MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ион Акири Андрей Брайков Ольга Шпунтенко

Математика

Учебник для 8-го класса

EDITURA PRUT

Manualul şcolar a fost elaborat în conformitate cu prevederile Curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 415 din 27 aprilie 2023 ca urmare a evaluării calităţii metodico-ştiinţifice.

____

(наименование учебного заведения)

УЧЁТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УЧЕБНИКА

Год пользования	Фамилия и имя ученика	Учебный год	Состояние учебника	
			в начале года	в конце года
1				
2				
3				
4				
5				

- Учитель должен проверить правильность написания фамилии и имени ученика.
- Запрещаются записи и любые пометки на страницах учебника.
- Состояние учебника в начале и в конце учебного года оценивается как: *отлично*, *хорошо*, *удовлетворительно* или *плохо*.

Autori: Ion Achiri, doctor, conferenţiar universitar, Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chişinău
Andrei Braicov, doctor, conferenţiar universitar, Universitatea Pedagogică de Stat „Ion Creangă” din Chişinău
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău

Traducere din limba română: Ion Achiri
Redactor: Vitalie Puţuntică
Corector: Olga Efremov
Copertă: Irina Cuzin, Sergiu Stanciu
Machetare computerizată: Valentina Stratu

Editura Prut Internaţional, str. Alba Iulia, nr. 23, bl. 1A, Chişinău, MD-2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18
www.edituraprut.md; e-mail: office@prut.ro

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

Акири, Ион

Математика: Учебник для 8 класса / Ион Акири, Андрей Брайков, Ольга Шпунтенко; traducere din limba română: Ion Achiri; Ministerul Educaţiei şi Cercetării al Republicii Moldova. – [Chişinău]: Prut Internaţional, 2023 (Unisoft). – 175, [1] p. : fig.

Editat din bugetul de stat.

ISBN 978-9975-54-754-3

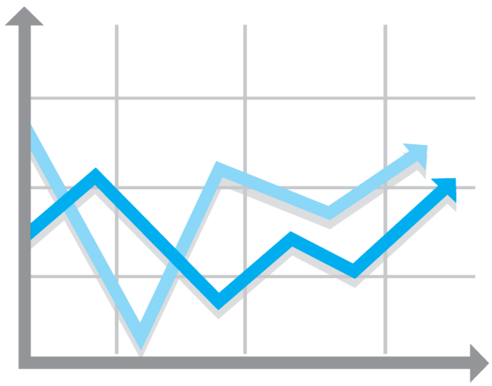
51(075.3)

A 394

Imprimat la Tipografia Unisoft

АЛГЕБРА

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$$



$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

Глава 1 Действительные числа. Повторение и дополнения

Ничему не учатся, кроме как учась!
Ян Амос Коменский

§1. Множество действительных чисел и его подмножества

1.1. Действительные числа. Виды записи

Вспомним

1 Выберите числа, соответствующие коробке под номером ①, затем из оставшихся чисел выберите числа, соответствующие коробке под номером ②. И, наконец, выберите те числа, которые соответствуют коробке под номером ③. Соответствуют ли оставшиеся числа коробке под номером ④?

- Почему для коробки под номером ⑤ не осталось чисел?
- Как называются числа, которые не являются рациональными?

① ② ③ ④ ⑤

$\sqrt{9}$ $\frac{\sqrt{11}}{11}$ 0 $7\sqrt{2}$ $6\frac{1}{3}$ -2 $-\frac{1}{9}$

$4{,}1(8)$ $9{,}(2)$ $-\frac{1}{8}$ $\sqrt{3}$ $0{,}123\ldots$ $-2\sqrt{7}$

$-3\sqrt{3}$ 10 $\frac{2}{5}$ -74 3 216

- Получим ли мы тот же результат, если сначала выберем числа, соответствующие коробке под номером ⑤? Почему?
- В каком порядке следует выбрать числа, чтобы коробки под номерами ① и ③ остались пустыми?
- Какие из данных чисел имеют чистый период? А смешанный?

Обобщим

- Действительное число является рациональным или иррациональным числом.
- Любое рациональное число можно записать в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
- Иррациональное число не может быть записано в виде дроби.
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$.

2 Установите соответствие. С помощью линейки проведите соответствующие отрезки и определите, какая буква на каком отрезке лежит. Правильно расположив буквы по вертикали, вы прочтете имя знаменитого молдавского математика XX века.

$\mathbb{Z}^*$ •

$\mathbb{R}_-$ •

$\mathbb{Q}_+^*$ •

$\mathbb{R}_-^*$ •

$\mathbb{Z}_-$ •

$\mathbb{N}^*$ •

$\mathbb{I}_-$ •

$\mathbb{R}_+$ •

$\mathbb{Q}_-$ •

И С Б Р И И С К Й

Множество чисел:

- ненулевых натуральных
- ненулевых целых И
- неположительных целых
- неположительных рациональных
- положительных рациональных
- отрицательных иррациональных
- неотрицательных действительных
- неположительных действительных
- отрицательных действительных

Обобщим

Пусть M – множество чисел. Обозначаем: $M^* = M \setminus \{0\}$;
M_+ – множество неотрицательных чисел из M; M_+^* – множество положительных чисел из M;
M_- – множество неположительных чисел из M; M_-^* – множество отрицательных чисел из M.

3 Рассмотрите образец. Запишите дроби в виде десятичного числа, а остальные числа – в виде дроби (если это возможно):

а) $1\frac{2}{9}$; $-\frac{12}{13}$; $4{,}8$; $6{,}(7)$; $-5{,}1(4)$; $\sqrt{8}$; $1{,}1234\ldots$;

б) $\frac{4}{7}$; $-1\frac{3}{4}$; $5{,}7$; $0{,}1(234)$; $-\sqrt{2}$; $3{,}5(1)$; $2{,}122333\ldots$

Образец:

- $2\frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5} = \frac{13}{5} = 13 : 5 = 2{,}6$;
- $-\frac{4}{11} = -0{,}3636\ldots = -0{,}(36)$;
- $3{,}7 = 3\frac{7}{10}$;
- $8{,}(15) = 8\frac{15}{99} = 8\frac{5}{33}$;
- $6{,}9(23) = 6\frac{923-9}{990} = 6\frac{914}{990} = 6\frac{457}{495}$.

Обобщим

Поскольку любое действительное число является рациональным или иррациональным, то его можно представить:
– в виде десятичного числа с конечным числом десятичных знаков или
– в виде десятичного числа с бесконечным числом десятичных знаков с чистым периодом или
– в виде десятичного числа с бесконечным числом десятичных знаков со смешанным периодом или
– в виде непериодического десятичного числа с бесконечным числом десятичных знаков.

Десятичные числа

- с конечным числом десятичных знаков (или с бесконечным числом нулей): 0,1; –0,21; 14,25; –7,5000...
- с бесконечным числом десятичных знаков
  - периодические (период, отличный от 0)
    - чистый период: 0,(3); −6,(12)
    - смешанный период: 4,6(7); −0,1(51)
  - непериодические: $\pi = 3{,}1415...$; 0,112113114...

1.2. Модуль действительного числа. Применения

1 Рассмотрите таблицу и заполните пропуски:

M – множество действительных чисел x	Представление множества M на числовой оси	Расстояния между точками с координатой x и	Аналитическая запись множества M
меньше $\sqrt{7}$ и больше $-\sqrt{7}$	$-\sqrt{7}$ 0 $\sqrt{7}$ x	началом координат – меньше $\sqrt{7}$	$-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$ $M = \{x \mid \lvert x \rvert < \sqrt{7}\}$
больше 9 или меньше –9	–9 0 9 x	началом координат $\square$ 9	$x > 9$ или $x < -9$ $M = \{x \mid \lvert x \rvert > \square\}$
?	–2 1 4 x	точкой с координатой 1 – меньше 3	$-2 < x < 4$ $-2-1 < x-1 < 4-1$ $-3 < x-1 < 3$ $M = \{x \mid \lvert x-1 \rvert < \square\}$
больше 3 или меньше –7	?	точкой, с координатой –2 – больше 5	$x > 3$ или $x < -7$ ➡ $x-(-2) > 3-(-2)$ или $x-(-2) < -7-(-2)$ ➡ $x+2 > \square$ или $x+2 < \square$ $M = \{x \mid \lvert x+2 \rvert > \square\}$

Пусть a действительное число.

Определение

Модуль действительного числа a (или **абсолютная величина** числа a) обозначается $|a|$ и определяется следующим образом: $|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0 \\ 0, \text{ если } a = 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$

- Расстояние от точки $A(a)$ до начала отсчета равно $|a|$.

Свойства модуля

Для любых действительных чисел a и b:

1° $|a| \geq 0$;

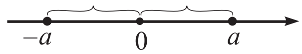
2° $|a| \geq a$;

3° $|a^2| = |a|^2 = a^2$;

4° $|ab| = |a| \cdot |b|$;

5° $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

- Числа a и $-a$ называются **противоположными**.



2 Раскройте модуль, выбрав необходимое выражение из скобок:

а) $|\sqrt{3} - 5| = [\sqrt{3} - 5$ или $5 - \sqrt{3}]$;

б) $|\sqrt{0{,}1} - 0{,}1| = [\sqrt{0{,}1} - 0{,}1$ или $0{,}1 - \sqrt{0{,}1}]$;

в) $|x - 2| = [x - 2$ или $2 - x]$ при $x < 2$;

г) $|4 - x| = [4 - x$ или $x - 4]$ при $x > 4$.

Примените свойство 1°.

1.3. Сравнение действительных чисел

1 Сравните числа a и b, если:

а) $a, b \in \mathbb{R}_+$ и $|a| > |b|$;

б) $a, b \in \mathbb{R}_-$ и $|a| > |b|$;

в) $a \in \mathbb{R}_-$, $b \in \mathbb{R}_+$ и $|a| > |b|$;

г) $a \in \mathbb{R}_-$, $b \in \mathbb{R}_+$ и $|a| > |b|$;

д) число a расположено на числовой оси правее числа b.

Обобщим

Пусть a и b – два действительных числа.

Если:	то
а) число a расположено на числовой оси левее числа b, б) числа a и b являются положительными и $|a| < |b|$, в) числа a и b являются отрицательными и $|a| > |b|$, г) число a отрицательное, а число b неотрицательное.	$a < b$.

2 Расположите числа в порядке возрастания, чтобы прочесть имя известного древнего философа.

Ь	Т	Л	С	Р	Т	А	О	И	Е
$\sqrt{2}$	$-\dfrac{1}{4}$	1,4	–1,43	–1,443	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	–1,(4)	–0,4	$-\sqrt{2}$	$\dfrac{1}{4}$

Упражнения и задачи

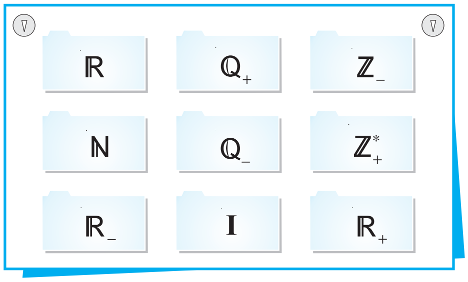
1

1. В какой кармашек можно поместить число:

$88;\ -3,(6);\ 5\frac{1}{6};\ -\sqrt{7};\ \sqrt{11};\ 0;$

$-2008;\ 17,25;\ -2,7;\ 3\sqrt{41};\ \sqrt{9};$

$-\sqrt{25};\ 1,2(4)$?



2. *Исследуйте! Истинно* или *Ложно*?

а) $\mathbb{N} \not\subset \mathbb{Q}$; б) $\mathbb{Z}_- \subset \mathbb{I}_-$; в) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}_-$; г) $\mathbb{R}^*_+ \subset \mathbb{R}$;

д) $\mathbb{Q}_+ \subset \mathbb{R}_+$; е) $\mathbb{Q}_- \not\subset \mathbb{R}$; ж) $\mathbb{Z}^*_+ \subset \mathbb{Z}$; з) $\mathbb{N}^* \subset \mathbb{Z}_+$.

3. Заполните пропуски так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $\square \in \mathbb{N}$; б) $\square \notin \mathbb{Z}_+$; в) $\square \in \mathbb{R}_-$; г) $\square \in \mathbf{I}_+$;

д) $\square \in \mathbb{Q}^*_-$; е) $\square \in \mathbb{R}^*_+$; ж) $\square \in \mathbb{Z}^*$; з) $\square \in \mathbb{R}^*$.

4. *Работайте в парах!* Какой товар самый дешевый?

Обменный курс	
1 \$	19,40 лея
1 €	20,50 лея
1 RON	4,20 лея
1 UAH	0,52 лея

а)

б)

в)

г)

5. *Исследуйте! Истинно* или *Ложно*?

а) $\sqrt{15} > 1 + \sqrt{14}$; б) $3 - \sqrt{2} > \sqrt{7}$; в) $\sqrt{121} < 11$;

г) $\sqrt{400} > 20$; д) $\sqrt{17} < \sqrt{25}$; е) $\sqrt{625} = 25$.

Указание. Воспользуйтесь калькулятором.

6. Отметьте на числовой оси действительное число a и число, противоположное ему, если число a равно:

а) $2,5$; б) $-3\frac{1}{4}$; в) $\sqrt{9}$; г) $\sqrt{11}$; д) $-\sqrt{26}$; е) $5,(6)$.

7. Найдите модуль числа:

а) $-7\frac{4}{5}$; б) $\sqrt{36}$; в) $18,3(56)$; г) $-5,48$; д) $8\frac{1}{3}$; е) $\sqrt{22}$.

8. Расположите числа в порядке возрастания:

$\sqrt{9};\ |-6,(2)|;\ -\sqrt{20};\ 3,27;\ -4,5;\ |4,28|;\ 7;\ -1.$

9. Расположите числа в порядке убывания:

$|-3,5|;\ \sqrt{15};\ -3,6;\ |\sqrt{16}|;\ -\frac{21}{6};\ 12;\ -5\frac{4}{5};\ 2,(46).$

2

10. ***Работайте в парах!*** Заполните пропуски так, чтобы высказывание стало истинным:

а) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Z} = \square$; б) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}_- = \square$;

в) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}_+ = \square$; г) $\mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_- = \square$;

д) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{N} = \square$; е) $\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+ = \square$.

11. Запишите пары противоположных чисел, которые на числовой оси расположены друг от друга на расстоянии:

а) $3\frac{1}{2}$; б) $2\sqrt{14}$; в) $6,(4)$; г) $4+\sqrt{10}$.

12. Раскройте модуль:

а) $|\sqrt{19}-4|$; б) $|2-\sqrt{10}|$;

в) $|\sqrt{7}-2\sqrt{2}|$; г) $|\sqrt{22}-3\sqrt{2}|$.

13. ***Работайте в парах!***

Раскройте модуль:

а) $|x-2|$; б) $|1-x|$;

в) $|3x-6|$; г) $|10-5x|$.

Образец:

$$|x-2|=\begin{cases} x-2, & x \ge 2 \\ 2-x, & x<2 \end{cases}$$

14. Вычислите:

а) $|\sqrt{5}\cdot(6-8{,}15)|+|(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2|-\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{5-6{,}5}\right|$;

б) $|(3-2\sqrt{2})^2|-|(\sqrt{2}\cdot(8-12{,}44)|+\left|\dfrac{\sqrt{2}-5}{2-3,(6)}\right|$.

15. 1) Изобразите на числовой оси действительные числа, которые:

а) больше $-1\frac{2}{5}$ и меньше $\sqrt{4}$;

б) меньше $-\sqrt{9}$ или больше $\sqrt{9}$;

в) заключены между $-6{,}5$ и $\sqrt{10}$;

г) заключены между $-\sqrt{23}$ и $\sqrt{23}$;

д) меньше $\sqrt{25}$ и больше -2;

е) больше $\sqrt{5}$ или меньше $\sqrt{2}$.

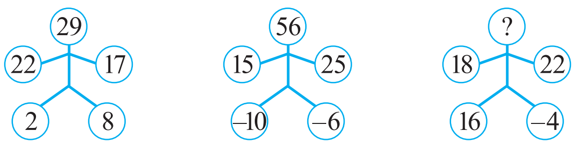
2) Задайте аналитически множества чисел, полученных в пунктах а)–е).

16. ***Исследуйте!*** Сравните: а) 20 \$ ◯ 15 €; б) 12 RON ◯ 6 \$;

в) 250 UAH ◯ 150 \$; г) 25,5 € ◯ 810 RON.

Обменный курс	
1 \$	19,40 лея
1 €	20,50 лея
1 RON	4,20 лея
1 UAH	0,52 лея

17. ***Работайте в парах!*** Определите недостающее число.



3

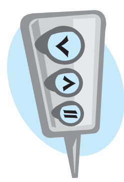
18. Докажите тождество, применив свойства квадратного корня:

а) $\sqrt{t^4+2t^2+1}=t^2+1$; б) $\sqrt{x^2+2|x|+1}=|x|+1$.

19. Постройте в тетради с помощью линейки и циркуля отрезок длиной:

а) $\sqrt{10}$ см; б) $\sqrt{8}$ см; в) $\sqrt{6{,}5}$ см; г) $\sqrt{2{,}5}$ см.

20. ***Исследуйте!*** Сравните, используя формулы сокращенного умножения:



а) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ ◯ $\sqrt{2}-1$; б) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ ◯ $\sqrt{3}-\sqrt{5}$;

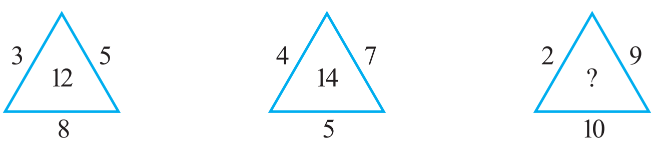
в) $\sqrt{8+2\sqrt{7}}$ ◯ $\sqrt{7}+1$; г) $\sqrt{12-4\sqrt{5}}$ ◯ $\sqrt{10}+\sqrt{2}$.

21. Найдите целые значения переменных a и b, при которых имеет место равенство $a^2+b^2-8a+10b+41=0$.

Указание. Примените формулы $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ и $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$.

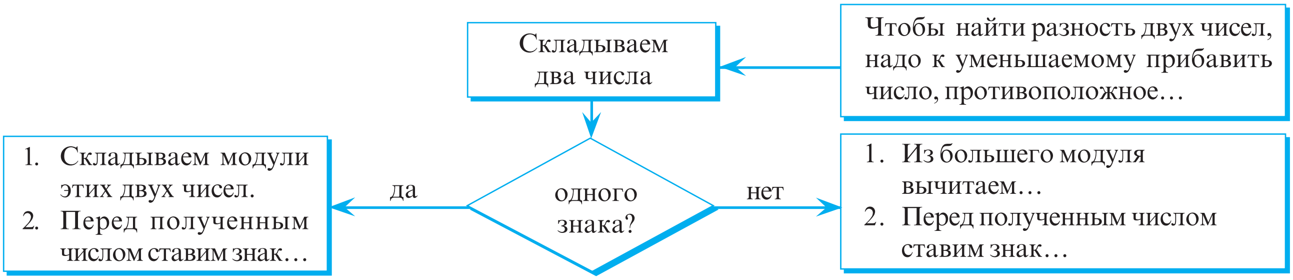
24. ***Работайте в парах!***

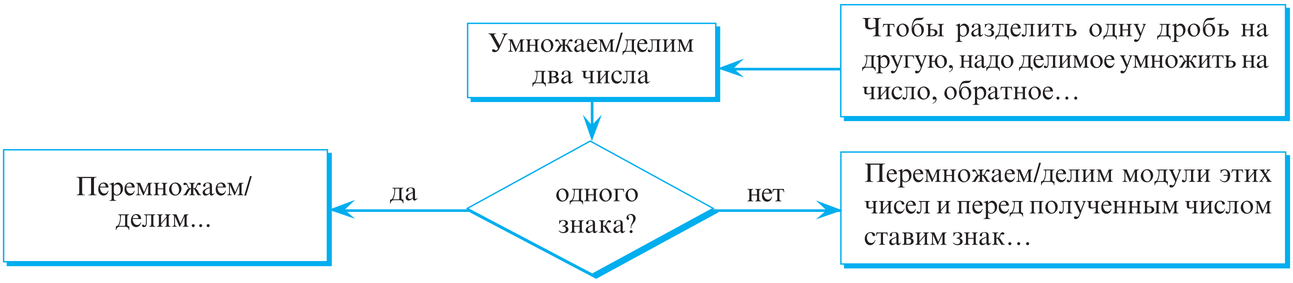
Определите недостающее число.



§2. Действия над действительными числами

1 Дополните схемы верными ответами:





- Вычислите, округлив до сотых, и назовите правило, примененное при выполнении каждого из арифметических действий:

а) $-4{,}75+3{,}25+\sqrt{6}(2-\sqrt{6}):\left(-\frac{2}{3}\right)$;

б) $3{,}5\cdot(-\sqrt{5})+8\sqrt{5}:2-3\sqrt{5}\cdot 2{,}(3)$.

2 Дополните таблицу так, чтобы получить ***свойства арифметических действий над действительными числами***.

Для любых действительных чисел a, b, c:

____ и ____ **коммутативны**.	$a+b=b+a$ $a\cdot b=b\cdot a$
____ и ____ **ассоциативны**.	$a+(b+c)=(a+b)+c$ $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Для действия ____ число 0 – **нейтральный элемент**.	$a+0=0+a=a$
Для действия ____ число 1 – **нейтральный элемент**.	$a\cdot 1=1\cdot a=a$
Для каждого действительного числа a существует единственное число, ему ____, $-a$.	$a+(-a)=(-a)+a=0$
Для каждого действительного числа a существует единственное число, ему ____, $\frac{1}{a}$.	$a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1,\ a\neq 0.$
Умножение ____ относительно сложения и вычитания.	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ $a\cdot(b-c)=ab-ac$

3 Может ли сумма двух иррациональных чисел быть рациональным числом? А разность? Произведение? Частное?

Рассмотрите и заполните соответственно пропуски.

Иррациональное число a	Иррациональное число b	Результат арифметического действия
$4-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	Сумма чисел a и b: $(4-\sqrt{3})+\sqrt{3}=4\in\mathbb{Q}$;
$4-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	Разность чисел a и b: $(4-\sqrt{3})-(-\sqrt{3})=\boxed{\quad}$;
$4-\sqrt{3}$	$4+\sqrt{3}$	Произведение чисел a и b: $(4-\sqrt{3})(4+\sqrt{3})=4^2-(\sqrt{3})^2=\boxed{\quad}$;
$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	Частное чисел a и b: $2\sqrt{3}:\sqrt{3}=\boxed{\quad}$.

Ответ: $\boxed{\quad}$.

4 Укажите порядок выполнения действий и найдите значение выражения:

○ ⑤ ○③○ ○ ① ⑦

$$\sqrt{15}-[7\sqrt{3}\cdot(-5\sqrt{5})+5^2\cdot(7\sqrt{15}-\sqrt{5}\cdot9\sqrt{3})]:57.$$

Решаем

① $\sqrt{5}\cdot9\sqrt{3}=9\sqrt{15}$;

② $7\sqrt{15}-9\sqrt{15}=\boxed{\quad}$;

③ $5^2=\boxed{\quad}$;

④ $\boxed{\quad}\cdot\boxed{\quad}=\boxed{\quad}$;

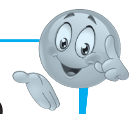
⑤ $7\sqrt{3}\cdot(-5\sqrt{5})=\boxed{\quad}$;

⑥ $\boxed{\quad}+\boxed{\quad}=\boxed{\quad}$;

⑦ $\boxed{\quad}:\boxed{\quad}=\boxed{\quad}$;

⑧ $\sqrt{15}-\boxed{\quad}=\boxed{\quad}$.

Вспомним



Порядок выполнения действий

1. Действия в скобках (сначала во внутренних, затем во внешних).
2. Возведение в степень, извлечение квадратного корня.
3. Умножение и деление.
4. Сложение и вычитание.

Упражнения и задачи

1

1. На рынке папа купил 3 кг картофеля по цене 4,5 лея/кг, 1 кг моркови по 7,3 лея/кг, 2,5 кг свеклы по 5,2 лея/кг и один арбуз весом 4,5 кг по 5,5 лея/кг. Хватит ли 60 леев, чтобы оплатить всю покупку? Останутся ли еще деньги? Сколько?

2. Даны числа:

а) 0,225; б) 642; в) 1035; г) 705;
д) 208; е) 350; ж) 14,4; з) 2013.

Укажите, какие из этих чисел делятся на:

1) 2; 2) 2 и 5; 3) 3;
4) 9; 5) 2 и 3; 6) 3 и 9.

3. *Работайте в парах!* Вычислите, найдя наибольший общий делитель знаменателей дробей:

а) $\frac{25}{336}+\frac{2}{135}$; б) $\frac{3}{345}-\frac{7}{546}$; в) $\frac{1}{2013}+\frac{1}{2016}$.

4. Даны числа 108 и 54.

а) Найдите D_{108}, D_{54}.
б) Запишите по пять чисел множеств M_{108}, M_{54}.
в) Найдите НОД чисел 108 и 54.
г) Найдите НОК чисел 108 и 54.

5. Вычислите:

а) $3{,}75-2:0{,}25+1{,}4\cdot 3{,}55+1{,}2^3$;
б) $6{,}24:0{,}4+7{,}65\cdot 20-1000\cdot 0{,}01\cdot 5^2$;
в) $3\frac{1}{4}\cdot 2\frac{5}{8}-15\frac{1}{2}:3\frac{3}{4}+6,(2)\cdot\frac{9}{23}-11^2\cdot 10^2$;
г) $4{,}1(15)\cdot 99-13,(12)\cdot 100^2+16{,}0(21)\cdot 10000$.

6. Найдите среднее арифметическое действительных чисел a и b, если:

а) $a=1{,}25:0{,}05-2\sqrt{7}\cdot(-2{,}5-4{,}8)$,
$b=5\sqrt{7}\cdot(-2{,}4)+6{,}24:(0{,}04-0{,}24)$;

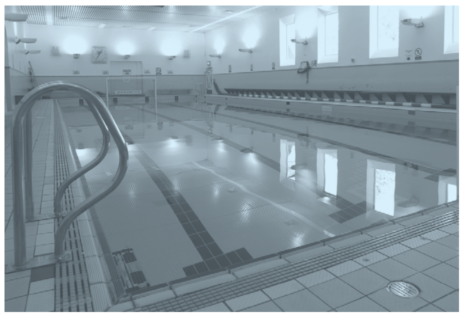
б) $a=3\sqrt{5}[4,(2)-1{,}44\cdot 0{,}05]+\left(-3\frac{1}{4}\right):\left(-\frac{5}{8}\right)$,
$b=3,(25)-4[-2{,}1(15)-7:(-33)]+7\sqrt{5}$.

7. Запишите два последовательных целых числа, между которыми заключено действительное число:

а) $-3+\sqrt{7}$; б) $1+\sqrt{6}$; в) $(-1{,}5)\cdot(-\sqrt{14})$; г) $-7,(2)\cdot\sqrt{10}$.

8. *Работайте в парах!* Измерьте ширину и длину поверхности вашей парты и подсчитайте, сколько квадратных метров бумаги необходимо для покрытия парты.

9. Размеры бассейна – 10,5 м × 25 м × 3,2 м. Сколько необходимо керамической плитки для покрытия стен и дна бассейна, если размер одной плитки 25 см × 40 см?

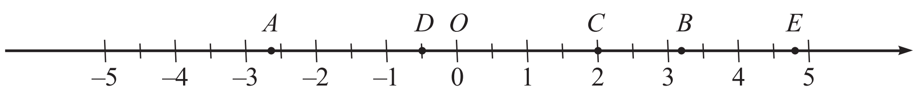


10. Запишите число, противоположное данному числу, а затем – обратное данному числу:

а) $-\frac{2}{5}$; б) $2\frac{1}{4}$; в) $\sqrt{7}$;
г) $-2\sqrt{26}$; д) 2023; е) –0,4.

2

11. Найдите координаты точек A, B, C, D, E, изображенных на рисунке, округлив до десятых.



12. *Работайте в парах!* Запишите число 7 в виде произведения двух:

а) целых чисел; б) рациональных чисел;
в) равных иррациональных чисел; г) различных иррациональных чисел.

13. Площадь поверхности Земли равна 510,1 миллиона км², из которых 149,2 миллиона км² составляет суша.

а) Найдите площадь поверхности, покрытой водой.
Выразите результат в квадратных метрах.
б) Какой процент от всей поверхности Земли составляет вода? А суша?

14. Масса Земли равна $5{,}9736 \cdot 10^{24}$ кг. Найдите массу планеты Венеры, если она составляет $\frac{4}{5}$ от массы Земли.

15. За год население Земли в среднем увеличивается на 2%.
а) Сколько людей будет на земном шаре в 2050 году, если в 1990-м население Земли составляло 5,2 миллиарда?
б) Сколько людей будет на земном шаре в 2025 году?

16. Решите задачу, округлив результат до целых.
Сергею 9 лет. Возраст каждой из его сестер-близнецов Алисии и Амелии составляет 22% от возраста Сергея, а возраст его двоюродного брата Максима составляет 30% от возраста Сергея. Посчитайте, через сколько лет сумма возрастов всех детей будет равна 100 годам.

17. Запишите в виде суммы двух иррациональных чисел число:
а) 5; б) –3; в) 8,5; г) $3\sqrt{15}$; д) 0; е) $\frac{1}{4}$.

18. ***Работайте в парах!***
Заполните таблицу и сформулируйте вывод.

a	b	c	ab	ba	$a(bв)$	$(aб)c$	$a\cdot 1$	$b\cdot(-1)$	$\frac{1}{c}$	$c\cdot\frac{1}{c}$
–4	2,5	10								
$1\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{9}{15}$								
$\sqrt{2}$	–5	1,2								
0	$\sqrt{11}$	$-\sqrt{30}$								
$-\pi$	$\sqrt{7}$	2								

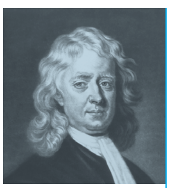
3

19. Докажите тождество:
а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$; б) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

20. Докажите, что значение выражения является натуральным числом:
а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{19-8\sqrt{3}}}$.

21. Решите на множестве действительных чисел уравнение: а) $\sqrt{2x-3}+|1{,}5y-x|+(z+2\sqrt{5})^2=0$;
б) $x^2-6x+y-8\sqrt{y}+25=0$.

22. ***Задача Ньютона***



Исаак Ньютон (1642–1727 гг.)

У купца была некоторая сумма денег. 100 фунтов из нее он тратил каждый год на содержание семьи, прибавляя к оставшейся сумме одну ее треть. Через три года он обнаружил, что его состояние удвоилось. Сколько денег было у купца первоначально?

23. Докажите тождество:
$$\sqrt{t^2+2+2\sqrt{t^2+1}}-\sqrt{t^2+2-2\sqrt{t^2+1}}=2.$$

24. ***Занимательная математика***
Применив арифметические действия и квадратный корень, с помощью шести цифр 4 запишите число:
а) 0; б) 9;
в) 11; г) 25.

25. Заполните квадрат наименьшими простыми числами так, чтобы он стал магическим, если известно, что сумма чисел в каждой строчке, столбце или по диагонали равна 121.

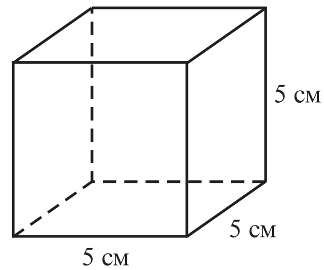
67		
31		7

§ 3. Степени

3.1. Степень с натуральным показателем

1 Рассмотрите и заполните пропуски:

$V_{\text{куб}} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$ (см³);



$$\left(-\frac{1}{5}\right)^4 = \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = \square;$$

$$(\sqrt{2})^5 = \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square \cdot \square = \square.$$

Определение **Степенью действительного числа a с ненулевым натуральным показателем m** называется произведение m множителей, каждый из которых равен a.

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множителей}},$$
$a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$.

a^m — m: показатель степени; a^m: степень; a: основание степени

$a^0 = 1$, $a \in \mathbb{R}^*$.
0^0 не имеет смысла.

Запомните

Свойства степени с натуральным показателем

Для любых $a, b \in \mathbb{R}^*$, $n, m \in \mathbb{N}$:	***Проверяем***
1°. $1^m = 1$	$1^3 = 1$
2°. $(-1)^{2m} = 1$	$(-1)^6 = 1$
3°. $(-1)^{2m+1} = -1$	$(-1)^{17} = -1$
4°. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^3 \cdot a^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{3+2} = a^5$
5°. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $n \ge m$	$\dfrac{a^4}{a^2} = \dfrac{a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^{4-2} = a^{\square}$
6°. $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = (a \cdot a \cdot a) \cdot (b \cdot b \cdot b) = a^{\square} \cdot b^{\square}$
7°. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^4 = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{\square}{\square} = \dfrac{\square}{\square}$
8°. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(a^3)^2 = (a \cdot a \cdot a)^2 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) =$ $= a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^6 = a^{3 \cdot 2}$

Докажем некоторые из свойств 4°–8°. Пусть $a, b \in \mathbb{R}^*$, $n, m \in \mathbb{N}$.

$$4° \quad a^k \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{k \text{ множителей}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(k+m) \text{ множителей}} = a^{k+m}.$$

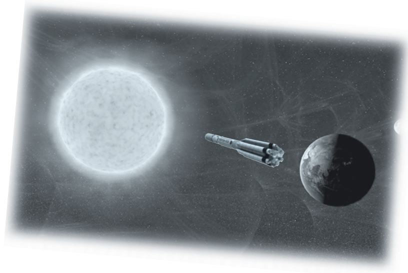
$$6° \quad (a \cdot b)^m = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{m \text{ множителей}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ множителей}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{m \text{ множителей}} = a^m \cdot b^m.$$

$$8° \quad (a^k)^m = \underbrace{a^k \cdot a^k \cdot \ldots \cdot a^k}_{m \text{ множителей}} = a^{\overbrace{k+k+\ldots+k}^{m \text{ слагаемых}}} = a^{k \cdot m}.$$

• Вычислите:

а) $\left(1\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{\square^3}{\square^3}=\frac{\square}{\square}$; б) $\frac{2^5\cdot(2^3)^4}{2^{15}}=\frac{2^5\cdot 2^{\square}}{2^{15}}=2^{5+\square-\square}=2^{\square}=\square$.

3.2. Степень с целым показателем



1 Обратите внимание на применение степени с целым показателем.

а) Расстояние от Земли до Солнца равно

$1{,}495\cdot 10^8$ км $=149\,500\,000$ км.

$10^8=10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=100\,000\,000.$

б) Суточная норма витамина С для подростка равна

$$5\cdot 10^{-2}\text{ г}=0{,}05\text{ г}=50\text{ мг}.$$

Объясняем

$$10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{10\cdot 10}=\frac{1}{100}$$

Число 10^{-2} (равное $\frac{1}{100}$) – это степень с показателем –2 числа 10. Число 10 – это основание степени 10^{-2}.

Обобщаем

$a^m=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{m\text{ множителей}}$, для любых $a\in\mathbb{R}^*$, $m\in\mathbb{N}^*$. $a^0=1$.

$a^{-m}=\frac{1}{a^m}$, для любых $a\in\mathbb{R}^*$, $m\in\mathbb{Z}$.

• Исследуйте и заполните пропуски:

а) $2^4=2\cdot2\cdot2\cdot2=16$ $2^{-4}=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$

$2^3=2\cdot2\cdot2=\square$ $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{\square}$

$2^2=2\cdot2=\square$ $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{\square}$

$2^1=\square$ $2^{-1}=\square$

$2^0=1$

б) $5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$; $5^{\square}=\frac{1}{5}$; $5^{\square}=25$; $5^{\square}=1$; $5^{\square}=\frac{1}{25}$.

2 Рассмотрите и дополните:

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=1:\frac{4}{9}=1\cdot\frac{9}{4}=\frac{3^2}{2^2}=\left(\frac{3}{2}\right)^2$;

б) $\left(2\frac{1}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{15}{7}\right)^{-2}=\left(\frac{\square}{\square}\right)^2=\square$;

в) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-3}=\left(\frac{\square}{\square}\right)^{-3}=\left(\frac{\square}{\square}\right)^3=\frac{\square}{\square}$.

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m}=\left(\frac{b}{a}\right)^m$, для любых $a,b\in\mathbb{R}^*$, $m\in\mathbb{Z}$.

Запомните **_Свойства степени с целым показателем_**

Для любых $a, b \in \mathbb{R}^*$, $n, m \in \mathbb{Z}$: **Проверяем**

$1°.\ 1^m = 1$	$1^{-1} = \frac{1}{1^1} = 1$
$2°.\ (-1)^{2m} = 1$	$(-1)^{-4} = \frac{1}{(-1)^4} = \frac{1}{1} = 1$
$3°.\ (-1)^{2m+1} = -1$	$(-1)^{-17} = \frac{1}{(-1)^{17}} = \frac{1}{-1} = -1$
$4°.\ a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$a^3 \cdot a^{-5} = a^3 \cdot \frac{1}{a^5} = \frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^3 \cdot a^2} = \frac{1}{a^2} = a^{-2} = a^{3+(-5)}$
$5°.\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\frac{a^{-7}}{a^4} = \frac{1}{a^{\square} \cdot a^4} = \frac{1}{a^{\square}} = a^{\square} = a^{\square - \square}$
$6°.\ (a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$(a \cdot b)^{-3} = \frac{1}{(a \cdot b)^3} = \frac{1}{a^{\square} \cdot b^{\square}} = \frac{1}{a^{\square}} \cdot \frac{1}{b^{\square}} = a^{\square} \cdot b^{\square}$
$7°.\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\square} = \frac{b^{\square}}{a^{\square}} = \frac{a^{\square}}{b^{\square}}$
$8°.\ (a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(a^{-2})^5 = \left(\frac{1}{a^2}\right)^5 = \frac{1}{a^{\square}} = a^{\square} = a^{\square \cdot \square}$

- Рассмотрите и дополните:

а) $\frac{(\sqrt{2})^4 \cdot \frac{1}{8}}{16 \cdot 2^{-5}} = \frac{2^2 \cdot 2^{-3}}{2^4 \cdot 2^{-5}} = 2^{\square + \square - \square - (-5)} = 2^{\square} = \square$;

б) $a^{-48} = (a^{\square})^{-8} = (a^{12})^{\square} = (a^{\square})^{24} = (a^{-3})^{\square}$;

в) $\frac{a^2 + a^7}{a^{-2} + a^3} = \frac{a^{\square}(1 + a^5)}{a^{\square}(1 + a^5)} = a^{\square - \square} = a^{\square}$.

Упражнения и задачи

1

1. Прочтите степень. Укажите основание и показатель степени:

5^7; -7^3; $(-2)^5$; $\left(2\frac{1}{3}\right)^0$; $(-2,3)^{21}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$; $(-3)^{-2}$.

2. ***Работайте в парах!*** Заполните таблицу:

a	1	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$	$-0{,}2$
a^2						
a^3						

3. Заполните так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $27 = 3^{\square}$; б) $1000 = 10^{\square} = (\sqrt{10})^{\square}$; в) $\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\square}$; г) $1 = (2{,}3)^{\square}$; д) $1 = (-1)^{\square}$; е) $-1 = (-1)^{\square}$.

4. Запишите в виде степени:

а) $x^5 \cdot x^7$; б) $\frac{a^7 \cdot a^3}{a^2}$; в) $(-4y)^2 \cdot (4y^3)$; г) $a^9 b^3 \cdot \left(\frac{b^4}{a^2}\right)^2$.

5. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

Для любых $n \in \mathbb{Z}^*$: а) $2^{-n} = -2^n$; б) $2^{-n} = \frac{1}{2^{-n}}$; в) $2^{-n} = \frac{1}{2^n}$; г) $2^{-n} = -\frac{1}{2^n}$.

6. Запишите в виде степени с целым отрицательным показателем:

а) $\dfrac{1}{3^{27}}$; б) $\dfrac{1}{5}$; в) $\dfrac{1}{a^6}$;

г) $\dfrac{1}{x^2}$; д) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}$; е) $\dfrac{1}{y}$.

7. Вычислите:

а) 2^{-4}; б) 10^{-1}; в) 7^{-2};

г) $(-5)^{-3}$; д) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$; е) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-4}$.

8. Вычислите, применив свойства степени с целым показателем:

а) $a^4 \cdot a^{-2}$; б) $\dfrac{a^6}{a^{-4}}$; в) $x^{-3} \cdot x^5$;

г) $\dfrac{x^{-3}}{x^{-5}}$; д) $(b^{-2})^6$; е) $((c^{-5})^2)^{-1}$.

9. Вычислите:

а) $(3^2 \cdot 3^{-3})^{-1}$; б) $(7^{-1})^4 \cdot (7^{-2})^{-2}$;

в) $\dfrac{4^3 \cdot 4^{-5}}{4^{-4}}$; г) $32 \cdot 2^{-6}$.

10. Заполните таблицу:

n	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
10^n									
10^{-n}									

11. В различных областях знаний (физике, химии, технике и др.) очень большие и очень малые величины часто записывают в виде $n = a \cdot 10^k$, где $1 \le a < 10$, $k \in \mathbb{Z}$.

Например, расстояние от Земли до Солнца составляет приблизительно 150000000 км $= 1{,}5 \cdot 10^8$ км.

Дополните высказывания, чтобы они стали истинными:

а) Толщина пленки мыльного пузыря: $l = 0{,}0000006$ см $= 6 \cdot 10^{\square}$ см.

б) Масса Солнца приблизительно составляет

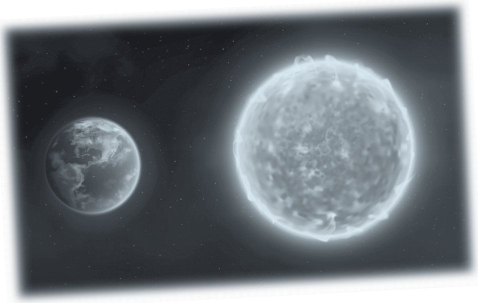
$m = 1989000000000000000000000000$ т $= 1{,}989 \cdot 10^{\square}$ т.

в) Размер вируса гриппа:

$l = 0{,}00001$ см $= \boxed{}$ см.

г) Содержание кислорода в атмосфере составляет

$m = 1200000000000000$ т $= \boxed{}$ т.



12. Запишите в виде десятичного числа.

а) Скорость света равна $3 \cdot 10^5$ км/сек.

б) Оптический микроскоп позволяет различать предметы длиной $2{,}5 \cdot 10^{-3}$ см.

в) Диаметр молекулы воды равен $2{,}8 \cdot 10^{-7}$ мм.

г) Человеческий мозг способен ежедневно запоминать $8{,}6 \cdot 10^7$ битов информации.

13. *Работайте в парах!* В таблице указаны массы атомов некоторых химических элементов.

а) Запишите название элемента с наибольшей массой атома; с наименьшей массой.

б) Сравните массы атомов меди и натрия.

в) Запишите в виде таблицы названия этих элементов в порядке убывания массы их атомов.

