x^2 + y^2 + z^2)}{z^2},$$

$(x - 1)z \neq 0$, care este soluția particulară cerută în enunț.

15.4. Să se găsească soluția generală a ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{1}{x_1}(x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 + z^2)\frac{\partial z}{\partial x_1} + \frac{1}{x_2}(x_1^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 + z^2)\frac{\partial z}{\partial x_2} +$$

$$+ \ldots + \frac{1}{x_n}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + z^2)\frac{\partial z}{\partial x_n} =$$

$$= \frac{1}{z}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$

R. Sistemul asociat ecuației cu derivate parțiale este

$$\frac{x_1 dx_1}{x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 + z^2} = \frac{x_2 dx_2}{x_1^2 + x_3^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + z^2} = \ldots =$$

$$= \frac{x_n dx_n}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + z^2} = \frac{z dz}{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + z_n^2},$$

Avem combinațiile integrabile

$$\frac{x_1 dx_1 - z dz}{z^2 - x_1^2} = \frac{x_2 dx_2 - x_1 dx_1}{x_1^2 - x_2^2},$$

$$\frac{x_2 dx_2 - z dz}{z^2 - x_2^2} = \frac{x_2 dx_2 - x_1 dx_1}{x_1^2 - x_2^2},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{x_n dx_n - z dz}{z^2 - x_n^2} = \frac{x_2 dx_2 - x_1 dx_1}{x_1^2 - x_2^2},$$

care ne conduc la integralele prime

$$z^2 - x_1^2 = C_1(x_1^2 - x_2^2),$$
$$z^2 - x_2^2 = C_2(x_1^2 - x_2^2), \dots, z^2 - x_n^2 = C_n(x_1^2 - x_2^2).$$

Soluția generală a ecuației din enunț este

$$\Phi\left(\frac{z^2 - x_1^2}{x_1^2 - x_2^2}, \frac{z^2 - x_2^2}{x_1^2 - x_2^2}, \dots, \frac{z^2 - x_n^2}{x_1^2 - x_2^2}\right) = 0,$$

cu Φ arbitrară, derivabilă.

15.5 Să se integreze ecuația cu derivate parțiale

$$x_1^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2^2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n^2 \frac{\partial u}{\partial x_n} = u^2,$$

apoi să se găsească soluția care satisface condiția pentru

$$x_1 = 1, \; u = x_2 x_3 \dots x_n.$$

R. Sistemul caracteristic asociat ecuației date este

$$dx_1/x_1^2 = dx_2/x_2^2 = \dots = dx_n/x_n^2 = du/u^2,$$

și admite combinațiile integrabile

$$dx_1/x_1^2 = dx_2/x_2^2, \; dx_1/x_1^2 = dx_3/x_3^2, \dots, dx_1/x_1^2 = dx_n/x_n^2$$
$$\text{și } dx_1/x_1^2 = du/u^2,$$

care conduc la integralele prime

$$1/x_1 - 1/x_2 = C_2, \; 1/x_1 - 1/x_3 = C_3, \dots, 1/x_1 - 1/x_n = C_n$$
$$\text{și } 1/x_1 - 1/u = C_1.$$

Soluția generală a ecuației date este

$$\Phi\left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}, \frac{x_3 - x_1}{x_1 x_3}, \dots, \frac{x_n - x_1}{x_1 x_n}, \frac{u - x_1}{x_1 u}\right) = 0,$$

cu Φ arbitrară, derivabilă. Pentru a găsi soluţia particulară cerută trebuie să eliminăm pe $x_1, x_2, \ldots, x_n, u$ între

$$x_1 = 1,\ u = x_2 x_3 \ldots x_n$$

şi

$$\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} = C_2,\ \frac{x_3 - x_1}{x_1 x_3} = C_3,\ \ldots,\ \frac{x_n - x_1}{x_1 x_n} = C_n,\ \frac{u - x_1}{x_1 u} = C_1;$$

obţinem

$$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{C_2},\ \ldots,\ x_n = -\frac{1}{C_n},\ u = -\frac{1}{C_1};$$

introduse în $u = x_2 x_3 \ldots x_n$ ne conduc la relaţia între $C_1, C_2, \ldots, C_n$ anume $C_1 = (-1)^n C_2 C_3 \ldots C_n$, care nu duce la soluţia cerută

$$\frac{u - x_1}{u x_1} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \cdot \frac{x_3 - x_1}{x_1 x_3} \cdots \frac{x_n - x_1}{x_n x_1},\quad u, x_i \neq 0.$$

15.6. Să se determine suprafaţa $G(x, y, z) = 0$, ortogonală familiei de conuri $x^2 + y^2 = Cz^2$, $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, şi care trece prin curba $x^2 + z^2 = x$, $y = 1$.