Название элемента	Масса атома (кг)
Алюминий (Al)	$4{,}48 \cdot 10^{-26}$
Гелий (He)	$6{,}64 \cdot 10^{-27}$
Железо (Fe)	$9{,}28 \cdot 10^{-26}$
Золото (Au)	$3{,}27 \cdot 10^{-25}$
Медь (Cu)	$1{,}05 \cdot 10^{-25}$
Натрий (Na)	$3{,}81 \cdot 10^{-26}$

2

14. а) Запишите число 2^{60} в виде степени с основанием $4, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, 32$.

б) Запишите число 3^{48} в виде степени с основанием $27, 81, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}$.

15. *Работайте в парах!* Рассмотрите образец и аналогично докажите, что:

а) $81^3 + 3^{10}$ кратно 10; б) $5^{13} + 125^5$ кратно 13.

Образец:
$16^5 + 2^{15}$ кратно 33, так как
$16^5 + 2^{15} = (2^4)^5 + 2^{15} =$
$= 2^{20} + 2^{15} = 2^{15}(2^5 + 1) =$
$= 2^{15} \cdot 33$.

16. Заполните рамки так, чтобы получить верное равенство:

а) $3^{\square}=81$; б) $2^{\square}=\frac{1}{32}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\square}=\frac{1}{125}$;

г) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\square}=64$; д) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\square}=\frac{8}{27}$; е) $\left(\frac{4}{5}\right)^{\square}=\frac{25}{16}$.

17. Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; б) $(-2)^{-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{1}{7}\right)^{0}$;

в) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}+\left(-1\frac{3}{5}\right)^{-2}$; г) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}+\left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}$.

18. Вычислите:

а) $(2{,}5)^{-5}\cdot(0{,}4)^{-5}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}\cdot\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$;

б) $\frac{2^{6}}{(2^{-5}\cdot 8)^{-2}}$; в) $\frac{9^{-4}\cdot 4^{-4}}{2^{-9}\cdot 3^{-9}}$;

г) $\frac{5^{5}\cdot 25^{-2}}{5^{-3}\cdot 125}$; д) $\frac{(0{,}1)^{5}\cdot(0{,}1)^{-3}}{0{,}001}$;

е) $\frac{6^{-10}}{81^{-2}\cdot 32^{-2}}$; ж) $\frac{15^{-3}}{9^{-2}\cdot 125^{-1}}$.

19. ***Работайте в парах!***

Упростите выражение:

а) $5xy^{2}\cdot 0{,}2x^{-3}y^{-1}$; б) $2\frac{1}{3}a^{5}b^{-8}\cdot\frac{3}{7}a^{-1}b^{12}$;

в) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x^{-1}\right)^{-4}\cdot(0{,}5x^{-2})^{2}$; г) $\frac{(4a^{3}b^{-4})^{-1}}{0{,}2a^{-4}b^{2}}$.

20. Дополните соответствующим выражением:

а) $16x^{-12}y^{8}=(\square)^{4}$; б) $\frac{1}{27}a^{9}b^{6}=(\square)^{-3}$;

в) $\frac{x^{5}}{32y^{10}}=(\square)^{-5}$; г) $125a^{-15}b^{-3}=(\square)^{3}$.

21. Пусть скорость света $c=3\cdot 10^{5}$ км/сек.

а) За какое время луч света проходит расстояние 384 000 км от Земли до Луны?

б) Световой год соответствует расстоянию, которое проходит луч света за календарный год.

Будем считать, что календарный год в среднем длится 365,25 дней. Выразите в световых годах расстояние в $8{,}2\cdot 10^{13}$ км от Земли до звезды Сириус.

22. Оцените, на сколько лет хватит лесных массивов на нашей планете, если на сегодняшний день каждую минуту вырубается 1 га леса. Площадь материков на Земле $15{,}7\cdot 10^{7}$ км^{2}, а лес составляет приблизительно 20% этой территории. Ответ округлите до целых.

23. Плотность меди равна $8{,}9\cdot 10^{3}$ кг/м^{3}. Найдите массу бруска меди, который имеет форму прямоугольного параллелепипеда с измерениями $2{,}5\cdot 10^{-1}$ м, 12 см, $2\cdot 10^{-2}$ м.

$\square$ $\square$ **3**

24. Запишите в виде степени с основанием x:

а) $\frac{(x^{3})^{-2}\cdot(x^{-7})^{-1}}{x^{-4}}$; б) $\frac{(x^{-2})^{-4}\cdot(x^{2})^{-3}}{x^{-2}}$;

в) $\left(\frac{x^{-2}}{x^{-3}}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{x^{5}}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{3^{0}\cdot x^{-1}}{x^{2}}\right)^{5}:(x^{-2})^{14}$.

25. Упростите выражение:

а) $\frac{3^{n-1}\cdot 7^{n+1}}{21^{n}}$, $n\in\mathbb{N}$; б) $\frac{15^{n}}{5^{n+1}\cdot 3^{n-1}}$, $n\in\mathbb{N}$.

26. Пусть $2^{m}=a$, $2^{n}=b$, где $m, n\in\mathbb{Z}$. Выразите через a и b выражение:

а) 2^{m+n}; б) 2^{m-n}; в) 8^{m+n}; г) 2^{2m-3n}.

27. Вычислите силу притяжения F между Землей и Луной, применив формулу $F=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{R^2}$ и следующие данные: $m_1\cdot m_2=1{,}19\cdot 10^{55}$ кг^{2}; $R^{2}=2{,}25\cdot 10^{16}$ км^{2}; $G=6{,}67\cdot 10^{-20}$.

28. Упростите выражение:

а) $(x^{-2}-y^{-2})\cdot(x+y)^{-1}$; б) $\left(\frac{1}{x^{-2}}-\frac{1}{y^{-2}}\right)\cdot(x-y)^{-1}$;

в) $\left(\frac{a^{-1}-1}{a^{-1}+1}\right)^{-1}$; г) $\left(\frac{1+a^{-1}}{1-a^{-2}}\right)^{-1}$.

29. Вычислите

$$\left(\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^{-1}-(2\sqrt{2})^{-1}\right)^{2}\cdot\left[\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right)^{-1}-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^{-1}\right].$$

30. Угарный газ вреден для здоровья, поэтому его концентрация в помещении не должна превышать $0{,}2\cdot 10^{-2}$ г/м^{3}. Какое предельно допустимое количество молекул угарного газа может быть в помещении с измерениями 4 м × 5 м × 2,5 м, если одна молекула состоит из одного атома углерода и одного атома кислорода, то есть ее масса равна $12+16=28$ (у. е)?

§ 4. Корни

4.1. Квадратный корень. Приближенное значение квадратного корня

1 Как вырезать из картона квадрат, площадь которого равна 9 см²?
А квадрат площадью 10 см²?

Объясняем

$\mathscr{A} = 9$ см², 3 см, 3 см

$3 \geq 0$ и $3^2 = 9$

$\sqrt{9} = 3$

$\mathscr{A} = a$ кв. ед., b, b

$b \geq 0$ и $b^2 = a$

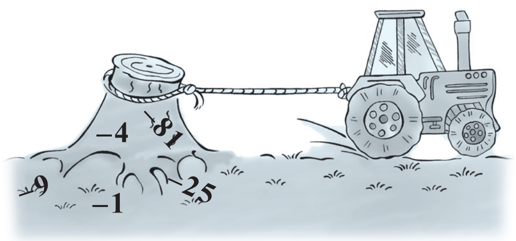
$\sqrt{a} = b$

$\mathscr{A} = 10$ см², ? см

Определение **Квадратным корнем из неотрицательного действительного числа** a (или корнем из a) называется неотрицательное действительное число b, квадрат которого равен a.

квадратный корень из числа a → $\boxed{\sqrt{a}} = \boxed{b}$ ← значение квадратного корня → $\boxed{a, b \in \mathbb{R}_+,\ b^2 = a}$

знак корня или радикал



• Исследуйте и заполните пропуски:

$\sqrt{49} = 7$, так как $7 \geq 0$ и $7^2 = 49$;

$\sqrt{2\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{\square}{\square}} = \square$, так как $\square \geq 0$ и $\square^{\square} = \square$;

$\sqrt{0{,}01} = \square$, так как $\square \geq 0$ и $\square^{\square} = \square$.

Замечания

1. Квадратный корень из любого неотрицательного действительного числа существует и имеет единственное значение.
2. Во множестве действительных чисел квадратный корень из отрицательных чисел не существует.

2 Рассмотрите и дополните:

Запомните

$(\sqrt{a})^2 = a$, для $a \in \mathbb{R}_+$.

$(\sqrt{3})^2 = 3$

$\left(\sqrt{\frac{5}{19}}\right)^2 = \square$

$\left(\sqrt{\sqrt{3} - 2}\right)^2 = \square$

$\sqrt{a^2} = |a|$, для любых $a \in \mathbb{R}$.

$\sqrt{7^2} = |7| = 7$

$\sqrt{(-5{,}1)^2} = |\square| = \square$

$\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2} = \left|\sqrt{3} - 2\right| =$

$= \square$, так как $\square > \square$

$\sqrt{a}$ не имеет смысла для $a \in \mathbb{R}_-^*$.

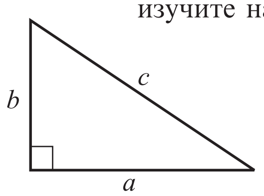
$\sqrt{2x - 1}$ имеет смысл, если

$2x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

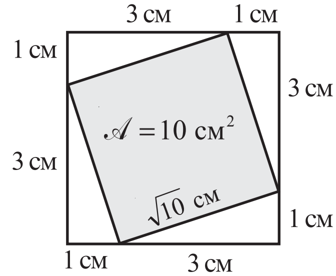
$\Leftrightarrow 2x \geq \square \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \geq \square$

3 Из определения квадратного корня следует, что квадрат, площадь которого равна 10 см^2, имеет сторону длиной $\sqrt{10}$ см. Рассмотрите рисунок и обратите внимание на то, как можно из картона вырезать такой квадрат, применив теорему Пифагора. Ее вы скоро изучите на уроках геометрии.



$c^2=a^2+b^2$ – теорема Пифагора



4 Значение квадратного корня можно оценить путем округления.

Вспомним

При округлении:
- цифра разряда, до которого надо округлить, не меняется, если цифра справа от нее равна 0, 1, 2, 3 или 4;
- цифра разряда, до которого надо округлить, увеличится на 1, если цифра справа от нее равна 5, 6, 7, 8 или 9;
- заменяем нулями все цифры, стоящие справа от цифры, до которой округляем.

Например, число $\sqrt{10}\approx 3$ – округление до целых; $\sqrt{10}\approx 3{,}1$ – округление до десятых; $\sqrt{10}\approx 3{,}16$ – округление до сотых.

- Прикиньте, округлив до целых, значения квадратных корней $\sqrt{120}$, $\sqrt{146}$, $\sqrt{401}$, затем проверьте, используя калькулятор.

Интересно и полезно

В Древнем Вавилоне для нахождения приближенного значения квадратного корня применяли формулу $\sqrt{a^2+b}\approx a+\dfrac{b}{2a}$, где $a>0$ и $|b|$ – достаточно малое число по сравнению с a. Таким образом, $\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1}\approx 3+\dfrac{1}{6}=3{,}1(6)$.

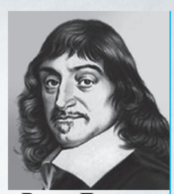
- Вычислите $\sqrt{7}$ с точностью до двух десятичных знаков, применив:
  а) калькулятор;
  б) формулу, которую использовали в Древнем Вавилоне.

Из истории

В Древней Греции задача извлечения корня ассоциировалась с задачей нахождения длины стороны квадрата, площадь которого известна. Поэтому квадратный корень назывался «стороной».

Вероятно поэтому на латыни понятия «сторона» и «корень» обозначаются одним и тем же словом – *radix*.
От него и произошло слово *радикал* (т. е. *корень*).

В XIII–XV веках европейские математики вместо слова *корень* использовали обозначение R^2. Например, число $\sqrt{3}$ записывали следующим образом: $R^2 3$.


Рене Декарт (1596–1650 гг.)

В XVI веке для представления действия извлечения квадратного корня использовали символ $\surd$. Только в XVIII веке известный французский математик Рене Декарт ввел в использование символ $\sqrt{\ }$, который применяется и по сей день.

4.2. Свойства квадратного корня

1 Выполните действия и сравните результаты:

а) $\sqrt{36\cdot 25}=\sqrt{900}=30;$ $\qquad\sqrt{36\cdot 25}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{25}=6\cdot 5=30;$

б) $\sqrt{\dfrac{9}{36}}=\sqrt{\dfrac{\square}{\square}}=\dfrac{\square}{\square};$ $\qquad\sqrt{\dfrac{9}{36}}=\dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}}=\dfrac{\square}{\square}=\dfrac{\square}{\square}.$

Запомните

Свойства квадратного корня

1° $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b}$, где $a, b\in\mathbb{R}_+$.

2° $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$, где $a\in\mathbb{R}_+$, $b\in\mathbb{R}_+^*$.

3° $\sqrt{a^2}=|a|$, где $a\in\mathbb{R}$.

4° $(\sqrt{a})^2=a$, где $a\in\mathbb{R}_+$.

Замечание | Свойство 1° верно для трех и более неотрицательных множителей.

2 Рассмотрите и заполните пропуски:

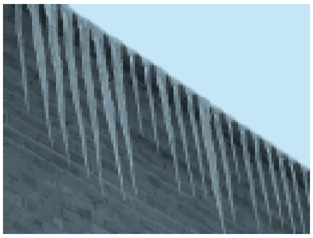
а) $\sqrt{35}\cdot\sqrt{15}\cdot\sqrt{21}=\sqrt{35\cdot 15\cdot 21}=\sqrt{7\cdot 5\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot 3}=$

$=\sqrt{7^2\cdot\square^2\cdot\square^2}=\sqrt{7^2}\cdot\sqrt{\square^2}\cdot\sqrt{\square^2}=7\cdot\square\cdot\square=\square;$

б) $\sqrt{82^2-18^2}=\sqrt{(82+18)\cdot(82-18)}=\sqrt{\square\cdot\square}=\sqrt{\square}\cdot\sqrt{\square}=\square\cdot\square=\square;$

в) $\sqrt{18^2+24^2}=\sqrt{(6\cdot 3)^2+(6\cdot 4)^2}=\sqrt{6^2\cdot 3^2+6^2\cdot 4^2}=\sqrt{6^2(3^2+4^2)}=$

$=\sqrt{\square^2\cdot\square}=\sqrt{\square^2}\cdot\sqrt{\square}=\square\cdot\square=\square.$



3 Сколько секунд будет падать ледяная сосулька с карниза, расположенного на высоте 40 м от поверхности земли?

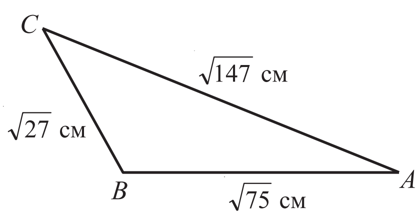
Для вычислений примените формулу $h=\dfrac{gt^2}{2}$, где h – высота (в метрах), t – время (в секундах), $g\approx 9{,}8$ м/сек.^{2} – ускорение свободного падения.

Решаем

$t=\sqrt{\dfrac{2h}{g}};\quad t\approx\sqrt{\dfrac{2\cdot 40}{9{,}8}}=\sqrt{\dfrac{40}{4{,}9}}=\sqrt{\dfrac{4}{0{,}49}}=\dfrac{\sqrt{\square}}{\sqrt{\square}}=\dfrac{\square}{\square}=\square.$

Ответ: $t\approx\square$ секунды.

4 Используя данные с рисунка, найдите периметр треугольника ABC.



Решение:

$\mathscr{P}=AB+BC+AC=\sqrt{75}+\sqrt{27}+\sqrt{147}=$

$=\sqrt{25\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{49\cdot 3}=$

$=\square\sqrt{3}+\square\sqrt{3}+\square\sqrt{3}=\square\sqrt{3}$ (см).

Ответ: $\mathscr{P}=\square\sqrt{3}$ см.

Запомните

Правило вынесения множителя из-под знака корня

Если $a, b\in\mathbb{R}$ и $b\geq 0$, то $\sqrt{a^2b}=|a|b$.

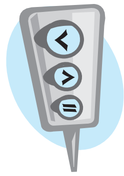
- Рассмотрите и дополните.

Упростим выражение $\sqrt{5b^2}+\sqrt{5a^2}$, где $b>0$, $a<0$:

$\sqrt{5b^2}+\sqrt{5a^2}=|b|\cdot\sqrt{5}+|a|\cdot\sqrt{5}=(\square\bigcirc\square)\sqrt{5}.$

5 Сравните $5\sqrt{\frac{3}{5}}$ и $3\sqrt{\frac{5}{3}}$.

Решение:



$$5\sqrt{\frac{3}{5}}=\sqrt{25\cdot\frac{3}{5}}=\sqrt{\frac{25\cdot 3}{5}}=\sqrt{5\cdot 3}=\sqrt{15};$$

$$3\sqrt{\frac{5}{3}}=\sqrt{\square\cdot\frac{5}{3}}=\sqrt{\frac{\square\cdot 5}{3}}=\sqrt{\square\cdot\square}=\sqrt{\square};$$

$$5\sqrt{\frac{3}{5}}\ \bigcirc\ 3\sqrt{\frac{5}{3}}.$$

Запомните

Правило внесения множителя под знак корня

Если $a, b\in\mathbb{R}$ и $b\geq 0$, то $a\sqrt{b}=\begin{cases}\sqrt{a^2b}, & \text{если } a\geq 0\\ -\sqrt{a^2b}, & \text{если } a<0.\end{cases}$

- Рассмотрите и дополните.

Упростим выражение $ba\sqrt{\frac{3}{a}}\cdot\sqrt{\frac{27a^3}{b^2}}$, где $a>0$, $b<0$:

$$ba\sqrt{\frac{3}{a}}\cdot\sqrt{\frac{27a^3}{b^2}}=-\sqrt{\frac{3a^2b^2}{a}}\cdot\sqrt{\frac{27a^3}{b^2}}=-\sqrt{\frac{\square}{\square}}=-\sqrt{\square}=\square.$$

Упражнения и задачи

1

1. Вычислите:

а) $\sqrt{49}$; б) $\sqrt{1}$; в) $\sqrt{0{,}01}$; г) $(\sqrt{3{,}2})^2$;

д) $(\sqrt{12{,}71})^2$; е) $\sqrt{(-4{,}21)^2}$; ж) $\sqrt{\frac{9}{169}}$.

2. *Работайте в парах!* Пусть $a=144$, $b=25$. Найдите значение выражения:

а) $a\sqrt{b}$; б) $b\sqrt{a}$; в) $\sqrt{ab}$; г) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$;

д) $a+\sqrt{b}$; е) $\sqrt{a}+b$; ж) $\sqrt{a+b}$.

3. Вычислите:

а) $2\sqrt{49}-3\sqrt{25}$; б) $4\sqrt{16}-2\sqrt{81}$;

в) $10\sqrt{\frac{81}{100}}$; г) $5\sqrt{\frac{36}{25}}$.

4. Используя калькулятор, вычислите квадратный корень и округлите результат до:

1) десятых; 2) сотых; 3) тысячных:

а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{27}$; в) $\sqrt{41}$;

г) $\sqrt{19}$; д) $\sqrt{135}$; е) $\sqrt{226}$.

5. Используя калькулятор, вычислите квадратный корень и округлите результат до сотых.

а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{5{,}3}$; в) $\sqrt{50}$;

г) $\sqrt{1{,}8}$; д) $\sqrt{12{,}56}$; е) $\sqrt{360}$.

6. Впишите один из знаков „>“, „<“, „≤“, „≥“ так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $\sqrt{a^2}=a$, при $a\ \bigcirc\ 0$;

б) $\sqrt{(a+2)^2}=a+2$, при $a\ \bigcirc\ -2$;

в) $(\sqrt{1-a})^2=1-a$, при $a\ \bigcirc\ 1$;

г) $\sqrt{(1-a)^2}=a-1$, при $a\ \bigcirc\ 1$.

7. Между какими двумя последовательными натуральными числами расположено число:

а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{17}$; в) $\sqrt{41}$; г) $\sqrt{151}$?

8. *Работайте в парах!* Найдите целое число, ближе всех расположенное к числу:

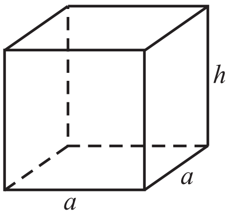
а) $\sqrt{50}$; б) $-\sqrt{35}$; в) $\sqrt{102}$; г) $-\sqrt{80{,}7}$.

9. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{2-x}$, при $x=1$; б) $\sqrt{6x+3}$, при $x=-0{,}5$;

в) $\sqrt{x^2}$, при $x=-5$; г) $\sqrt{(2x+5)^2}$, при $x=-6$.

10. Объем прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат со стороной, равной a, вычисляется по формуле:



$$\mathscr{V}=a^2\cdot h,$$

где h – высота параллелепипеда.

Выразите с помощью этой формулы переменную a через $\mathscr{V}$ и h.

11. Вычислите:

а) $\sqrt{16\cdot121}$; б) $\sqrt{49\cdot25}$; в) $\sqrt{9\cdot0{,}36\cdot16}$;

г) $\sqrt{\dfrac{36}{169}}$; д) $\sqrt{\dfrac{1}{81}\cdot\dfrac{16}{25}}$; е) $\sqrt{17^2\cdot3^2}$.

12. Вычислите:

а) $\sqrt{48\cdot27}$; б) $\sqrt{50\cdot72}$; в) $\sqrt{98\cdot18}$;

г) $\sqrt{75\cdot243}$; д) $\sqrt{13^2-12^2}$; е) $\sqrt{17^2-8^2}$.

13. *Работайте в парах!*

Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{72}$; б) $\sqrt{48}$; в) $\sqrt{75}$;

г) $\sqrt{90}$; д) $\dfrac{\sqrt{54}}{3}$; е) $5\sqrt{\dfrac{1}{125}}$.

14. *Работайте в парах!*

Внесите множитель под знак корня:

а) $3\sqrt{5}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{7}$;

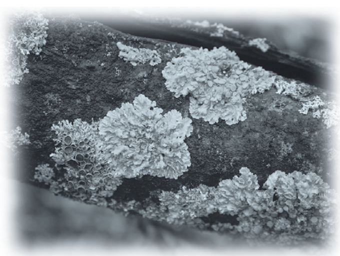
г) $-3\sqrt{2}$; д) $6\sqrt{3}$; е) $\dfrac{1}{3}\sqrt{27}$.

15. *Исследуйте!* С какой скоростью упадет кирпич на землю с высоты 1 м? Используйте калькулятор и округлите ответ до десятых.

Указание: $v=\sqrt{2gh}$, где h – высота, а $g=9{,}8$ м/сек^2 – ускорение свободного падения.

2

16. Во время роста лишайники образуют круги. Приблизительное соотношение между диаметром круга и возрастом лишайника определяют формулой $d=7\cdot\sqrt{t-12}$, при $t\ge12$, где d – диаметр в миллиметрах, t – количество лет с начала роста лишайника. Найдите диаметр лишайника через 16 лет после начала роста.



17. Определите, при каких значениях x данное выражение имеет смысл:

а) $\sqrt{x}$; б) $\sqrt{-x}$; в) $\sqrt{\dfrac{1}{x}}$; г) $\sqrt{x^2}$;

д) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}}$; е) $\sqrt{-x^2}$; ж) $\sqrt{x-1}$; з) $\sqrt{x^2+4x+4}$.

18. Вычислите:

а) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; б) $(3\sqrt{5}-7)\cdot(3\sqrt{5}+7)$;

в) $(2\sqrt{2}+3\sqrt{3})^2$; г) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{5})^2$.

19. Найдите значение выражения:

а) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; б) $\sqrt{(\sqrt{5}-3)^2}+\sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}$.

20. Вычислите:

а) $\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{32}$; б) $3\sqrt{48}-5\sqrt{3}-2\sqrt{27}$;

в) $(\sqrt{3}+2)^2-\sqrt{12}$; г) $3\sqrt{80}+(6-\sqrt{5})^2-40$.

21. Вынесите общий множитель:

а) $\sqrt{13}-13$; б) $6+\sqrt{6}$; в) $\sqrt{14}-\sqrt{2}$;

г) $\sqrt{22}-\sqrt{11}$; д) $\sqrt{10}+\sqrt{20}$;

е) $a-\sqrt{a}$, $a\ge0$; ж) $\sqrt{2b}+b$, $b\ge0$.

22. Используя калькулятор, вычислите значение квадратного корня с точностью до трех десятичных знаков:

а) $\sqrt{5{,}6644}$; б) $\sqrt{0{,}015129}$;

в) $\sqrt{692{,}7424}$; г) $\sqrt{12{,}28}$.

23. Найдите все целые числа, расположенные между числами:

а) $\sqrt{2}$ и 5; б) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{3}$;

в) $-\sqrt{7}$ и $\sqrt{17}$; г) $-\sqrt{13}$ и $2\sqrt{5}$.

24. Из заданной формулы, описывающей связь между положительными физическими величинами, найдите:

а) l, если $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$; б) S, если $t=\sqrt{\dfrac{2S}{a}}$;

в) F, если $V=k\cdot\dfrac{\sqrt{F}}{l}$; г) L, если $\omega=\sqrt{\dfrac{1}{LC}}$.

25. Вычислите наиболее рациональным способом:

а) $\sqrt{4{,}58^2-4{,}42^2}$; б) $\sqrt{12^2+16^2}$;

в) $\sqrt{24^2+32^2}$; г) $\sqrt{42^2+56^2}$.

26. *Работайте в парах!* Вычислите:

а) $\sqrt{2\sqrt{3}+1}\cdot\sqrt{2\sqrt{3}-1}$; б) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

в) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}$; г) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}-1}-\dfrac{1}{2\sqrt{5}+1}$.

27. Сократите отношение:

а) $\dfrac{15}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{5-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$; в) $\dfrac{\sqrt{22}+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;

г) $\dfrac{\sqrt{42}-\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$; д) $\dfrac{x+\sqrt{5}}{x^2-5}$; е) $\dfrac{t-\sqrt{3}}{t^2-9}$.

28. Вынесите множитель из-под знака корня: а) $\sqrt{32a^3b^{10}}$, при $a>0,\ b\le 0$; б) $\sqrt{-8(a-3)^3}$, при $a<3$.

29. Внесите множитель под знак корня: а) $a\sqrt{3}$, при $a<0$; б) $x\sqrt{x}$; в) $y\sqrt{-y}$; г) $(a-b)\sqrt{a-b}$.

30. ***Работайте в парах!*** Упростите выражение:

а) $\sqrt{\dfrac{a^8b^{12}}{c^2}}$, если $c<0$; б) $-x\sqrt{x^2y^{16}}$, если $x<0$; в) $(a-5)\sqrt{\dfrac{3}{a^2-10a+25}}$, если $a>5$.

31. Задайте формулой зависимость между положительными величинами.

а) Площадь круга $\mathscr{A}$ с радиусом R находят по формуле $\mathscr{A}=\pi R^2$. Найдите R.

б) Кинетическую энергию E тела, которое движется со скоростью v, вычисляют по формуле $E=\dfrac{mv^2}{2}$, где m – масса тела. Найдите v.

в) Мощность тока на участке находят по формуле $P=I^2\cdot R$, где I – сила тока, R – сопротивление проводника. Найдите I.

3

32. Не используя калькулятор, сравните числа: $\sqrt{2022}+\sqrt{2024}$ и $2\sqrt{2023}$.

33. Вычислите, применив формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ и $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$:

а) $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{9+4\sqrt{5}}$.

34. Применив формулы «сложных» радикалов $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, где $a,b\in\mathbb{R}_+$, $a\ge\sqrt{b}$, упростите выражение: а) $\sqrt{7-\sqrt{24}}$; б) $\sqrt{7+\sqrt{48}}$.

35. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 7 см². Найдите длину стороны AB, если $BC=\sqrt{2}$ см. При решении этой задачи ученики получили два ответа: $BC=\dfrac{7}{\sqrt{2}}$ см и $BC=3{,}5\sqrt{2}$ см. Какой из этих ответов правильный?

Упражнения и задачи на повторение

1

1. Вычислите:

а) 7^{-2}; б) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-4}$; в) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$; г) $\left(1\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$.

2. Упростите выражение:

а) $\dfrac{a^{-12}\cdot a^6}{a^8}$; б) $\dfrac{(2x^{-3})^{-2}}{2^{-2}(x^{-2})^{-1}}$.

3. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

а) $16<\sqrt{17}<18$; б) $3<\sqrt{11}<4$;

в) $2\sqrt{3}=3\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{18}=3\sqrt{8}$.

4. Вычислите:

а) $\sqrt{810\cdot 40}$; б) $\sqrt{63}\cdot\sqrt{7}$; в) $\sqrt{1\dfrac{11}{25}}+\sqrt{3\dfrac{6}{25}}$.

5. Упростите выражение:

а) $3\sqrt{20}-3\sqrt{45}+4\sqrt{5}$; б) $(2-\sqrt{3})^2$;

в) $(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)$; г) $(6-\sqrt{2})^2-(5+\sqrt{2})^2$.

6. ***Работайте в парах!*** Упростите выражение: а) $\sqrt{36x^2y^3}$, если $x<0,\ y>0$;

б) $\sqrt{\dfrac{a^6}{25b^2}}$, если $a\ge 0,\ b>0$.

2

7. Площадь круга вычисляется по формуле $\mathscr{A}=\pi R^2$. Найдите R, если $\mathscr{A}=1\,256$ м² и $\pi\approx 3{,}14$.

8. ***Исследуйте!*** Проверьте, является ли $3+\sqrt{2}$ решением уравнения:

а) $2x-\sqrt{8}=6$; б) $x(3-\sqrt{2})=5$.

9. ***Исследуйте!*** При каких действительных значениях переменных x и y имеет место равенство:

$$\sqrt{xy}=\sqrt{-x}\cdot\sqrt{-y}\ ?$$

10. ***Исследуйте!*** При каких действительных значениях переменных a и b имеет место равенство:

$$\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}\ ?$$

11. Упростите выражение, при $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

а) $\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}-\dfrac{\sqrt{ab}}{a}$; б) $\sqrt{\dfrac{1}{a}}+\sqrt{\dfrac{1}{b}}-\dfrac{\sqrt{a}}{a}+\dfrac{\sqrt{b}}{b}$.

12. Выполните действия:

а) $(4a^{-2}-b^{-4})(2b^2-a)^{-1}$; б) $(a^{-2}+1)^{-2}$.

13.  ***Работайте в группах!*** Проект *Приложения действительных чисел в повседневной жизни.*

3

14. Вычислите $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$, для $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ и $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$.

15. Упростите выражение:

а) $(2-\sqrt{5})\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{7-3\sqrt{5}}$;

б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{2}+1$.

16. Упростите выражение:

$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$, если $1\le x\le 2$.

17. Докажите, что если $a>b$ и $a^2+b^2=4ab$, то $\dfrac{4ab}{a^2-b^2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. а) Впишите в рамку букву И, если высказывание истинно, или букву Л, если оно ложно:

$-\sqrt{900}\in\mathbb{Z}$ $\square$ $3\sqrt{7}\in\mathbb{Q}$ $\square$

$6{,}2(5)\in\mathbb{R}_+$ $\square$ $|4-3\sqrt{3}|\in\mathbb{I}_-$ $\square$

б) Впишите действительное число так, чтобы получить истинное высказывание:

$$6{,}2-\sqrt{900}+4\frac{2}{5}-\boxed{}=2013.$$

в) Найдите 25% от числа, полученного в пункте б).

г) Раскройте модуль $|4-3\sqrt{3}|$.

д) Запишите число 4^{12} в виде степени с основанием $\dfrac{1}{4}$.

2. Коля экономил два месяца, чтобы купить альбом. За первый месяц он сэкономил сумму, составляющую $\dfrac{3}{5}$ от цены альбома, за второй месяц – 62 лея.

а) Сколько стоит альбом?

б) В каком месяце была сэкономлена бóльшая часть денег?

3. Решите задачу:

Скорость звука в воздухе равна 340 м/с. На каком расстоянии (в километрах) прогремел гром, который стало слышно через 10,5 секунды?

Запишите ответ в виде $a\cdot 10^b$, где $a, b\in\mathbb{N}^*$.

Вариант 2

1. а) Впишите в рамку букву И, если высказывание истинно, или букву Л, если оно ложно:

$\sqrt{400}\in\mathbb{Z}$ $\square$ $5\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ $\square$

$-3{,}0(4)\in\mathbb{R}_-$ $\square$ $|3-2\sqrt{2}|\in\mathbb{I}_+$ $\square$

б) Впишите действительное число так, чтобы получить истинное высказывание:

$$-3{,}5+\sqrt{400}-7\frac{2}{5}+\boxed{}=2015.$$

в) Найдите 25% от числа, полученного в пункте б).

г) Раскройте модуль $|3-2\sqrt{2}|$.

д) Запишите число 9^6 в виде степени с основанием $\dfrac{1}{3}$.

2. Автомобиль преодолел расстояние от Кишинева до Унгень за 2 часа. За первый час он проехал $\dfrac{3}{5}$ пути, а за второй час – 48 км.

а) Чему равно расстояние между Кишиневом и Унгень?

б) За какой час было пройдено большее расстояние?

3. Решите задачу:

На одном CD-ROM можно хранить 650 Мб информации. Вычислите, сколько бит информации можно сохранить на трех CD-ROM-ах.

Запишите ответ в виде $a\cdot 10^b$, где $a, b\in\mathbb{N}^*$.

Глава 2 Алгебраические выражения

Миром руководят числа.
Пифагор

§1. Действия над действительными числами, представленными буквенными выражениями

1.1. Действительные числа, представленные буквенными выражениями

- Даны выражения $-3ab^2$, $5bc$, $-1{,}5ab^2$, $\sqrt{10}bc$, $1a$, x^2y, $2t$.

Вспомним

Выражение, записанное в виде произведения чисел или букв, является алгебраическим выражением.

Запомните

Каждое алгебраическое выражение состоит из **коэффициента** и **буквенной части**.
Коэффициент – это действительное число.

$-3ab^2$; $5bc$; $-1{,}5ab^2$; $\sqrt{10}\,bc$; $1a$; x^2y; $2t$
Заполните ■ – коэффициент
■ – буквенная часть

Работайте в парах

- Перечертите и заполните таблицу:

Выражение	$-\sqrt{5}xy$	ab	$2{,}5x^3y$	$7a^2b$	$\frac{3}{5}t$	$-x^2y$
Коэффициент				7		
Буквенная часть		ab				

Запомните

1. Сумма двух или нескольких алгебраических выражений является алгебраическим выражением. $\longrightarrow$ $a^2+2ab+b^2$
2. Произведение двух или нескольких алгебраических выражений является алгебраическим выражением. $\longrightarrow$ $2x\cdot(-3x^2y)\cdot yz$
3. Если $E\neq 0$ – алгебраическое выражение, то E^{-1} также является алгебраическим выражением. $\longrightarrow$ $E(x)=2x^3$, $x\neq 0$, – алгебраическое выражение, значит $E^{-1}(x)=\dfrac{1}{2x^3}$, $x\neq 0$, – алгебраическое выражение.

Вспомним

Над алгебраическими выражениями можно выполнять те же действия, что и над действительными числами: сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня. Эти действия обладают теми же свойствами, что и действия над действительными числами.

1.2. Сложение и вычитание действительных чисел, представленных буквенными выражениями

1 Исследуйте и заполните пропуски:

$$-3ab^2 + 5bc - 1{,}5ab^2 + \sqrt{10}bc - a =$$

$$= (-3 + (-1{,}5))ab^2 + (\square + \square)bc - a = \square\, ab^2 + \square\, bc - \square.$$

Подобные слагаемые: $-3ab^2$ и $\square$, $\sqrt{10}bc$ и $\square$.

Определение

Слагаемые алгебраического выражения, имеющие одинаковую буквенную часть, называются **подобными слагаемыми**.

Запомните

Привести подобные слагаемые означает заменить сумму данных слагаемых одним подобным слагаемым, коэффициент которого равен сумме коэффициентов данных слагаемых.

2 Исследуйте и закончите приведение подобных слагаемых:

$$2{,}5a^2 - \sqrt{7} + \sqrt{5}ab^3 + \frac{2}{5}a^2 - \frac{1}{2}ab^3 + 3\sqrt{7} - 25 =$$

$$= (2{,}5 + \square)a^2 + (\square - 0{,}5)ab^3 + \square\sqrt{7} - 25 =$$

$$= \square\, a^2 + \square\, ab^3 + \square\sqrt{7} - 25.$$

1.3. Умножение, деление и возведение в степень действительных чисел, представленных буквенными выражениями

1 Исследуйте и заполните пропуски:

а) $8a^2b \cdot (-1{,}5ab^3) = 8 \cdot (-1{,}5) \cdot \square^2 \cdot a \cdot \square \cdot b^3 = -\square \cdot a^3 \cdot \square^4$;

б) $16x^3y^5 : 4x^5y^2 = (16:4) \cdot (x^3 : x^5) \cdot (y^5 : y^2) =$

$$= \square \cdot x^{\square - \square} \cdot y^{\square - \square} = \square \cdot x^{\square} \cdot y^{\square} = \frac{\square \cdot y^{\square}}{x^{\square}}.$$

Запомните

Чтобы умножить (разделить) действительные числа, представленные буквенными выражениями, надо:
– умножить (разделить) их коэффициенты;
– умножить (разделить) буквенные части, используя свойства степени.

2 Исследуйте и заполните пропуски:

$$\left(-\frac{2}{5}a^2bc^4\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)^3 \cdot a^{2\cdot\square} \cdot b^{\square} \cdot c^{4\cdot\square} = \square \cdot a^{\square} \cdot b^{\square} \cdot c^{\square}.$$

Запомните

Чтобы возвести в степень действительное число, представленное буквенным выражением, надо:
– возвести в эту степень его коэффициент;
– возвести в эту степень каждый множитель буквенной части.

1.4. Раскрытие скобок. Разложение на множители

1 Раскройте скобки и заполните пропуски:

а) $3xy^2\cdot(\sqrt{2}x^2+x^2y)=3xy^2\cdot\square+3xy^2\cdot\square=$

$=(3\cdot\square)\cdot x^{\square+\square}y^{\square}+3\cdot\square^{\square+\square}\cdot\square^{\square+\square}=$

$=\square+\square$;

б) $-1{,}5a^3b^2\cdot(4a^2b-0{,}2ab)=$

$=\square\cdot 4a^2b-\square\cdot 0{,}2ab=$

$=\square\cdot 4\cdot a^{\square+\square}b^{\square+\square}+\square\cdot 0{,}2\cdot a^{\square+\square}b^{\square+\square}=$

$=\square a^{\square}b^{\square}+\square a^{\square}b^{\square}$.

Раскрытие скобок

$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,$

$a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$

Вынесение общего множителя a

Запомните

Умножение действительных чисел, представленных буквенными выражениями, дистрибутивно относительно сложения и вычитания.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c,\quad a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c.$$

- Рассмотрите и дополните:

$(-2x+\sqrt{3}x^2y^2)\cdot(x^2+xy)=$

$=(-2x)\cdot\square+(-2x)\cdot xy+$

$+\square\cdot x^2+\sqrt{3}x^2y^2\cdot\square=$

$=\square+\square+\square+\square.$

Раскрытие скобок

$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$

Группирование и вынесение общего множителя за скобки

Запомните

Для любых действительных чисел a, b, c, d верно соотношение:

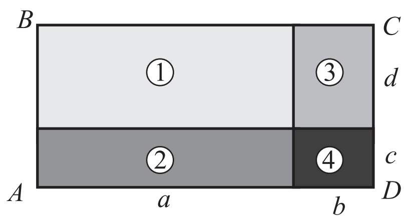
$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd.$$

Работайте в парах

- Обоснуйте формулу

$$(a+b)\cdot(c+d)=ac+ad+bc+bd,$$

вычислив площадь изображенного прямоугольника двумя способами.



2 Запишите в виде произведения выражение

$$6\sqrt{30x^2y^3}+3\sqrt{6xy^5}.$$

Вынесение общего множителя:

$3\sqrt{5}+2\sqrt{15}=$

$=3\sqrt{5}+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=$

$=\sqrt{5}(3+2\sqrt{3}).$

Исследуйте и заполните пропуски:

$6\sqrt{30x^2y^3}+3\sqrt{6xy^5}=\underbrace{2\cdot 3\cdot\sqrt{5\cdot 6}\cdot xy^2\cdot\square}+\underbrace{3\sqrt{6}\cdot xy^2\cdot\square}=$

$=\square\cdot(\underbrace{2\sqrt{5}\,\square}+\underbrace{\square})$.

общий множитель

результат деления каждого слагаемого на общий множитель

Запомните

- **Разложить на множители** выражение означает представить это выражение в виде произведения.
- Разложить на множители выражение можно вынесением общего множителя за скобки:

$$ab+ac=a(b+c),\ \sqrt{15}-2\sqrt{3}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\sqrt{3}(\sqrt{5}-2).$$

- Заполните пропуски:

$$2{,}4a^5b^4-1{,}8a^2b=\square\cdot 4\cdot a^5b^4-\square\cdot 3\cdot a^2b=0{,}6\cdot\square^2\cdot\square(4a^{\square}b^{\square}-3).$$

Упражнения и задачи

1

1. *Работайте в парах!* Перечертите и заполните таблицу:

а)

Выражение	$2{,}3x$	$-x^2y$	$\sqrt{5}ab$	ax^3	$-\sqrt{3}by$	$-5{,}(2)x^2yz$	$\frac{1}{5}a^2b^3c$
Коэффициент							
Буквенная часть							

б)

Выражение	$-\sqrt{7}xy$	a^2b	$-x^3z$	$7{,}(8)ax$	$\frac{4}{7}a^2b^3$	$3{,}8tz$	$-2axby$
Коэффициент							
Буквенная часть							

2. Рассмотрите выражение и приведите подобные слагаемые:

а) $3{,}5ax-2ty+\sqrt{3}ax+y^3-\sqrt{7}ty-7{,}3y^3+\sqrt{7}$;

$\boxed{3{,}5ax;\ \ldots}$ $\boxed{-2ty;\ \ldots}$ $\boxed{y^3;\ \ldots}$ $\boxed{\ldots}$

б) $\frac{2}{7}ab+\sqrt{13}a^2b-0{,}5ab-ab^3-5a^2b+7{,}5ab^3-3\sqrt{15}$.

$\boxed{-0{,}5ab;\ \ldots}$ $\boxed{-ab^3;\ \ldots}$ $\boxed{-5a^2b;\ \ldots}$ $\boxed{\ldots}$

3. Приведите подобные слагаемые:

а) $7\sqrt{7}-3\sqrt{3}+2{,}5\sqrt{7}+15\sqrt{3}-7\sqrt{10}$; б) $5\sqrt{15}-2\sqrt{2}+\sqrt{60}+7\sqrt{8}-6\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{32}$.

4. Приведите подобные слагаемые:

а) $-2{,}7a+3b-1\frac{3}{4}a-\frac{2}{5}b+\sqrt{7}$; б) $-2008+\frac{2}{3}ab^2-78ab+5\frac{1}{3}ab^2+2007-22ab$.

5. Запишите в виде суммы выражение:

а) $4{,}12x^2y$; б) $-3\sqrt{2}tz$; в) $6{,}(15)ab$; г) $-\frac{2}{7}xy^2$.

6. Выполните умножение:

а) $7x^2y^3z\cdot(-3xyz^3)$; б) $(-2{,}8ab)\cdot(-5a^3b)$.

7. Выполните деление:

а) $5{,}2x^3y:0{,}4xy^2$; б) $-\frac{3}{17}ab^5:\frac{9}{17}a^2b^3$;

в) $\sqrt{15t^2z^2}:(-\sqrt{5}tz)$; г) $2{,}(5)a^3b^2:0{,}(5)a^4b$.

8. Возведите в степень:

а) $(-3xy^2)^2$; б) $(\sqrt{5}a^2b)^4$;

в) $(-2\frac{1}{5}tz)^{-3}$; г) $(\sqrt{2}a^3b^{-2})^{-2}$.

9. *Исследуйте! Истинно или Ложно?*

а) $-(1-4x)=4x+1$; б) $5t+1=6t$;

в) $x+x+x=x^3$; И/Л г) $-3x-7x=-10x$;

д) $|-x|+|x|=0$; е) $\sqrt{3}x-x=\sqrt{3}$.

10. Раскройте скобки:

а) $m(m+n)$; б) $z(z-y)$; в) $3a(b-2c)$;

г) $-\sqrt{2}(2x-\sqrt{2}y)$; д) $1{,}7x(x+3y)$; е) $\sqrt{7}(\sqrt{2}a+\sqrt{7})$.

11. Раскройте скобки:

а) $4x^2y(-3xy^5+8yz)$; б) $-7{,}(2)ab(9a^2b^3-18abc)$;

в) $-\sqrt{7}t(\sqrt{14}tz-\sqrt{21}t^2z^3)$; г) $\frac{2}{3}ab(18a^2b^2-15a)$.

12. Вычислите площадь прямоугольника, стороны которого равны: а) $(\sqrt{7}+4)$ см и $(4-\sqrt{7})$ см;

б) $(8-3\sqrt{5})$ см и $(3\sqrt{5}+8)$ см.

13. Раскройте скобки:

а) $(2x-3y)(5x+7y-1)$; б) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$;

в) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$; г) $(x^2-y^2)(x+y)$.

14. Вынесите общий множитель:

а) $7ab^2+14a^2b$; б) $-3{,}6x^2y^3+0{,}8x^4y^5$;

в) $2\sqrt{17}xy^4-\sqrt{17}x^2y$; г) $-15tz^2-\sqrt{5}t^2z$.

2

15. Известно, что x и y – действительные числа. Запишите действительное число:

1) $5x+2y$; 2) $-3x+2$; 3) $-\sqrt{2}+2xy$:

а) в виде суммы трех действительных чисел, представленных буквенными выражениями;
б) в виде суммы пяти действительных чисел, представленных буквенными выражениями;
в) в виде разности трех действительных чисел, представленных буквенными выражениями;
г) в виде суммы восьми ненулевых действительных чисел, представленных буквенными выражениями.

16. Выполните действия:
а) $\sqrt{7}x(\sqrt{7}xy-x)-(x-y)(\sqrt{28}x+y)-(\sqrt{7}xy)^2$;
б) $\frac{5}{7}x^{-1}\cdot y^{-2}(xy-49x^{-3})+\frac{1}{7}(x+y^2)(x-y^2)$.

17. Докажите, что равенство $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$ верно для любых $a, b\in\mathbb{R}^*$.

18. Выполните действия:
а) $(a-2a)+(3a-4a)+(5a-6a)+(7a-8a)+$
$+(8a-9a)+(9a-10a)$;
б) $x-2x+3x-4x+\ldots+199x-200x$.

19. Что больше: площадь прямоугольника со сторонами $(6-2\sqrt{7})$ см и $(6+2\sqrt{7})$ см или площадь квадрата, сторона которого равна $(2+\sqrt{3})$ см?

20. У кого из двух шахматистов больше шансов одержать победу в турнире, если известно, что у первого шансы победить равны $p_1=\frac{7}{13}$, а у второго – $p_2=\frac{4}{7}$?

21. *Работайте в парах!*
Запишите в виде произведения трех множителей, отличных от 1, выражения:
а) $x^3(x-0{,}7)-x^2(x-0{,}7)$;
б) $(2x+y)^2(4x-3)-(2x+y)(4x-3)$.

22. Вычислите a^2, зная что
$$a=\sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})-\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})}+$$
$$+\sqrt{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})+\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}.$$

23. Найдите наименьшее значение выражения:
а) x^2+5; б) x^2-2;
в) $(3x)^2+(4x)^2$; г) $7x^2+1$.

24. *Исследуйте!* *Истинно* или *Ложно*?
а) $\sqrt{x}=-x$ для любого $x\in\mathbb{R}_-$;
б) $\sqrt{x}+\sqrt{2x}=0$ при $x=0$;
в) $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=0$ при $x=0$;
г) $\sqrt{x^2}=(\sqrt{x})^2$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

И/Л

В случае, если высказывание ложно, найдите правильный ответ.

25. Из Кишинева в Джурджулешть отправились одновременно два автомобиля. Скорость первого 65 км/ч, а второго 72 км/ч. Запишите с помощью выражения, чему будет равно расстояние между автомобилями через t часов. Вычислите это расстояние, если:
а) $t = 0{,}5$; б) $t = 1$; в) $t = 1{,}5$; г) $t = 2$.

26. *Работайте в парах!*
Докажите, что сумма любых трех последовательных чисел кратна 3.

3

27. Докажите, что уравнение $\sqrt{x}=-x-1$ не имеет действительных решений.

28. Докажите, что выражение $\sqrt{x^2-6x+10}$ имеет смысл для любого $x\in\mathbb{R}$.

29. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=\sqrt{x}$; б) $\sqrt{x^2}-\sqrt{x}=0$.

30. *Исследуйте!* При каких натуральных значениях n значением отношения $\frac{n^3+n-2}{n+1}$ будет целое число?

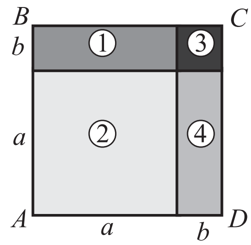
• Задачи для чемпионов

31. Упростите выражение $\sqrt{a-2\sqrt{a+1}+2}$.

32. Найдите четыре натуральных последовательных числа, произведение которых равно 570 024.

§2. Формулы сокращенного умножения

2.1. Квадрат суммы и квадрат разности



Работайте в парах

1 Вычислите двумя способами площадь квадрата $ABCD$:

$\mathscr{A}_{ABCD} = (\bigcirc + \square)^2;$

$\mathscr{A}_{ABCD} = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2.$

Запомните

Формула квадрата суммы двух выражений:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) =$
$= a^2 + ab + ba + b^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2$

- Продолжите предложение:
  Квадрат суммы двух выражений равен...

2 Рассмотрите и заполните пропуски:

$(a-b)^2 = [a+(-b)]^2 = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2 = \bigcirc^2 - 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2.$

Запомните

Формула квадрата разности:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) =$
$= a^2 - ab - ba + b^2 =$
$= a^2 - 2ab + b^2$

- Продолжите предложение:
  Квадрат разности двух выражений равен...

- Рассмотрите и заполните пропуски:

а) $(2x^3 + y^2) = \bigcirc^2 + 2 \cdot \bigcirc \cdot \square + \square^2 = 4x^6 + 4 \cdot \square + \square^4;$

б) $(\underset{a}{\sqrt{5}xy} - \underset{b}{y^5})^2 = \underset{a^2}{\bigcirc^2} - 2 \cdot \underset{a}{\bigcirc} \cdot \underset{b}{\square} + \underset{b^2}{\square^2} = \square - 2\square + \square.$

2.2. Произведение суммы двух выражений на их разность

1 Дедушка попросил Диму подсчитать в уме, сколько всего собрали айвы. Известно, что фрукты разместили в 101 ящике, причем в каждый ящик поместилось по 99 штук.

Помогите Диме выполнить соответствующие вычисления!

Решение:

$101 \cdot 99 = (\square + \square)(\square - \square) = \square - \square = \square.$

Ответ: $\square$ плодов айвы.

2 Исследуйте и заполните пропуски:

$(1{,}5t - \sqrt{2}z)(1{,}5t + \sqrt{2}z) = (1{,}5t)^2 - \square^2 = \square - \square.$

Запомните

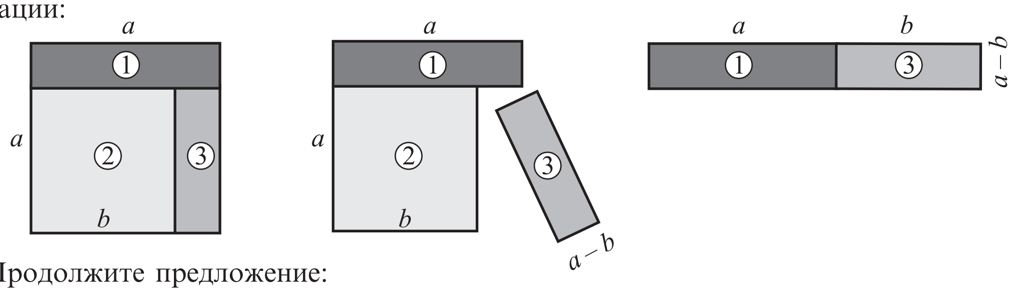
Формула произведения суммы на разность:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$(a+b)(a-b) =$
$= a^2 - ba + ba - b^2 =$
$= a^2 - b^2$

Работайте в парах

- Объясните формулу $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ с помощью геометрической интерпретации:



- Продолжите предложение:
  Произведение суммы двух выражений на их разность равно...

- Рассмотрите и дополните пропуски:

$$\left(\underset{a}{\frac{3}{4}x^{-2}}+\underset{b}{\sqrt{3}y}\right)\left(\underset{a}{\frac{3}{4}x^{-2}}-\underset{b}{\sqrt{3}y}\right)=\underset{a^2}{\bigcirc^2}-\underset{b^2}{\square^2}=\bigcirc-\square$$

2.3. Куб суммы и куб разности

1 Исследуйте и заполните пропуски:

а) $(a+b)^3=(a+b)\cdot(a+b)^{\square}=(a+b)\cdot(\square^2+2\square\bigcirc+\bigcirc^2)=$

$=a^3+2\square^2\bigcirc+a\cdot\bigcirc^2+b\cdot\square^2+2\square\bigcirc^2+\bigcirc^3=$

$=a^3+3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2+b^3;$

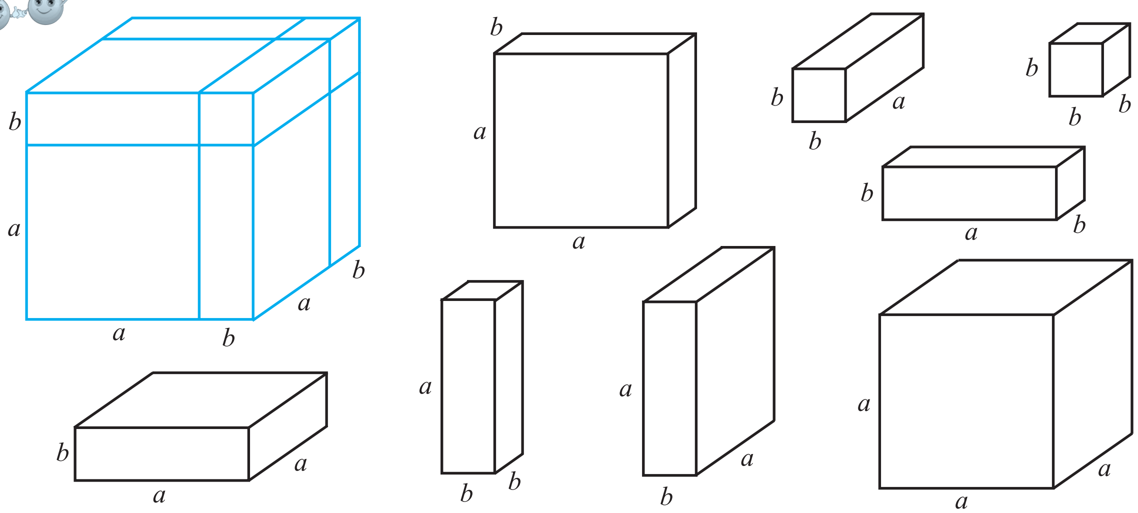
б) $(\underbrace{2x}_{a}+\underbrace{y^2}_{b})^3=\underset{a^3}{\square^3}+3\underset{a^2}{\square^2}\underset{b}{\bigcirc}+3\underset{a}{\square}\underset{b^2}{\bigcirc^2}+\underset{b^3}{\bigcirc^3}.$

Запомните

Формула куба суммы двух выражений:	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ $(\square+\bigcirc)^3=\square^3+3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2+\bigcirc^3.$

Работайте в парах

- Объясните формулу $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ с помощью фигур:



- Продолжите предложение:
  Куб суммы двух выражений равен...
- Рассмотрите и заполните пропуски:

$$(a^3+2ab)^3=(a^3)^{\square}+3(a^3)^{\square}\cdot 2ab+3\cdot a^3\cdot(2ab)^{\square}+(2ab)^{\square}=$$

$$=a^{\square}+6a^{\square}\cdot b^{\square}+12a^{\square}\cdot b^{\square}+8a^{\square}b^{\square}.$$

2 Исследуйте и сделайте вывод:

$$(a-b)^3=[a+(-b)]^3=a^3+3a^2\cdot(-b)+3a(-b)^2+(-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3.$$

Запомните

Формула куба разности: $\boldsymbol{(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3}$

$$(\square-\bigcirc)^3=\square^3-3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2-\bigcirc^3.$$

- Рассмотрите и заполните пропуски:

$$(a-b)^3=(a-b)(a-b)^2=(a-b)(a^2-2ab+b^2)=a^{\square}-3a^{\square}b+3ab^{\square}-b^{\square}.$$

- Продолжите предложение:
  Куб разности двух выражений равен...

3 Исследуйте и заполните пропуски:

$$(\underbrace{x^2}_{a}-\underbrace{0{,}5xy}_{b})^3=\underset{a^3}{\square}^3-3\underset{a^2}{\square}^2\underset{b}{\bigcirc}+3\underset{a}{\square}\underset{b^2}{\bigcirc}^2-\underset{b^3}{\bigcirc}^3=\square-\square+\square-\square.$$

Работайте в парах

4 Объем куба равен a^3.

а) Длину ребра куба увеличили на b. Чему равен объем нового куба?

б) Если длину ребра куба уменьшить на b, чему будет равен объем нового куба?

2.4. Сумма кубов. Разность кубов

Работайте в парах

1 Исследуйте и сделайте вывод:

$a^3+b^3=(a+b)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)$, так как $(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

$$=\square^3-\square^2\bigcirc+\square\bigcirc^2+\bigcirc\square^2-\square\bigcirc^2+\bigcirc^3=\square^3+\bigcirc^3.$$

- Заполните пропуски:

$$\underset{a^3}{x^3}+27=x^3+\underset{b^3}{\bigcirc}^3=(\underset{a}{x}+\underset{b}{\bigcirc})(\underset{a^2}{x^{\square}}-\underset{a}{x}\underset{b}{\bigcirc}+\underset{b^2}{\bigcirc^{\square}}).$$

Запомните

Формула суммы кубов: $\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$

$$\square^3+\bigcirc^3=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2).$$

- Исследуйте и заполните пропуски:

$$8t^3+125z^6=(2t)^3+(5z^2)^3=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)=$$

$$=(\square+\bigcirc)(\square-\square+\square).$$

Работайте в парах

2 Исследуйте и сделайте вывод:

$a^3-b^3=(a-b)\,(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)$, так как $(a-b)(a^2+ab+b^2)=$

$=\square^3-\square^2\bigcirc+\square\bigcirc^2-\bigcirc\square^2-\square\bigcirc^2-\bigcirc^3.$

- Заполните пропуски:

$x^3-27=x^3-\bigcirc^3=(x-\bigcirc)(x^{\square}+x\bigcirc+\bigcirc^{\square}).$

$\uparrow a^3 \quad \uparrow b^3 \quad \uparrow a \quad \uparrow b \quad \uparrow a^2 \quad \uparrow a \quad \uparrow b \quad \uparrow b^2$

Запомните

Формула разности кубов: $\boldsymbol{a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$

$\square^3-\bigcirc^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2).$

- Продолжите предложение:

Разность кубов двух выражений равна произведению разности этих выражений на...

- Разложите на множители разность кубов:

$64t^6-8z^3=(4t^2)^3-(2z)^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)=$

$=(\square-\square)(\square+\square+\square).$

Замечание Формулы сокращенного умножения являются тождествами.

Упражнения и задачи

1

1. Выполните действия:

а) $(x+1)^2$; б) $(1+x)^2$; в) $(2a+3)^2$;

г) $(\sqrt{5}+t)^2$; д) $(0{,}5x^2y+y^4)^2$; е) $(\sqrt{2}+3\sqrt{3}z)^2$.

2. Выполните действия:

а) $(x-1)^2$; б) $(1-x)^2$;

в) $(7a-1{,}1b^2)^2$; г) $(\sqrt{11}-t^3)^2$.

$(a+b)^2=(b+a)^2$

$(a-b)^2=(b-a)^2$

3. Выполните действия:

а) $(-y+5)^2$; б) $(-b^3+5)^2$;

в) $(t^2-z^2)^2$; г) $(-\sqrt{3}-2x)^2$.

4. *Исследуйте!*

Истинно или *Ложно*?

Для любых действительных чисел a, b, x, y:

а) $(a+b)^2=a^2+b^2$; б) $(x+3)^2=x^2-6x+9$;

в) $(5-x)=x^2-10x+25$; г) $(x-y)^2=(y+x)^2$.

5. *Работайте в парах!* Заполните пропуски так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $(\sqrt{3}+2x)^2=\square+4\sqrt{3}x+\bigcirc$;

б) $(2{,}5x+\sqrt{2}y)^2=\square+2\cdot\square\cdot\bigcirc+2y^2$;

в) $(a^2-2b^3)^2=\square-4\cdot\square\cdot\bigcirc+4b^6$;

г) $(t^2-\sqrt{3}z^4)^2=\square-2\cdot\square\cdot\bigcirc+3z^8$.

6. Выполните действия:

а) $(x-\sqrt{11})^2$; б) $(-x-\sqrt{11})^2$; в) $(-x+\sqrt{11})^2$;

г) $(x+\sqrt{11})^2$; д) $(\sqrt{11}-x)^2$; е) $(\sqrt{11}+x)^2$.

Сформулируйте вывод.

7. Выполните действия:

а) $(x+5)(x-5)$;

б) $(a+\sqrt{7})(a-\sqrt{7})$;

в) $(25-b)(25+b)$;

г) $(\sqrt{30}-t)(\sqrt{30}+t)$.

$(-x+y)(x+y)=$
$=y^2-x^2$

8. *Исследуйте!* *Истинно* или *Ложно*?

а) $(x+4)(x-4)=x^2-16$;

б) $(a-5)(a+5)=(a-5)^2$;

в) $(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})=x^2-49$;

г) $(t-2)^2(t+2)^2=(t^2-4)^2$.

9. Заполните пропуски так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $(\square-t^2)(\square+t^2)=64z^2-t^4$;

б) $(\sqrt{3}a-b)(\square+b)=3a^2-b^2$;

в) $\left(\frac{1}{2}a-\square\right)\left(\frac{1}{2}a+\square\right)=\bigcirc-25b^4$;

г) $(0{,}3y+2x)(\square-\bigcirc)=0{,}09y^2-4x^2$.

$(a+b)^3=(b+a)^3$

10. Выполните действия:
а) $(3x+1)^3$; б) $(2t+z^2)^3$; в) $(1+3x)^3$; г) $(z^2+2t)^3$.

11. Найдите объем куба, ребро которого равно:
а) $(2+3\sqrt{5})$ см; б) $(1+\sqrt{11})$ см; в) $(10-2\sqrt{2})$ см; г) $(5\sqrt{6}-10)$ см.

12. Выполните действия:
а) $(3t-2z)^3$; б) $(a^2-b^2)^3$; в) $(2z-3t)^3$; г) $(b^2-a^2)^3$.

13. *Работайте в парах!* Заполните пропуски:
а) $1000x^3+y^3=(10x+y)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)=(\square+\square)(\square-\square+\square)$;
б) $t^{12}+z^9=(t^{\square})^3+(z^{\square})^3=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)=(\square+\square)(\square-\square+\square)$.

14. *Работайте в парах!* Заполните пропуски:
а) $729a^3-27b^3=\square^3-\bigcirc^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)=(\square-\square)(\square+\square+\square)$;
б) $1-64t^{15}=\square^3-\bigcirc^3=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)=(\square-\square)(\square+\square+\square)$.

2

15. Вычислите: а) $(1-\sqrt{3})^2+(1+\sqrt{3})^2-(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})$;
б) $(2\sqrt{5}+\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5}-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5}+\sqrt{2})(2\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

16. Вычислите устно:
а) 31^2; б) 51^2; в) 49^2; г) 99^2; д) 26^2; е) 101^2.

17. Вычислите устно:
а) $19\cdot 21$; б) $98\cdot 102$; в) $1004\cdot 96$; г) $45\cdot 55$.

18. Найдите площадь квадрата, сторона которого равна:
а) $(10+2\sqrt{5})$ см; б) $(3+\sqrt{15})$ см;
в) $(25-2\sqrt{5})$ см; г) $(100-5\sqrt{8})$ см.

19. Найдите площадь прямоугольника со сторонами, равными:
а) $(8-2\sqrt{5})$ см и $(8+2\sqrt{5})$ см;
б) $(10+\sqrt{10})$ см и $(10-\sqrt{10})$ см.

20. Пусть $x=\sqrt{3}+\sqrt{5}$ и $y=\sqrt{15}-1$. Найдите значение выражения $(x^2+y^2-23)^{2008}$.

21. Пусть $x=\sqrt{6}+1$ и $y=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Найдите значение выражения $(x^2-y^2-2)^{2007}$.

22. *Работайте в парах!* Найдите среднее арифметическое и среднее геометрическое чисел:
а) $(\sqrt{2999}-1)^2$ и $(\sqrt{2999}+1)^2$;
б) $(\sqrt{109}+1)^2$ и $(\sqrt{109}-1)^2$.

Образец:
Среднее геометрическое двух чисел $a\geq 0$ и $b\geq 0$ равно $\sqrt{ab}$.
Пусть $a=2{,}5$ и $b=10$.
Тогда $\sqrt{ab}=\sqrt{2{,}5\cdot 10}=\sqrt{25}=5$.

23. Заполните пропуски:
а) $(\square+x^2)^3=8y^6+3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2+\bigcirc^3=$
$=\square+\square+\square+\square$;
б) $(ab+\bigcirc)^3=a^3b^3+6\square^2d+12\square d^2+\bigcirc^3=$
$=\square+\square+\square+\square$.

24. Выполните действия:
а) $(x+2y^{-2})^3$; б) $(a^{-3}+ab^2)^3$;
в) $\left(a^2+\dfrac{3}{4}b\right)^3$; г) $(\sqrt{3}x^3+y^2)^3$.

25. Заполните пропуски:
а) $(\square-b^3)^3=64a^{12}-3\square^2\bigcirc+3\square\bigcirc^2-\bigcirc^3=$
$=\square-\square+\square-\square$;
б) $(t^{-3}-\bigcirc)^3=\square^3-3\square^2\cdot z^3+3\square\bigcirc^2-\bigcirc^3=$
$=\square-\square+\square-\square$.

26. Выполните действия:
а) $(a^2b^2-a^5)^3$; б) $(0{,}2t^2-z^4)^3$;
в) $(x^{-3}-3y^2)^3$; г) $(\sqrt{5}t^2-zt)^3$.

27. Разложите на множители:
а) $1000t^6z^6+t^{12}$; б) $a^9b^9+1728a^{15}$.

28. Разложите на множители:
а) $t^9-27t^{12}z^{-12}$; б) $1331a^6-64b^3$.

29. Выполните действия:

а) $(x+y+3)^2$; б) $(5-\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$;

в) $(a+b)^4$; г) $(a-b)^4$.

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

30. *Исследуйте!*

а) Вычислите: $(4m)^2$; $(4m+1)^2$; $(4m+2)^2$; $(4m+3)^2$.

б) Докажите, что остаток от деления на 4 натурального числа, являющегося точным квадратом, равен 0 или 1.

31. а) Вычислите: $(5k)^2$; $(5k+1)^2$; $(5k+2)^2$; $(5k+3)^2$.

б) Каким может быть остаток от деления натурального числа на 5, являющегося точным квадратом?

32. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнения: а) $(x+2)^2-x^2=6$; б) $(2y-1)^2-4y^2=10$.

□ □ **3**

33. Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{R}^*$ значение выражения $3a^2-4ab+3b^2$ положительно.

34. Запишите выражение $2t^2+2z^2$ в виде суммы двух квадратов.

Бхаскара II
(1114–1185 гг.)

35. *Задача Бхаскары II – индийского математика и астронома.*

Докажите, что

$$\sqrt{10+\sqrt{24}+\sqrt{40}+\sqrt{60}}=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}.$$

36. *Исследуйте!* Число $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}$ – рационально или иррационально?

37. Докажите, что:

а) сумма 11^3+19^3 кратна 30;

б) сумма 19^3+13^3 не является простым числом;

в) разность 83^3-13^3 делится и на 10, и на 7;

г) разность 87^3-36^3 кратна 17.

38. Известно, что $A+\dfrac{1}{A}=2$. Вычислите:

а) $A^2+\dfrac{1}{A^2}$; б) $A^3+\dfrac{1}{A^3}$.

• Задачи для чемпионов

39. Докажите, что разность n^5-n^3, $n \in \mathbb{N}$, кратна 6.

§3. Способы разложения на множители

3.1. Разложение на множители способом вынесения общего множителя за скобки

• Запишите в виде произведения выражение $8x^2y^3-12xy^5$, выявив общий множитель.

Решение:

$$8x^2y^3-12xy^5=$$

$$\downarrow$$

$$=\left\{\begin{array}{l} 8x^2y^3 : 4xy^3 = \square\, x^{\square} \\ 12y^5 : 4xy^3 = \square\, y^{\square} \end{array}\right\}=$$

$$\downarrow$$

$$=4xy^3(2x^{\square}-3y^{\square}).$$

Общий множитель

① Находим НОД коэффициентов 8 и 12:

$(8,12)=4$.

② Находим наименьший показатель степени каждого общего множителя буквенных частей:

$x \longrightarrow \min(2, 1)=1.$

$y \longrightarrow \min(3, 5)=3.$

③ Выносим за скобки общий множитель $4xy^3$. В скобках остается результат, полученный от деления каждого слагаемого на $4xy^3$.

3.2. Разложение на множители при помощи формул сокращенного умножения

1 Рассмотрите и заполните пропуски:

а) $a^2+6ab+\bigcirc^2=(a+\bigcirc)^2$;

б) $\square^2+2\sqrt{2}xy+y^2=(\square+y)^2$.

Сворачиваем квадрат суммы двух выражений

$a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$

Раскрываем скобки

2 Исследуйте и сформулируйте вывод:

а) $x^2-8xy+16y^2=(x-4y)^2$;

б) $3a^2-4\sqrt{3}ab+4b^2=$

$=(\sqrt{3}a)^2-2(\sqrt{3}a)(2b)+(2b)^2=$

$=(\square-\bigcirc)^2$.

Сворачиваем квадрат разности двух выражений

$a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$

Раскрываем скобки

Работайте в парах

3 Рассмотрите и дополните:

а) $9a^2-25b^2=(3a)^2-(5b)^2=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$;

б) $3x^2-\dfrac{y^4}{4}=(\sqrt{3}x)^2-\left(\dfrac{y^2}{2}\right)^2=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$.

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

- Продолжите предложение:
  Разность квадратов двух выражений равна…
- Вычислите устно: $\dfrac{2{,}01^2-1{,}99^2}{0{,}02}=\dfrac{(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)}{0{,}02}$.

4 Рассмотрите и дополните пропуски:

а) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3=$

$=x^3+3\cdot x^2\cdot(2y)+3\cdot x\cdot(2y)^2+(2y)^3=$

$=(\square+\bigcirc)^3$;

б) $27a^3+3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2+125=$

$=(\square+\bigcirc)^3$.

Сворачиваем куб суммы двух выражений

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = (a+b)^3$

Раскрываем скобки

Работайте в парах

- Исследуйте и заполните пропуски:

а) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3=$

$=a^3-3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2-\bigcirc^3=$

$=(\square-\bigcirc)^3$;

б) $0{,}001x^3-3\cdot\square^2\cdot\bigcirc+3\cdot\square\cdot\bigcirc^2-125y^3=$

$=(\square-\bigcirc)^3$.

Сворачиваем куб разности двух выражений

$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 = (a-b)^3$

Раскрываем скобки

5 Разложите на множители сумму кубов:

а) $a^3+125b^3=(2a)^3+(5b)^3=$

$=(\square+\bigcirc)(\square^2-\square\bigcirc+\bigcirc^2)$;

б) $64+x^3y^3=\square^3+\bigcirc^3=\ldots$

Раскладываем на множители

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

Раскрываем скобки

6 Разложите на множители разность кубов:

а) $1000-8t^3=\square^3-\bigcirc^3=$

$=(\square-\bigcirc)(\square^2+\square\bigcirc+\bigcirc^2)$;

б) $a^6b^6-27a^3=\square^3-\bigcirc^3=\ldots$

Раскладываем на множители

$$\boxed{a^3-b^3}=\boxed{(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

Раскрываем скобки

3.3. Разложение на множители способом группировки

- Разложите на множители, применив способ группировки:

а) $m^3-\sqrt{3}m^2+5m-5\sqrt{3}$;

б) $an+pa-bn-pb$.

Решение:

а) $m^3-\sqrt{3}m^2+5m-5\sqrt{3}=(m^3-\sqrt{3}m^2)+(5m-5\sqrt{3})=$

$=m^2(m-\sqrt{3})+5(m-\sqrt{3})=(m-\sqrt{3})(m^2+5)$.

б) $an+pa-bn-pb=(\square+\square)-(\square+\square)=$

$=\square\cdot(\square+\square)-\square\cdot(\square+\square)=(\square+\square)\cdot(\square-\square)$.

Запомните

Чтобы разложить выражение на множители способом группировки, надо:
- сгруппировать слагаемые выражения так, чтобы выявить общий множитель;
- записать выражение в виде произведения, используя дистрибутивность умножения относительно сложения (вычитания).

Упражнения и задачи

1

1. Запишите в виде квадрата суммы (разности):

а) $x^2-10x+25$; б) $16a^2-8a+1$;

в) $36a^2b^2+12ab+1$; г) $x^2+16x+64$;

д) $64x^2y^2-16xy+1$; е) $1+18x+81x^2$.

2. *Исследуйте!* *Истинно* или *Ложно*?

а) $x^2-2x+4=(x-2)^2$;

б) $x^2-12x+36=(x-6)^2$;

в) $4a^2+8ab+b^2=(2a+b)^2$;

г) $a^2+0{,}4a+0{,}04=(0{,}04+a)^2$.

3. Выполните действия:

а) $100x^2-y^2=(10\square-\bigcirc)(10\square+\bigcirc)$;

б) $1-64a^2b^2=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$;

в) $2-16x^4=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$;

г) $3a^6-225a^2b^4=(\square-\bigcirc)(\square+\bigcirc)$.

4. *Работайте в парах!* Сверните формулу, при необходимости заполнив пропуски:

а) $1+3x+3x^2+x^3$;

б) $64a^3+48a^2b+12ab^2+b^3$;

в) $1000+\square t+\square t^2+\bigcirc^3=(\square+t)^3$;

г) $x^3+\square y+\square y^2+\bigcirc^3=(\square+2y)^3$.

5. Разложите на множители, применив способ вынесения общего множителя за скобки:

а) $26xy-39z$; б) $-121x^2y+11xy^2$;

в) $12{,}5a^3b^2-2{,}5a^4b^2$; г) $2\sqrt{2}t^2-\sqrt{50}t$.

6. Разложите на множители сумму кубов:

а) $(6a)^3+(a^3b)^3$; б) $(5x^2)^3+(x^4y)^3$; в) $(3t)^3+(tz)^3$.

7. Разложите на множители разность кубов:

а) $(ab)^3-(a^2)^3$; б) $(t^5)^3-(2tz)^3$; в) $(x^2y)^3-(xy^2)^3$.

8. Разложите на множители, применив способ группировки:

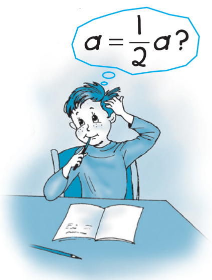
а) $a^3+\sqrt{5}a^2-7a-7\sqrt{5}$; б) $3x^2y-xy^2-6x+2y$.

2

9. Запишите в виде произведения трех множителей:
а) $t(z+1)^2-t(z-1)^2$; б) a^3-ab^2;
в) $(x^2+5)^2-6(x^2+5)$; г) $xy(x^2+y^2)^2-4x^3y^3$.

10. Разложите на множители:
а) x^2-4x+3; б) $x^2+10x+24$;
в) $a^2+ab-3a-3ab$; г) $a^2b^2-5a^2b+6a^2$.

11. ***Исследуйте!*** Найдите ошибку.
Софизм: *«Любое число равно своей половине».*



Возьмем два равных числа a и b. Обе части равенства $a = b$ умножим на a и затем вычтем из произведений число b^2. Получим $a^2-b^2=ab-b^2$, или $(a-b)(a+b)=b(a-b)$. Поделив обе части на $a-b$, получим $a+b=b$. Так как $b=a$, то $a+a=a$, или $2a=a$. Значит, $a=\frac{1}{2}a$.

12. ***Исследуйте!*** Найдите ошибку.
Софизм: *«Все числа равны между собой».*
Возьмем два произвольных неравных между собой числа m и n и запишем тождество
$$m^2-2mn+n^2=n^2-2mn+m^2.$$
Тогда $(m-n)^2=(n-m)^2$. Извлекая из обеих частей последнего равенства квадратный корень, получим $m-n=n-m$, или $2m=2n$. Значит, $m=n$.

13. ***Работайте в парах!***
Древнеиндийская задача
Если некоторое число умножить на 3, затем полученное число поделить на 5, результат увеличить на 6, извлечь квадратный корень из последнего числа, затем из полученного результата вычесть 1 и, наконец, то, что получилось, возвести в квадрат, то получим 4. Найдите исходное число.
Указание. Используйте метод обратного хода.

14. Запишите заданное число в виде разности квадратов целых чисел:
а) 13; б) 17; в) 20; г) 60; д) 1001.

15. а) Найдите наименьшее значение выражения x^2-4x+4 при $x\in\mathbb{R}$.
б) Найдите наименьшее значение выражения $x^2+8x+20$ при $x\in\mathbb{R}$.
в) Найдите наибольшее значение выражения $-x^2+6x-9$ при $x\in\mathbb{R}$.
г) Найдите наибольшее значение выражения $-x^2-20x-105$ при $x\in\mathbb{R}$.

16. ***Работайте в парах!*** Докажите, что данное число является точным квадратом:
а) $\overline{a4}\cdot\overline{a6}+1$, если a – ненулевая цифра;
б) $\overline{a7}\cdot\overline{a5}+1$, если a – ненулевая цифра.

Образец:
$\overline{ab}=10a+b$;
$\overline{3b}=30+b$.

17. Разложите на множители: а) $27x^{-3}+64x^{-6}y^3$; б) $512t^{12}+0{,}001t^3z^6$.

18. Разложите на множители: а) $8t^{12}z^{-6}-t^3z^{-9}$; б) $729a^{21}b^9-0{,}008a^{15}$.

19. Квадрат суммы двух последовательных натуральных чисел на 264 больше, чем сумма квадратов этих чисел. Найдите эти числа.

20. Докажите, что $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$.

3

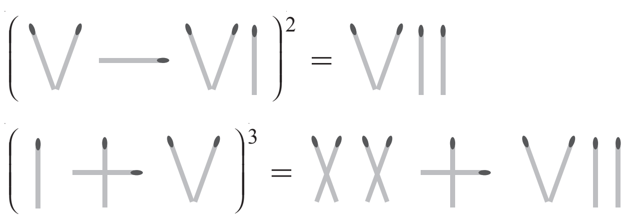
21. Найдите действительные числа x и y, если известно, что: а) $x^2+6x+4y^2-4y+10=0$;
б) $0{,}16x^2+0{,}8x+y^2-2y+2=0$.

22. Покажите, что данное число является точным квадратом: а) $(t^2+t)(t^2+t+2)+1,\ t\in\mathbb{Z}$;
б) $x(x+1)(x+2)(x+3)+1,\ x\in\mathbb{Z}$.

23. Докажите, что для любых ненулевых действительных чисел a и b имеет место неравенство $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (неравенство о средних).

24. Докажите, что если сумма двух чисел кратна некоторому числу, тогда и сумма кубов этих чисел кратна этому числу.

25. ***Занимательная математика***
Поменяйте расположение:
а) одной спички так, чтобы получилось верное равенство:
б) двух спичек так, чтобы получилось верное равенство:



§4. Тождественные преобразования

1 Определите, при каких значениях переменной x верно равенство:

$$(2x+1)^2-2(2x^2+x+1)=2x-1.$$

Объясняем Пусть $A=(2x+1)^2-2(2x^2+x+1)$ – левая часть равенства, а $B=2x-1$ – его правая часть.

Преобразуем левую часть:

$A=(2x+1)^2-2(2x^2+x+1)=4x^2+4x+1-4x^2-2x-2=2x-1.$

Получим $A=B$, то есть $2x-1=2x-1$. Делаем вывод, что равенство истинно при любых значениях переменной x.

В таких случаях говорят, что равенство является **тождеством**.

Определение **Тождеством** называется равенство двух выражений, истинное при всех допустимых значениях переменных, для которых выражения имеют смысл (т. е. определены).

Примеры

1. Выражения $3(a+b)$ и $3a+3b$ тождественны, так как равенство $3(a+b)=3a+3b$ истинно при любых значениях a и b.
   Значит, равенство $3(a+b)=3a+3b$ является тождеством.
2. Равенство $5(x+y)=5x+y$ не является тождеством, так как существуют значения переменных x и y, при которых равенство не является истинным. Например, для $x=1$ и $y=1$. Проверьте!

Примеры уже известных, изученных тождеств:

– свойства сложения и умножения → $a+b=b+a$; $a(b+c)=ab+ac$ и др.

– свойства степени → $a^n\cdot a^m=a^{n+m}$; $(a^n)^m=a^{nm}$ и др.

– свойства квадратного корня → $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b},\ a\ge 0,\ b\ge 0$; $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},\ a\ge 0,\ b>0$ и др.

– формулы сокращенного умножения → $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$; $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ и др.

– тождествами являются и верные числовые равенства → $5\cdot(\sqrt{3}-2)=5\cdot\sqrt{3}-5\cdot 2$; $3^2+4^2=5^2$ и др.

2 Рассмотрите объяснения и заполните.

- Докажите тождество:
  а) $10x+2(3y-2x)=6(x+y)$.

Объясняем Преобразуем выражение из левой части равенства:

$10x+2(3y-2x)=10x+6y-4x=6x+6y=6(x+y).$

Получим: $\underbrace{6(\square+\square)}_{\text{левая часть}}=\underbrace{6(\square+\square)}_{\text{правая часть}}$

Значит, равенство является тождеством, ч. т. д.

б) $4(a+b+c)+5(a-c)=4(b-c)+9a-5c$.

Решение:

Пусть A – выражение из левой части, а B – выражение из правой части равенства.

Преобразуем левую часть:

$A=4(a+b+c)+5(a-c)=4\square+4\square+4\square+5\square-5\square=\square a+\square b-\square c.$

Преобразуем правую часть:

$B=4(b-c)+9a-5c=4\square-4\square+9\square-5\square=\square a+\square b-\square c.$

Получим $A=B$ при любых значениях переменных a, b, c.

Значит, равенство $A=B$ является тождеством, ч. т. д.

В процессе доказательства тождеств выполняются преобразования, называемые **тождественными преобразованиями**.

Определение

Преобразование одного выражения в другое, тождественно равное ему, называется **тождественным преобразованием**.

3 Рассмотрите решение и заполните.

- Упростите выражение $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}$, если $a \neq -b$.

Решение:

Выполним тождественные преобразования выражения на множестве допустимых значений переменных a и b, то есть при $a \neq -b$. (Аргументируйте!)

Получим $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\dfrac{\square^2-\square^2}{(\square+\square)^2}=\dfrac{(\square+\square)(\square-\square)}{(\square+\square)^2}=\underbrace{\dfrac{\square-\square}{\square+\square}}_{\text{самая простая форма}}.$

Запомните

– Тождества доказываются.

– Для доказательства тождеств применяют один из способов:

1) Применяют тождественные преобразования к левой части равенства. Если в результате получают правую часть, тождество считается доказанным.
2) Применяют тождественные преобразования к правой части равенства. Если в результате получают левую часть, тождество считается доказанным.
3) Применяют тождественные преобразования к обеим частям равенства. Если в результате получают одно и то же выражение, тождество считается доказанным.
4) Из левой части вычитают правую часть или из правой части вычитают левую часть. Если в результате преобразований получается нуль, тождество считается доказанным.

Упражнения и задачи

1

1. Определите, являются ли тождествами равенства:

а) $x+y=y+x$; б) $x\cdot 0=x$;
в) $2x-2y=2(x-y)$; г) $2a+1=2(a+1)$.

2. *Работайте в парах!*

Заполните так, чтобы равенство стало тождеством:

а) $3n+3m=\square(n+m)$;

б) $x^2-y^2=(\square+\square)(\square-\square)$;

в) $a+b+c=a-(\square-\square)$;

г) $5(x+\sqrt{3})=\square+\square$.

3. Обоснуйте, почему равенство не является тождеством.

а) $6a-1=5a$; б) $2mn-n=2n$;
в) $8a-1=8(a-1)$; г) $x-y=2x-y$.

4. Выполните тождественные преобразования.

а) $n-(2n-m)$; б) $2(x-5)+3x$;
в) $3(a+1)+2a-8$; г) $-(1-3m)+m-n+1$.

5. *Работайте в парах!* Приведите подобные слагаемые.

а) $2(3x-1)-6(x-2)$; б) $2n+n(m-2)+m(n+m)+8$;
в) $(2{,}5a-8{,}1b)-(1{,}9b+4{,}5a)$; г) $9t-[8t-(3t+1)]$.