R. Dacă $G(x, y, z) = 0$ şi $F(x, y, z) = 0$ sînt două suprafeţe, normalele au parametri directori $\bar{n}_G = (G'_x, G'_y, G'_z)$, $\bar{n}_F = (F'_x, F'_y, F'_z)$, deci sînt ortogonale dacă $G'_x F'_x + G'_y F'_y + G'_z F'_z = 0$; în cazul notru $F(x, y, z)$ este dat de familia de conuri

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = C,\ z \neq 0,\ \text{deci}\ F'_x = \frac{2x}{z^2},\ F'_y = \frac{2y}{z^2},\ F'_z = -\frac{2(x^2 + y^2)}{z^3}.$$

Ecuaţia cu derivate parţiale asociată este

$$\frac{2x}{z^2}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{2y}{z^2}\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{2(x^2 + y^2)}{z^3}\frac{\partial G}{\partial z} = 0,$$

care se mai scrie:

$$x\frac{\partial G}{\partial x} + y\frac{\partial G}{\partial y} - \frac{x^2 + y^2}{z}\frac{\partial G}{\partial z} = 0.$$

Sistemul caracteristic este dat de $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dy}{y} = -\dfrac{z dz}{x^2 + y^2}$. Următoarea combinaţie integrabilă

$$dx/x = dy/y,\ \ln x = \ln y + \ln C_1,$$

ne dă integrala primă $x = C_1 y$. A doua combinaţie integrabilă

$$\frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} = -\frac{z dz}{x^2 + y^2}$$

ne dă a doua integrală primă $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$.

Mulţimea suprafeţelor ortogonale conurilor din enunţ este dată de $G(x^2+y^2+z^2, x/y)=0$, cu G derivabilă. Pentru a determina suprafaţa cerută trebuie să eliminăm pe x, y, z din sistemul

$$x=C_1y,\ C_2=x^2+y^2+z^2,\ x^2+z^2=x,\ y=1,$$

obţinem $x=C_1$, $C_2=y^2+x$, $y=1$ care ne conduce la legătura între C_1 şi C_2, $C_2=C_1+1$. Soluţia particulară cerută este dată de

$$x^2+y^2+z^2=x/y+1,\ y\neq 0.$$

15.7. Să se găsească suprafaţa ortogonală elipsoidului

$$x^2/1+y^2/4+z^2/9=1$$

care trece prin dreapta $x=y=z$.

R. Ecuaţia cu derivate parţiale pe care o satisface suprafeţele $G(x, y, z)=0$, ortogonale elipsoidului este

$$2x\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{y}{2}\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{2z}{9}\frac{\partial G}{\partial z}=0.$$

Sistemul caracteristic asociat acestei ecuaţii

$$\mathrm{d}x/(2x)=2\mathrm{d}y/y=9\mathrm{d}z/(2z),$$

admite combinaţiile integrabile

$$\mathrm{d}x/(2x)=2\mathrm{d}y/y,\ \mathrm{d}x/(2x)=9\mathrm{d}z/(2z),$$

care ne dau, respectiv, integralele prime

$$y^4=C_1x,\ z^9=C_2x,\ x, y, z\neq 0.$$

Ecuaţia tuturor suprafeţelor ortogonale elipsoidului este

$$G(y^4/x,\ z^9/x)=0,\ x\neq 0,$$

cu G arbitrară derivabilă.

Pentru a determina suprafaţa ortogonală elipsoidului şi care trece prin prima bisectoare a triedrului axelor, trebuie să eliminăm pe x, y, z din sistemul

$$x=y=z,\ z^9=C_2x,\ y^4=C_1x;$$

obţinem între C_1 şi C_2 legătura $C_2^3=C_1^8$, care ne conduce la suprafaţa cerută

$$\left(\frac{z^9}{x}\right)^3=\left(\frac{y^4}{x}\right)^8 \quad \text{sau} \quad x^5z^{27}=y^{32}.$$

Se observă că pentru $x=y=z$, este verificată.

15.8. Să se determine suprafaţa integrală a ecuaţiei cu derivate parţiale $xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2+z^2$, care trece prin curba $y=x^2$, $z=1$.

(Examen)

R. Sistemul caracteristic

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + z^2},$$

admite combinația integrabilă $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$, sau $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$, care ne furnizează integrala primă $\ln y = \ln x + \ln C_1$, sau $y = C_1 x$. Pentru a mai obține o integrală primă observăm că putem scrie

$$\frac{xdx}{x^2 z} = \frac{ydy}{y^2 z} = \frac{zdz}{z(x^2 + y^2 + z^2)},$$

sau $\frac{d(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{dz^2}{x^2 + y^2 + z^2}$, unde facem schimbările de variabile $x^2+y^2=u$, $z^2 = v$; obținem $\frac{du}{u} = \frac{dv}{u + v}$, care este o ecuație omogenă; facem schimbarea de funcție $u = tv$, $du = tdv + vdt$, și se transformă în

$$t + v\frac{dt}{dv} = \frac{t}{1 + t}, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{1 + t}{t^2}dt,$$