2

6. Определите, какое равенство является тождеством:

а) $8(1{,}3x+0{,}25)-6{,}6x=3{,}8x+2$; б) $(-a-b)(a+b)=-(a+b)^2$; в) $(a+1)^3-(a+1)=a(a+1)(a+2)$.

7. Является ли тождеством равенство:

а) $3(m+n-2)+4(m-2n)=7m+5(n+5)$; б) $6(1{,}2t-0{,}5)-1{,}3t=5{,}9t-3$;
в) $\frac{1}{2}(x-7)+1=\frac{3(1-x)}{4}$; г) $x^2+2x-y^2+2y=(x+y)(x-y+2)$?

8. *Работайте в группах!* Выполните тождественные преобразования и упростите выражение.

а) $(3x-4y)(4x+y)-(5x-y)(2x+2y)$; б) $(3n+m)(m-3n)$;
в) $(3x+4)^2-(2x+1)(2x-1)$; г) $2(t+1)^2-4t$;
д) $4x(x-2)-(x-4)^2$; е) $(z-2)(z+3)-(z-1)^2$.

9. Дано выражение:

а) $E(a)=\frac{a^2-64}{a+8}$; б) $E(x)=\frac{25-x^2}{5-x}$; в) $E(t)=\frac{2t-20}{100-t^2}$; г) $E(x)=\frac{x^2-36}{(6-x)^2}$.

1) Найдите, при каких значениях переменной выражение не имеет смысла.
2) Упростите выражение на множестве допустимых значений переменной.

3

10. Докажите тождество:

а) $(m-n)(m+n)[(m-n)^2+(m+n)^2]=2(m^4-n^4)$; б) $(n-2)(n-1)n(n+1)+1=(m^2-n-1)^2$.

11. Дано выражение $E(x)=\frac{2a-2c+ax-cx}{x^2-4}$.

а) Найдите, при каких значениях переменной x выражение $E(x)$ не имеет смысла.
б) Упростите выражение на множестве допустимых значений переменной x.

Упражнения и задачи на повторение

1

1. Приведите подобные слагаемые:

а) $6xy-3x\sqrt{y}+1{,}5xy+25+3x\sqrt{y}$;

б) $-0{,}25a^2b^3+5(3a^2b^3-ab)+1{,}4ab-0{,}7$;

в) $(2a-1)^2-(3a+4)^2$.

2. *Исследуйте! Истинно* или *Ложно*?

а) $6x-y=-(y-6x)$;

б) $\sqrt{(a+b)^2}=a+b$;

в) $(3t+z)^3=27t^3+z^3$.

И/Л

3. ***Работайте в парах!*** Заполните таблицу:

a	b	$(a+b)^2$	$(a-b)^2$	a^2-b^2	$(a+b)^3$	$(a-b)^3$	a^3-b^3	a^3+b^3
1	$8x^3$							
t^6	$-z^3$							
$27x^{-3}$	y^6							
$(ab)^3$	$64b^{12}$							

4. Найдите значение выражения:
а) $(x+1)(x^2-x+1)-x^3$, при $x=9{,}73$;
б) $(x-2)(x^2+2x+4)+8$, при $x=2$.

5. Разложите на множители, используя разные способы: а) x^2-25; б) $4-81t^2$; в) $8+a^3$; г) c^3+8x^3.

6. Упростите:
а) $(a^3-1)(a^6+a^3+1)$; б) $(m-1)(m^2+m+1)$.

7. Упростите выражение, выполнив тождественные преобразования:
а) $(a+5)^2-(a+7)(a-7)-35$;
б) $(b-3)(b+3)-(b-6)^2+20$.

2

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $4x^2-25=0$; б) $\frac{1}{4}z^2-16=0$;
в) $0{,}36-x^2=0$; г) $0{,}01t^2-1=0$.

9. Докажите тождество:
а) $a^2+3a+2=(a+1)(a+2)$;
б) $c^2-7c+10=(c-2)(c-5)$;
в) $x^2-x+\frac{1}{4}=(x-\frac{1}{2})^2$.

10. ***Работайте в парах!***
Заполните пропуски так, чтобы получить квадрат суммы (разности) двух выражений:
а) $9x^2+x+\bigcirc=(\square+\bigcirc)^2$;
б) $t^2+\square+\frac{1}{4}=(\square+\bigcirc)^2$;
в) $9x^2-\square+16=(\square-\bigcirc)^2$.

11. Докажите, что высказывание истинно:
а) $5+2\sqrt{6}=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$; б) $7+2\sqrt{6}=(1+\sqrt{6})^2$;
в) $11-6\sqrt{2}=(3-\sqrt{2})^2$; г) $7-4\sqrt{3}=(2-\sqrt{3})^2$.

12. ***Исследуйте!*** Найдите ошибку.
Софизм $2\times2=5$.
Возьмем верное равенство 16 – 36 = 25 – 45. Прибавив к обеим частям равенства $\frac{81}{4}$,
получим $16-36+\frac{81}{4}=25-45+\frac{81}{4}$, или $16-2\cdot\frac{9}{2}\cdot4+\frac{81}{4}=25-2\cdot\frac{9}{2}\cdot5+\frac{81}{4}$.
Следовательно, $\left(4-\frac{9}{2}\right)^2=\left(5-\frac{9}{2}\right)^2$, или $4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}$.
Значит, 4 = 5 или «$2\times2=5$».

13. Докажите, что:
а) $198\,|\,(321^3-123^3)$; б) $111\,|\,(321^3+123^3)$.

14. Докажите, что последними тремя цифрами числа 2992^3+8^3 являются нули.

15. ***Работайте в группах!***
Разложите на множители:
а) $a-b+b^2-a^2$; б) x^2-x-y^2-y;
в) $x+y-x^3-y^3$; г) a^3-b^3+b-a.

16. Упростите:
а) $\frac{x-1}{x^2-x+1}-\frac{2x-2}{x^3+1}$; б) $\frac{2x+1}{x^3-1}-\frac{x}{x-1}+1$.

17. Разложите на множители:
а) $64x^3-(x-1)^3$; б) $\frac{1}{8}t^3+(1+\frac{1}{2}t)^3$; в) $1-(z+1)^6$.

18. Вычислите $a^2+\frac{1}{a^2}$, если известно, что $a-\frac{1}{a}=10$.

19. Докажите, что значение выражения
$$(2\sqrt{3}-1)^2+(\sqrt{3}+2)^2$$
является натуральным числом.

20. Приведите примеры приложения действительных чисел, представленных буквенными выражениями, и формул сокращенного умножения в различных областях.

3

21. Докажите, что: а) $71 | (8^8 + 8^7 - 8^6)$; б) $43 | (7^{10} - 7^9 + 7^8)$.

22. а) Покажите, что разность квадратов двух последовательных нечетных чисел кратна 8.
б) Покажите, что разность квадратов двух последовательных четных чисел не кратна 8.

23. Запишите в виде суммы квадратов выражение $x^2 + y^2 + x - 4y + 7\frac{1}{4}$.

24. Найдите $\left(a^{-6} + \frac{1}{a^{-6}}\right)^3$, если $a + \frac{1}{a} = 5$.

• Задачи для чемпионов

25. Докажите, что:
а) $83^4 - 83^3$ – четное число;
б) $37^4 - 37^3$ – нечетное число;
в) $53^7 - 53^6$ делится на 26;
г) $17^3 - 17^2$ является точным квадратом;
д) $79^6 + 79^5$ кратно 80;
е) $11^4 + 11^2$ кратно 121 и 122.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

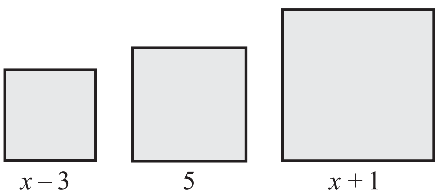
Вариант 1

1. Заполните пропуски так, чтобы получить истинное высказывание:

$$36t^2 - \ldots + 4 = (\square - \bigcirc)^2.$$

2. Разложите на множители: $(x+1)^3 - (x-2)^3$.

3. Найдите действительное значение переменной x, при котором площади первых двух квадратов будут равны площади третьего квадрата:



4. Сосуд имеет форму куба с ребром, равным $(30 + 4\sqrt{5})$ см.
а) Определите, вместятся ли в этот сосуд 60 литров воды.
б) Сколько килограммов краски потребуется для покраски внешних боковых граней куба, если для 1 м² необходимо 120 г краски? Результат округлите до десятых.

5. Докажите, что число $4^{2n} + 2^{2n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, является точным квадратом.

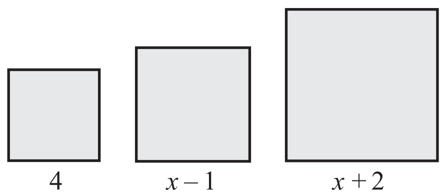
Вариант 2

1. Заполните пропуски так, чтобы получить истинное высказывание:

$$9 + \ldots + 25z^4 = (\square + \bigcirc)^2.$$

2. Разложите на множители: $(y-3)^3 + (y+1)^3$.

3. Найдите действительное значение переменной x, при котором площади первых двух квадратов будут равны площади третьего квадрата:



4. Сосуд имеет форму куба с ребром, равным $(40 - 5\sqrt{3})$ см.
а) Определите, вместятся ли в этот сосуд 30 литров воды.
б) Сколько килограммов краски потребуется для покраски внешних боковых граней куба, если для 1 м² необходимо 150 г краски? Результат округлите до десятых.

5. Докажите, что число $4^n - 2^{2n+1} + 1$, $n \in \mathbb{N}$, является точным квадратом.

Глава 3 Уравнения и неравенства. Системы

Математика – это язык Вселенной. Таким образом, чем больше уравнений вы сможете решить, тем больше вы сможете общаться с космосом.

Нил Деграсс Тайсон

§1. Уравнения I степени с одним неизвестным

1.1. Уравнения с одним неизвестным

1 У Андрея на счёте мобильного телефона было 12 леев. После пополнения счёта стало 72 лея. На сколько леев пополнил свой счёт Андрей, если при каждом пополнении счёта он получает дополнительно 20% от суммы пополнения счёта?

Решаем Пусть счёт пополнили на x леев. Тогда на счёте будет:

$\boxed{12 + x + 0{,}2x = 72} \Leftrightarrow x + 0{,}2x = 72 - \square \Leftrightarrow \square\, x = \square \Leftrightarrow x = \square$.

Ответ: $\square$ леев.

Определение Равенство вида $A(x) = B(x)$, где $A(x)$ и $B(x)$ – выражения от x, называется **уравнением с одним неизвестным**.

$x^2 + 2x - 3 = 0$ $\quad$ $5 - x = 2x + 14$ $\quad$ $\dfrac{x}{|x|} = 1$ $\quad$ $\sqrt{x} + 5 = 0$

Запомните

- Значение x_0, при котором уравнение $A(x) = B(x)$ обращается в истинное высказывание, называется **решением** данного уравнения.
- **Решить уравнение** значит найти множество его решений.
- Множество решений уравнения обозначают, как правило, буквой S.

При решении уравнений применяются **отношения равенства на множестве** $\mathbb{R}$:
Если $a = b,\ a, b \in \mathbb{R}$, то:

$1^\circ\ a + c = b + c,\ c \in \mathbb{R}$; $\qquad$ $2^\circ\ a - c = b - c,\ c \in \mathbb{R}$;

$3^\circ\ ac = bc,\ c \in \mathbb{R}^*$; $\qquad$ $4^\circ\ \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c},\ c \in \mathbb{R}^*$.

Рассмотрите и дополните:

$x^2+2x-3=0$

$x=-3$: $(-3)^2+2\cdot(-3)-3=0$ – И
$x=-3$ – решение уравнения.

$x=1$: $\square^2+2\cdot\square-3=0$ – И
$x=1$ – $\square$

Запомните Уравнение с одним неизвестным на заданном множестве может не иметь решений, может иметь конечное или бесконечное множество решений.

2 Рассмотрите схемы и приведите примеры уравнений для каждого из случаев:

Нет решений на множестве $\mathbb{R}$.		Есть бесконечное множество решений на множестве $\mathbb{R}$.		Есть конечное множество решений на множестве $\mathbb{R}$.	
$\sqrt{x}+5=0$		$\frac{x}{\lvert x\rvert}=1$		$5-x=2x+4$	
$S=\varnothing$	$S=\varnothing$	$S=\mathbb{R}_+^*$	$S=\square$	$S=\{\square\}$	$S=\{\square\}$

Определение Уравнения называются **равносильными** (**эквивалентными**), если множества их решений равны.

Запомните Чтобы получить равносильные уравнения, применяются следующие преобразования:

- Перенос слагаемого из одной части уравнения в другую с изменением знака на противоположный.
- Приведение подобных слагаемых в обеих частях уравнения.
- Умножение/деление обеих частей уравнения на одно и то же ненулевое действительное число.

$$5-x=2x+14 \Leftrightarrow -2x-x=-5+14 \Leftrightarrow -3x=9 \Leftrightarrow x=-3$$

Определение **Областью допустимых значений (ОДЗ)** уравнения с одним неизвестным называется множество значений неизвестного, при которых имеют смысл выражения, стоящие в обеих частях этого уравнения.

$\frac{x}{\lvert x\rvert}=1$
ОДЗ: $x\in\mathbb{R}^*$

$x^2+2x-3=0$
ОДЗ: $x\in\square$

$\sqrt{x}+5=0$
ОДЗ: $x\in\square$

1.2. Уравнения I степени с одним неизвестным

1 В США для измерения температуры используют шкалу Фаренгейта, а в Европе – шкалу Цельсия. Формула перехода от одной шкалы к другой следующая:

$$t_F=1{,}8\,t_C+32.$$

Найдите температуру по шкале Цельсия, если по шкале Фаренгейта термометр показывает 68°F.

Решаем Пусть по шкале Цельсия термометр показывает x°C. Тогда

$$1{,}8x+32=68 \Leftrightarrow \boxed{1{,}8x-36=0} \Leftrightarrow 1{,}8x=\square \Leftrightarrow x=\square.$$

уравнение I степени с одним неизвестным

Ответ: $\square$ °C.

Определение Уравнение вида $ax+b=0$, $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, называется **уравнением I степени с одним неизвестным**.

Запомните Уравнение I степени с одним неизвестным имеет единственное решение:

$$S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}.$$

2 Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $-3(x-1)+5x-4=2x$.

$ax+b=0$, $a, b\in\mathbb{R}$ — $a\neq 0$, $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$

$a=0$

$b=0$, $S=\mathbb{R}$ — $b\neq 0$, $S=\varnothing$

Решаем

$-3(x-1)+5x-4=2x \Leftrightarrow$

$-3x+3+5x-4-2x=0 \Leftrightarrow$

$x(-3+5-2)=4-3$

$0\cdot x=1$ – уравнение не имеет решений.

Ответ: Уравнение не имеет решений.

Упражнения и задачи

1

1. ***Исследуйте!*** Покажите, что число –2 является решением уравнения:

а) $4x+5=x-1$; б) $x^2-4=0$.

2. ***Исследуйте!*** Какие из элементов множества $M=\left\{-2;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 2\frac{1}{4}\right\}$ являются решениями уравнения:

а) $\frac{9}{11}x+8=8$; б) $\frac{x+3}{2}=2$;

в) $\sqrt{x}=\frac{3}{2}$; г) $2(x+7)-15=2x-1$?

3. Выпишите из упражнения **2** в тетрадь уравнения I степени.

4. Найдите ОДЗ уравнения:

а) $\frac{2-x}{x}=3$; б) $x^2-1=0$;

в) $\sqrt{x}+2=6$; г) $3x+5=x+1$.

5. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнения:

а) $3-6x=2-4x$; б) $2x+(3-6x)=-17$;

в) $2(x+1)=3(x-1)$; г) $\frac{1}{5}(2x-1)=4$.

6. Решите уравнение $\sqrt{3}x+2=8$:

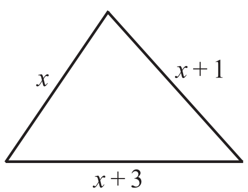
а) на множестве $\mathbb{R}$; б) на множестве $\mathbb{Q}$.

7. Решите уравнение $\frac{x}{2}-\frac{3}{5}=0$:

а) на множестве $\mathbb{Q}$; б) на множестве $\mathbb{Z}$.

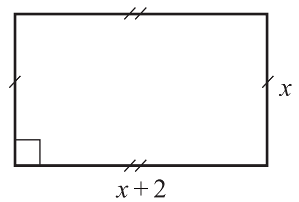
8. ***Работайте в парах!*** Найдите x, используя данные рисунка:

а)



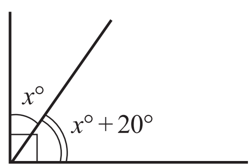
$\mathscr{P}=34$ см

б)



$\mathscr{P}=16$ см

в)



9. Соедините каждое утверждение с соответствующим ему уравнением.

Образец: 1) → б)

1) Число 12 в 3 раза больше числа x.
2) Среднее арифметическое чисел x и 11 равно 25.
3) Число x в 4 раза больше числа 18.
4) Через 4 года Пете будет 18 лет.
5) Одна из сторон прямоугольника равна 11 см, а его периметр равен 25 см.

а) $\frac{x}{4}=18$.
б) $3x=12$.
в) $(x+11)\cdot 2=25$.
г) $\frac{x+11}{2}=25$.
д) $x+4=18$.

10. Рассмотрите и продолжите решение:

а) $2(x-3)+4=8 \Leftrightarrow 2(x-3)=8-4 \Leftrightarrow \square \Leftrightarrow \square \Leftrightarrow x=\square$.

б) $6-0{,}5(1-x)=2 \Leftrightarrow 0{,}5(1-x)=\square \Leftrightarrow \square \Leftrightarrow \square \Leftrightarrow x=\square$.

2

11. При каких действительных значениях x значение выражения $25x-30$ на 5 больше значения выражения $15x+35$?

12. При каких действительных значениях y значение выражения $4y+6$ в 6 раз больше значения выражения $6y-15$?

13. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $5(3x-6)+4(3-2x)=5x-8$;

б) $9(x-3)-4(7-3x)=5-3x$;

в) $2\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3}-3x\right)+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{3}-3x\right)=1$;

г) $\frac{15-x}{6}-\frac{2x+16}{5}=1$.

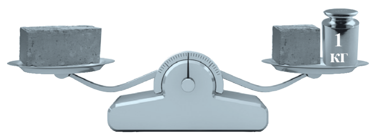
14. *Работайте в группах!* Составьте уравнение с одним неизвестным, множество решений которого равно:

а) $S=\{4\}$; б) $S=\{-3\}$; в) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$;
г) $S=\{\sqrt{5}\}$; д) $S=\{\sqrt{3}-1\}$;
е) $S=\varnothing$; ж) $S=\mathbb{R}$.

15. *Исследуйте!* Является ли число 1,5 решением уравнения:
а) $x-1=|1-x|$; б) $3-x=|-x|$; в) $|-x|+1{,}5=0$?

16. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $|x|+1=5$; б) $2|x|-1=|x|+6$;
в) $|x-3|=0$; г) $|x+1|=-2$.

17. *Работайте в парах!*



Если на одну чашу весов положить кирпич, тогда на другую для равновесия надо положить гирю весом 1 кг и еще полкирпича. Сколько весит один кирпич?

18. Моторная лодка преодолевает расстояние между двумя пристанями за 6 часов по течению реки и за 10 часов против течения. Найдите скорость течения реки, если собственная скорость лодки равна 16 км/ч.

3

19. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $|2x-3|=7$; б) $\sqrt{(7-2x)^2}=1$;
в) $|3(x-1)-1|=2$; г) $|11-x|=x-11$.

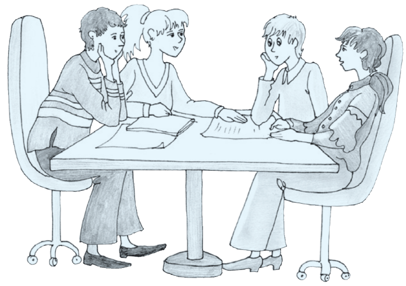
20. Сергей проезжает на велосипеде расстояние между двумя деревнями за 36 минут, а Евгений – за 45 минут. Скорость Сергея на 4 км/ч больше скорости Евгения. Найдите скорость каждого велосипедиста и расстояние между деревнями.

21. Андрей потратил в супермаркете $\frac{2}{7}$ денег из кошелька, и еще 30% от сдачи – в книжном магазине. Сколько денег было у Андрея, если осталось 175 леев?

22. *Работайте в парах!* Составьте задачу, решение которой сводится к решению уравнения:
а) $3x=x+20$; б) $\frac{x}{16}+1=\frac{x}{12}$;
в) $(x+2)4=(x-2)6$; г) $x-0{,}2=320$.

§2. Системы уравнений I степени

2.1. Уравнения с двумя неизвестными



В интеллектуальном марафоне команды решают задачи по физике и математике. За каждую правильно решенную задачу по физике команда получает 3 балла, а за каждую правильно решенную задачу по математике – 4 балла. Можно ли однозначно определить, сколько задач по физике и сколько по математике решила команда, если всего она набрала 39 баллов?

Объясняем Пусть правильно решили x задач по физике и y задач по математике. Тогда получим уравнение

$\boxed{3x+4y=39}$ ⟵ уравнение с двумя неизвестными

Определение **Решением уравнения с двумя неизвестными** называется упорядоченная пара чисел $(x_0;\ y_0)$, обращающая данное уравнение в истинное высказывание.

$3x+4y=39$

Решение уравнения → $(1;\ 9)$ $3\cdot 1+4\cdot 9=39$ – А

$(5;\ 6)$ $3\cdot \square+4\cdot\square=39$ – $\square$

$(13;\ 1)$ $3\cdot \square+4\cdot\square=39$ – $\square$

$(\square;\ \square)$ $3\cdot \square+4\cdot\square=39$ – $\square$

И/Л

Уравнение с двумя неизвестными

- $2x+5y=10$: $(-2;\ 2{,}8)$, $(0;\ \square)$, $(\square;\ -2)$
- $x^2+y=5$: $(-3;\ \square)$, $(\square;\ 5)$
- $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$: $(3;\ \square)$, $(\square;\ 1)$
- $xy=-1$: $\left(-\frac{1}{3};\ \square\right)$, $(\square;\ -1)$

Запомните Уравнение с двумя неизвестными может не иметь решений, может иметь конечное или бесконечное множество решений.

- Не имеет решений.: $|x|+|y|=-2$, $\square$
- Имеет конечное множество решений.: $x^2+y^2=0$, $\square$
- Имеет бесконечное множество решений.: $x-y=1$, $\square$

Определение **Областью допустимых значений (ОДЗ)** уравнения с двумя неизвестными называется множество значений неизвестного, при которых имеют смысл все выражения, входящие в это уравнение.

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$ → ОДЗ: $x\in\mathbb{R}^*$, $y\in\mathbb{R}^*$.

2.2. Уравнения I степени с двумя неизвестными

1 У Анны есть 30 леев. Она хочет купить яблоки по цене 9 леев за 1 кг и груши по 15 леев за 1 кг.
Сколько килограммов яблок и груш может купить Анна?

Объясняем Пусть Анна может купить x кг яблок и y кг груш.
Тогда составим уравнение:

коэффициенты неизвестных

$$\boxed{9x+15y=60}$$

свободный член

неизвестные

Определение Уравнение вида $ax+by+c=0$, $a, b\in\mathbb{R}^*$, $c\in\mathbb{R}$, называется **уравнением I степени с двумя неизвестными**.

- Уравнение I степени с двумя неизвестными имеет бесконечное множество решений.
- Чтобы найти решение уравнения I степени с двумя неизвестными, берем любое значение одного неизвестного, затем находим соответствующее значение второго неизвестного.

- Найдите несколько решений полученного уравнения $9x+15y=60$.
  Рассмотрите и продолжите решение:

  $9x+15y=60 \Leftrightarrow 15y=60-9x \Leftrightarrow y=4-0{,}6x.$

  При $x=5$ получим $y=4-0{,}6\cdot 5 \Leftrightarrow y=1$; (5; 2)
  при $x=1{,}5$ получим $y=4-0{,}6\cdot \square \Leftrightarrow y=\square$; (1,5; $\square$)
  при $x=0$ получим $y=4-0{,}6\cdot \square \Leftrightarrow y=\square$. (0; $\square$)

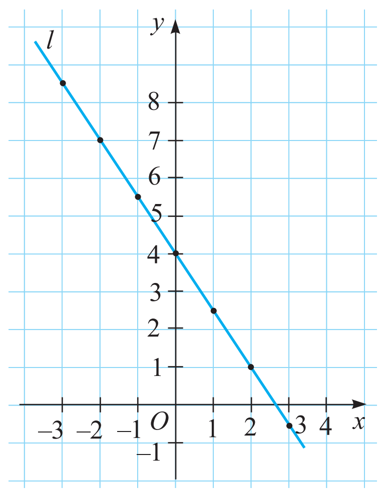
  решения уравнения

- Каким может быть ответ на вопрос задачи?

2 Решим уравнение $3x+2y=8$ на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Объясняем $3x+2y=8 \Leftrightarrow 2y=8-3x \Leftrightarrow y=4-1{,}5x.$
Заполним таблицу:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	8,5	7	5,5	4	2,5	1	–0,5



Отметим в прямоугольной системе координат точки, координаты которых являются решениями данного уравнения.

Точки, соответствующие решениям уравнения $3x+2y=8$, лежат на прямой l и, наоборот, если точка принадлежит прямой l, то ее координаты являются решением уравнения $3x+2y=8$.

Прямая l называется ***графиком уравнения*** или ***прямой решений уравнения*** $3x+2y=8$.

Запомните График уравнения I степени с двумя неизвестными $ax+by=c$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, совпадает с графиком функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, $a, b \in \mathbb{R}^*$, $c \in \mathbb{R}$. Число $-\frac{a}{b}$ называется **угловым коэффициентом** прямой – графика уравнения $ax+by=c$.

2.3. Понятие системы двух уравнений с двумя неизвестными

1 Клавиатура фортепиано состоит из 88 клавиш, причем белых клавиш на 16 больше, чем черных.
Сколько белых и сколько черных клавиш у фортепиано?

Объясняем Пусть x – число белых клавиш, а y – число черных клавиш. Тогда составим уравнения $x+y=88$ и $x-y=16$.

$(x_0;\ y_0)$

Для решения задачи необходимо найти пару чисел $(x_0;\ y_0)$ – общее решение этих двух уравнений. В этом случае говорят, что надо решить систему двух уравнений с двумя неизвестными, и записывают:

$$\boxed{\begin{cases} x+y=88, \\ x-y=16. \end{cases}}$$

первое уравнение системы

второе уравнение системы

знак системы

система двух уравнений с двумя неизвестными

Общим решением двух уравнений является пара чисел (52; 36), так как

$52+36=88$ – истинно;

$52-36=16$ – истинно.

Ответ: 52 белые клавиши и 36 черных клавиш.

Определение **Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными** называется упорядоченная пара чисел, которая обращает каждое уравнение системы в истинное высказывание.

2 Проверьте, является ли пара чисел $(-2; 1)$ решением системы уравнений:

а) $\begin{cases} -x+y=3, \\ 3x-y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+y=-3, \\ -x+3y=-5. \end{cases}$

Объясняем

$-(-2)+1=3$ – A

$3(-2)-1=1$ – F

Ответ: Пара чисел $(-2;\ 1)$ не является решением системы уравнений.

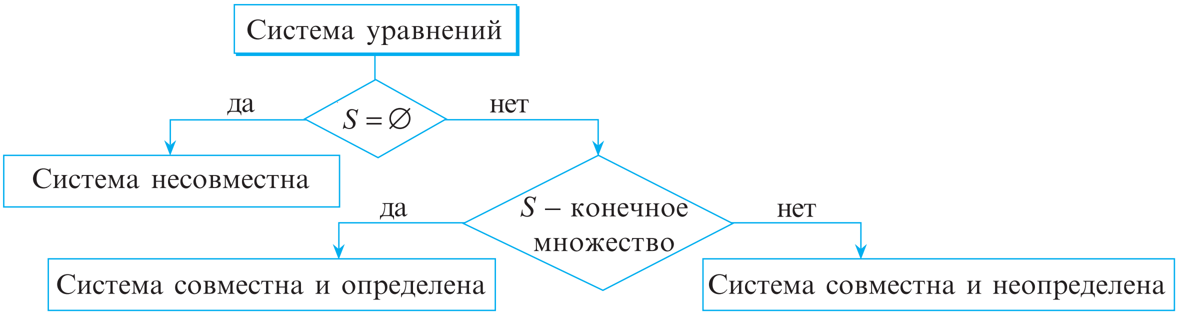
$2 \cdot \square + \square = -3$ – $\square$

$-\square + 3 \cdot \square = -5$ – $\square$

Ответ: $(-2;\ 1)$ – $\square$.

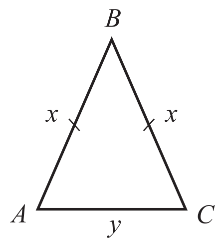
Определение

- **Решить систему двух уравнений с двумя неизвестными** значит найти множество ее решений.
- Множество решений системы уравнений, как правило, обозначается S.
- Система уравнений может не иметь решений, может иметь конечное или бесконечное множество решений.



2.4. Система двух уравнений I степени с двумя неизвестными

В равнобедренном треугольнике конгруэнтные стороны на 11 см длиннее его основания. Найдите длины сторон треугольника, если его периметр равен 40 см.



Решаем Составим систему уравнений: $\boxed{\begin{cases} x-y=11, \\ 2x+y=40. \end{cases}}$

$\boxed{(17;\ 6)}$ ← решение системы уравнений

Ответ: $AB=$ ☐ см; $BC=$ ☐ см; $AC=$ ☐ см.

- Объясните, как была составлена система уравнений.

Определение

Система уравнений вида $\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases}$ где $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ – действительные числа, называется **системой двух уравнений I степени с двумя неизвестными**.

При решении системы уравнений, как правило, переходят к другой, более простой системе, равносильной данной.

Определение

Системы уравнений называются **равносильными**, если множества их решений равны.

Запомните Чтобы получить равносильные системы уравнений, применяют следующие преобразования:

Изменение порядка уравнений в системе.

$$\begin{cases} x-2y=1, \\ 3x+2y=11, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=11, \\ x-2y=1. \end{cases}$$

Замена одного уравнения системы другим, равносильным ему.

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ 5x-3y=2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3-2x, \\ 5x=2+3y. \end{cases}$$

Выражение в одном из уравнений системы одного неизвестного через другое и подстановка полученного выражения во второе уравнение системы.

$$\begin{cases} -7x+y=2, \\ x+2y=3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2+7x, \\ x+2\cdot(2+7x)=3. \end{cases}$$

Замена одного уравнения системы другим, которое образуется в результате сложения или вычитания двух уравнений системы (умноженных, если необходимо, на ненулевое число).

$$\begin{cases} x-y=2, \\ 3x+y=5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2, \\ 4x=7. \end{cases}$$

2.5. Методы решения системы двух уравнений I степени с двумя неизвестными

2.5.1. Метод подстановки

Из одного уравнения выражаем одно из неизвестных через другое и подставляем его во второе уравнение.

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x-3y=-5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\boxed{1-2y,} \\ 2\cdot\boxed{(1-2y)}-3y=-5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y, \\ 2-4y-3y=-5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

подставляем

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2y, \\ -7y=-7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-2\cdot 1, \\ y=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: $S=\{(-1; 1)\}$.

- Рассмотрите и продолжите решение:

$$\begin{cases} -3x+y=-1, \\ 5x+2y=20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\boxed{}, \\ 5x+2\cdot\boxed{()}=20, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\boxed{}, \\ \square\, x=\square\,, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\square\,, \\ y=\square\,. \end{cases}$$

подставляем

Ответ: $S=\{(\square; \square)\}$.

2.5.2. Метод сложения

Складываем оба уравнения системы.

$$\begin{cases} 2x-3y=-1, \\ 4x+3y=25, \end{cases} \Bigg| \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-3y=-1, \\ 6x=24, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ 2\cdot 4-3y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ -3y=-9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=3. \end{cases}$$

Ответ: $S=\{(4; 3)\}$.

Рассмотрите и продолжите решение:

$$\begin{cases} 4x+2y=1, \\ 3x+y=1, \end{cases} \Big| \otimes(-2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=1, \\ -6x-2y=-2, \end{cases} \Bigg| \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} 4x+2y=1, \\ \square\, x=\square\,, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\square\,, \\ 4\cdot\square+2y=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\square\,, \\ 2y=\square\,, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\square\,, \\ y=\square\,. \end{cases}$$

Ответ: $S=\{(\square; \square)\}$.

2.5.3. *Графический метод*

$$\begin{cases}2x+y=7,\\ x-2y=1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2x+7,\\ -2y=-x+1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-2x+7,\\ y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

x	1	4
$y=-2x+7$	5	-1

x	1	5
$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$	0	2

Практическая работа

I. Решите графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases}x+y=4,\\ 3x+y=6;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=1,\\ 2x+y=5.\end{cases}$

Сколько решений имеет каждая из систем?

Найдите отношение коэффициентов неизвестных x и y и сравните полученные отношения.

а) $\frac{1}{3} \bigcirc \frac{1}{1}$ б) $\frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square}$

Сделайте вывод.

II. Решите графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases}x-y=2,\\ 2x-2y=-2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+6y=-3,\\ 4x+8y=2.\end{cases}$

Сколько решений имеет каждая из систем?

Найдите отношение коэффициентов неизвестных x и y и отношение свободных членов и сравните полученные отношения.

а) $\frac{1}{2} \bigcirc \frac{-1}{-2} \bigcirc \frac{2}{-2}$ б) $\frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square}$

Сделайте вывод.

III. Решите графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x-y=1,\\ 4x-2y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-4y=10,\\ 3x-6y=15.\end{cases}$

Сколько решений имеет каждая из систем?

Найдите отношение коэффициентов неизвестных x и y и отношение свободных членов и сравните полученные отношения.

а) $\frac{2}{4} \bigcirc \frac{-1}{-2} \bigcirc \frac{1}{2}$ б) $\frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square} \bigcirc \frac{\square}{\square}$

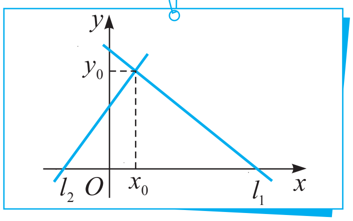
Сформулируйте вывод.

Сравните свои выводы со схемой:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0, \\ a_2x+b_2y+c_2=0, \end{cases} \quad a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}^*, \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

одно решение → Система совместна и определена.

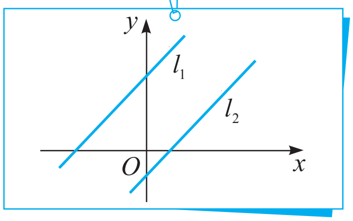
$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$



$S=\{(x_0;\, y_0)\}$

нет решений → Система несовместна.

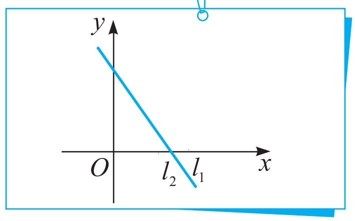
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



$S=\varnothing$

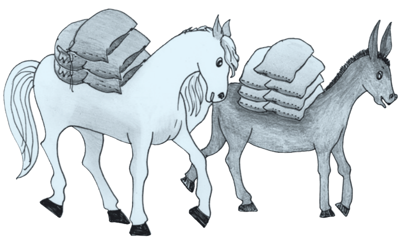
бесконечное множество решений → Система совместна и неопределена.

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



$S=\{(x;\, y)\}$, где $x \in \mathbb{R}$, $y=-\frac{a_1}{b_1}x-\frac{c_1}{b_1}$

2.6. Решение задач с помощью систем уравнений I степени с двумя неизвестными



Лошадь и осел шли по дороге с тяжелой ношей на спинах. Лошадь жаловалась на свою ношу.

– Почему ты жалуешься? – спросил осел у лошади. – Если я заберу у тебя один твой мешок, моя ноша станет в два раза тяжелее твоей. А вот если я отдам тебе один свой мешок, твоя ноша станет равной моей.

Сколько мешков везла лошадь и сколько вез осел?

На математическом языке

Лошадь и осел двигались с тяжелой ношей.	x – количество мешков у лошади, y – количество мешков у осла.
Если осел заберет один мешок у лошади, его ноша станет в два раза тяжелее.	$2(x-1)=y+1$
Если лошадь заберет у осла один мешок, их ноши станут равными.	$x+1=y-1$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} 2(x-1)=y+1 \\ x+1=y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y=-2 \end{cases} \Big| \ominus \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=3 \\ x=\square \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\square, \\ y=\square. \end{cases}$$

Ответ: Лошадь везла ▢ мешков, а осел – ▢ мешков.

Упражнения и задачи

1

1. Является ли решением уравнения $x+3y=9$ пара чисел:
а) $(1; 1)$; б) $(6; 1)$; в) $(0; 3)$; г) $(-4; 4)$?

2. Найдите три решения уравнения:
а) $x+y=6$; б) $x+2y=5$;
в) $3x-y=2$; г) $3x+2y=10$.

3. ***Исследуйте!*** Врачи установили, что для нормального развития ребенка или подростка в возрасте x лет $(1 \le x \le 18)$ продолжительность сна должна составлять y часов, где $y+\frac{x}{2}=17$. Сколько часов в день должны спать вы, ваши младшие сестры или братья?

4. Из уравнения $2x+y=5$ выразите:
а) переменную y через переменную x;
б) переменную x через переменную y.

5. Выразите переменную y через переменную x и найдите два решения уравнения:
а) $x-y=7$;
б) $2x+y=5$;
в) $5x-2y=10$.

Образец:
$3x+y=15 \Leftrightarrow y=-3x+15$
$x=0;\ y=-3\cdot 0+15 \Leftrightarrow y=15.$
$x=-1;\ y=-3\cdot(-1)+15 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y=18.$
$(0; 15)\quad(-1; 18).$

6. График уравнения $8x-5y=17$ проходит через точку с абсциссой 2. Найдите ординату этой точки.

7. Постройте график уравнения:
а) $x+y=6$; б) $3x-y=0$; в) $2x-y=1$.

8. ***Исследуйте!*** Определите, является ли решением системы уравнений $\begin{cases}3x+2y=19\\ x+5y=15\end{cases}$ пара чисел:
а) $(2; 5)$; б) $(0; 3)$; в) $(5; 2)$; г) $(6; \frac{1}{2})$.

9. Решите на множестве действительных чисел методом подстановки систему уравнений:
а) $\begin{cases}x-y=2,\\ 2x-3y=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x-y=-4,\\ x+2y=8;\end{cases}$
в) $\begin{cases}x+y=6,\\ 3x-5y=2;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2y-x=-3,\\ 3y-2x=-7.\end{cases}$

10. Решите на множестве действительных чисел методом сложения систему уравнений:
а) $\begin{cases}4x-y=-1,\\ 2x+y=13;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+y=4,\\ 3x+y=6;\end{cases}$
в) $\begin{cases}x-y=-5,\\ -x+3y=19;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x+2y=19,\\ x+5y=15.\end{cases}$

11. Решите графическим методом систему уравнений:
а) $\begin{cases}x+y=10,\\ 2x-y=-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}y-2x=1,\\ 6x-y=7;\end{cases}$
в) $\begin{cases}x-y=2,\\ -2x+y=-4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x+y=4,\\ 6x+2y=1.\end{cases}$

2

12. ***Работайте в парах!*** Найдите одно решение уравнения (если оно существует):
а) $xy=0$; б) $2x^2+y^2=0$;
в) $x^2+y^2=4$; г) $|x|+|y|+1=0$.

13. Пара чисел $(3; 2)$ является решением уравнения $2x+by=12,\ b\in\mathbb{R}$. Найдите число b.

14. Пара чисел $(2; 1)$ является решением уравнения $ax+2y=8,\ a\in\mathbb{R}$. Найдите число a.

15. Запишите уравнение I степени с двумя неизвестными, решением которого является пара чисел:
а) $(1; 2)$; б) $(-3; 1)$; в) $(0; -2)$; г) $(5; 7)$.

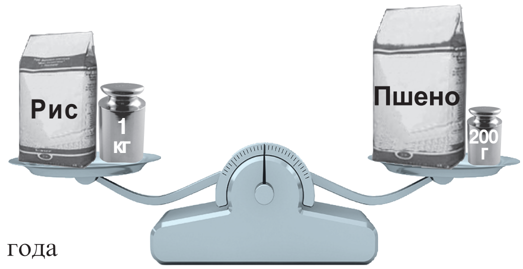
16. ***Работайте в парах!*** Изобразите в одной прямоугольной системе координат графики уравнений:
а) $x+y=3$ и $x-y=1$; б) $x-y=-2$ и $x-y=2$.
Есть ли у этих уравнений общие решения?

17. Решите двумя способами систему уравнений:
а) $\begin{cases}x+y=5,\\ 3x-5y=-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-4y=2,\\ 3x-2y=16;\end{cases}$
в) $\begin{cases}6x-8y=-2,\\ 5x+2y=1{,}8;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}y=0,\\ \frac{1}{3}x+\frac{2}{3}y=10.\end{cases}$

18. ***Исследуйте!*** Не решая систему уравнений, определите количество решений данной системы и ее тип:
а) $\begin{cases}4x+y=2,\\ 3x-2y=1;\end{cases}$
б) $\begin{cases}3x-6y=6,\\ x-2y=3;\end{cases}$
в) $\begin{cases}x-2y=3,\\ 2x-4y=6;\end{cases}$
г) $\begin{cases}x+3y=4,\\ 4x+y=-5.\end{cases}$

Образец:
$\begin{cases}3x+2y=1,\\ 6x+4y=3;\end{cases}\quad \frac{3}{6}=\frac{2}{4}\ne\frac{1}{3}.$
Система не имеет решения, значит, она несовместна.

Решите задачи, составив системы уравнений.



19. На обеих чашах весов всего 4 кг крупы. Используя данные рисунка, определите, сколько риса и сколько пшена в пакетах.

20. Отец старше дочери на 26 лет, а через 4 года он будет старше ее в 3 раза. Сколько лет отцу, а сколько дочери?

21. Туристов разместили в 16 двухместных и трехместных номерах. Сколько они заняли двухместных и сколько трехместных номеров, если всего было 42 туриста?

22. Один из клиентов банка положил на два счета 1200 леев. На один счет под 8% годовых, а на второй – под 10%. Через год общая сумма его накоплений увеличилась на 108 леев. Сколько денег он положил на каждый счет?

23. Доход фирмы, имеющей два филиала, в прошлом году составил 13 миллионов леев. В текущем году ожидается повышение доходов I филиала на 25%, а II филиала на 40%. Доход же всей фирмы должен составить 17 миллионов леев. Определите доход каждого филиала в прошлом году.

24. В магазин по продаже фруктов привезли апельсины в ящиках двух видов – больших и маленьких. Известно, что 3 больших ящика и 5 маленьких вместе весят 82 кг, а 4 больших ящика и 2 маленьких вместе весят 58 кг.
а) Определите, сколько заплатит покупатель за один маленький ящик, если 1 кг апельсинов стоит 28 леев 50 банов.
б) А сколько он заплатит, если купит большой ящик апельсинов?