S-au separat variabilele. Integrată ne dă

$$\ln v + \ln t = \frac{1}{t} + C_2 \text{ sau } \ln u = \frac{v}{u} + C_2;$$

dacă revenim la variabilele inițiale, obținem

$$\ln (x^2 + y^2) = \frac{z^2}{x^2 + y^2} + C_2,$$

care este încă o integrală primă. Pentru a rezolva problema lui Cauchy pusă, eliminăm pe x, y, z între relațiile

$$y = x^2,\ z = 1,\ y = C_1 x,\ \ln (x^2 + y^2) = \frac{z^2}{x^2 + y^2} + C_2;$$

obținem $x^2 = C_1 x$, $\ln (x^2 + x^4) = \frac{1}{x^2 + y^2} + C_2$ sau

$$(\alpha) \qquad \ln (C_1^2 + C_1^4) = \frac{1}{C_1^2 + C_1^4} + C_2.$$

Soluția problemei lui Cauchy căutată o obținem înlocuind în (α) pe C_1 cu $\frac{y}{x}$ și pe C_2 cu $\ln (x^2 + y^2) - \frac{z^2}{x^2 + y^2}$, și este dată de

$$\ln \frac{y^2(x^2 + y^2)}{x^4} = \frac{x^4}{y^2(x^2 + y^2)} + \ln (x^2 + y^2) - \frac{z^2}{x^2 + y^2},\quad x \neq 0,\ y \neq 0.$$

[1] **Aramă, L., Morozan, T.** *Probleme de calcul diferențial și integral.* Ed. Tehnică, București, 1978.
[2] **Berman, G.** *Problèmes d'analyse mathématique.* Ed. Mir, Moscou, 1976.
[3] **Bougrov, Y., Nikolski, S.** *Exercices de mathématiques supérieures.* Ed. Mir, Moscou, 1985.
[4] **Bucur, G., Câmpu, E.** ș.a. *Culegere de probleme de calcul diferențial și integral.* Ed. Tehnică, București, 1967.
[5] **Ciorănescu, N.** *Curs de algebră și analiză matematică,* Ed. Tehnică, București, 1958.
[6] **Colojoară, I.** *Analiza matematică,* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983.
[7] **Ciorănescu, N., Roșculeț, M.** *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică.* Ed. Tehnică, București, 1959.
[8] **Craiu, M., Roșculeț, M.** *Ecuații diferențiale aplicative. Probleme de ecuații cu derivate parțiale de ord. I.* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1971.
[9] **Craiu, M., Roșculeț, M.** *Culegere de probleme de analiză matematică.* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1976.
[10] **Craiu, M., Tănase, V.** *Analiza matematică.* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1980.
[11] **Donciu, N., Flondor, D.** *Algebră și analiză matematică. Culegere de probleme.* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1978.
[12] **Danko, P., Popov, A.** *Exercices et problèmes de mathématiques supérieures.* Ed. Mir, Moscou, 1984.
[13] **Demidovich, B.** *Problems in mathematical analysis.* Ed. Mir, Moscou, 1971.
[14] **Efimov A. V., Demidovich, B.** *Higher Mathematics.* Ed. Mir, Moscou, 1984.
[15] **Filimon, I.** *Funcții de mai multe variabile.* Inst. de Construcții, București, 1979.
[16] **Filimon, I.** ș.a. *Culegere de probleme de matematici generale.* Institutul de Construcții, București, 1974.
[17] **Maron, I. A.** *Problems in Calculus of One Variable.* Ed. Mir, Moscou, 1973.
[18] **Matei, I.** ș.a. *Analiză matematică. Culegere de probleme.* Institutul de Construcții, București, 1976.
[19] **Nicolescu, M., Marcus, S.** ș.a. *Manual de analiză matematică.* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1964.
[20] **Nicolescu, C. P.** *Teste de analiză matematică.* Ed. Albatros, București, 1984.
[21] **Olariu, V.** *Analiză matematică și matematici speciale.* Lit. I.P.B., București, 1978.
[22] **Rogai, E.** *Exerciții și probleme de ecuații diferențial și integrale.* Ed. Tehnică, București, 1965.
[23] **Roșculeț, M., Popescu, O.** *Probleme de analiză matematică pentru concursurile de admitere în înv. sup.* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1971.
[24] **Roșculeț, M.** ș.a. *Culegere de probleme de analiză matematică.* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1968.
[25] **Roșculeț M.** *Analiză matematică.* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1966, 1973, 1979, 1984.
[26] **Stănășilă, O.** *Analiză matematică.* Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981.
[27] **Sirețchi, Gh.** *Calculul diferențial și integral.* Exerciții. Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985.
[28] **Stamate, I., Crișan, I.** *Culegere de probleme de algebră și analiză matematică pentru licee*
[29] **Udriște, C.** *Analiza matematică.* Lit. I.P.B., București, 1972.

CUPRINSUL