25. ***Работайте в парах!*** Решите на множестве действительных чисел систему уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{5}=\dfrac{y-1}{2}, \\ 4x+5y=23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-y-24=2(5x-2y), \\ 3y-2=4-(x-y). \end{cases}$

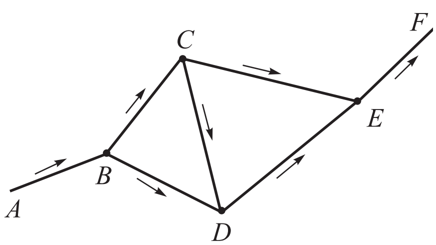
3

26*. Найдите действительные значения параметра m, при которых система уравнений имеет бесконечное число решений: $\begin{cases} 3x+my=3, \\ mx+3y=3. \end{cases}$

27*. Определите, при каких действительных значениях параметра a система уравнений несовместна:

$$\begin{cases} x+ay=1, \\ x-3y=2a+3. \end{cases}$$

28. На рисунке изображена схема автомагистрали. Стрелки указывают направление движения.
По направлению AB проехала автоколонна, состоящая из 36 машин. Известно, что по направлению BC продолжило движение на 10 автомобилей больше, чем по направлению DE, а по направлению CD проехало 2 автомобиля. Сколько машин проехало по каждому из направлений – BC, BD, DE и CE?



29. ***Исследуйте!*** Доход фирмы, имеющей два филиала, в прошлом году составил 13 миллионов леев. На текущий год ожидается повышение доходов филиалов на 75% и на 140%, соответственно. Таким образом, доход всей фирмы удвоится. Определите доход каждого филиала:
а) в прошлом году; б) в текущем году.

30. Смешали 20-процентный и 50-процентный растворы соляной кислоты и получили 30 литров 40-процентного раствора. Какое количество каждого раствора было использовано?

§ 3. Неравенства с одним неизвестным. Системы неравенств с одним неизвестным

3.1. Числовые неравенства

1 Замените $\bigcirc$ одним из знаков >, < так, чтобы получилось верное числовое неравенство: $\boxed{\sqrt{5} \bigcirc 2}$ $\boxed{\pi \bigcirc 3{,}14}$ $\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \bigcirc 1}$ $\boxed{|7{,}2| \bigcirc |-8{,}1|}$

2 Зная, что $x < y$, $m < 0$, $x, y, m \in \mathbb{R}$, и применив свойства числовых неравенств, сравните:

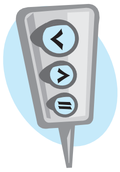
$x + m \bigcirc y + m$

$mx \bigcirc my$

$\frac{x}{m^2} \bigcirc \frac{y}{m^2}$

$|m| \cdot x \bigcirc |m| \cdot y$

$\frac{x}{m^5} \bigcirc \frac{y}{m^5}$



Запомните

① Если $a, b, c \in \mathbb{R}$ и $a > b$, то $a + c > b + c$.

② Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_+$, то $ac > bc$.

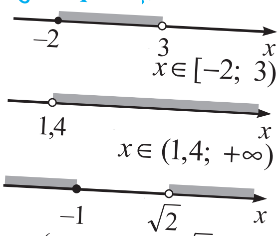
③ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_-$, то $ac < bc$.

④ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_+$, то $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

⑤ Если $a, b \in \mathbb{R}$, $a > b$ и $c \in \mathbb{R}^*_-$, то $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

3.2. Числовые промежутки. Действия над промежутками действительных чисел

Образец:

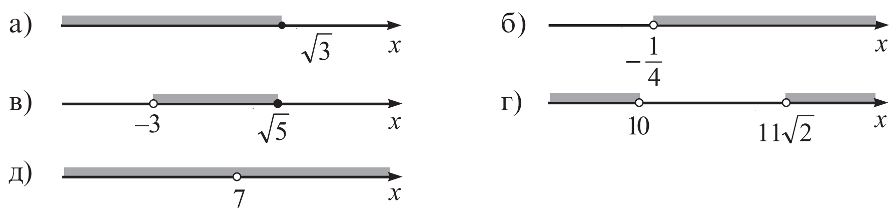


$x \in [-2;\ 3)$

$x \in (1{,}4;\ +\infty)$

$x \in (-\infty;\ -1] \cup (\sqrt{2};\ +\infty)$

1 Известно, что действительное число x принадлежит заштрихованной части. Запишите, используя числовые промежутки, множество, которому принадлежит x:



- Прочитайте каждый из полученных числовых промежутков.

2 Рассмотрите первую строчку таблицы и аналогично, по образцу, дополните таблицу $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$:

Множество	Числовой промежуток	
	Изображение на оси	Обозначение
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$		$[a, b]$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$	?	?
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$	?	?
?	?	(a, b)
?		?
?		$[a, +\infty)$
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < b\}$	?	?
?	?	$(-\infty, b]$
$\mathbb{R}$	?	$(-\infty, +\infty)$

3 Рассмотрите образец и найдите объединение и пересечение числовых промежутков:

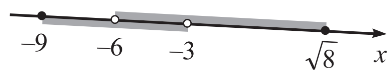
а) $(-8; 7]$ и $(-3; 8)$;

б) $(-\infty; \sqrt{5})$ и $(-\infty; -\sqrt{6})$;

в) $(1; +\infty)$ и $[-5; 4)$;

г) $[-2; \sqrt{10}]$ и $[-\sqrt{10}; +\infty)$.

Образец:



$(-6; \sqrt{8}] \cup [-9; -3) = [-9; \sqrt{8}]$;

$(-6; \sqrt{8}] \cap [-9; -3) = (-6; -3)$.

3.3. Неравенства I степени с одним неизвестным

1 Вова обещал читать в день не меньше 10 страниц книги. В первый день он прочел на 4 страницы меньше, чем во второй день, а в третий день – в 1,5 раза больше, чем во второй день.
Таким образом, количество страниц, которые Вова прочел за третий день, оказалось больше, чем за первые два дня.
Сдержал ли Вова обещание?

Решаем Пусть во второй день Вова прочитал x страниц, тогда в первый день $(x-4)$ страницы, а в третий день – $1{,}5x$ страниц.

$$\boxed{1{,}5x > x + x - 4} \Leftrightarrow 1{,}5x > 2x - 4 \Leftrightarrow -0{,}5x > -4 \Leftrightarrow x < 8$$

Ответ: Вова ______ обещание.

Определение

Неравенства вида $ax+b>0$, $ax+b<0$, $ax+b\geq 0$, $ax+b\leq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называются неравенствами **I степени с одним неизвестным**.

Пример:

$2(x-5) > 8$

$x = \boxed{15}$ – решение неравенства, так как

$2(15-5) > 8$ – Истинно

Определение

Решением неравенства с одним неизвестным называется значение неизвестного, обращающее это неравенство в верное числовое неравенство.

- Является ли число 7 решением неравенства?

Запомните

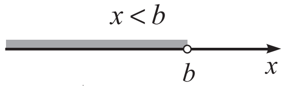
- Решить неравенство значит найти множество его решений.
- Множество решений неравенства обозначается, как правило, буквой S.
- Множество решений неравенства I степени с одним неизвестным записывается в виде числового промежутка.

Вспомним

$x \geq a$

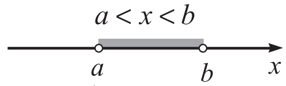
$S = [a; +\infty)$

$x < b$



$S = (-\infty; b)$

$a < x < b$



$S = (a; b)$

2 Рассмотрите и дополните:

а) $x > 2$

$S = (2; +\infty)$

б) $x \le 5$

$S = \square$

в) $-3 \le x < 0$

$S = \square$

3 Решим на множестве $\mathbb{R}$ неравенство: $2(x-5) > 8 \Leftrightarrow x-5 > 4 \Leftrightarrow x > 9$

Ответ: $S = (9; +\infty)$

Определение

Два неравенства называются **равносильными**, если множества их решений равны.

4 Рассмотрите схему решения неравенства вида $ax + b > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

$\boxed{ax + b > 0 \Leftrightarrow ax > -b}$

- $\boxed{a > 0}$ → $\boxed{x > -\dfrac{b}{a}}$ → $\boxed{S = \left(-\dfrac{b}{a}; +\infty\right)}$
- $\boxed{a = 0}$ →
  - $\boxed{b > 0}$ → $\boxed{S \in \mathbb{R}}$
  - $\boxed{b \le 0}$ → $\boxed{S = \varnothing}$
- $\boxed{a < 0}$ → $\boxed{x < -\dfrac{b}{a}}$ → $\boxed{S = \left(-\infty; -\dfrac{b}{a}\right)}$

- Применив схему из пункта **4**, продолжите решение на множестве $\mathbb{R}$:

  а) $3x - 6 > 4 + 5(x-4) \Leftrightarrow 3x - 6 > 4 + 5x - 20 \Leftrightarrow \square\, x > \square \Leftrightarrow x \bigcirc \square$.

  Ответ: $S = \square$.

  б) $2(1-3x) > 3(5-2x) \Leftrightarrow 2 - 6x > 15 - 6x \Leftrightarrow \square\, x > \square \Leftrightarrow \square$.

  Ответ: $S = \square$.

- Составьте аналогичные схемы для решения неравенств вида $ax + b < 0$; $ax + b \ge 0$; $ax + b \le 0$.

3.4. Системы неравенств I степени с одним неизвестным

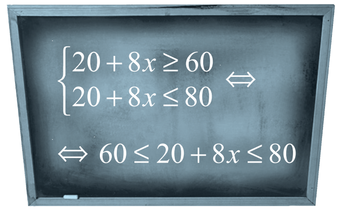
В чайник налили воду, температура которой 20°C, и поставили нагреваться. Через каждую минуту температура воды увеличивается на 8°C. Через сколько минут температура воды будет не меньше 60°C и не больше 80°C?

Решаем

Пусть x минут – время, необходимое для соответствующего подогрева воды.
Получаем неравенства $20 + 8x \ge 60$ и $20 + 8x \le 80$.
Для решения задачи найдем общие решения этих двух неравенств (пересечение множеств их решений).

В этом случае говорят, что надо решить систему двух неравенств с одним неизвестным, и записывают:

$$\boxed{\begin{cases}20+8x\ge 60,\\ 20+8x\le 80,\end{cases}} \Leftrightarrow \begin{cases}8x\ge 40,\\ 8x\le 60,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 5,\\ x\le 7{,}5;\end{cases} \Leftrightarrow 5\le x\le 7{,}5.$$



Ответ: Не меньше 5 минут и не больше 7,5 минут.

Запомните

- В общем случае система двух неравенств I степени с одним неизвестным имеет вид:

$$\begin{cases}a_1x+b_1\ge 0,\ a_1\in\mathbb{R}^*,\ b_1\in\mathbb{R},\\ a_2x+b_2\ge 0,\ a_2\in\mathbb{R}^*,\ b_2\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

- Система неравенств может состоять из неравенств, содержащих любой

Определение

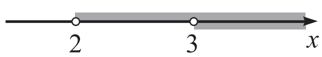
Решением системы неравенств I степени с одним неизвестным называется значение неизвестного, обращающее каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.

Запомните

- Решить систему неравенств значит найти множество ее решений.
- Множество решений неравенства обозначается, как правило, буквой S и является пересечением множеств решений неравенств этой системы.

1 Рассмотрите и дополните:

1) $\begin{cases}x>2,\\ x>3,\end{cases} \Leftrightarrow x>3.$



Ответ: $S=(3;+\infty)$.

2) $\begin{cases}x<-1,\\ x\ge 2.\end{cases}$

Система не имеет действительных решений.

Ответ: $S=\varnothing$.

3) $\begin{cases}x\ge 3,\\ x\le 5,\end{cases} \Leftrightarrow 3\le x\le 5.$

Ответ: $S=$ $\square$.

4) $\begin{cases}x<0,\\ x\le 4,\end{cases} \Leftrightarrow x$ $\bigcirc$ $\square$.

Ответ: $S=$ $\square$.

2 Рассмотрите образец и закончите решение системы неравенств:

$$\begin{cases}8x-9<6x-3,\\ 2-x>4x-3,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\square\, x<\square,\\ \square\, x>\square,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x \bigcirc \square,\\ x \bigcirc \square,\end{cases} \Leftrightarrow \square.$$

Ответ: $S=$ $\square$.

Образец:

$$\begin{cases}3-4x<5,\\ 6+9x\le 15,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4x<2,\\ 9x\le 9,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>-\dfrac{1}{2},\\ x\le 1,\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}<x\le 1.$$

Ответ: $S=\left(-\dfrac{1}{2};1\right]$.

Упражнения и задачи

1

1. Прочтите числовой промежуток:

а) $(-\infty; 1]$; б) $(-\infty; -4{,}5)$;
в) $(\sqrt{7}; +\infty)$; г) $[-\sqrt{6}; +\infty)$;
д) $(-7\frac{2}{5}; 0)$; е) $[3\sqrt{5}; 78]$;
ж) $[-\sqrt{11}; 4)$; з) $(-2{,}5; \sqrt{2}]$.

2. Используя числовую ось, найдите объединение и пересечение промежутков:

а) $[-4{,}5; 2)$ и $(0; \sqrt{5})$; б) $(-\infty; 3{,}7)$ и $(-2; +\infty)$;
в) $(-\infty; 3{,}7)$ и $(-2; +\infty)$; г) $(\sqrt{7}; 15]$ и $[15; 2013)$.

3. *Исследуйте!* *Истинно* или *Ложно?*

$2\sqrt{2} > 3$ $1,(2) < 1{,}215$ И/Л

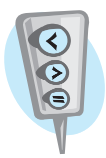
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} > 3^{-1}$ $\sqrt{7} < \pi$ $2^3 < 3^2$

4. Известно, что $a, b \in \mathbb{R}$ и $a > b$. Сравните:

$\frac{a}{b} \bigcirc \frac{b}{a}$; $-a \bigcirc -b$;

$a - 15 \bigcirc b - 15$; $0{,}01a \bigcirc 0{,}01b$;

$\frac{a}{-5} \bigcirc \frac{b}{-5}$; $b - a \bigcirc 0$.



5. *Работайте в парах!* Запишите три числа, которые принадлежат промежутку:

а) $(50; +\infty)$; б) $(-\infty; -3]$; в) $[1; 2)$.

6. Запишите все целые числа, принадлежащие промежутку:

а) $[-1{,}2; 0{,}3)$; б) $\left[\frac{3}{13}; \frac{13}{3}\right)$; в) $(\sqrt{3}; \pi]$.

7. *Исследуйте!* Какие из чисел

$\boxed{-2}$, $\boxed{3{,}5}$, $\boxed{0}$, $\boxed{5}$, $\boxed{\sqrt{10}}$

являются решениями неравенства $3x + 5 > 15$?

8. Запишите неравенство и числовой промежуток, соответствующие рисунку:

а) 

б) 

в) 

г) 

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $5x - 2 \geq 13$; б) $8 - 4x > -32$;
в) $2(1 - x) \geq 4(3x + 2)$; г) $2 - 3(x + 2) \leq 5 - 2x$.

10. Определите, являются ли числа $-1; 0; 1; 15$ решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases} x > -4, \\ x < 8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x - 5 > 0, \\ x - 14 > 0. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x < 5, \\ x + 1 > 3. \end{cases}$

11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} -3x > 9, \\ 4x < 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 11x + 1 \geq -5, \\ 2 - 3x < 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3 - 4x > 5, \\ 6 + 9x \leq 1; \end{cases}$

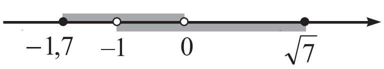
г) $\begin{cases} 3x - 6 > 2x, \\ 2x - 6 > 5x; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x + 1 \leq 13, \\ 9 - 2x < x; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x - 2 \geq 10, \\ x \leq 7. \end{cases}$

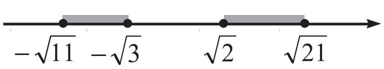
2

12. Запишите в виде промежутка или объединения промежутков множество, представленное на числовой оси:

а) 

б) 

в) 

г) 

13. Найдите: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если:

а) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Q}$; б) $A = (-\infty, 5]$, $B = (-\sqrt{3}, 10)$;
в) $A = \mathbb{Z}$, $B = [-4, 5)$; г) $A = (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $B = \mathbb{R}$.

14. Разделите обе части неравенства $x < -6$ на число:

а) 4; б) –4; в) $\frac{1}{3}$; г) –3.

15. *Работайте в парах!* Известно, что $-3 < a < 2$. Заполните пропуски:

а) $\square < 2a < \square$; б) $\square < \frac{a}{2} < \square$;
в) $\square < a - 1 < \square$; г) $\square < -3a < \square$;
д) $\square < 2 - a < \square$; е) $\square < \frac{3}{5}a < \square$.

16. *Исследуйте!* Составьте неравенство, множество решений которого равно:

а) $S = [-1; +\infty)$; б) $S = (-\infty; 2)$;
в) $S = [-3; 1]$; г) $S = (0; 2]$.

17. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\frac{3x-7}{6} \geq \frac{5-6x}{4}$;

б) $\frac{x-1}{4} + \frac{x+3}{2} < 1 - \frac{x}{6}$;

в) $(x-3)(x-6) < (x-1)(x-2)$.

18. При каких значениях неизвестного x значение выражения:

а) $-5(3x+2{,}2)-2$ неотрицательно;

б) $3(0{,}5x-4)+8{,}5x$ отрицательно?

19. При каких значениях неизвестного y значение выражения $\frac{3y-2}{72}$: а) положительно;

б) не больше 3;

в) не меньше -5?

20. ***Исследуйте!*** Найдите наибольшее целое решение неравенства $x - \frac{x+1}{2} < \frac{x-3}{4} - \frac{x-2}{3}$.

21. ***Работайте в парах!*** При каких значениях неизвестного x имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{\frac{2{,}5x-4}{6}}$; б) $\sqrt{\frac{5}{0{,}8x-3}}$?

22. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}7x-3(0{,}2x+1) < 0{,}5x+1, \\ 0{,}3(1-x)+0{,}8x > x+5{,}3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 17(3x-1)-50x+1 < 2(x+4), \\ 2(6-5x) < 10(1-1{,}2x); \end{cases}$

в) $\begin{cases} (9x+3)(x-4) > 9x^2+x+5, \\ 2x-3-(x-3) \leq 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 12x^2-(2x-3)(6x+1) > x, \\ (5x-1)(5x+1)-25x^2 > x-6. \end{cases}$

23. ***Работайте в группах!***

Рассмотрите образец и найдите значения неизвестного x, при которых имеет смысл выражение:

а) $\sqrt{5x-3} + \sqrt{1-2x}$;

б) $\sqrt{2x+8} - \frac{2}{\sqrt{3-12x}}$.

Образец:

Выражение $\frac{4}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{2x-1}$ имеет смысл, если

$\begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$.

Ответ: $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

3

24. Найдите $A \cup B$ и $A \cap B$, если $a, b \in \mathbb{R}$ и:

а) $A=(-a, a)$, $B=(-\infty, a]$;

б) $A=[a-1, a+1]$, $B=[-3, 3]$, $a>1$;

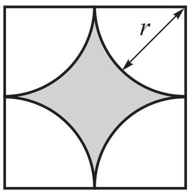
в) $A=(-\infty, 0)$, $B=(-a-1, a+1)$, $a>0$;

г) $A=(-\infty, a]$, $B=[b, +\infty)$.

25. При каких значениях $a \in \mathbb{R}$ является истинным неравенство:

а) $a < |a|$; б) $-a < |a|$; в) $-a < |-a|$; г) $a < |-a|$?

26. Пусть l – длина линии, ограничивающей закрашенную фигуру.



Заполните: ▭ $< l <$ ▭,

если известно, что $2{,}5 < r < 2{,}6$.

27. Изобразите на числовой оси множество решений неравенства:

а) $|x| > 5$; б) $|x| \leq 3$; в) $1 \leq |x| < 2$.

28. Запишите неравенство, содержащее переменную под знаком модуля, множество решений которого изображено на числовой оси:

а) 

б) 

29. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\frac{12-3x}{|x|+6} \geq 0$; б) $\frac{-x^2-3}{7x+21} \geq 0$; в) $\left(\frac{3x^2+2}{5x-8}\right)^{-1} \leq 0$.

30*. Определите значения действительного параметра m, при которых система неравенств $\begin{cases} x \leq 2, \\ x \geq a: \end{cases}$

1) не имеет решений;

2) имеет одно решение;

3) имеет множество решений $S=[a; 2]$;

4) имеет множество решений $S=[2; a]$.

31. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} 5x+8<3, \\ |x| \leq 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-7 \leq 9, \\ |x| > 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x| > 5, \\ |x| \leq 7. \end{cases}$

32. Температура воды, в которой можно купать младенца, должна быть не больше 38°C и не меньше 34°C. Сколько литров воды, температура которой 18°C, необходимо налить в ванную, в которой уже есть 10 л воды с температурой 80°C, чтобы в ней можно было искупать ребенка?

Упражнения и задачи на повторение

1

1. Выпишите в тетрадь уравнения I степени с одним неизвестным:

а) $2x+1=0$; б) $3x=-9$; в) $5-x=0$;
г) $x=0$; д) $3x=1-x$; е) $-8x+6=0$;
ж) $\sqrt{x}=0$; з) $\dfrac{1}{x}=10$; і) $\sqrt{5}x-\sqrt{3}=0$.

2. Какие из чисел-элементов множества $S=\{-1, 0, 1, 3, 5\}$ являются решениями уравнения:

а) $x-1=2$; б) $2x=x+5$; в) $\sqrt{x}=1$;
г) $6+2x=4$; д) $x(x+1)=0$; е) $-3x+5=8$?

3. Найдите ОДЗ уравнения:

а) $\dfrac{x}{1-x}=4$; б) $x^2+1=0$;
в) $\sqrt{x}-3=8$; г) $5x-1=3x+2$.

4. Решите уравнение $\sqrt{5}-2x=3x$:

а) на множестве $\mathbb{Q}$; б) на множестве $\mathbb{R}$.

5. Решите уравнение $0{,}5x+5=x$:

а) на множестве $\mathbb{Z}$; б) на множестве $\mathbb{Q}$.

6. Является ли решением уравнения $x-2y=10$ пара чисел: а) (0; 5); б) (0; –5); в) (0; 0); г) (12; 1)?

7. Выразите неизвестное y через неизвестное x и найдите 3 действительных решения уравнения:

а) $2x-y=7$; б) $x+2y=12$; в) $-8x+2y=6$.

8. Изобразите график уравнения:

а) $x-y=4$; б) $x+y=1$;
в) $2x-y=0$; г) $x+2y=1$.

9. Определите, является ли решением системы уравнений $\begin{cases}2x-y=8,\\ x+5y=-18\end{cases}$ пара чисел:

а) (0; 1); б) (2; –4); в) (1; –1); г) (2; 4).

10. Решите на множестве действительных чисел систему уравнений:

а) $\begin{cases}x-y=0,\\ 5x+y=1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}4x-y=1,\\ 8x-2y=3;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x+3y=1,\\ 2x-5y=9.\end{cases}$

11. Решите на множестве действительных чисел систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x-y=1,\\ x+y=-4;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3x+y=-1,\\ x-y=5;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+2y=-3,\\ 2x-y=-11.\end{cases}$

12. *Работайте в парах!* Равносильны ли системы уравнений:

а) $\begin{cases}2x-y=3,\\ x+y=3\end{cases}$ и $\begin{cases}x-2y=3,\\ x-y=3?\end{cases}$

б) $\begin{cases}x-y=4,\\ 3x+y=16\end{cases}$ и $\begin{cases}x-y=4,\\ x+y=6?\end{cases}$

13. Найдите $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, если:

а) $A=(-\infty, 5)$, $B=(-3, 8)$; б) $A=\mathbb{N}$, $B=[-2, 6]$;
в) $A=[-10, 8]$, $B=[0, 3]$; г) $A=(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $B=\mathbb{Z}$.

14. Дополните, чтобы получить истинное высказывание:

а) $(\square; 2)\cup(-\sqrt{5}, +\infty)=(-10, +\infty)$;
б) $[-\sqrt{5}, \square]\cap[\square, 7)=[1, 6]$;
в) $(-\infty; 2{,}5)\cup[\square, +\infty)=(-\infty, +\infty)$;
г) $(\square, \sqrt{37})\cap(-\infty, 6)=(-3, 6)$.

15. Запишите все целые числа, принадлежащие промежутку:

а) $[-2{,}1; 0{,}1]$; б) $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{14}{5}\right]$; в) $(\sqrt{2}, \pi]$.

16. *Исследуйте!* Какие из чисел

$\boxed{-1}$ $\boxed{0}$ $\boxed{5}$ $\boxed{7}$ $\boxed{10}$

являются решениями неравенства $2x-5>3$?

17. *Работайте в парах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $2x-1>2$; б) $7-x\ge 5$;
в) $3(1+x)<2x$; г) $5-4x\le 2(1+x)$;
д) $0{,}5x>-1{,}2$; е) $-10x<\sqrt{10}$.

18. *Исследуйте!* Определите, являются ли числа

$\boxed{-2}$ $\boxed{0}$ $\boxed{1}$ $\boxed{3}$ $\boxed{6}$

решениями системы неравенств:

а) $\begin{cases}x<-1,\\ x<2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-3>0,\\ 1-x\le 4;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-2\le 2x,\\ x<10.\end{cases}$

19. *Работайте в парах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases}-6x\le 12,\\ 5x<20;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3-2a<13,\\ 3a>15;\end{cases}$ в) $\begin{cases}2-6t>14,\\ 1\ge 3+2t.\end{cases}$

2

20. При каких значениях неизвестного t значение выражения $3t-4$ в 5 раз больше значения выражения $4-t$?

21. *Работайте в группах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2(x+1{,}5)-3x=6(x-3)$; б) $5(6-x)+3x=-2(3-2x)$; в) $\dfrac{2-x}{3}+\dfrac{3x+15}{4}=1$; г) $-\dfrac{5x}{7}+\dfrac{1-4x}{2}=-3$.

22. *Исследуйте!* Является ли число 2,1 решением уравнения:

а) $x-2=|2-x|$; б) $4{,}2-x=|x|$; в) $|-x|+2{,}1=0$?

23. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнения:

а) $|x|-2=3$; б) $5|x|-3=12$;

в) $-3|x|+2=|x|-6$; г) $|x-3|=-10$.

24. Решите графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y=2, \\ 3x+y=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y=5, \\ x+2y=-3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+y=0, \\ -x+y=-5. \end{cases}$

25. ***Работайте в парах!*** Решите 3 способами систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-y=0, \\ 3x+y=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -2x+y=3, \\ x-2y=-9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=1, \\ 5x-y=5. \end{cases}$

26. График уравнения $4x+3y=5$ проходит через точку с абсциссой –1. Найдите ординату этой точки.

27. График уравнения $2x-5y=-1$ проходит через точку с ординатой 2. Найдите абсциссу этой точки.

28. Изобразите график уравнения:

а) $x-y=5$; б) $-2x+y=0$; в) $x-3y=3$.

29. ***Исследуйте!*** Найдите наименьшее натуральное решение неравенства $\frac{x+4}{7}-\frac{x+7}{4}<-3$.

30. ***Исследуйте!*** При каких значениях x, $f(x)>0$, $f(x)<3$, $f(x)\geq 5$, если $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=-3x+7$; б) $f(x)=\frac{5-4x}{2}$?

31. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

$$x-\frac{2x+1}{4}\geq\frac{4x-3}{3}.$$

32. Найдите действительные значения x, при которых одновременно имеют место неравенства:

а) $1-2x\geq -3$ и $1-2x\leq 4$;

б) $4x-2\geq -1$ и $4x-2<5$.

33. ***Исследуйте!*** Найдите значения x, при которых имеет смысл выражение $\sqrt{0{,}7+\frac{x}{4}}+\frac{5}{\sqrt{2-0{,}4x}}$.

34. Найдите $A\setminus B$, $B\setminus A$, если $a, b\in\mathbb{R}$ и:

а) $A=(-a, a)$, $B=(-\infty, a]$;

б) $A=[a-1, a+1]$, $B=[-3, 3]$, $a>1$;

в) $A=(-\infty, 0)$, $B=(-a-1, a+1)$, $a>0$;

г) $A=(-\infty, a]$, $B=[b, +\infty)$.

35. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases} 0{,}5x+3(0{,}5x-1)<0{,}3x+2, \\ 1{,}2x-2(0{,}1x+0{,}5)>0{,}2x-5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (3x-1)(3x+1)>9x^2-x+0{,}5, \\ (x+1)(5x-3{,}5)\leq 5x^2-2{,}5x+1. \end{cases}$

36. ***Работайте в группах!*** Найдите целые решения системы неравенств:

а) $\begin{cases} 6-4t>0, \\ 3t-1\geq 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3-18z\leq 0, \\ 0{,}2+0{,}1z>0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x+0{,}5\geq 0, \\ 1{,}25-0{,}1x>0. \end{cases}$

37. Найдите сторону квадрата, зная, что если ее увеличить на 5 см, площадь квадрата увеличится на 145 см^2.

38. В фирме работало в два раза больше женщин, чем мужчин. После того, как уехали 8 мужчин с женами, в фирме осталось в 3 раза больше женщин, чем мужчин. Сколько женщин и сколько мужчин изначально работали в фирме?

39. Дана говорит Лене: «Если бы ты дала мне одну из своих конфет, то у меня было бы конфет в два раза больше, чем у тебя». Лена говорит Дане: «Если бы ты дала мне одну из своих конфет, то у нас было бы конфет поровну». Сколько конфет у каждой девочки?

40. Скорость моторной лодки, движущейся по течению реки, равна 20 км/ч, а против течения реки – 16 км/ч. Найдите скорость моторной лодки и скорость течения реки.

41. Из двух точек, расположенных на расстоянии 12 км друг от друга, одновременно выехали два велосипедиста. Если они будут двигаться навстречу друг другу, то встретятся через 30 минут, а если они будут двигаться в одном направлении, то второй велосипедист догонит первого через 3 часа. С какой скоростью движутся велосипедисты?

42. Самолет, летящий по ветру, преодолел расстояние между двумя городами за 4 часа 30 минут. Этот же самолет, летящий против ветра, преодолеет это расстояние за 5 часов. Найдите расстояние между городами и скорость самолета, если известно, что скорость ветра равна 12 км/ч.

43. Решите задачу тремя способами:

1) методом фальшивой гипотезы;
2) с помощью уравнения;
3) с помощью системы уравнений.

а) На парковке стоят двухколесные велосипеды и автомобили. Зная, что всего на парковке 29 транспортных средств и 56 колес, вычислите, сколько двухколесных велосипедов и сколько автомобилей находится на парковке.

б) В гостинице 2-местные и 3-местные номера. Зная, что в гостинице всего 54 комнаты, а количество мест равно 142, вычислите, сколько 2-местных и сколько 3-местных номеров в гостиннице.

3

44. Найдите элементы множества $A\bigcap B$, где $A=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|=x\}$ и $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid |x|\le 5\}$.

45. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
$$|-x+5|+\sqrt{x^2}+3x+1=0.$$

46. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:
$$|x-3|+10x-2\le x(x+4)+11.$$

47*. При каких значениях m, $m\in\mathbb{R}$, система уравнений $\begin{cases}3x-y=5,\\ x+my=1\end{cases}$ не имеет решений?

48. Для приготовления торта «Радость» необходимы мука, сметана, сахар и масло. Известно, что на торт весом 800 г сметаны израсходовали на 180 г меньше, чем муки, и на 40 г больше, чем сахара. Масла понадобилось в 7 раз меньше сметаны. Вычислите количество каждого из ингредиентов.

49. Турист поднимается в гору со скоростью 3 км/ч, спускается со скоростью 5 км/ч. Найдите расстояние, пройденное туристом, если путь в гору на 1 км длиннее пути под гору, а на весь путь турист затратил 3 часа.

50. Сколько килограммов конфет по цене 78 леев за 1 кг можно добавить к 2 кг конфет по цене 54 лея, чтобы цена конфетного ассорти была не меньше 60 леев и не больше 68 леев?

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Дано уравнение $2-\square\, x=8$.

а) Дополните рамку, чтобы множеством решений уравнения было $S=\{-2\}$.

б) Изобразите график уравнения $2x+y=4$.

в) Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:
$$\begin{cases}2-4x=3y,\\ 2x+y=4.\end{cases}$$

2. Найдите все целые решения системы неравенств:
$$\begin{cases}3x-2<7,\\ 4-2x\le 3x+14.\end{cases}$$

3. Решите задачу с помощью системы уравнений.

У фермера есть лошади и индюки, всего 29 голов и 76 ног. Сколько лошадей и сколько индюков у фермера?

Вариант 2

1. Дано уравнение $\square\, x-18=-6$.

а) Дополните рамку, чтобы множеством решений уравнения было $S=\{4\}$.

б) Изобразите график уравнения $3x-y=6$.

в) Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:
$$\begin{cases}x-9=-2y,\\ 3x-y=6.\end{cases}$$

2. Найдите все целые решения системы неравенств:
$$\begin{cases}2x+5\le 11,\\ 4-3x<2x+9.\end{cases}$$

3. Решите задачу с помощью системы уравнений.

В доме 80 квартир с 2 и 3 комнатами, всего 190 комнат. Сколько квартир каждого вида в доме?

Глава 4 Функции. Последовательности

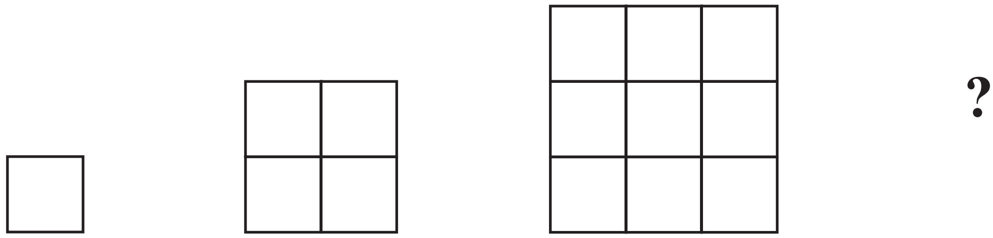
Все, что есть правильное мышление, есть математика.

Григорий Мойсил

§1. Понятие функции. Повторение и дополнения

1.1. Понятие функции

1 Установите закономерность и постройте следующую фигуру.



(1 см)^2 (2 см)^2 (31 см)^2 (41 см)^2

2 В таблице записаны расстояния, пройденные автомобилем за 1 час, 2 часа, 3,5 часа, 4 часа, 4,5 часа.

t, часы	1	2	3	3,5	4	4,5
s, км	85	190	280	330	420	475

В задачах **1** и **2** рассмотрены зависимости между элементами двух множеств $\mathbb{N}^*$ и $\mathbb{N}^*$; $\{1; 2; 3; 3{,}5; 4; 4{,}5\}$ и $\mathbb{R}$.

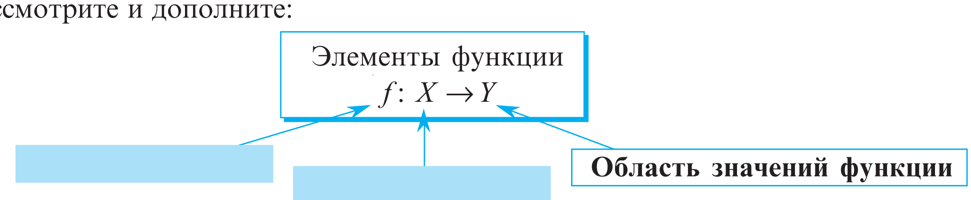
Такого вида ***зависимости*** называются ***функциональными***.

Определение Пусть X и Y – два непустых множества (конечные или бесконечные). Говорят, что **функция определена на множестве** X **со значениями во множестве** Y, если задано правило (закон), по которому каждому элементу из множества X ставится в соответствие единственный элемент множества Y.

Запомните Обозначение $f: X \to Y$ читают как «функция f, определенная на множестве X, со значениями во множестве Y» или «функция f из X в Y».

Таким образом, в задачах **1** и **2** можно определить функции $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ и $g: \{1; 2; 3; 3{,}5; 4; 4{,}5\} \to \mathbb{R}$.

- Рассмотрите и дополните:



Пусть дана функция $f\colon X \to Y$ и произвольный элемент x множества X.

Запомните

Если $y \in Y$ и функция f ставит в соответствие элементу x элемент y, то говорят, что x – **аргумент** (или **независимая переменная**) **функции**, а y – ***значение функции*** f ***в точке*** x.
Обозначают $y = f(x)$ и читают как «y равен f от x».
Еще говорят «y функция от аргумента x».

Определение Множество $E(f) = \{y \mid y = f(x),\ x \in X\}$ называется **множеством значений функции** f.

Следовательно, $E(f) \subseteq Y$.

1.2. Способы задания функции

- Проанализируйте и дополните.

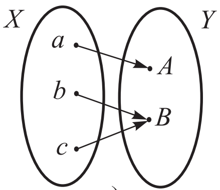
Способы задания функции
- Синтетический способ
  - Таблица, которая называется ___
  - Диаграмма
  - График
- Аналитический способ
  - ___

- Заполните таблицу значений (см. задачу 1):

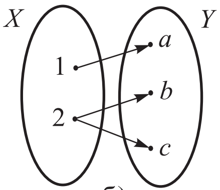
x	1	2	3	4	5	6
$y = f(x)$	1	4	9			

Функцию можно задать и словесно. Приведите примеры!

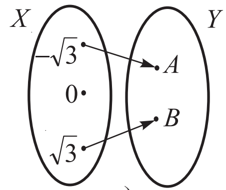
- Какая из диаграмм задает функцию? Объясните.



а)



б)



в)

- а) Какая из таблиц задает функцию?

x	–3	–2	–1	0	1
$f(x)$	6	4	2	0	–2

①

x	5	3	2	1	0	–1
$g(x)$	10	8	7	6	5	4

②

x	A	B	C	D	E	F
$h(x)$	10	10	10	10	10	10

③

б) Запишите с помощью формулы каждую из функций, заданных в пункте а).

Объясняем

1. $f\colon \underbrace{\{-3; -2; -1; 0; 1\}}_{D(f)} \to \underbrace{\{6; 4; 2; 0; -2\}}_{E(f)},\ \underbrace{f(x) = -2x}_{\text{Формула}};$

2. g: ___ $\to$ ___, $g(x) =$ ___;

3. h: ___ $\to$ ___, $h(x) =$ ___.

1.3. График функции

- Метеорологическая служба регистрировала каждый час атмосферное давление, и результаты были записаны в виде графика.

Минимальное атмосферное давление было зарегистрировано в $\boxed{}$ часов.
Максимальное атмосферное давление было зарегистрировано в $\boxed{}$ часов.
В 7 часов атмосферное давление достигло $\boxed{}$.
В период с $\boxed{}$ до $\boxed{}$ часов атмосферное давление не менялось.
В какой период времени атмосферное давление поднималось? А в какой – падало?

- Задает ли изображенный график функцию?

Объясняем Представленный график задает функцию вида $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, так как каждому часу t, $t \in \mathbb{N}$, соответствует единственное значение атмосферного давления p, $p \in \mathbb{N}$.

Определение

> Функция $f\colon X \to Y$, где X и Y – числовые множества, называется **числовой функцией**.

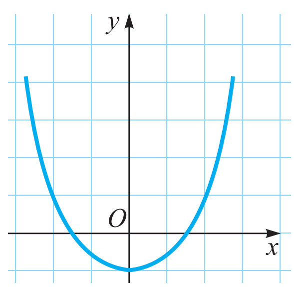
Областью определения числовой функции может быть конечное или бесконечное числовое множество.

$$g\colon \underbrace{\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}}_{\boxed{\operatorname{card} D(g) = 7}} \to \{5\}; \qquad h\colon \underbrace{\mathbb{R}}_{\boxed{D(h) \text{ – бесконечное числовое множество}}} \to \mathbb{R}_+^*,$$

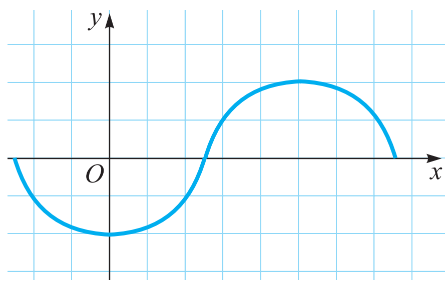
Запомните

> ***Графиком числовой функции*** $f\colon X \to Y$ является фигура, образованная точками (x, y), где $x \in X$ и $y = f(x) \in Y$.
> График функции f обозначается через G_f.
> Значит, $G_f = \{(x, y) \mid x \in X,\ y = f(x) \in Y\}$.
> Равенство $y = f(x)$ называется ***уравнением графика функции*** f.

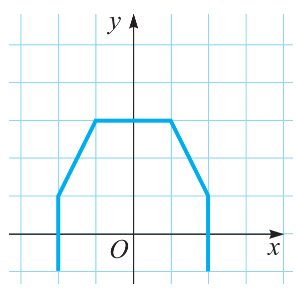
- Рассмотрите рисунки и определите, какие из следующих графиков задают функцию. Объясните.



①



②



③

Упражнения и задачи

1

1. 1) Прочтите функцию:

а) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$; б) $g: \{1; 2; 3; 4\} \to \{1; 8; 27; 64\}$; в) $h: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$; г) $p: \mathbb{R} \to \{10\}$.

2) Укажите элементы функции.

3) Найдите область определения и область значений функции.

2. Заполните пропуски:

а) $f: \{-1; -0,5; 0; 0,5; 1\} \to \{-5; \square; \square; \square; \square\}$, $f(x) = 5x$;

б) $g: \{-\sqrt{5}; -2; 1; \sqrt{5}; \sqrt{7}\} \to \{\square\}$, $g(x) = 2$;

в) $h: \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}\right\} \to \{\square, \square, \square, \square, \square\}$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

3. Поезд, движущийся со скоростью 80 км/ч, проходит расстояние s км за t часов. Запишите формулу зависимости s от t. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента, равному 2,5; 1,2 и 0,6.

4. Площадь прямоугольника со сторонами 8 см и x см равна A см^2. Задайте формулой зависимость A от x. Найдите значение функции, соответствующее значению аргумента $x \in \{2; 4,5; 10\}$.

5. *Работайте в парах!* Дана функция $f: \{-4; -0,5; 0; 1; 2; 5\} \to \mathbb{R}$:

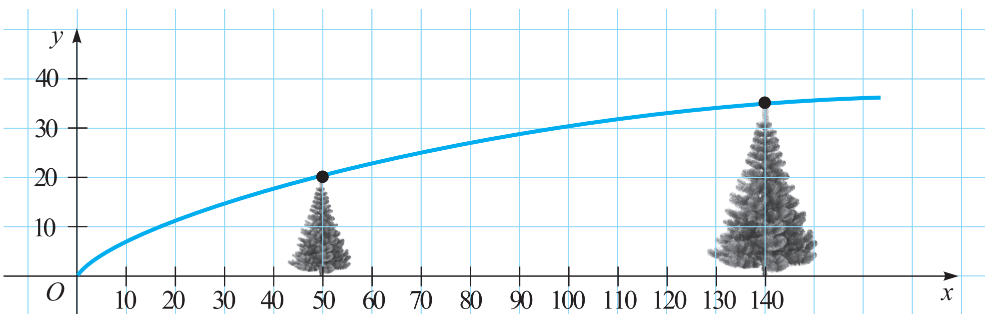
а) $f(x) = 2x + 1$; б) $f(x) = 2x^2$; в) $f(x) = 3 - x$.

1) Заполните таблицу значений функции f.

2) Определите $D(f)$ и $E(f)$.

3) Задайте функцию f в виде диаграммы.

6. Зависимость между высотой елки y (в мм) и ее возрастом (в годах) задана графиком:



а) Найдите высоту елки в возрасте: 10 лет, 30 лет, 100 лет.

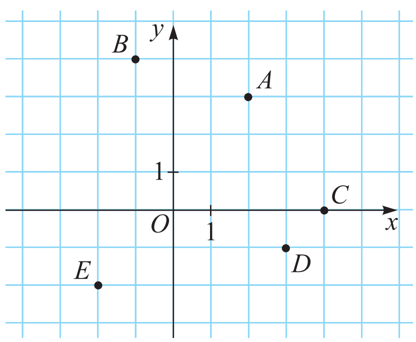
б) На сколько выросла елка в период с 10 до 50 лет, с 30 до 80 лет, от 100 до 140 лет?

7. а) Заполните пропуски:

$A(\square; \square)$, $B(\square; \square)$, $C(\square; \square)$, $D(\square; \square)$, $E(\square; \square)$.

б) Отметьте в заданной прямоугольной системе координат точки:

$F(-2; 3)$; $G(1,5; 0)$; $H(0; -4)$; $K(3,5; -2)$; $L(-4; -3)$.



2

8. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана аналитически формулой: а) $f(x) = -2x + 3$; б) $f(x) = x^2 - 2$.

1) Найдите, для каких значений аргумента x значение функции f равно:

а) 2; б) 0; в) 7.

2) Составьте и заполните таблицу значений функции f для $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

3) Задайте графически функцию f, используя таблицу значений, составленную в пункте 2).

9. Проверьте, принадлежит ли точка:

1) $A\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$; 2) $O(0; 0)$; 3) $B(-3; 9)$

графику функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = -\frac{x}{2}$; б) $f(x) = -2x$; в) $f(x) = x^2$.

10. *Исследуйте!* Отметьте графически 8 точек с координатами (x, y), если:

а) $y = 3x + 2$; б) $y = x^2 + 2$.

Что вы заметили?

11. *Исследуйте!* Найдите множество значений и изобразите графически функцию:

а) $f: \{-4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3}{x}$;

б) $f: \{-5; -3; -1; 1; 3; 5\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{5}{x}$.

Что вы заметили?

12. Найдите область определения функции $f: D \to \mathbb{R}$, если:

а) $f(x) = 3{,}5x + 0{,}(8)$; б) $f(x) = \frac{1}{1-2x}$;

в) $f(x) = 2x^2 + 3$; г) $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

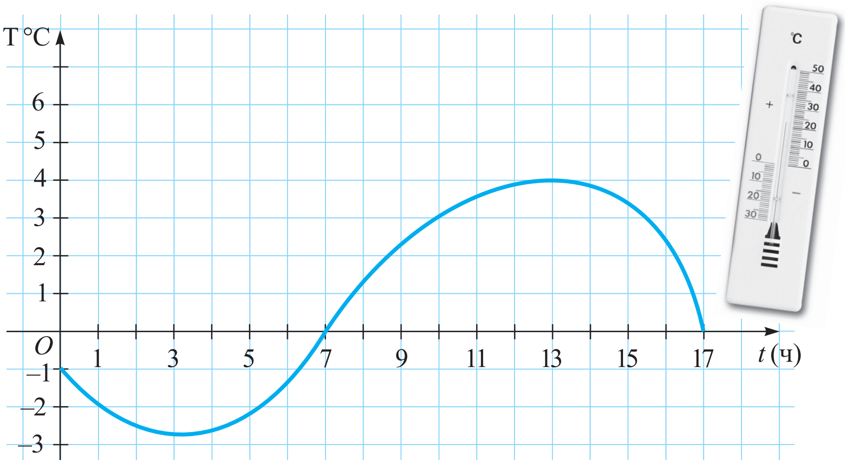
13. *Работайте в группах!*

На рисунке изображен график температуры воздуха в первый день весны.

а) Какая была температура в 2 ч, 5 ч, 7 ч, 10 ч, 14 ч, 16 ч, 17 ч?

б) В какое время дня температура была –1°, 0°, 3°, 4°?

в) В какое время суток температура была минимальной, а в какое – максимальной?



14. График функции f – ломаная линия $ABCD$, где $A(-1, -2)$, $B(0, 5)$, $C(4, 2)$, $D(7, 1)$. Изобразите график функции f.

15. Приведите примеры функциональной зависимости:

а) из повседневной жизни; б) из физики;

в) из химии; г) из географии.

3

16. Найдите $D(f)$, если:

а) $f(x) = \frac{2}{|x-2|-4}$; б) $f(x) = -\frac{|x|}{3|x|-3}$.

17. Найдите наименьшее значение функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

а) $f(x) = x^2 - 4x + 2$; б) $f(x) = 4x^2 - 4x + 3$.

18. Докажите, что функция $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + 6x + 10}$, не может принимать отрицательные значения. Найдите $D(f)$.

19. Изобразите графически функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 3|x| - 1$, где $-4 \le x \le -3$; б) $f(x) = \frac{2}{|x|+2}$, где $-3 \le x \le 3$.

§2. Функция I степени

2.1. Понятие функции I степени и постоянной функции

- У Дана было 20 леев. Он приобрел x карандашей по 1,5 лея, и у него осталось f леев. Запишите функцию в виде формулы, выражающей зависимость f от x. Какова область определения этой функции?

  Решение:

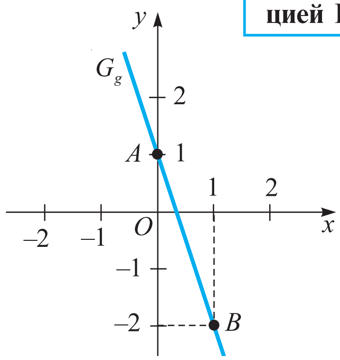
  За x ручек Дан заплатил $\square$ леев.

  Тогда формулой, задающей функцию, является $f(x)=20-\square$ или $f(x)=-\square+20$, где

  $D(f)=\{1;\ 2;\ 3;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square;\ \square\}$.

Полученная функция является функцией вида $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$, где $a\in\mathbb{R}^*,\ b\in\mathbb{R}$.

Определение Функция вида $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b$, где $a\neq 0$ и $a, b\in\mathbb{R}$, называется **функцией I степени**.



- Постройте график функции I степени $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-3x+1$.

  Решение:

  Графиком функции g является прямая. Для построения этой прямой достаточно определить координаты ее $\square$ различных точек:

x	0	$\square$
$g(x)$	$\square$	–2

$A(0;\ \square)$, $B(\square;\ -2)$.

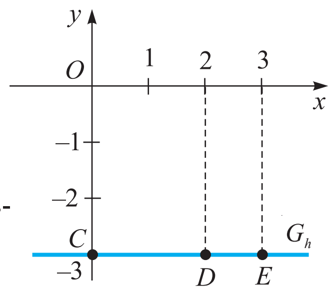
- Какую геометрическую фигуру представляет собой график функции $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=-3$?

Объясняем Для функции h имеем

x	0	2	3
$h(x)$	–3	–3	–3

Значит, $C(0;\ -3)$, $D(\square;\ \square)$, $E(\square;\ \square)$.

Итак, графиком функции h является прямая, параллельная оси Ox.



Определение Функция вида $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=b$, где $b\in\mathbb{R}$, называется **постоянной функцией**.

Запомните Графиком функции I степени является прямая.
Графиком постоянной функции является прямая, параллельная оси Ox.

2.2. Свойства функции I степени

- а) Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций I степени $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=0{,}5x-2$, и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-0{,}5x+4$.

  б) Найдите координаты точек пересечения графиков функций G_f и G_g с осью Ox и осью Oy.

  в) Определите тип угла, образованного графиком каждой функции с положительным направлением оси Ox.

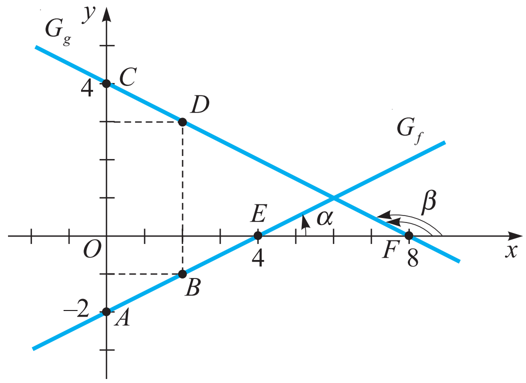
г) Пусть $x_1 > x_2$. Сравните: $f(x_1)$ си $f(x_2)$, $g(x_1)$ си $g(x_2)$.

д) При каких значениях переменной x: $f(x) > 0$, $g(x) > 0$? А $f(x) < 0$, $g(x) < 0$?

Решение:

а)

x	0	2
$f(x)$		
$g(x)$		



Точки с координатами $A(0;\ \square)$ и $B(\square;\ -1)$ определяют прямую, которая является графиком функции $\square$.

Точки с координатами $C(0;\ \square)$ и $D(\square;\ 3)$ определяют прямую, которая является графиком функции g.

б) 1) Найдем координаты точек пересечения графиков G_f и G_g с осью Ox:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \square = 0 \Leftrightarrow x = \square$.

При $y = 0$ получим $E(\square;\ 0)$.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \square = 0 \Leftrightarrow x = \square$.

При $y = 0$ получим $E(\square;\ 0)$.

2) Найдем координаты точек пересечения графиков G_f и G_g с осью Oy:

При $x = 0$ получим:

$y = f(0) = 0{,}5 \cdot \square - 2 = -2$.

Значит, $A(0;\ \square)$.

При $x = 0$ получим:

$y = g(0) = -0{,}5 \cdot \square + 4 = 4$.

Значит, $C(0;\ \square)$.

в) Угол α, образованный G_f и положительным направлением оси Ox, является острым.

в) Угол β, образованный G_g и положительным направлением оси Ox, является $\square$.

г) Проанализируем графики G_f и G_g и сформулируем вывод.

Для любых $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 \ \square\ x_2$ имеет место соотношение $f(x_1)\ \square\ f(x_2)$. Значит, функция f строго возрастающая.

Для любых $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 \ \square\ x_2$ имеет место соотношение $g(x_1)\ \square\ g(x_2)$. Значит, функция g строго убывающая.

д) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 0{,}5x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 4$.
$f(x) < 0$ для любых $\square$.

д) $g(x) > 0 \Leftrightarrow -0{,}5x + 4 > 0 \Leftrightarrow x < 8$.
$g(x) < 0$ для любых $\square$.

Определение

Пусть $f\colon D(f) \to \mathbb{R}$.

- **Нулем функции** f называется значение переменной x, при котором $f(x) = 0$.
- Функция f называется **строго возрастающей на множестве** $D(e)$, если для любых $x_1,\ x_2 \in D(f)$ и $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$.
- Функция f называется **строго убывающей на множестве** $D(e)$, если для любых $x_1,\ x_2 \in D(f)$ и $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$.

Запомните

Пусть дана функция I степени $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0.$

- Нулем функции f является число $x_0=-\dfrac{b}{a}$.
- Функция f является:
  строго возрастающей, если $a>0$;
  строго убывающей, если $a<0$.
- Число α называется **угловым коэффициентом** графика функции f.

2.3. Прямая пропорциональность

Для одного авиарейса Париж–Нью-Йорк требуется 15 000 тонн кислорода. Столько кислорода вырабатывает один гектар леса за год.

а) Задайте аналитически зависимость между количеством кислорода и числом рейсов Париж–Нью-Йорк.

б) Сколько леса потребуется для выработки кислорода, необходимого для 50 рейсов Париж–Нью-Йорк?

Число рейсов и количество потребляемого кислорода являются прямо пропорциональными величинами.

Заполните пропуски:

а) $f:\mathbb{N}\to$ ☐, $f(x)=$ ☐ $\cdot x$.

б) Для 50 рейсов необходимо 50 · ☐ = ☐ тонн кислорода.

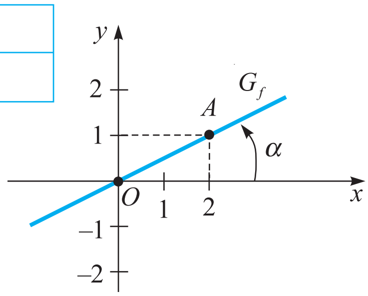
Такое количество кислорода может выработать за год лес, занимающий ☐ га.

- Постройте график функции:
  а) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=0{,}5x$; б) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-\dfrac{1}{2}x.$

Решение:

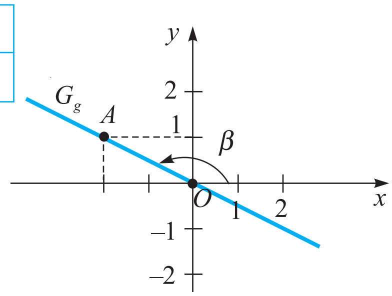
а)

x	0	
$y=f(x)$		



б)

x	0	
$y=g(x)$		



- Рассмотрите графики G_f и G_g. Ответьте на вопросы.
  1) Является ли функция f строго возрастающей? А функция g?
  2) Какого типа угол α? А угол β?
  3) При каких значениях переменной x $f(x)>0$, $f(x)<0$, $g(x)>0$, $g(x)<0$?
  4) Есть ли у функции f нули? А у функции g? В случае, если у функции есть нули, найдите их.

Определение

- Функция вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, где $a \in \mathbb{R}^*$, называется **прямой пропорциональностью**.
- Число a называется **коэффициентом пропорциональности** (или **угловым коэффициентом** графика функции f).

Прямая пропорциональность является частным случаем функции I степени $(b = 0)$.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}^*$

$a > 0$	$a < 0$
функция f – строго возрастающая	функция f – строго убывающая

• Дополните предложение:

Графиком прямой пропорциональности является ______, проходящая через ______.

Упражнения и задачи

1

1. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Выберите формулы, задающие функцию f:

а) I степени;

б) постоянную;

в) прямую пропорциональность.

$f(x) = -4x$ $\quad f(x) = 2{,}5$ $\quad f(x) = 2x - 5$ $\quad f(x) = x^3$ $\quad f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f(x) = -x - 1$

2. а) Составьте таблицу значений для функции $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$, если $x \in \{-1; 0; 0{,}5; 2; 3\}$.

б) Постройте график функции f.

3. Определите угловой коэффициент и постройте график функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 8$;

б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2 - x$;

в) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -1{,}5x$;

г) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = -3{,}5$;

д) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = \sqrt{7}$;

е) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = 10x - 8$.

4. В каких четвертях расположен график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

а) $f(x) = 5$; б) $f(x) = -0{,}3$;

в) $f(x) = -\sqrt{7}x$; г) $f(x) = \frac{1}{8}x$.

5. Найдите нули функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = 1 - 10x$; б) $f(x) = \sqrt{3}x + 3$;

в) $f(x) = 4{,}2 - 2x$; г) $f(x) = -2\sqrt{5}x + \sqrt{10}$.

6. Проверьте, является ли строго возрастающей функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = -2x - 3$; б) $f(x) = \sqrt{2}x + 5$;

в) $f(x) = 5 - 4x$; г) $f(x) = 1 + 7x$.

7. ***Работайте в парах!*** Дополните пропуски так, чтобы функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ была:

1) строго возрастающей; 2) строго убывающей:

а) $g(x) =$ ___ x; б) $g(x) = -$ ___ x.

8. ***Исследуйте!*** Определите тип угла, образованного положительным направлением оси Ox и графиком функции:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{21}x + 10$;

б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -3x + 8$;

в) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 25x$;

г) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = -3\sqrt{7}x$;

д) $q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q(x) = 10$;

е) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = -\sqrt{7}$.

2

9. Объем куба можно определить по формуле $V = a^3$, где a – длина ребра куба. Задает ли эта формула функцию I степени? Обоснуйте ответ.

10. Периметр равностороннего треугольника вычисляется по формуле $P = 3a$, где a – длина сторон треугольника. Задает ли эта формула функцию I степени? Является ли она прямой пропорциональностью? Обоснуйте ответ.

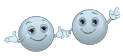
11.  ***Работайте в группах!*** Заполните пропуски так, чтобы точки $A(\ \ ;\ \ )$, $B(0;\ \ )$, $C(\ \ ;-1)$, $D(0{,}5;\ \ )$ принадлежали графику функции:

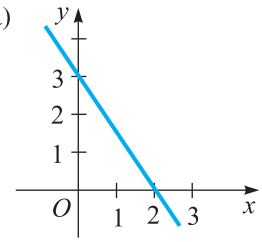
а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - 5x$; б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0{,}2x + 3$;
в) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 2{,}5x$; г) $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = -7x$.

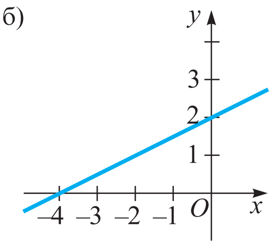
12. У отца было 50 леев. Он купил несколько килограммов картофеля по 9,5 лея за кг.
а) Задайте аналитически зависимость между суммой оставшихся денег и количеством килограммов купленного картофеля.
б) Найдите область определения функции, заданной формулой в пункте а).

13. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = 2 - 10x$; б) $f(x) = 5x - 2$.
1) Найдите нули функции f.
2) Постройте график функции f.
3) Используя график функции, найдите значения x, при которых: $f(x) > 0$; $f(x) < 0$.
4) Определите тип угла, образованного G_f и положительным направлением оси Ox.
5) Определите, является ли функция f строго возрастающей.

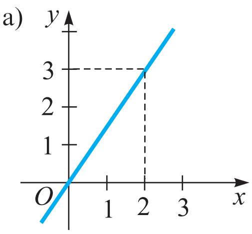
14. Дана функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $g(x) = 6x$; б) $g(x) = -\frac{1}{4}x$.
1) Найдите нули функции g.
2) Постройте график функции g.
3) Используя график функции, найдите значения x, при которых: $g(x) > 0$; $g(x) < 0$.
4) Определите тип угла, образованного G_g и положительным направлением оси Ox.
5) Определите, является ли функция g строго возрастающей.

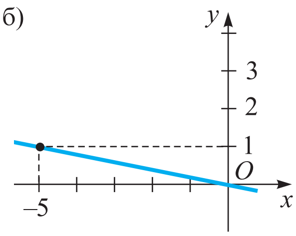
15.  ***Работайте в парах!*** Задайте аналитически функцию I степени, график которой изображен на рисунке:

а) 

б) 

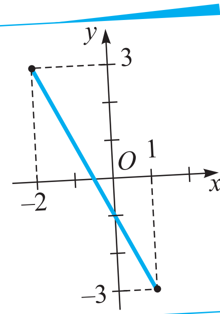
16. Задайте аналитически прямую пропорциональность, график которой изображен на рисунке:

а) 

б) 

Образец:

а) $D(f) = [-2; 1]$.



17. Изобразите график функции:
а) $f: D(f) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x - 1$, если $-2 \le x \le 1$;
б) $g: D(g) \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 6$, если $1 \le x \le 5$;
в) $h: D(h) \to \mathbb{R}$, $h(x) = -x$, если $-3 \le x \le 6$;
г) $q: D(q) \to \mathbb{R}$, $q(x) = x$, если $0 \le x \le 8$.

3

18. Изобразите график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, если:

а) $f(x) = \begin{cases} 5x + 2, \text{ при } x \le -1 \\ 3x, \text{ при } x > -1; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} |x|, \text{ при } -1 \le x \le 1 \\ 1, \text{ при } x < -1 \\ 2x - 1, \text{ при } x > 1. \end{cases}$

19. Графиком функции f является прямая, проходящая через точки $A(2; 6)$ и $B(-1; 3)$. Задайте аналитически функцию f.

20. Изобразите график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
а) $f(x) = 2|x| - 1$; б) $f(x) = 3 - |x|$.

§ 3. Обратная пропорциональность

Величины v и t; y и x являются величинами ______.

- Если автобус проходит 120 км за t часов, то его скорость равна $v=\dfrac{120}{t}$ км/ч. Скорость v является функцией от времени t.
- Пусть площадь прямоугольника равна 25 м², а одна из сторон – x м. Тогда длина второй стороны – $y=\dfrac{\square}{\square}$ м. Значит, длина y второй стороны является функцией от длины x.

  В обоих случаях получим функции вида $f(x)=\dfrac{k}{x}$.

Определение Функция вида $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{k}{x}$, где $k\in\mathbb{R}^*$, называется **обратной пропорциональностью**.

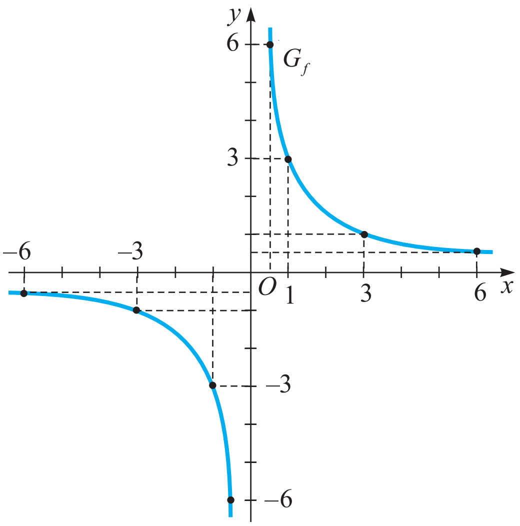
- Постройте график функции:

  а) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{3}{x}$; б) $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ g(x)=-\dfrac{3}{x}$.

  Решение:

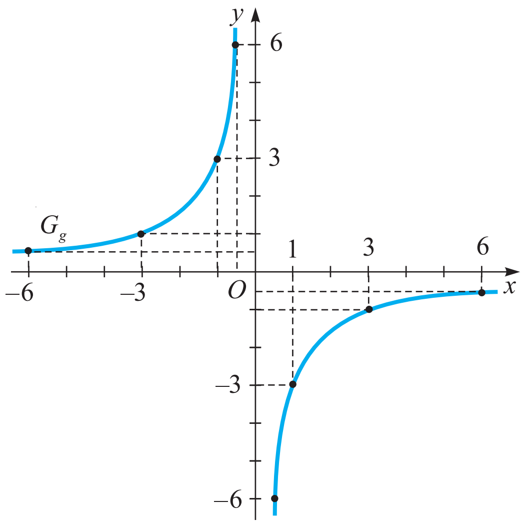
а)

x	-6	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	6
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	-1	-3	-6	6	3	1	$\frac{1}{2}$

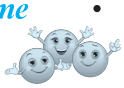


б)

x	-6	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	3	6
$g(x)$								



Работайте в группах



- Рассмотрите графики G_f и G_g и заполните пропуски:

а) Функция f не имеет нулей.

б) График G_f не пересекает ни ось Ox, ни ось Oy.

в) $f(x)>0$ при x ______;

$f(x)<0$ при x ______.

г) Функция f строго убывает на интервалах $(-\infty, 0)$ и ______.

а) Функция g ______.

б) График G_g ______.

в) $g(x)>0$ при x ______;

$g(x)<0$ при x ______.

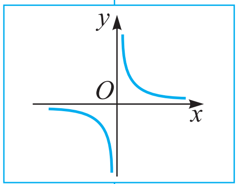
г) Функция g строго возрастает на интервалах ______ и $(0, +\infty)$.

Запомните

Графиком обратной пропорциональности является ***гипербола***.
Гипербола состоит из двух ветвей.

$f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{k}{x},\ k\in\mathbb{R}^*$

$k>0$

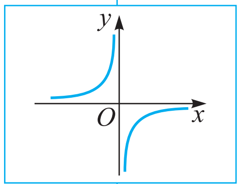


функция f строго убывающая на $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$; ветви гиперболы расположены в I и III четвертях

$f(x)>0$ при $x\in(0, +\infty)$
$f(x)<0$ при $x\in(-\infty, 0)$

График обратной пропорциональности симметричен относительно начала координат O прямоугольной системы координат.

$k<0$



функция f строго возрастающая на $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$; ветви гиперболы расположены во II и IV четвертях

$f(x)>0$ при $x\in(-\infty, 0)$
$f(x)<0$ при $x\in(0, +\infty)$

Упражнения и задачи

1

1. Выберите формулы, которыми можно задать обратную пропорциональность.

$f(x)=-\dfrac{7}{x}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad f(x)=x+1$ $\quad f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ $\quad f(x)=\dfrac{5}{x}$

2. Дана функция $f: \{-5; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 5\} \to \mathbb{R}^*,\ f(x)=-\dfrac{4}{x}$.

а) Составьте таблицу значений функции f. б) Постройте график функции f.

3. Дана функция $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ g(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{x}$.

Заполните таблицу.

x	$-\sqrt{8}$	-2			1	$\sqrt{2}$	2	
$g(x)$			-1	$-\sqrt{2}$				$\dfrac{1}{2}$

4. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

Пусть $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{5}{x}$.

а) $A(1; -5)\in G_f$; б) $B(1; 5)\in G_f$; в) $C(10; 2)\in G_f$;

г) $D(-5; 1)\in G_f$; д) $O(0; 0)\in G_f$; е) $F\left(-25; -\dfrac{1}{5}\right)\in G_f$.

И/Л

5. В каких четвертях расположены ветви гиперболы, если:

а) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=-\dfrac{\sqrt{10}}{x}$; б) $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ g(x)=\dfrac{100}{x}$?

2

6. ***Работайте в парах!*** Постройте график функции:

а) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{6}{x}$; б) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=-\dfrac{10}{x}$.

Заполните пропуски: 1) Функция f – строго ________;

2) $f(x)>0$ при $x\in$ ____; $f(x)<0$ при $x\in$ ____.

3) Ветви гиперболы расположены в ___ и ___ четвертях.

7. Изобразите график функции:

а) $f\colon D(f)\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{12}{x}$, при $x\in[-4,4]\setminus\{0\}$;

б) $g\colon D(g)\to\mathbb{R}^*,\ g(x)=-\dfrac{20}{x}$, при $x\in[-10,10]\setminus\{0\}$.

8. График функции $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{k}{x}$, проходит через точку $A(2,1)$. Проходит ли график G_f через точки:

а) $B(1;2)$; б) $C(-2;-1)$;

в) $D(-1;-2)$; г) $E\left(-2;\dfrac{1}{2}\right)$?

9. *Работайте в парах!* Изобразите в одной прямоугольной системе координат графики функций $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{1}{x}$, и $g\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ g(x)=-\dfrac{1}{x}$. Сформулируйте вывод.

10. Задайте формулой обратную пропорциональность, зная, что ее график проходит через точку:

а) $A(-3;12)$; б) $B(8;4)$; в) $C(1;-2)$.

11. Приведите примеры обратной пропорциональности из различных областей.

3

12. Изобразите график функции $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$:

а) $f(x)=\dfrac{2}{|x|}$; б) $f(x)=-\dfrac{2}{|x|}$.

Сформулируйте вывод.

13. Решите на множестве $\mathbb{R}^*$ графическим способом уравнение:

а) $\dfrac{6}{x}=5+x$; б) $-\dfrac{3}{x}=4x-1$; в) $\dfrac{2}{|x|}=x+1$.

14. *Исследуйте!* Докажите, что при $k<0$ и $a<0$ графики функций $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\dfrac{k}{x}$, и $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=ax+3$, пересекаются в II и IV четвертях.

15. Составьте и решите по одному примеру, аналогичному упражнениям **8**, **10**, **12**.

§4. Функция $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$

$\mathscr{A}=a^2$

- Задайте аналитически зависимость между длиной a стороны квадрата и его площадью.

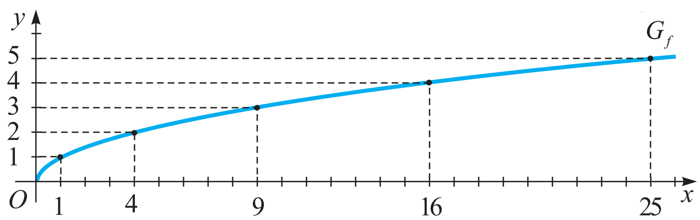
Объясняем Так как площадь квадрата со стороной длины a равна $\mathscr{A}=a^2$, мы получим $a=$ ☐. Значит, длина стороны квадрата является функцией от его площади. Формулой, выражающей соответствующую зависимость, является формула $y=\sqrt{x}$.

Определение Функция $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$, называется **функцией *радикал*** (***квадратный корень***).

- Изобразите график функции $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$.

Решение:

x	0	1	4	9	16	25
$f(x)$		1				



Запомните

Свойства функции $f\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$:

- $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow$ ☐ – нули функции f;
- $f(x)>0$ при $x\in$ ☐;
- для любых положительных чисел x_1 и x_2, где $x_1<x_2$, имеем $\sqrt{x_1}$ ☐ $\sqrt{x_2}$, значит, функция f является строго ☐;
- $O(0,0)\in G_f$.

Исследуйте! • *Истинно* или *Ложно*?

а) Точка $A(36,\ 6)$ принадлежит графику функции радикал.

б) Точка $B(10,\ -3)$ принадлежит графику функции радикал.

Решение:

а) $x=36,\ y=\sqrt{\square}=\square$. *Ответ*:

б) $x=10,\ y=\sqrt{\square}\neq\square$. *Ответ*:

Упражнения и задачи

1

1. Дана функция $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$. Найдите x, если $y\in\left\{1{,}5;\ 3\frac{1}{3};\ 5;\ 7;\ 8{,}1\right\}$.

2. Используя график функции радикал, вычислите y для $x\in\{1{,}5;\ 2;\ 7;\ 8;\ 20;\ 24\}$ (округлите до десятых).

3. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

Пусть G_f – график функции радикал.

а) $A(1;\ 2)\in G_f$; б) $B(100;\ 10)\in G_f$; в) $C(1;\ -1)\in G_f$;

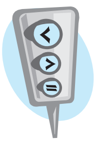
г) $D(81;\ 9)\notin G_f$; д) $E(3;\ \sqrt{3})\in G_f$; е) $F(0{,}01;\ 0{,}1)\in G_f$.

4. Установите, пересекает ли график функции радикал прямую:

а) $y=\sqrt{2}$; б) $y=3{,}5$; в) $y=101$; г) $y=-\sqrt{5}$.

2

5. ***Работайте в парах!*** Используя график функции радикал, сравните числа:



а) $\sqrt{4{,}5}$ и $\sqrt{7}$;

б) $\sqrt{13{,}5}$ и 3;

в) $\sqrt{4\frac{1}{2}}$ и 2,1;

г) $-\sqrt{11}$ и –2,5;

д) $-\sqrt{29}$ и $-\sqrt{27}$;

е) 0 и $\sqrt{1{,}1}$.

6. График функции $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$, проходит через точку с абсциссой:

а) 49; б) 0,04; в) 121; г) 625.

Найдите ординату этой точки.

7. ***Исследуйте!*** Найдите все целые значения аргумента x, при которых значения $y=\sqrt{x}$ меньше 10.

8. Изобразите график функции $f:D\to\mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$, если:

а) $0\le x\le 9$; б) $4\le x\le 16$.

3

9. Изобразите график функции $f:D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{x^2}$; б) $f(x)=\sqrt{|x|}$;

в) $f(x)=(\sqrt{x})^2$; г) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}}$.

10. Изобразите график функции $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{x}-3$; б) $f(x)=\sqrt{x}+1$;

в) $f(x)=5-\sqrt{x}$; г) $f(x)=1-\sqrt{x}$.

11. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\sqrt{x}=x-2$; б) $\sqrt{x}=\frac{8}{x}$;

в) $\sqrt{x}=6-x$; г) $x+\sqrt{x}+1=0$.

12. Составьте и решите по одному примеру, аналогичному упражнениям 9–11.

§5. Числовые последовательности

5.1. Понятие числовой последовательности

1 Чтобы участвовать в лицейских соревнованиях по баскетболу, Вася начал тренироваться каждый день. В первый день он тренировался 20 минут. В каждый следующий день в течение недели он увеличивал время тренировок на 5 минут. Сколько длилась тренировка Васи на седьмой день?

Объясняем Представим данные задачи в виде схемы:

1	2	3	4	5	6	7

конечная числовая последовательность

седьмой член последовательности

Ответ: ___ минут.

2 Запишем в порядке возрастания нечетные натуральные числа:

$\boxed{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots}$ ← бесконечная числовая последовательность

Обозначим: $a_1 = 1$, $a_2 =$ ___, $a_6 =$ ___ ← члены последовательности

3 Дана функция $f\colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$.

Значит, $f(1) = 1$, $f(2) = \frac{1}{2}$, $f(3) = \frac{1}{3}$, ..., $f(n) = \frac{1}{n}$, ...

$\boxed{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots}$ ← числовая последовательность ___

Обозначим: $a_2 =$ ___, $a_7 =$ ___, $a_{53} =$ ___, $a_n =$ ___.

Определение

- **Числовой последовательностью** называется функция, заданная на множестве $\mathbb{N}^*$, со значениями во множестве E, $E \subset \mathbb{R}$.
- Если функция f определена на конечном подмножестве последовательных элементов множества $\mathbb{N}^*$, то получаем **конечную числовую последовательность**. В противном случае последовательность называется **бесконечной числовой последовательностью**.

соседние члены

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ a_{n+1},\ \ldots$

член, предшествующий a_2 — член, следующий за a_n

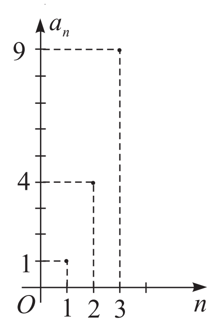
Числовая последовательность обозначается (a_n), а ее члены – $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$

5.2. Способы задания последовательности

Объясняем **1** Так как числовая последовательность – это функция, то ее, как и функцию, можно задать:

синтетически → *перечислением всех ее членов* → 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

синтетически → *графически* →



аналитически → *формулой n-ого члена* → $a_n = n^2$

словесно → например, последовательность квадратов натуральных чисел

Определение Формула, при помощи которой любой член последовательности выражается через его порядковый номер, называется **формулой общего члена** или **формулой *n*-ого члена** последовательности.

2 Рассмотрите и продолжите:

а) Запишите первые пять членов последовательности (a_n), заданной формулой n-ого члена:

$a_n = 3^n - 2.$

$a_1 = 3^1 - 2 = 1,\ \ a_2 = 3^{\square} - 2 = \square,\ \ a_3 = \square,\ \ a_4 = \square,\ \ a_5 = \square.$

б) Запишите формулу n-ого члена последовательности, заданной перечислением своих членов: $2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \ldots$

Так как $2 = \frac{2}{1}$, мы получим (a_n): $\frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \ldots$, где $a_n = \frac{\square}{n}$.

Замечание Для последовательности, заданной несколькими первыми членами, можно привести, как правило, не одну формулу общего члена.

Дана числовая последовательность: 0, 7, 14, 21, …

$a_1 = 0,\ \ a_2 = 0 + 7 = 7,\ \ a_3 = 7 + 7 = 14,\ \ a_4 = 14 + 7 = 21,\ \ldots$

Эту последовательность можно записать так: $a_1 = 0,\ \ a_{n+1} = a_n + 7.$

Такой способ задания последовательности называется ***рекуррентным*** (от латинского слова *recurrere* – возвращаться).

3 Исследуйте и продолжите:

Чтобы задать последовательность рекуррентным способом, надо:

задать один или несколько первых членов последовательности → $a_1 = 1,\ \ a_2 = 1$

указать формулу, позволяющую получить последующие члены, зная предыдущие → $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2;$ $\qquad a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3;$

$a_5 = a_4 + a_3 = \square + \square = \square;$ $\qquad a_6 = \square + \square = \square + \square = \square.$

Получим последовательность 1, 1, 2, 3, $\square$, $\square$, ..., которая называется последовательностью Фибоначчи.

Интересно и полезно

Последовательность Фибоначчи встречается во многих разделах математики: в геометрии, в комбинаторике, в теории чисел, в математическом анализе. Несколько столетий математики пытались задать последовательность Фибоначчи формулой общего члена. Наконец эта формула была найдена:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1175–1250 гг.)

5.3. Возрастающие и убывающие числовые последовательности

- Рассмотрите последовательности:

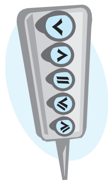
(a_n): 2, 4, 6, 8, …, $2n$, …

(b_n): 3, $\frac{3}{2}$, 1, $\frac{3}{4}$, …, $\frac{3}{n}$, …

(c_n): 1, 1, 1, 1, …

(x_n): 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

последовательность Фибоначчи



Сравните:

a_{n+1} ◯ a_n

b_{n+1} ◯ b_n

c_{n+1} ◯ c_n

x_{n+1} ◯ x_n

Определения

- Числовая последовательность называется **строго возрастающей**, если каждый ее последующий член больше предыдущего: $a_{n+1} > a_n$.
- Числовая последовательность называется **возрастающей**, если каждый ее последующий член не меньше предыдущего: $a_{n+1} \ge a_n$.
- Числовая последовательность называется **строго убывающей**, если каждый ее последующий член меньше предыдущего: $a_{n+1} < a_n$.
- Числовая последовательность называется **убывающей**, если каждый ее последующий член не больше предыдущего: $a_{n+1} \le a_n$.
- Числовая последовательность называется **постоянной**, если каждый ее последующий член равен предыдущему: $a_{n+1} = a_n$.

Применив соответствующие определения, заполните пропуски:

(a_n) – строго возрастающая числовая последовательность;

(b_n) – ________;

(c_n) – ________;

(x_n) – ________.

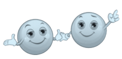
Определение

Возрастающие, строго возрастающие, строго убывающие и убывающие последовательности называются **монотонными**.

Последовательность (y_n): 2, 1, 4, 3, 6, …, $n+(-1)^n$, … не является монотонной.

Упражнения и задачи

1

1. Запишите в порядке возрастания последовательность однозначных нечетных натуральных чисел.
2. Запишите в порядке возрастания пять первых членов последовательности натуральных чисел, кратных 3.
3.  *Работайте в парах!* Запишите в порядке убывания последовательность правильных дробей со знаменателем 5.
4. Запишите пять первых членов последовательности, общий член которой выражается формулой:
   а) $a_n = 5-3n$; б) $a_n = n^2 - n$; в) $a_n = \frac{2n}{n+1}$; г) $a_n = 3\cdot(-1)^n$.
5. Дана последовательность (x_n). Запишите:
   а) два последовательных члена, которые предшествуют члену x_{n+1};
   б) два последовательных члена, которые следуют за членом x_{n+1}.
6. Найдите третий, седьмой и сотый члены последовательности (c_n), заданной формулой общего члена $c_n = \frac{3}{n+1}$.

7. Используя образец, определите, принадлежат ли числа 3, 5, 17 числовой последовательности, заданной формулой общего члена:
а) $a_n = 3n - 1$; б) $b_n = 2n^2 + 1$.

> ***Образец:***
> а) $a_n = 3n - 1$. Решим на множестве $\mathbb{N}^*$ уравнение: $3n - 1 = 3 \Leftrightarrow$
> $\Leftrightarrow 3n = 4 \Leftrightarrow n = \frac{4}{3} \notin \mathbb{N}^*$.
> *Ответ*: Число 3 не является членом последовательности (a_n).

8. ***Работайте в парах!***
Последовательность (b_n) задана рекуррентным способом: $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 3b_n + 1$. Запишите первые пять членов этой последовательности.

2

9. Запишите первые пять членов последовательности:
а) натуральных чисел, которые при делении на 4 дают остаток 3;
б) в которой член a_n равен остатку от деления n на 3.

10. Запишите и изобразите точками в прямоугольной системе координат первые пять членов последовательности, заданной формулой:
а) $a_n = 2 \cdot (-1)^n$; б) $a_n = 1 - n$.

11. Найдите третий, седьмой и двенадцатый члены последовательности, заданной формулой:
а) $a_n = \frac{(-1)^n + (-1)^{n+1}}{2}$; б) $b_n = \frac{2^n}{2n+1}$; в) $c_n = \frac{(-1)^n}{2n}$.

12. ***Исследуйте!*** Определите, какая из заданных последовательностей имеет формулу общего члена $a_n = \frac{2n-1}{n^2+1}$:
а) $\frac{1}{3}, \frac{3}{7}, \frac{7}{13}, \frac{13}{21}, \ldots$; б) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{7}{11}, \ldots$;
в) $\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \frac{7}{17}, \ldots$

13. Принадлежит ли числовой последовательности, заданной формулой общего члена $a_n = n^2 - 7n + 23$, число: а) 11; б) 31; в) 46?

14. Сколько отрицательных членов содержит последовательность, заданная формулой $a_n = 5n - 21$?

15. Запишите первые пять членов последовательности, заданной рекуррентно:
а) $a_1 = 27$, $a_{n+1} = \frac{81}{a_n}$; б) $a_1 = 0{,}1$, $a_2 = -0{,}1$, $a_{n+2} = 3a_n + a_{n+1}$;
в) $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$; г) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n - 5$.

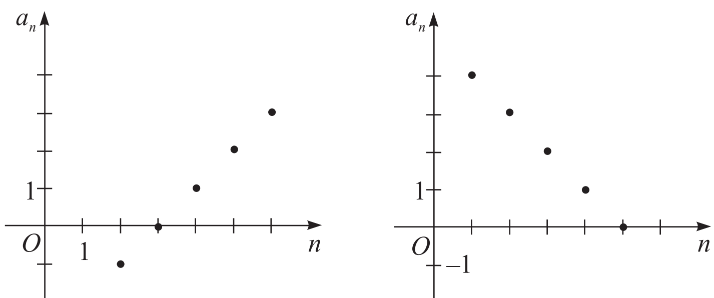
16. ***Работайте в группах!***
Используя образец, докажите, что последовательность, заданная формулой:
а) $a_n = 2 - 3n$, является строго убывающей;
б) $a_n = 2n - 5$, является строго возрастающей.

> ***Образец:***
> Докажите, что последовательность, заданная формулой $a_n = \frac{1}{5}n + 2$, является строго возрастающей.
> *Доказательство*:
> $a_{n+1} = \frac{1}{5}(n+1) + 2$;
> $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}n + \frac{1}{5} + 2 - \frac{1}{5}n - 2 = \frac{1}{5} > 0$;
> $a_{n+1} - a_n > 0 \Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$.
> Значит, последовательность (a_n) строго возрастающая.

3

17. Задайте при помощи формулы для n-ого члена последовательность:
а) 1, –2, 3, –4, 5, …;
б) 2, 4, 8, 16, 32, …;
в) $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \ldots$

18. Конечная последовательность задана графически. Задайте ее аналитически.



а) б)

19. Задайте рекуррентным способом последовательность: 5, –5, 5, –5, ….

20. Последовательности (x_n) и (y_n) заданы формулами n-ого члена: $x_n = 2n - 1$ и $y_n = n^2$. Если записать в порядке возрастания общие члены этих двух последовательностей, получится новая последовательность (c_n). Задайте эту последовательность формулой n-ого члена.

21. Докажите, что последовательность, заданная формулой:

а) $a_n = \dfrac{n+1}{2n-1}$, является строго убывающей; б) $c_n = \dfrac{3n+4}{n+2}$, является строго возрастающей.

22. ***Исследуйте!*** Последовательность (a_n) задана формулой общего члена $a_n = 2^n$.
Верно ли равенство $a_{n+1} + a_{n+2} = 6a_n$?

23. ***Работайте в группах!*** Проект *Приложения функций и числовых последовательностей в различных областях*.

Упражнения и задачи на повторение

1

1. Назовите три элемента функции:

а) $f: \{-2; -1; 0; 1; 2\} \to \{0; 1; 4\}$, $f(x) = x^2$; б) $g: \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$; в) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 3x - 10$.

2. ***Работайте в парах!*** Выберите формулы, задающие функцию:

а) I степени;
б) постоянную;
в) прямую пропорциональность;
г) обратную пропорциональность;
д) радикал.

$\boxed{f(x) = 2 - 3x}$ $\boxed{h(x) = 6,(7)x}$ $\boxed{g(x) = -\sqrt{10}}$ $\boxed{p(x) = x^2 + 1}$ $\boxed{r(x) = \sqrt{x}}$ $\boxed{g(x) = -\dfrac{1}{3x}}$

3. Задайте таблицей функцию:

а) $f: \{-3; -2; 0; 1; 3; 5\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x + 4$;

б) $f: \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\} \to \mathbb{N}$, $f(x) = |x|$;

в) $f: \{x \in \mathbb{N} \mid -2x \geq 9\} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = x^2 + 1$.

4. Вычислите $f(1)$, $f(-2)$, $f(5)$, $f(0{,}1)$, если:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 8$;

б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2,(3)$;

в) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{21}{x}$;

г) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$.

5. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?

Все следующие функции заданы верно:

а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2|x|$;

б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$;

в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -\dfrac{3}{x}$;

г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x + 1$.

Объясните.

И/Л

6. ***Работайте в парах!*** Найдите область определения функции, заданной формулой:

а) $f(x) = \sqrt{x} + 2$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$;

в) $f(x) = (x-3)^2 + 1$; г) $f(x) = -5\sqrt{x-2}$;

д) $f(x) = 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$; е) $f(x) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$.

7. Впишите соответствующее число:

а) $A\left(\dfrac{2}{3}; \square\right) \in G_f$, где $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 10$;

б) $B(2{,}5; \square) \in G_f$, где $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -20x$;

в) $C(\square; -11) \in G_f$, где $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{8}{x}$;

г) $D(\square; 100) \in G_f$, где $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$.

8. Запишите первые шесть членов последовательности (c_n), заданной рекуррентным способом: $c_1 = 2$, $c_2 = 1$, $c_{n+1} = 2c_{n-1}$.

9. Последовательность (a_n) задана формулой общего члена $a_n = 3n - 4$.

а) Запишите первые десять членов последовательности.

б) Изобразите полученные члены в прямоугольной системе координат.

10. Найдите седьмой член последовательности (a_n): $-7, -3, 1, 5, \ldots$

2

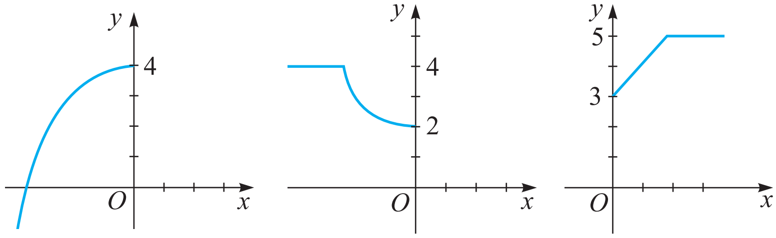
11. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, если:

а) $a = 5$, $b = -2$; б) $a = 0$, $b = 0$;

в) $a = 0$, $b = -3{,}5$; г) $a = -5$, $b = 0$.

12. Натуральное число m при делении на 4 дает частное n и остаток 0. Выразите в виде формулы зависимость между m и n.
а) Найдите значение функции при $n = 100$.
б) Найдите область определения и множество значений функции.

13. ***Работайте в группах!***
Дополните график так, чтобы:
а) он являлся графиком некоторой функции;
б) он не являлся графиком некоторой функции.

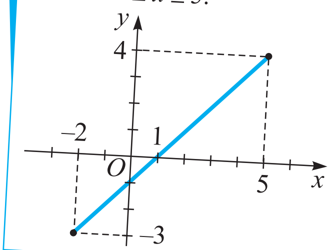


14. Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = 1{,}5x - 2$; б) $f(x) = -2x - 3$; в) $f(x) = -x + 3{,}6$.
Определите свойства функции f.

15. Изобразите график функции $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{k}{x}$, если:
а) $k = -\dfrac{1}{2}$; б) $k = 0{,}2$; в) $k = -\dfrac{2}{5}$; г) $k = 1\dfrac{2}{3}$.
Определите свойства функции f.

16. Впишите такое число, при котором функция f будет: 1) строго возрастающей; 2) строго убывающей.
а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \square \cdot x + 1$; б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \square \cdot x$;
в) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\square}{x}$; г) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = -\dfrac{\square}{x}$;

Образец:
$f: D(f) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$,
если $-2 \le x \le 5$.



17. Изобразите график функции $f: D(f) \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = \dfrac{1}{4}x + 2$, если $-5 \le x \le 5$; б) $f(x) = -3{,}8x$, если $0 \le x \le 7$;
в) $f(x) = -\dfrac{1}{4x}$, если $1 \le x \le 6$; г) $f(x) = \dfrac{5}{x}$, если $-7 \le x \le -1$;

18. ***Работайте в парах!*** Впишите такое число, при котором график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = \square \cdot x - 5$; б) $f(x) = -\square \cdot x + \sqrt{11}$;
в) $f(x) = \square \cdot x$; г) $f(x) = -\square\, x$
образует с положительным направлением оси Ox: 1) острый угол; 2) тупой угол.

19. График функции $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$, проходит через точку с абсциссой:
а) 25; б) 100; в) 144.
Найдите ординату этой точки.

20. Определите, принадлежит ли точка, у которой абсцисса равна ординате, графику функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = -3x + 1$; б) $f(x) = x - 0{,}8$; в) $f(x) = -5x$; г) $f(x) = 2x + \sqrt{5}$.

21. ***Работайте в группах!*** Известно, что сумма денег, выдаваемая в кредит на t лет под $r\%$, вычисляется по формуле $S = L(1 + rt)$, где L – сумма денег без годового процента. Пусть L и r – постоянные величины.
а) Какая зависимость существует между S и t? Обоснуйте.
б) Господин Михайлов инвестировал в строительство 10 000 леев под 17% годовых. Какую сумму денег он получит по истечении: 1 года; 2 лет; x лет? Выразите зависимость S от t в случае инвестиции денег на x лет.
в) Чему равен угловой коэффициент графика функции, полученной в пункте б)?
Учитывая условие задачи, объясните, какой смысл имеет угловой коэффициент.

22. Последовательность (x_n) задана формулой общего члена $x_n = -n^2 + 4n$. Под каким номером в этой последовательности стоит число -45?

23. Начиная с какого номера все члены последовательности, заданной формулой общего члена, будут больше 100?

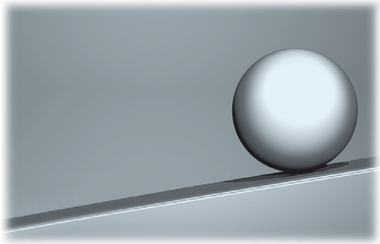
24. Дана функция $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R},\ f(x) = 2^x$.
а) Найдите шестой член последовательности, соответствующей данной функции.
б) Определите, под каким номером в этой последовательности стоит число 64.

3

25. Принадлежит ли графику функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x + 5$, точка пересечения графиков функций $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x + 5$, и $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -2x - 5$? Обоснуйте.

26. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -3x + 1$.
а) Вычислите $f(f(-2));\ f(f(f(0)))$.
б) При каких значениях x имеет место равенство $f(x) = f(f(x))$?

27. Шар катится по склону вниз. В первую секунду он проходит 0,6 м, а за каждую следующую секунду его скорость увеличивается на 0,6 м/с. Сколько времени будет катиться шар, если длина склона 6 метров?



Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. а) Заполните пропуск так, чтобы функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \square\, x + 3$, была строго убывающей.
б) Постройте график функции f.
в) Найдите нули функции f.
г) Определите знак функции f.
д) Укажите угловой коэффициент графика функции f.

2. *Истинно* или *Ложно*?
Дана функция $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\dfrac{7}{x}$.
$A\left(\dfrac{1}{7},\ 49\right) \in G_f$.

И/Л

3. Найдите значения функции $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$, при заданном значении аргумента 961.

4. а) Запишите формулу, выражающую зависимость длины окружности от ее радиуса.
б) Является ли эта зависимость прямо пропорциональной? Обоснуйте ответ.

5. Последовательность (x_n) задана формулой общего члена:
$$x_n = n^2 - 7n + 6.$$
а) Запишите первые пять членов этой последовательности.
б) Определите, под каким номером в этой последовательности стоит число 24.

Вариант 2

1. а) Заполните пропуск так, чтобы функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \square\, x - 5$, была строго возрастающей.
б) Постройте график функции g.
в) Найдите нули функции g.
г) Определите знак функции g.
д) Укажите угловой коэффициент графика функции g.

2. *Истинно* или *Ложно*?
Дана функция $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ g(x) = \dfrac{15}{x}$.
$B\left(-\dfrac{1}{3};\ -5\right) \in G_g$.

И/Л

3. Найдите значения функции $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$, при заданном значении аргумента 841.

4. а) Запишите формулу, выражающую зависимость скорости v от времени t при заданном расстоянии s.
б) Является ли эта зависимость обратно пропорциональной? Обоснуйте ответ.

5. Последовательность (x_n) задана формулой общего члена:
$$x_n = n^2 - n + 6.$$
а) Запишите первые пять членов этой последовательности.
б) Определите, под каким номером в этой последовательности стоит число 12.

Глава 5 Уравнения II степени с одним неизвестным

Успех – это сумма небольших усилий, повторяемых изо дня в день.
Роберт Кольер

§1. Понятие уравнения II степени с одним неизвестным

1 На Рождественские праздники все члены семьи Григорьевых приготовили друг другу подарки. Под елкой оказалось 30 подарков. Сколько человек в семье Григорьевых?

Решаем Пусть семья Григорьевых состоит из x человек. Каждый член семьи приготовил всего $(x-1)$ подарков. Значит,

$x \cdot (x-1) = 30 \Leftrightarrow \boxed{x^2 - x - 30 = 0}$ ⟵ уравнение II степени с одним неизвестным

$x^2 - x - 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5x - 30 = 0 \Leftrightarrow x(x-6) + 5(x-6) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-6)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x - 6 = 0$ или $x + 5 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 6$ или $x = -5$ – не удовлетворяет смыслу задачи.

Ответ: Семья состоит из 6 человек.

Определение Уравнение вида $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$,

первый коэффициент; второй коэффициент; свободный член

где $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, называется **уравнением II степени с одним неизвестным**.

При $b = 0$, $c \neq 0$ имеем $ax^2 + c = 0$	При $b \neq 0$, $c = 0$ имеем $ax^2 + bx = 0$	При $b = 0$, $c = 0$ имеем $ax^2 = 0$

неполные уравнения II степени с одним неизвестным

2 Рассмотрите и дополните:

а) $5x^2 - 7x - 12 = 0$;
$a = 5$; $b = -7$; $c = -12$.

б) $3x^2 + 2x - 5 = 0$;
$a = \square$; $b = \square$; $c = \square$.

в) $\sqrt{2}x^2 - x = 0$;
$a = \sqrt{2}$; $b = -1$; $c = 0$.

г) $x^2 - 4 = 0$.
$a = \square$; $b = \square$; $c = \square$.

- Какие из уравнений являются неполными?

Запомните

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\boxed{\frac{a}{a}}}x^2+\underset{\substack{\parallel \\ p}}{\boxed{\frac{b}{a}}}x+\underset{\substack{\parallel \\ q}}{\boxed{\frac{c}{a}}}=0,\quad a\neq 0,\quad a,b,c\in\mathbb{R}.$$

$x^2+px+q=0$ – приведенное уравнение II степени.

- Рассмотрите и дополните:

а) $3x^2+2x-1=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$

$a=\square;\ b=\square;\ c=\square;\ p=\square;\ q=\square.$

б) $2x^2+6x+5 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0$

$a=\square;\ b=\square;\ c=\square;\ p=\square;\ q=\square.$

Упражнения и задачи

1

1. Даны уравнения:

а) $2x^2-x-1=0$; б) $-\sqrt{3}x^2+5x+3{,}2=0$;

в) $6x^2-1=0$; г) $-2{,}5x^2+3x=0$;

д) $x^2+1=0$; е) $x^2=0$.

1) Для каждого из уравнений дополните:

$a=\square;\ b=\square;\ c=\square.$

2) Определите, какие из уравнений являются неполными квадратными уравнениями.

2. Найдите первый коэффициент, второй коэффициент и свободный член уравнения II степени с одним неизвестным:

а) $x^2+x+1=0$; б) $-0{,}7x^2-3x+0{,}5=0$;

в) $\sqrt{7}x^2+2=0$; г) $-7x^2-5=0$;

д) $x^2=0$; е) $\sqrt{2}x^2-\sqrt{5}x=0$;

3. Дополните:

а) $6x^2-12x+18=0 \Leftrightarrow x^2-2x+3=0$

$a=\square;\ b=\square;\ c=\square;\ p=\square;\ q=\square.$

б) $-0{,}5x^2-x+4=0 \Leftrightarrow x^2+2x-8=0$

$a=\square;\ b=\square;\ c=\square;\ p=\square;\ q=\square.$

4. *Работайте в парах!* Пусть $a=3,\ b=-2$ и $c=8$. Используя эти данные, запишите уравнение II степени с одним неизвестным.

5. Даны: а) $p=2,\ q=-1{,}5$;

б) $p=-3,\ q=\sqrt{2}$;

в) $p=\frac{1}{2},\ q=\frac{3}{5}$.

Используя эти данные, запишите приведенное уравнение II степени с одним неизвестным.

2

6. Даны уравнения:

$x^2-\sqrt{3}=0,\quad -1{,}1x^2-5x=0,\quad 3x^2+x=5,$

$x^2+x+1=0,\quad -2x^2=x-5,\quad \sqrt{x}-3x^2=1,$

$\sqrt{5}x+\sqrt{2}=0,\quad 3x^2-6x+2=0,\quad 3x^2+2=0.$

Запишите уравнения II степени с одним неизвестным.

7. *Работайте в парах!* Дополните, чтобы получить приведенное уравнение II степени, равносильное данному.

а) $2x^2-x-4=0 \Leftrightarrow \square x^2-\square x-\square=0$;

б) $5x^2+x=0 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0$;

в) $-3x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow \square x^2+\square x-\square=0$;

г) $\sqrt{2}x^2+\sqrt{4}x+\sqrt{6}=0 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0$.

8. Запишите уравнение в виде $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$:

а) $(x-1)(x+1)=x(3x-2)$;

б) $(\sqrt{2}x+1)^2-3=2(5x-0{,}5)$;

в) $(x+1)(x+2)=(2x-1)(x-3)$;

г) $(x-5)(3x+2)=(5x-3)(x+4)$.

9. *Работайте в группах!* Запишите уравнение, равносильное данному.

а) $2x^2-4x+2=0 \Leftrightarrow \square$;

б) $-3t^2+t-\sqrt{5}=0 \Leftrightarrow \square$;

в) $4m^2-8m=0 \Leftrightarrow \square$;

г) $2z^2+5=0 \Leftrightarrow \square$.

10. Дополните, чтобы получить приведенное уравнение II степени.

а) $(2x+3)(2x-3)=-2x+3 \Leftrightarrow \square x^2+\square x-\square=0 \Leftrightarrow x^2+\square x-\square=0;$

б) $(1-x)(2x+5)-7=0 \Leftrightarrow \square x^2-\square x-\square=0 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0;$

в) $2-x^2=(1-\sqrt{5}x)(1+\sqrt{5}x) \Leftrightarrow \square x^2+\square x+\square=0 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0;$

г) $(2x+1)(1-3x)-5=0 \Leftrightarrow \square x^2-\square x-\square=0 \Leftrightarrow x^2+\square x+\square=0.$

11. Приведите по 3 примера уравнений II степени с одним неизвестным для каждого из 3 видов уравнений неполной формы.

12. Приведите по 3 примера приведенных уравнений II степени.

3

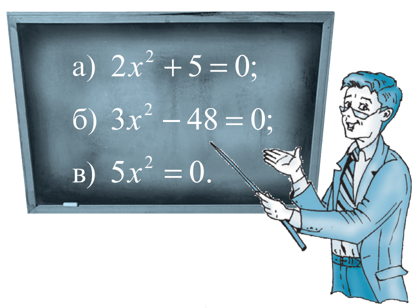
13. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, используя метод разложения на множители:

а) $x^2-4x+3=0;$ б) $x^2+4x+3=0;$
в) $x^2-5x+4=0;$ г) $x^2+12x+32=0.$

14. Произведение двух последовательных натуральных чисел на 109 больше их суммы. Найдите эти числа.

§2. Решение неполных уравнений II степени

2.1. Решение уравнений вида $ax^2+c=0,\ a\neq 0,\ a, c\in\mathbb{R}$



1 Учитель предложил учащимся решить уравнения:

а) Дима сразу же ответил, что первое уравнение не имеет решений. Вы согласны с ним? Обоснуйте.

б) Исследуйте и продолжите решение уравнения $3x^2-48=0$.

Решение:

I способ

$3x^2-48=0 \Leftrightarrow 3(x^2-16)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3(x+4)(x-4)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+4=0$ или $x-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\square$ или $x=\square$.

II способ

$3x^2-48=0 \Leftrightarrow 3x^2=48 \Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\square$ или $x=\square$.

Ответ: $S=\{\square;\ \square\}$.

в) $5x^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$

Ответ: $S=\{0\}$.

2 Рассмотрите и прокомментируйте схему:

$\boxed{ax^2+c=0}$, $a\neq 0,\ a, c\in\mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$\boxed{x^2=-\frac{c}{a}}$

$\boxed{-\frac{c}{a}>0} \rightarrow \boxed{S=\left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}};\ \sqrt{-\frac{c}{a}}\right\}}$

$\boxed{-\frac{c}{a}=0} \rightarrow \boxed{S=\{0\}}$

$\boxed{-\frac{c}{a}<0} \rightarrow \boxed{S=\varnothing}$

2.2. Решение уравнений вида $ax^2+bx=0,\ a\neq 0,\ a, b\in\mathbb{R}$

Образец:

$3x^2-x=0 \Leftrightarrow x(3x-1)=0 \Leftrightarrow x=0$

или $3x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ или $x=\frac{1}{3}$.

Ответ: $S=\left\{0;\ \frac{1}{3}\right\}$.

Рассмотрите образец и продолжите решение:

$2x^2+18x=0 \Leftrightarrow 2x\cdot(\square+\square)=0 \Leftrightarrow \square=0$

или $\square+\square=0 \Leftrightarrow x=\square$ или $x=\square$.

Ответ: $S=\{\square;\ \square\}$.

Упражнения и задачи

1

1. Дополните, чтобы получить уравнение вида $ax^2+c=0,\ a\neq 0,\ a, c\in\mathbb{R}$:

а) $2x^2-\square=0$; б) $-3\square+5=0$;

в) $\square x^2-\square=0$; г) $\sqrt{2}x^{\square}+\square=0$;

д) $\square x^2+\square=0$; е) $\square-2x^2=0$.

2. Даны уравнения:

$x^2-25=0$, $\sqrt{7}x^2-x-1=0$,

$2x^2-4=0$, $x^2-x=-1$,

$6x^2-5x=0$, $x^2+16=0$.

а) Выберите уравнения вида $ax^2+c=0,\ a\neq 0,\ a, c\in\mathbb{R}$.

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ выбранные уравнения.

3. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $3x^2-27=0$; б) $t^2-121=0$;

в) $-5u^2+125=0$; г) $-2z^2-32=0$.

4. *Работайте в парах!* Дополните, чтобы получить уравнение вида $ax^2+bx=0,\ a\neq 0,\ a, b\in\mathbb{R}$:

а) $2x^2+\square x=0$; б) $-\sqrt{5}x^2-\square x=0$;

в) $\square x^2+1{,}5x=0$; г) $\square x^2-\square x=0$;

д) $\square x^{\square}+\square x=0$; е) $\square x^{\square}-\square x=0$.

5. Даны уравнения:

$x^2-2x=3$, $x^2-5x=0$, $x^2+\sqrt{5}=0$,

$2x^2+10x=0$, $x^2+x+1=0$, $-3x^2+27x=0$.

а) Выберите уравнения вида $ax^2+bx=0,\ a\neq 0,\ a, b\in\mathbb{R}$.

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ выбранные уравнения.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $y^2-\sqrt{10}y=0$; б) $1{,}4t^2+2{,}8t=0$; в) $-3z^2+9z=0$.

7. Найдите решения уравнения:

а) $4{,}82x^2=0$; б) $-50t^2=0$;

в) $3\sqrt{2}z^2=0$; г) $-0{,}8y^2=0$.

2

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(x-1)(x+1)=2(x^2-5)$; б) $2x+(x-1)^2=3x^2+8$; в) $(5x-1)^2-1=0$;

г) $(t+3)(t-5)=-15$; д) $17-(a-3)(a-4)=-a^2+2a$; е) $8z^2-(z+3)^2=-6(z+4)$.

9. *Работайте в группах!* Найдите действительные решения уравнения:

а) $4x^2-6x+8=2x^2+x+8$; б) $20-5x^2=x^2+20-x$;

в) $-7t^2+10t+10=10t+3$; г) $1-4y+5y^2=y^2-4y+1$.

10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-2x+1=0$; б) $4t^2+4t+1=0$; в) $z^2-6z+9=0$; г) $25a^2+10a+1=0$.

$\square\ \square\ \boxed{3}$

11. При каких значениях x верно равенство:

а) $(3x+1)^2=3x+1$; б) $(x+3)^2=(x-4)^2$?

12. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение с неизвестным x:

а) $x^2=a$; б) $x^2=a^2$; в) $x^2+2b=0$; г) $x^2+16b^2=0$.

§3. Решение уравнений вида $a(x+m)(x+n)=0,\ a\in\mathbb{R}^*$

Образец:

$3(x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x-1=0$ или $x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ или $x=-2$.

Ответ: $S=\{-2,\ 1\}$.

Рассмотрите образец и заполните пропуски, продолжив решение каждого уравнения:

а) $\sqrt{2}(x+3)(x+1{,}5)=0 \Leftrightarrow \square=0$ или $\square=0$

$\Leftrightarrow x=\square$ или $x=\square$.

Ответ: $S=\square$.

б) $(5x-15)(x+\sqrt{5})=0 \Leftrightarrow 5(x-\square)(x+\sqrt{5})=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-\square=0$ или $x+\square=0 \Leftrightarrow x=\square$ или $x=\square$.

Ответ: $S=\square$.

Упражнения и задачи

$\boxed{1}\ \square\ \square$

1. Заполните, чтобы получить уравнение вида $(x+m)(x+n)=0$, затем решите полученное уравнение:

а) $(x+\square)(x-20)=0$; б) $(x-2{,}3)(x+\square)=0$; в) $(x-\square)(x+\square)=0$; г) $(\square-x)(\square+x)=0$.

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(2x+4)(x-\sqrt{7})=0$; б) $(t-\sqrt{15})(5t-20)=0$; в) $(3z-1)(3z+1)=0$; г) $(6-2x)(3x+12)=0$.

3. *Работайте в парах!* Найдите действительные решения уравнения:

а) $-3(x+1)(x-2)=0$; б) $\sqrt{2}(t-3)(7-t)=0$; в) $3{,}2(z+1{,}2)(z+7{,}8)=0$; г) $-5{,}5(1-x)(3+x)=0$.

$\square\ \boxed{2}\ \square$

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{3x+2}{1{,}2}\cdot\frac{1-2x}{3}=0$; б) $(2+\sqrt{2}x)(11-\sqrt{11}x)=0$;

в) $(\sqrt{7}x-7)(10-\sqrt{10}x)=0$; г) $\frac{\sqrt{3}x-3}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}x-5}{\sqrt{5}}=0$.

5. Приведите уравнение к виду $a(x+m)(x+n)=0,\ a\neq 0$:

а) $(x+10)^2-4(x+10)=0$; б) $(x-3{,}5)^2+2(x-3{,}5)=0$;

в) $(x-\sqrt{21})^2-x+\sqrt{21}=0$; г) $x-4{,}5+2(x-4{,}5)^2=0$.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение методом разложения на множители:

а) $(x-3)^2-4(x-3)=0$; б) $1{,}5(x+2)-(x+2)^2=0$;

в) $(5x+20)^2-(x+4)=0$; г) $2(x+6)+(6x+36)^2=0$.

7. ***Исследуйте!*** При каких значениях x значение функции f равно 0, если:

а) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3(1-x)(2+x)$; б) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-8(10-x)(10+x)$;

в) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(5+x)^2-5-x$; г) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2-x+6(2-x)^2$.

8. Найдите сумму решений уравнения:

а) $5(x+18)(x-4)=0$;

б) $-\sqrt{13}(1-a)(1+a)=0$;

в) $2{,}14(t-35)(t+105)=0$;

г) $-4(5{,}1-z)(6{,}9-z)=0$.

9. Найдите произведение решений уравнения:

а) $(x-7{,}5)(x+4)=0$;

б) $3(t-\sqrt{2})(t-\sqrt{12{,}5})=0$;

в) $-\sqrt{21}(6{,}25-t)(4-t)=0$;

г) $-2{,}84(z+\sqrt{30})(z+\sqrt{7{,}5})=0$.

3

10. Рассмотрите образец и решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2+4x-21=0$; б) $25t^2-10t-3=0$;

в) $49a^2-14a-8=0$; г) $3z^2-2\sqrt{3}z-15=0$.

Образец:

$x^2-6x-40=0 \Leftrightarrow$

$x^2-6x+9-49=0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2-49=0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2-7^2=0 \Leftrightarrow$

$(x-3-7)(x-3+7)=0 \Leftrightarrow$

$(x-10)(x+4)=0 \Leftrightarrow x-10=0$

или $x+4=0 \Leftrightarrow x=10$ или $x=-4$

Ответ: $S=\{-4;\,10\}$.

11. Найдите сумму и произведение решений уравнения:

а) $-\sqrt{2}\left(x-\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{7}+1}{2}\right)=0$;

б) $2,(5)\left(x-\dfrac{6{,}3+3\sqrt{11}}{4}\right)\left(x+\dfrac{6{,}3-3\sqrt{11}}{4}\right)=0$;

в) $11t^2+2\sqrt{11}t-120=0$;

г) $-20z^2+4\sqrt{5}z+624=0$.

§4. Формула решения уравнения II степени с одним неизвестным

1 Рассмотрите решение:

а) $x^2+4x-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underbrace{(x^2+2\cdot 2x+2^2)}_{(x+2)^2}-2^2-5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)^2-9=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x+2=3$ или $x+2=-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=1$ или $x=-5$.

Ответ: $S=\{-5;\,1\}$.

б) $x^2-7x+15=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[x^2-2\cdot\dfrac{7}{2}x+\left(\dfrac{7}{2}\right)^2\right]-\left(\dfrac{7}{2}\right)^2+15=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2-\dfrac{49}{4}+15=0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{11}{4}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2=-\dfrac{11}{4}$.

Ответ: $S=\varnothing$.

В общем случае получим:

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \left[x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\boxed{b^2-4ac}}{\boxed{4a^2}}$$

?

положительное число

Δ – *дельта*, буква греческого алфавита → $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ ← **Дискриминант** уравнения $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$

$\boxed{\Delta < 0}$ → $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 < 0$ → $\boxed{S = \varnothing}$

$\boxed{\Delta > 0}$ → $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

или $x + \dfrac{b}{2a} = \dfrac{-\sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow$

$\boxed{x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ или } x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}}$ → $\boxed{S = \left\{\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a};\ \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}}$

$\boxed{\Delta = 0}$ → $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow$

$\boxed{x = -\dfrac{b}{2a}}$ → $\boxed{S = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}}$

Запомните

Формулы нахождения решений уравнений II степени с одним неизвестным $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}$: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$, где $\Delta = b^2 - 4ac$.

2 Рассмотрите и заполните пропуски, продолжив решение каждого уравнения:

а) $5x^2 - 3x - 2 = 0$;

$a = 5;\ b = -3;\ c = -2.$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-2) = 49 > 0$;

$x_1 = \dfrac{3 + \sqrt{49}}{10};\ x_2 = \dfrac{3 - \sqrt{49}}{10}.$

$x_1 = 1;\ x_2 = -\dfrac{2}{5}.$

Ответ: $S = \left\{-\dfrac{2}{5}; 1\right\}$.

б) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;

$a = 4;\ b = 12;\ c = 9.$

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$;

$x = \dfrac{12}{8}.$

$x = \square$.

Ответ: $S = \{\square\}$.

в) $x^2 - 5x + 7 = 0$;

$a = 1;\ b = -5;\ c = 7.$

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 7 =$

$= -3 \bigcirc \square$.

Ответ: $S = \square$.

Замечание

Если второй коэффициент уравнения II степени с одним неизвестным является четным числом, то есть $b = 2p$, то для решения уравнения можно использовать формулу:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a};\ x_2 = \frac{-p + \sqrt{\dfrac{\Delta}{4}}}{a},\ \text{где } \frac{\Delta}{4} = p^2 - ac > 0.$$

3 Докажите формулы для нахождения решений уравнений II степени при $b = 2p$.

Из истории

Папирусы и другие исторические документы доказывают, что уравнения II степени решали еще в Древнем Вавилоне (около 2000 лет до нашей эры).

Древнегреческие математики решали некоторые виды уравнений II степени с помощью геометрической интерпретации.

Общее правило решения уравнения II степени сформулировал немецкий математик М. Штифель (1486–1567 гг.). Французский математик Ф. Виет (1540–1603 гг.) вывел формулу решения уравнения II степени, но утверждения ученого распространялись только на положительные решения (он не признавал отрицательных чисел).

Франсуа Виет

Упражнения и задачи

1

1. Дополните, чтобы получить полное уравнение II степени с одним неизвестным:

а) $2x^2 - \square x + 8 = 0$;

б) $-5{,}2x^2 + x - \square = 0$;

в) $\square x^2 + 2x + 1 = 0$;

г) $\square x^2 - 3{,}1x + \sqrt{10} = 0$;

д) $-\sqrt{3}x^2 + \square x - \square = 0$;

е) $\square x^2 + \square x + \square = 0$.

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение методом разложения на множители:

а) $x^2 + 2x - 8 = 0$; б) $t^2 - 12t - 28 = 0$;

в) $4z^2 - 8z - 12 = 0$; г) $9a^2 + 6a - 63 = 0$.

3. Найдите дискриминант уравнения:

а) $x^2 + 2x - 8 = 0$; б) $t^2 - 12t - 28 = 0$;

в) $4z^2 - 8z - 12 = 0$; г) $9a^2 + 6a - 63 = 0$;

д) $-2t^2 + 3t - 1 = 0$; е) $z^2 - 6z + 10 = 0$.

4. *Работайте в парах!* Определите знак дискриминанта уравнения:

а) $2x^2 - x + 9 = 0$; б) $5t^2 + 10t - 1 = 0$;

в) $-z^2 + 1{,}5z - 4 = 0$; г) $5u^2 - \sqrt{5}u - 20 = 0$.

5. Найдите дискриминант и определите количество решений уравнения:

а) $25x^2 - 10x + 1 = 0$; б) $t^2 - 8t + 16 = 0$;

в) $49z^2 + 14z + 1 = 0$; г) $2u^2 - 6\sqrt{2}u + 9 = 0$.

6. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, используя формулы для нахождения решений уравнения II степени с одним неизвестным:

а) $x^2 + 2x - 8 = 0$; б) $t^2 - 12t - 28 = 0$;

в) $4z^2 - 8z - 12 = 0$; г) $9a^2 + 6a - 63 = 0$;

д) $25x^2 - 10x + 1 = 0$; е) $t^2 - 8t + 16 = 0$.

7. Покажите, что уравнение равносильно уравнению II степени с одним неизвестным:

а) $(4x-2)(4x+1) + (x-5)^2 = 21$;

б) $(2x+1)^2 - 3x(x-5) - 1 = 0$;

в) $(x-3)(x^2 - 2x + 4) = x(x-2)(x+5)$.

2

8. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $4x^2 + 7x + 3 = 0$; б) $8t^2 + t - 75 = 0$;

в) $z^2 + z - 56 = 0$; г) $u^2 - u - 1 = 0$;

д) $x^2 - x - 56 = 0$; е) $3u^2 - 11u - 14 = 0$.

9. *Работайте в группах!* Найдите, при каких значениях x истинно равенство:

а) $(4x-5)^2 = 4(x-5)^2$; б) $(4x+5)^2 = 5x^2 + 40x$;

в) $(x+2)^2 + (x-3)^2 = 13$; г) $(2x+1)(2x-1) = 3x^2 + 2x$.

10. Найдите сумму и произведение решений уравнения:

а) $x^2 - 2x - 9 = 0$; б) $x^2 - x - 12 = 0$;

в) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; г) $2t^2 - 5t - 10 = 0$.

11. *Работайте в парах!* При каких значениях x:

а) выражение $x^2 - 10x + 26$ принимает значение 1;

б) значения выражений $x^2 - 4x - 3$ и $2x - 11$ равны;

в) значения выражений $-2x^2 + 5x + 6$ и $4x^2 + 5x$ равны?

12. Найдите целые решения уравнения:

а) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x = \frac{4}{5}x^2 + \frac{3}{4}$;

б) $\frac{8t-7}{3} = \frac{t^2+t}{2}$; в) $\frac{z^2-1}{2} - 11z = 11$.

13. Найдите три последовательных целых числа, сумма квадратов которых равна 869.

14. *Исследуйте!* Существуют ли значения t, при которых истинно равенство:

а) $9t^2 + 0{,}36 = 3t + 0{,}6$; б) $0{,}16t^2 - 1{,}2 = 0{,}4t - 1{,}44$?

Найдите эти значения, если они существуют.

15. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, применив формулы для нахождения решений в случаях, когда $b = 2k$:

а) $x^2 - 22x - 23 = 0$; б) $3t^2 - 14t + 10 = 0$;

в) $z^2 + 2z - 80 = 0$; г) $7u^2 - 20u + 14 = 0$;

д) $15x^2 - 22x - 37 = 0$; е) $5t^2 - 20t - 4 = 0$.

3

16. Найдите коэффициент b и решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x^2 + bx - 10 = 0$, зная, что 5 является его решением;

б) $(b-1)x^2 - (b+1)x - 72 = 0$, зная, что 3 является его решением.

17. Запишите уравнение II степени с одним неизвестным, множество решений которого есть:

а) $S = \left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}$; б) $S = \{2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}\}$.

18. Докажите, что число 12 является наименьшим значением выражения $x^2 - 10x + 37$.

§5. Решение приведенных уравнений II степени

Образец:
Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение
$x^2-7x-8=0$.

Решение:

Имеем $p=-7,\ q=-8$.

Тогда $\Delta_1=p^2-4q=(-7)^2-4\cdot(-8)=81$.

Уравнение имеет два решения:

$$x_1=\frac{-p-\sqrt{\Delta_1}}{2}=\frac{7-\sqrt{81}}{2}=\frac{7-9}{2}=-1;$$

$$x_2=\frac{-p+\sqrt{\Delta_1}}{2}=\frac{7+\sqrt{81}}{2}=\frac{7+9}{2}=8.$$

Ответ: $S=\{-1;\,8\}$.

- Рассмотрите образец и продолжите решение:
Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $x^2+7x-8=0$.

Решение:

Имеем $p=\boxed{}$, $q=\boxed{}$.

Тогда $\Delta_1=p^2-4q=\boxed{}^2-\boxed{}\cdot\boxed{}=81$.

Уравнение имеет два решения:

$$x_1=\frac{-p-\sqrt{\Delta_1}}{2}=\frac{\boxed{}-\boxed{}}{2}=\frac{\boxed{}-\boxed{}}{2}=\boxed{},$$

$$x_2=\frac{-p+\sqrt{\Delta_1}}{2}=\frac{\boxed{}-\boxed{}}{2}=\frac{\boxed{}-\boxed{}}{2}=\boxed{}.$$

Ответ: $S=\boxed{}$.

Упражнения и задачи

1

1. Запишите приведенное уравнение II степени, если:

а) $p=-2,\ q=3$; б) $p=3,\ q=1$; в) $p=\sqrt{5},\ q=-5$; г) $p=-1{,}2,\ q=2{,}5$.

2. Найдите Δ_1 уравнения:

а) $x^2-2x-15=0$; б) $x^2+2x-15=0$; в) $x^2-2x+15=0$; г) $x^2+2x+15=0$.

3. ***Работайте в парах!*** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-3x+2=0$; б) $x^2+3x+2=0$; в) $x^2-3x-2=0$; г) $x^2+3x-2=0$.

2

4. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2+3x-40=0$; б) $x^2-2x-48=0$;

в) $x^2+19x+88=0$; г) $x^2-3x-40=0$.

5. Найдите сумму и произведение решений уравнения:

а) $x^2+9x+20=0$; б) $x^2-16x+63=0$;

в) $x^2-x-56=0$; г) $x^2+0{,}5x-1{,}2=0$.

6. ***Работайте в парах!*** Не решая уравнение, определите знак его решений:

а) $x^2-18x+17=0$; б) $x^2-3x-1=0$;

в) $x^2+\sqrt{6}x+1=0$; г) $x^2+5x-6=0$.

7. Одним из решений уравнения $x^2+px-35=0$ является число 5. Найдите второе решение и коэффициент p.

8. Одним из решений уравнения $10x^2-33x+c=0$ является число –2. Найдите второе решение и коэффициент c.

9. ***Работайте в группах!*** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\dfrac{x(x-3)}{6}=\dfrac{x}{2}-1$; б) $\dfrac{x(x+1)}{4}=3-\dfrac{8+x}{4}$;

в) $\dfrac{x(x-5)}{3}=\dfrac{x}{2}+1$; г) $2-\dfrac{5+x}{5}=x^2-4$.

3

10. Дано уравнение $x^2+2x+c=0$ и $x_1,\ x_2$ – его решения. Зная, что $x_1-x_2=6$, найдите c.

11. Докажите, что уравнение $8x^2+213x-7=0$ не может иметь решения с одинаковыми знаками.

§6. Соотношения Виета

1 Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

1) $x^2-3x+2=0$; 2) $2x^2-7x+3=0$.

Исследуем

Уравнение Решения

1. $\boxed{x^2-3x+2=0} \rightarrow \boxed{x_1=1;\quad x_2=2}$

$-(x_1+x_2)$ $x_1\cdot x_2$ $x_1+x_2=3$ $x_1\cdot x_2=2$

Соотношения Виета

Уравнение

2. $\boxed{2x^2-7x+3=0} \Leftrightarrow$

Решения

$\Leftrightarrow \boxed{x^2-\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}=0} \rightarrow \boxed{x_1=\frac{1}{2};\quad x_2=3}$

$-(x_1+x_2)$ $x_1\cdot x_2$ $x_1+x_2=\frac{7}{2}$ $x_1\cdot x_2=\frac{3}{2}$

Соотношения Виета

Уравнение

$\boxed{\begin{array}{c} a\neq 0 \\ ax^2+bx+c=0 \end{array}} \Leftrightarrow$

Решения

$\Leftrightarrow \boxed{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0} \rightarrow \boxed{x_1;\quad x_2}$

$-(x_1+x_2)$ $x_1\cdot x_2$ $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

Соотношения Виета

Теорема

Если числа x_1 и x_2 являются решениями уравнения $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,$ $a, b, c\in\mathbb{R}$, то $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}. \end{cases}$

Доказательство:

Если x_1 и x_2 – решения уравнения $ax^2+bx+c=0$, то $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, где $\Delta=b^2-4ac>0$.

$$\boxed{x_1+x_2}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=\boxed{-\frac{b}{a}};$$

$$\boxed{x_1\cdot x_2}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{\cancel{b^2}-\cancel{b^2}+4ac}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\boxed{\frac{c}{a}},$$

ч. т. д. ►

Запомните

Для приведенного уравнения II степени $x^2 + px + q = 0$, решениями которого являются x_1 и x_2, имеем $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$

Теорема, обратная теореме Виета

Если действительные числа x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1 \cdot x_2 = q$, то x_1 и x_2 являются решениями уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство:

Имеем $x^2 + px + q = 0$, $-p = x_1 + x_2$, $q = x_1 \cdot x_2$.

Получим $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0$.

При $x = x_1$ имеем: $x_1^2 - (x_1 + x_2) \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 = x_1^2 - x_1^2 - x_1 \cdot x_2 + x_1 x_2 = 0$ – Истинно. Значит, x_1 – решение данного уравнения.

При $x = x_2$ имеем: $\square$ – Истинно, ч. т. д. ►

2 Исследуйте и заполните пропуски.

а) Составим приведенное уравнение II степени по его множеству решений $S = \{-2; 7\}$:

$x_1 = -2;\ x_2 = 7.$ $\quad x_1 + x_2 = \square;\quad x_1 \cdot x_2 = \square.$

$$x^2 \bigcirc \square x \bigcirc \square = 0.$$

Ответ: $x^2 \bigcirc \square x \bigcirc \square = 0.$

б) Применяя соотношения Виета, найдите решения уравнения:

$x^2 - 11x + 24 = 0$

$x_1 + x_2 = 11;\quad x_1 \cdot x_2 = 24$

$3 + 8 = 11 \quad 3 \cdot 8 = 24$

$S = \{3; 8\}$.

$x^2 - 3x - 10 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3; \\ x_1 \cdot x_2 = -10. \end{cases}$

$S = \{\square; \square\}$.

$x^2 + 5x - 14 = 0$

$\begin{cases} x_1 + x_2 = \square; \\ x_1 \cdot x_2 = \square. \end{cases}$

$S = \{\square; \square\}$.

• Дано уравнение $x^2 + px + q = 0$. Заполните таблицу:

x_1	x_2	p	q
2	–3		
–2		5	
	4	–2	
3			18
	1		–7

Интересно и полезно

Соотношения Виета можно применять в устном счете не только для нахождения решений приведенного уравнения II степени, но и для полного уравнения II степени, у которого есть решения.

Решим уравнение:

а) $\boxed{7}x^2-2x-5=0$

$y^2-2y-35=0$

$y_1=7;\ y_2=-5$

$x_1=\frac{7}{7};\ x_1=1;\ x_2=-\frac{5}{\boxed{7}}.$

Проверьте!

Ответ: $S=\left\{-\frac{5}{7};1\right\}$.

б) $\boxed{2}x^2+3x-9=0$

-18

$x_1=\frac{-6}{2};\ x_1=-3;\ x_2=\frac{3}{2}.$

Ответ: $S=\{\square;\square\}$.

в) $\boxed{4}x^2+x-5=0$

-20

$x_1=\frac{\square}{4};\ x_2=\frac{\square}{4};$

$x_1=\square;\ x_2=\square.$

Ответ: $S=\{\square;\square\}$.

Упражнения и задачи

1

1. Найдите решения уравнения методом проб.

а) $x^2-6x+5=0$; б) $x^2+2x+1=0$;
в) $t^2+8t-9=0$; г) $z^2-13z-14=0$.

2. Дано уравнение:

а) $x^2-3x-4=0$; б) $x^2+3x-4=0$;
в) $x^2+6x+5=0$; г) $x^2-4x+3=0$;

1) Не решая уравнение, найдите x_1+x_2 и $x_1\cdot x_2$, где x_1, x_2 – его решения.

2) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение и проверьте, правильно ли нашли x_1+x_2 и $x_1\cdot x_2$.

3. Найдите устно, применив соотношения Виета, сумму и произведение решений уравнения.

а) $x^2-5x-10=0$; б) $x^2+11x-12=0$;
в) $t^2+\sqrt{3}t-30=0$; г) $z^2-36z+320=0$.

4. *Работайте в парах!* Найдите решения уравнения и проверьте, верны ли они, применив теорему, обратную теореме Виета:

а) $x^2+16x+63=0$; б) $x^2+2x-48=0$;
в) $t^2+t-56=0$; г) $z^2-9z+20=0$.

2

5. Найдите устно сумму и произведение решений уравнения:

а) $x^2-37x+27=0$; б) $t^2-41t-371=0$;
в) $z^2-310z=0$; г) $y^2-20=0$.

6. *Работайте в парах!* Дано уравнение:

а) $2x^2-9x-10=0$; б) $5x^2+12x+7=0$.

Найдите, не решая уравнение, сумму и произведение его решений.

7. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение и выполните проверку с помощью теоремы, обратной теореме Виета:

а) $2x^2+7x-6=0$; б) $3x^2-4x-4=0$;
в) $7z^2-12z=0$; г) $-2t^2+32=0$.

8. *Исследуйте!* Определите знаки решений, не решая уравнение:

а) $x^2-18x+17=0$; б) $3x^2+x-15=0$;
в) $-5t^2+2t+7=0$; г) $2z^2+125z-8=0$.

9. Не решая уравнение, определите, имеет ли оно решение. Если имеет, определите знаки решений:

а) $x^2+6x-1=0$; б) $3x^2-x+10=0$;
в) $-t^2+8t+24=0$; г) $-\sqrt{5}z^2+z+1=0$.

10. *Работайте в группах!* Пусть:

а) $x_1=-2$ и $x_2=5$; б) $x_1=0{,}1$ и $x_2=10$;
в) $x_1=-1{,}5$ и $x_2=-4$; г) $x_1=3$ и $x_2=-0{,}5$.

Применив теорему, обратную теореме Виета, запишите уравнение II степени, решениями которого являются x_1 и x_2.

11. Число 8 является решением уравнения $x^2+px-56=0$. Найдите второе решение и коэффициент p.

12. Решением уравнения $10t^2-25t+c=0$ является число 5,5. Найдите второе решение и коэффициент c.

13. Разность решений уравнения $x^2-x+c=0$ равна 7. Найдите коэффициент c.

14. Разность решений уравнения $x^2 + 12x + m = 0$ равна 14. Найдите коэффициент m.

15. ***Работайте в парах!*** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x - 5} = 0$; б) $\dfrac{x^2 + 6x - 7}{x + 1} = 0$; в) $\dfrac{4t^2 - 1}{2t + 1} = 0$; г) $\dfrac{z^2 + 2z - 3}{z - 1} = 0$.

3

16. Докажите, что уравнение не может иметь решений с одинаковым знаком:

а) $5t^2 + 210t - 3 = 0$; б) $\sqrt{3}z^2 - 115z - 8 = 0$.

17. Методом проб, применив теорему Виета, найдите решение уравнения:

а) $t^2 - (\sqrt{5} + 3)t + 3\sqrt{5} = 0$; б) $t^2 - (n^2 - 3)t - 3n^2 = 0$.

18. При каких действительных значениях a уравнение $\dfrac{x^2 - 5x - 6}{x - a} = 0$ имеет единственное решение?

19. При каких действительных значениях a уравнение $\dfrac{t^2 - t - 6}{t - a} = 0$ имеет единственное решение?

§7. Разложение на множители выражений вида $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$

1 Запишите выражение $3(x-2)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$ в виде $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$.

Решение:

$3(x-2)\left(x - \dfrac{1}{3}\right) = 3x^2 - x - 6x + 2 = \boxed{3x^2 - 7x + 2}$.

• Разложите на множители выражение $3x^2 - 7x + 2$.

Решение:

Решим уравнение $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Вычислим $\Delta = 49 - 24 = 25$.

Тогда $x_1 = \dfrac{7+5}{6}$; $x_2 = \dfrac{7-5}{6}$; $x_1 = 2$; $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

Получим $3x^2 - 7x + 2 = 3(x-2)\left(x - \dfrac{1}{3}\right)$.

Запомните

Если $a \neq 0$ и $\Delta \geq 0$, то $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)}$, где $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, а x_1 и x_2 – действительные решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$.

В каком случае выражение вида $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, нельзя разложить на множители?

2 Рассмотрите и дополните.

Разложим на множители выражения:

а) $-2x^2 - 3x + 2$;

Решим уравнение

$-2x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$.

$\Delta = 9 + 16 = 25$. Значит, $x_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = -2$.

Тогда $\boxed{-2}x^2 - 3x + 2 = \boxed{-2}\left(x - \dfrac{1}{2}\right)(x - (-2)) =$

$a \quad (x - x_1)(x - x_2)$

$= (-2x + 1)(x + 2)$.

б) $7x^2 + 9x + 2$.

Решим уравнение $7x^2 + 9x + 2 = 0$.

$x_1 = \square$; $x_2 = \square$.

$\boxed{7}x^2 + 9x + 2 = \boxed{}\,(x \bigcirc \square)(x \bigcirc \square) =$

$a \quad (x - x_1)(x - x_2)$

$= (\square \bigcirc \square)(\square \bigcirc \square)$.

Упражнения и задачи

1

1. *Работайте в парах!* Дополните:

а) $x^2-4x+4=(x-\square)^2$;
б) $z^2-3z-4=(z-\square)(z+\square)$;
в) $9x^2+6x+1=(3x+\square)^2$;
г) $t^2+6t+5=(t+\square)(t+\square)$.

2. Выполните действия:

а) $(x+1)(x+2)$; б) $6(x+3)(x-4)$; в) $(2t-1)(t-5)$; г) $(z-0,5)(z+2)$.

3. Разложите на множители:

а) $3x^2-x$; б) $20x^2-5$; в) $x^2+3x-10$;
г) $2x^2-x-15$; д) $-8t^2+4t+12$; е) $3x^2-x-4$.

2

4. *Работайте в группах!*
Разложите на множители:

а) $3x^2+x-14$; б) $-x^2+3x+4$;
в) $18x^2+6x-84$; г) $4x^2-x-18$;
д) $-t^2+4+5$; е) $3z^2+4z-20$.

5. Найдите наименьшее значение выражения:

а) $x^2-8x+11$; б) x^2-6x-3.

6. Найдите наибольшее значение выражения:

а) $-3(x+1)^2+5$; б) $-x^2+6x$.

7. *Работайте в парах!* Запишите четыре выражения вида ax^2+bx+c, $a\neq 0$, для которых:

а) $x_1=-2$ и $x_2=0,5$; б) $x_1=\sqrt{3}$ и $x_2=1-\sqrt{3}$;
в) $x_1=3$ и $x_2=1$; г) $x_1=-1$ и $x_2=-4$.

3

8. При каких действительных значениях c выражение x^2+4x+c можно разложить на множители?

9. Даны выражения $3x^2-2x-1$ и x^2-4x-c. При каких действительных значениях c эти выражения имеют один и тот же линейный множитель?

10. Докажите, что при любых значениях неизвестного t значение выражения $t^2+4t+10$ положительно.

§8. Решение задач с помощью уравнений II степени

1 Произведение двух натуральных чисел равно 150. Найдите эти числа, если известно, что одно из них больше другого на 5.

Решение:

Пусть x – большее из чисел, тогда $x-5$ второе число. Согласно условию задачи, имеем $x(x-5)=150$.

Получим и решим уравнение II степени с одним неизвестным: $x^2-5x-150=0$.

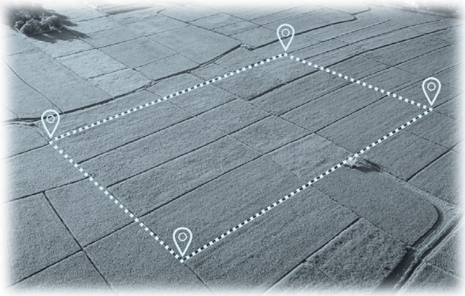
Имеем $\Delta=625$.

Значит, $x_1=\frac{5+25}{2}=15$ и $x_2=\frac{5-25}{2}=-10$.

Делаем вывод, что число $x_2=-10$ не является натуральным, значит $x_1=15$ – большее число. Тогда второе число будет равно $15-5=10$.

Ответ: 10 и 15.

2 Участок земли имеет форму прямоугольника, у которого одна из сторон на 10 м длиннее другой стороны. Фермер решил оградить участок забором. Определите длину забора, если площадь участка равна 1200 м².



Решение:

Пусть $AB = x$ м, тогда $BC = (x+10)$ м.

Зная, что площадь участка равна 1200 м², а площадь прямоугольника вычисляется по формуле $\mathscr{A}_{\square} = a \cdot b$, получим уравнение $x(x+10) = 1200$ или $x^2 + 10x - 1200 = 0$.

Решив уравнение II степени, получим:
$\Delta = 10^2 + 4 \cdot 1200 = 4900$; $x_1 = \frac{-10+70}{2} = 30$ и $x_2 = \frac{-10-70}{2} = -40$.

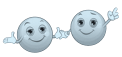
Отрицательное значение $x_2 = -40$ не соответствует условию задачи.

Значит, $AB = 30$ м, тогда $BC = 30 + 10 = 40$ (м). Так как периметр прямоугольника вычисляется по формуле $\mathscr{P}_{\square} = 2(a+b)$, выясняем, что забор будет длиной $2(30+40) = 2 \cdot 70 = 140$ (м).

Ответ: 140 м.

Упражнения и задачи

1

1. Произведение двух целых чисел равно 96. Найдите числа, зная, что одно из них на 4 меньше другого.
2. В кинозале количество стульев в каждом ряду на 4 больше, чем количество рядов. Сколько рядов в кинозале, если количество стульев в кинозале равно 780?
3.  ***Работайте в парах!*** Решите на множестве $\mathbb{Z}$ уравнение: $(2x-1)^2 - 2x^2 = 3x + 2 + x(3x-5)$.
4. Найдите $A \cap B$, где $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3x^2 + x - 4 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x \le 4\}$.
5. Сумма квадратов двух целых чисел равна 10. Найдите числа, если известно, что одно из них на 2 больше другого.
6. Садовник должен засеять и оградить клумбу прямоугольной формы, одна сторона которой на 5 м длиннее другой.
   а) Найдите длину ограды, если площадь клумбы равна 6 м².
   б) Сколько заплатит садовник за ограду, если 1 м сетки стоит 65 леев?
   в) Сколько килограммов семян необходимо, чтобы засеять клумбу цветами, если на 1 м² используется 80 г семян?

2

7. Найдите площадь прямоугольного треугольника, у которого длина гипотенузы равна 25 см, а соотношение длин катетов составляет 3 : 4.
8. Пусть x_1 и x_2 – решения уравнения $5x^2 + x - 6 = 0$. Не решая уравнение, вычислите:
   а) $(x_1 + x_2)^2$; б) $(x_1 \cdot x_2)^3$; в) $x_1^2 + x_2^2$; г) $(x_1 - x_2)^2$.
9. Найдите значение c, для которого разность решений уравнения $x^2 - 10x + c = 0$ равна 8.
10. Длины катетов прямоугольного треугольника относятся как 8:15, а длина гипотенузы равна 6,8 см.
    а) Найдите периметр прямоугольного треугольника.
    б) Найдите площадь прямоугольного треугольника.

11. *Работайте в парах!* Участок земли имеет форму прямоугольного треугольника, длина гипотенузы которого относится к длине одного из катетов как 13:12, а длина другого катета равна 15 м.

а) Найдите длину ограды этого участка.

б) Сколько килограммов картофеля необходимо, чтобы засадить весь участок, если для 1 м² необходимо 2,5 кг?

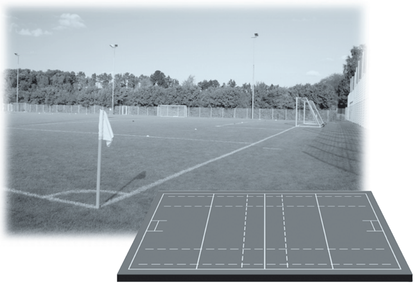
в) Сколько будет стоить посадочный материал, если 1 кг картофеля стоит 6,3 лея?

12. Сумма квадратов двух последовательных натуральных чисел равна 250. Найдите эти числа, зная, что одно из них на 10 меньше другого.

13. *Работайте в группах!*
Спортивная площадка имеет форму прямоугольника, площадь которого равна 1800 м².

а) Найдите размеры спортивной площадки, если одна из ее сторон на 14 м короче другой.

б) Найдите периметр спортивной площадки.



14. Для постройки складского помещения прямоугольной формы было выделено 48 м² земли. Зная, что длина склада должна быть на 8 м больше его ширины, вычислите размеры складского помещения.

15. Найдите два последовательных числа, зная, что квадрат суммы чисел на 112 больше, чем сумма квадратов этих чисел.

3

16. На шахматном турнире было сыграно 55 партий. Каждый участник сыграл по одной партии с остальными участниками турнира. Сколько шахматистов участвовало в турнире?

17. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $3x^2-|x|-4=0$; б) $2x^2-5|x|+2=0$; в) $3x^2+|x|-70=0$; г) $8x^2+|x|-75=0$.

18. *Исследуйте!* Докажите, что для любых действительных значений коэффициента b уравнение $6x^2+bx-30=0$ имеет одно положительное и одно отрицательное решение.

Упражнения и задачи на повторение

1

1. *Исследуйте!* Какие из чисел –7; –5; 5; 7 являются решениями уравнения $x^2+2x-35=0$?

2. *Исследуйте!* Покажите, что числа $1-\sqrt{2}$ и $1+\sqrt{2}$ являются решениями уравнения $x^2-2x-1=0$.

3. Укажите коэффициенты a, b и свободный член c уравнения:

а) $3x^2-4x-4=0$; б) $x^2-x-2=0$;

в) $7x^2-1=0$; г) $5x^2+3x=0$.

4. *Работайте в парах!* Запишите уравнения II степени с коэффициентами:

а) $a=3;\ b=6;\ c=-2$; б) $a=2;\ b=-1;\ c=5$;

в) $a=1;\ b=2;\ c=-3$; г) $a=2;\ b=5;\ c=0$.

Определите, какие из полученных уравнений являются полными уравнениями II степени.

5. Определите тип уравнения II степени с одним неизвестным:

а) $2x^2-1=0$; б) $-\sqrt{3}x^2-\sqrt{3}+5=0$;

в) $x^2-8{,}5x=0$; г) $\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{2}x-8=0$.

6. Найдите дискриминант уравнения II степени с одним неизвестным:

а) $3x^2-2x-5=0$; б) $x^2+16x+63=0$;

в) $2x^2+7x+6=0$; г) $x^2-x-12=0$.

7. Решите на множестве $\mathbb{Z}$ уравнение:

а) $x^2-x-12=0$; б) $t^2-7t-1=0$;

в) $3z^2-\sqrt{5}z-4=0$; г) $2x^2-3x-4=0$.

8. *Работайте в группах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $y^2-49=0$; б) $t^2-100=0$;

в) $8z^2+3z=0$; г) $5{,}2x^2+3=0$.

9. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, зная, что $b=2k$.

а) $x^2-10x+9=0$; б) $3x^2+6x-9=0$; в) $2x^2-16x+14=0$; г) $-5x^2-12x-4=0$.

10. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, применив теорему, обратную теореме Виета:

а) $t^2+6x-7=0$; б) $z^2-7x+10=0$; в) $x^2+3x-4=0$; г) $x^2-5x+4=0$.

11. ***Работайте в парах!*** Для каждого уравнения определите номер соответствующего конверта:

$3x^2+30=0$	$x^2-6x-16=0$	$x^2-6x=0$	$x^2-10x+25=0$
1	2	3	4
Одно из решений равно 0.	Имеет единственное решение.	Не имеет решений на множестве $\mathbb{R}$.	$\begin{cases} x_1+x_2=6, \\ x_1\cdot x_2=16. \end{cases}$

12. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $6x^2+0{,}5x=0$; б) $3x^2+13x-10=0$; в) $5x(5x+2)+3=2$.

13. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x^2+x-6=0$; б) $3x^2+4x-4=0$; в) $7-6x-9x^2=8$.

14. Составьте приведенное уравнение II степени по его решениям:

а) $x_1=-5;\ x_2=2$; б) $x_1=-7;\ x_2=-3$.

15. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неполные уравнения II степени:

а) $3x^2-12=0$; б) $2x^2-5x=0$;

в) $5x^2+8=0$; г) $10x^2=0$.

16. Вычислите дискриминант уравнения. Определите, имеет ли уравнение решения на множестве $\mathbb{R}$. Найдите эти решения, если они существуют:

а) $x^2-7x-18=0$; б) $3x^2-5x+2=0$;

в) $3x^2-11x+10=0$; г) $4x^2-4x+1=0$.

17. Применив соотношения Виета, найдите сумму и произведение решений уравнения:

а) $x^2-14x+13=0$; б) $x^2+12x+35=0$;

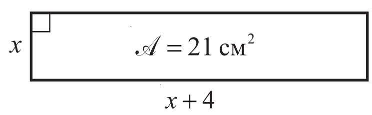
в) $7x^2-2x-14=0$; г) $x^2-16x-36=0$.

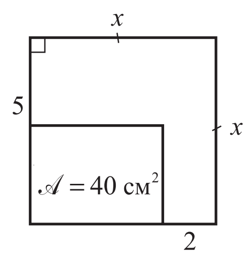
2

18. Найдите три последовательных натуральных числа, сумма квадратов которых равна 590.

19. Найдите число, зная, что если к квадрату этого прибавить 9, то получим число в десять раз больше исходного числа.

20. ***Исследуйте!*** Используя данные рисунка, найдите x:

а) 

б) 

21. ***Работайте в парах!*** Заполните таблицу:

а)

Уравнение	$a+b+c$	Решения
$x^2+x-2=0$		
$x^2-3x+2=0$		
$2x^2-5x+3=0$		
$5x^2-7x+2=0$		

б)

Уравнение	$a-b+c$	Решения
$x^2+5x+4=0$		
$3x^2-7x-10=0$		
$-9x^2-4x+5=0$		
$13x^2+6x-7=0$		

22. Сделайте вывод: Если $a+b+c=$ ___, то $x_1=$ ___, $x_2=$ ___.

Если $a-b+c=$ ___, то $x_1=$ ___, $x_2=$ ___.

23. Найдите действительное значение x, при котором равенство будет верным (округлите результат до десятых):

а) $x^2-6x-1=0$; б) $x^2+5x=x-1$;
в) $x^2-x=x+2$.

24. ***Работайте в группах!*** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $3(x-2)^2=2x+4$; б) $(x+2)^2=x(3x+2)$;
в) $(3x+4)^2-(x-5)^2=-9$; г) $(3x-2)(x+6)=-9$;
д) $\dfrac{(4x+1)^2}{5}=3x+\dfrac{7x-1}{3}$; е) $(x+2)^2=8(3x+8)$.

25. ***Работайте в парах!*** Составьте приведенное уравнение II степени по его решениям:

а) $S=\{-3;\ 4\}$; б) $S=\{2;\ 7\}$;
в) $S=\{2-\sqrt{7};\ 2+\sqrt{7}\}$; г) $S=\varnothing$.

26. Применив соотношения Виета, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-5x+6=0$; б) $x^2+11x+18=0$;
в) $x^2+5x-14=0$; г) $x^2-4x-21=0$.

27. ***Исследуйте!*** Если возможно, разложите на множители выражение:

а) $x^2-10x+21$; б) $6x^2-11x+3$;
в) $3x^2+7x-6$; г) $-2x^2+3x+2$.

28. В прямоугольнике одна из сторон на 5 см короче другой. Найдите периметр прямоугольника, зная, что его площадь равна 150 см².

29. Ученики 8 класса решили сфотографироваться по двое так, чтобы у каждого осталось фото на память с каждым одноклассником. Определите, сколько учеников в 8 классе, если всего было отпечатано 420 фотографий.

30. Камень, брошенный с начальной скоростью 20 м/с, летит согласно правилу $s=vt-5t^2$. Через сколько секунд камень окажется на высоте 15 м?

31. ***Задача из древности***

Найдите длину стороны квадрата, зная, что если из значения его площади вычесть значение искомой длины, получится 870.

32. Запишите уравнение II степени по множеству его решений:

а) $S=\{3-\sqrt{2};\ 3+\sqrt{2}\}$; б) $S=\{1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\}$.

33. ***Работайте в парах!*** x_1 и x_2 – решения уравнения $2x^2-7x-3=0$. Запишите уравнение II степени по его решениям:

а) x_1-2 и x_2-2; б) $2x_1+3$ и $2x_2+3$; в) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

34. Найдите значение выражения:

а) $\dfrac{49-x^2}{x^2-6x-7}$ при $x=999$;

б) $\dfrac{x^2-11x+10}{20+8x-x^2}$ при $x=101$.

35. На платформу погрузили дубовые и сосновые бревна, всего 300 бревен. Известно, что дубовые бревна весили на 1 т меньше, чем сосновые.

Определите, сколько было дубовых и сколько сосновых бревен, если одно бревно из дуба весит 46 кг, а одно сосновое бревно – 28 кг.

36. В двух баках – 140 л воды. Когда из первого бака вылили 26 л, а из второго – 60 л воды, в первом баке осталось в 2 раза больше воды, чем во втором. Сколько литров воды было в каждом баке изначально?

3

37. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение по образцу:

а) $x^4+2x^2-3=0$;

б) $5x^4-2x^2-3=0$;

в) $6x^4-5x^2+1=0$;

г) $3x^4-10x^2+3=0$.

Образец:

$4x^4+7x^2-2=0$. Пусть $x^2=t,\ t\geq 0$;

$4t^2+7t-2=0$; $\Delta=81$;

$t_1=\dfrac{1}{4}$; $t_2=-2$ – не удовлетворяет условию $t\geq 0$.

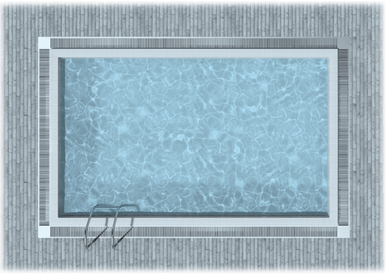
$x^2=\dfrac{1}{4}\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ или $x=-\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $S=\left\{-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{2}\right\}$.

38*. Найдите действительный параметр m и второе решение уравнения, если:
а) $x^2+mx-15=0$ и $x_1=-5$;
б) $2x^2+3x+m=0$ и $x_1=3$.

39*. Найдите значения действительного параметра m, при которых уравнение будет иметь одно решение:
а) $x^2-mx+9=0$; б) $x^2+3mx+m=0$;
в) $2x^2-2x+m=0$; г) $9x^2-2x+m=6-mx$.

40. Дно бассейна имеет форму прямоугольника со сторонами 6 м и 9 м. Вокруг бассейна проложили дорожки одинаковой ширины. Площадь дорожек равна площади дна бассейна. Найдите ширину дорожек.



41. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $\dfrac{x^3}{|x|}+x+2=0$; б) $x^2-\dfrac{x^2}{|x|}-6=0$;
в) $x^2-10=3|x|$; г) $x^2+|x|+x=63$.

42. x_1 и x_2 – решения уравнения $x^2-13x+14=0$. Найдите, не решая уравнения, значение выражения:
а) $(x_1+x_2)^2$; б) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$;
в) $x_1^2+x_2^2$; г) $(x_1-x_2)^2$.

43*. При каких значениях $a\in\mathbb{R}$:
а) $2x^2-5x+a=(2x+3)\cdot E(x)$;
б) $-4x^2+ax+1=(x-1)\cdot E(x)$,
где $E(x)$ – выражение от x?

44. В соревнованиях участвуют несколько команд. Каждая команда должна сыграть поочередно со всеми командами. Сколько команд участвуют в соревнованиях, если всего состоятся 45 игр?

45*. *Исследуйте!* Найдите значения действительного параметра a, при которых уравнение:
а) $2x^2-5x+a=0$ не имеет решений;
б) $ax^2-(a+1)x+2a-1=0$ имеет одно решение.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Дано уравнение $2x^2+x-\square=0$.

а) Дополните, чтобы множеством решений уравнения было $S=\varnothing$.

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $2x^2+x-1=0$.

в) Упростите выражение:
$$E(x)=\frac{2x^2+x-1}{x^2-1}.$$

2. Разложите на множители выражение:
$$2x^2-x-1.$$

3. Фермер засеял полосу шириной 3 м на участке квадратной формы. Оставшаяся часть участка прямоугольной формы имеет площадь 70 м². Найдите длину стороны исходного участка.

4. Запишите уравнение II степени с одним неизвестным по множеству его решений $S=\{3-\sqrt{2};\ 3+\sqrt{2}\}$.

Вариант 2

1. Дано уравнение $3x^2-x+\square=0$.

а) Дополните, чтобы множеством решений уравнения было $S=\varnothing$.

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $3x^2-x-2=0$.

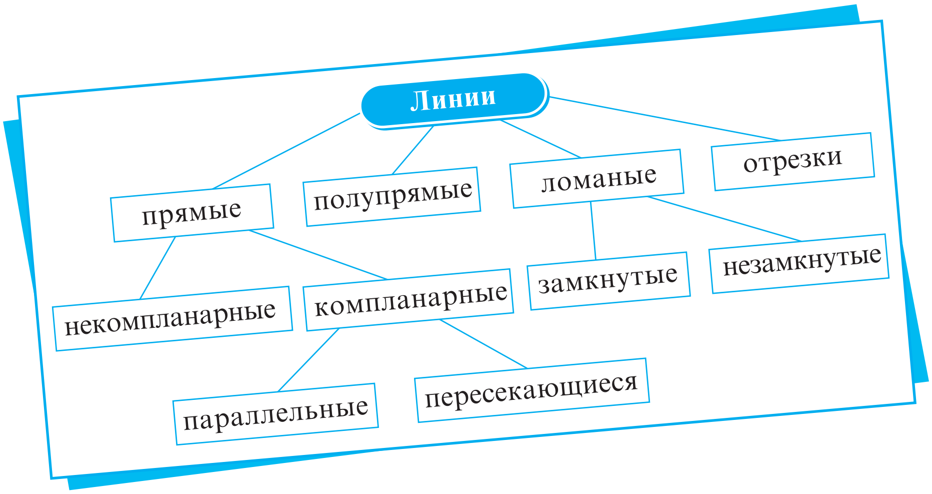
в) Упростите выражение:
$$E(x)=\frac{x^2-1}{3x^2-x-2}.$$

2. Разложите на множители выражение:
$$3x^2+x-2.$$

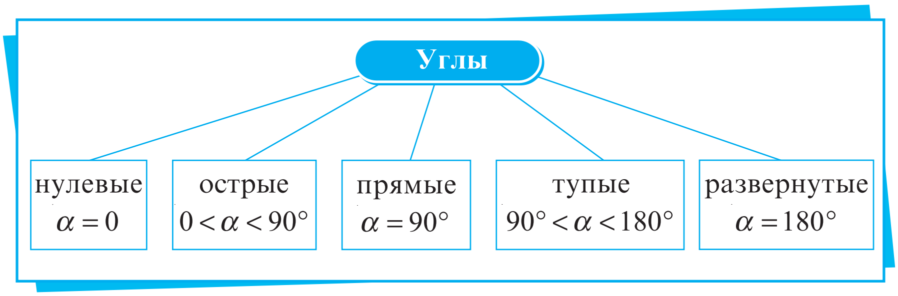
3. Вера отрезала полоску шириной 5 см от листа картона квадратной формы. Оставшаяся часть картона прямоугольной формы имеет площадь 50 см². Найдите длину стороны исходного листа картона.

4. Запишите уравнение II степени с одним неизвестным по множеству его решений $S=\{1-\sqrt{3};\ 1+\sqrt{3}\}$.

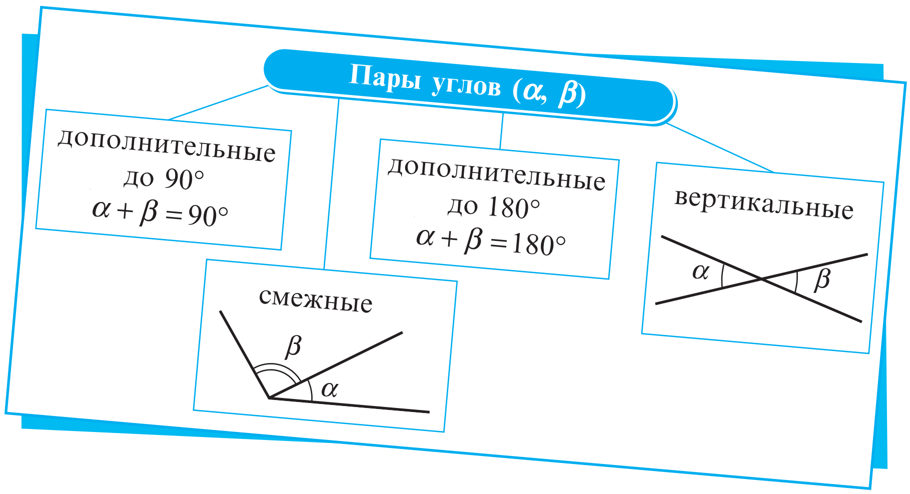
ГЕОМЕТРИЯ



Линии
прямые
полупрямые
ломаные
отрезки
некомпланарные
компланарные
замкнутые
незамкнутые
параллельные
пересекающиеся



Углы
нулевые
$\alpha = 0$
острые
$0 < \alpha < 90°$
прямые
$\alpha = 90°$
тупые
$90° < \alpha < 180°$
развернутые
$\alpha = 180°$



Пары углов (α, β)
дополнительные до 90°
$\alpha + \beta = 90°$
дополнительные до 180°
$\alpha + \beta = 180°$
вертикальные
α
β
смежные
β
α

Глава 1 Повторение и дополнения

Вход в страну знаний осуществляется по подиуму математики.
Штефан Бырсэнеску

§1. Линии, углы, треугольники, окружности

1 Рассмотрите схемы на странице 107 и объясните:
а) какие прямые являются параллельными, пересекающимися, компланарными;
б) какие углы являются острыми, тупыми, развернутыми, вертикальными, дополнительными до 90°, дополнительными до 180°, смежными.

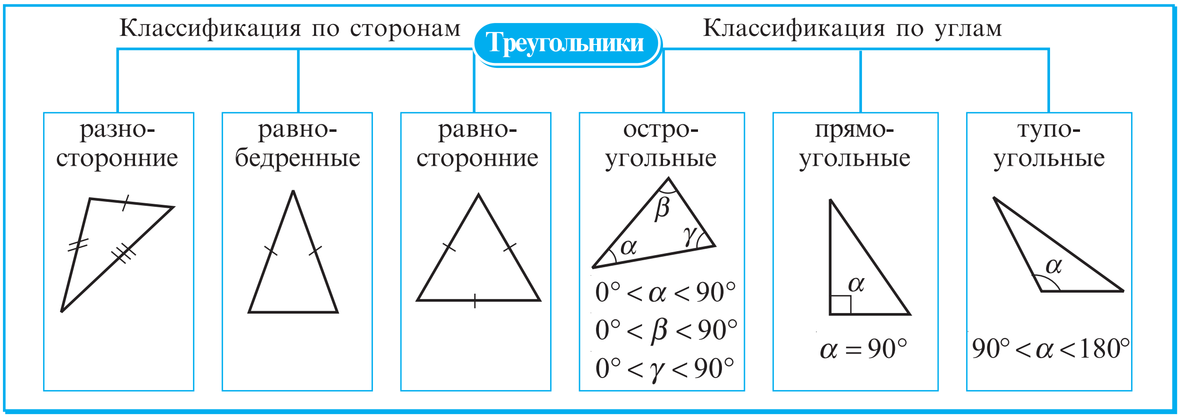
Вспомним

- Точки, принадлежащие одной прямой, называются **коллинеарными точками**.
- Две **противоположные полупрямые** имеют общее начало и образуют прямую.
- Два отрезка с одинаковой длиной называются **конгруэнтными отрезками**.
- Две геометрические фигуры называются **компланарными**, если они принадлежат одной и той же плоскости.
- Любая прямая в плоскости делит ее на два множества точек, называемые **полуплоскостями**.
- Две прямые называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек или совпадают.
  ✓ Через точку, не лежащую на прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной прямой.
  ✓ Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны между собой.
- Две пересекающиеся прямые, образующие при пересечении прямой угол, называются **перпендикулярными прямыми**.
  ✓ Через любую точку, взятую на прямой или вне нее, можно провести единственную прямую, перпендикулярную данной прямой.

• Вспомните, что называется серединным перпендикуляром отрезка, затем с помощью линейки и циркуля постройте отрезок длиной 8 см и его серединный перпендикуляр.

2 Рассмотрите схему. Сформулируйте верные утверждения об углах, образованных двумя прямыми и секущей. *Пример:* Если внутренние накрест лежащие углы, образованные двумя прямыми a и b и секущей, конгруэнтны, то $a \parallel b$.

3 Рассмотрите схему и определите, какие треугольники являются:
а) равнобедренными; равносторонними; разносторонними;
б) прямоугольными; тупоугольными.



Вспомним

Замечательные линии треугольников

- **Высотой** треугольника называется перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника.
- **Медианой** треугольника называется отрезок, проведенный из вершины треугольника к середине противолежащей стороны треугольника.
- **Биссектрисой** треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противолежащей стороны.
- Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией** треугольника. Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна половине ее длины.

- Сформулируйте верные утверждения о замечательных линиях треугольника. *Пример:* Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является биссектрисой этого треугольника.
- Вычислите длины средних линий треугольника со сторонами 10 см, 12 см, 15 см.

Вспомним

- У двух **конгруэнтных треугольников** соответственные стороны и углы конгруэнтны.
- *Признаки конгруэнтности треугольников:*
  - ✓ **Признак СУС.** Если две стороны и угол между ними одного треугольника конгруэнтны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.
  - ✓ **Признак УСУ**. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника конгруэнтны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.
  - ✓ **Признак ССС**. Если стороны одного треугольника конгруэнтны соответственно сторонам другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.

- Постройте с помощью линейки, циркуля, транспортира и карандаша треугольник:
а) со стороной 7 см и прилежащими к ней углами в 30° и 50°;
б) со сторонами 4,5 см и 5,5 см и углом между ними в 40°.
- Постройте с помощью линейки, циркуля и карандаша треугольник со сторонами 4 см, 7 см и 8 см.

Работайте в парах

4 Для каждого понятия из первой колонки найдите описание (или определение) из второй колонки.

Образец: ① → ④

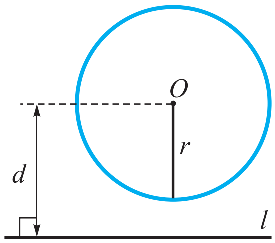
① Прямой угол
② Коллинеарные точки
③ Нулевой угол
④ Параллельные прямые
⑤ Углы, дополнительные до 90°
⑥ Условие
⑦ Тупой угол
⑧ Конгруэнтные фигуры
⑨ Точка
⑩ Противоположные полупрямые
⑪ Истина
⑫ Аксиома
⑬ Компланарные
⑭ Контрпример
⑮ Доказательство
⑯ Перпендикулярные прямые
⑰ Развернутый угол
⑱ Пересекающиеся прямые
⑲ Длина
⑳ Средняя линия треугольника
㉑ Математическое высказывание
㉒ Полупрямая
㉓ Ложно
㉔ Теорема
㉕ Смежные углы
㉖ Углы, дополнительные до 180°
㉗ Угол
㉘ Прямая
㉙ Отрезок
㉚ Биссектриса угла
㉛ Обратная теорема
㉜ Острый угол
㉝ Заключение

① Обоснование истинности теоремы.
② Угол величиной 180°.
③ Истинностное значение ложного высказывания.
④ Угол величиной 90°.
⑤ Математическое высказывание, истинность которого надо доказать.
⑥ Пересекающиеся прямые, образующие при пересечении прямой угол.
⑦ Геометрическая фигура, образованная двумя полупрямыми с общим началом.
⑧ То, что дано в теореме.
⑨ Полупрямая, исходящая из вершины угла, принадлежащая внутренней области угла и образующая со сторонами угла два конгруэнтных угла.
⑩ Часть прямой, заключенная между двумя точками.
⑪ Два угла, сумма величин которых равна 90°.
⑫ Истинное математическое высказывание, которое принимают без доказательства.
⑬ Утверждение, о котором с уверенностью можно сказать, истинно оно или ложно, и которое не может быть одновременно и истинным, и ложным.
⑭ Пример, который противоречит высказыванию, тем самым доказывая, что высказывание не является истинным.
⑮ Три или более точки, лежащие на одной прямой.
⑯ Фигуры, лежащие в одной плоскости.
⑰ Угол величиной 0°.
⑱ Часть прямой, ограниченная с одной стороны.
⑲ Компланарные прямые, не имеющие общих точек.
⑳ Угол, величина которого больше 90° и меньше 180°.
㉑ Две различные прямые, имеющие одну общую точку.
㉒ Два угла, сумма величин которых равна 180°.
㉓ Истинностное значение теоремы.
㉔ Угол, величина которого больше 0° и меньше 90°.
㉕ Через две различные точки можно провести только одну.
㉖ Часть теоремы, которая является условием обратного высказывания данной теоремы.
㉗ Фигуры, которые при наложении совпадают.
㉘ Высказывание, которое получается, если поменять местами условие и заключение некоторой теоремы.
㉙ Две полупрямые с общим началом, образующие прямую.
㉚ Два компланарных угла с общей вершиной и общей стороной, лежащей между двумя другими сторонами.
㉛ Величина отрезка.
㉜ Самая простая геометрическая фигура.
㉝ Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника.

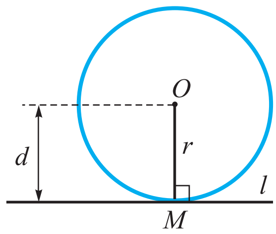
Вспомним

- **Окружность** – это геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой **центром окружности**.
- Отрезок, соединяющий центр окружности с точкой окружности, называется **радиусом**.
- Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**.
- Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**.
- Окружность вместе с ее внутренней областью называется **кругом**.

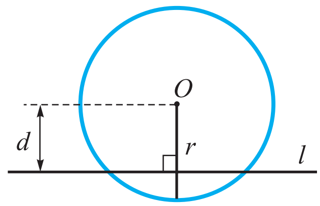
3 Рассмотрите рисунки (точка O – центр окружности). Обратите внимание, как называется прямая l в каждом случае.



прямая является **внешней** по отношению к окружности

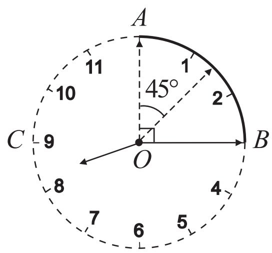


прямая является **касательной** к окружности; M – точка касания



прямая является **секущей** по отношению к окружности

- Сколько общих точек имеют окружность и прямая, если расстояние от центра окружности до прямой равно $3\sqrt{8}$ см, а радиус окружности равен:
  а) $6\sqrt{2}$ см; б) $4\sqrt{5}$ см; в) $2\sqrt{10}$ см; г) $5\sqrt{3}$ см?



4 За какое время минутная стрелка описывает:
а) угол величиной 45°;
б) часть окружности, длина которой равна $\frac{1}{4}$ длины всей окружности циферблата;
в) полуокружность?

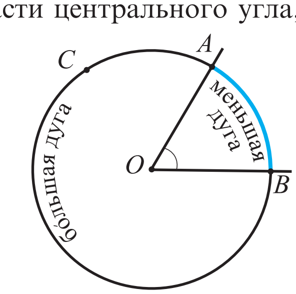
Ответ: а) 7 мин. и 30 сек.; б) 15 мин.; в) 30 мин.

Замечание В геометрии части окружности имеют специальные названия и обозначения.

Определения

- Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным углом**.
- Часть окружности, расположенная во внутренней области центрального угла, называется **меньшей дугой** окружности. *Обозначаем*: $\smile AB$, где A и B – точки пересечения центрального угла с окружностью.
- Часть окружности, расположенная во внешней области центрального угла, называется **большей дугой** окружности. *Обозначаем*: $\smile ACB$, где C – точка, принадлежащая окружности, но не принадлежащая меньшей дуге.
- Точки A и B называются **концами дуг**. Дуги $\smile AB$ и $\smile ACB$ называются **дополнительными дугами**.
- **Градусная мера меньшей дуги** равна градусной мере соответствующего ей центрального угла.

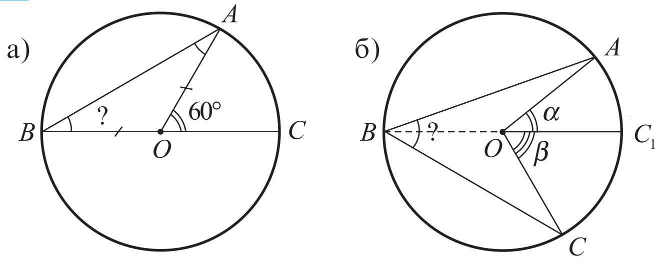
$$m(\smile AB) = m(\angle AOB)$$



$\angle AOB$ – центральный угол

- Найдите градусную меру дуги, зная, что градусная мера дополнительной ей дуги равна: а) 80°; б) 130°; в) 150°45′; г) 212°17′.

5 Рассмотрите рисунок, найдите $m(\angle ABC)$.



Решение:

а) ΔAOB – равнобедренный, значит, $\angle ABO \equiv \angle BAO$. (*)

$\angle AOC$ – внешний угол треугольника AOB.

Итак, $m(\angle AOC) = m(\angle ABO) + m(\angle BAO) \overset{(*)}{=} 2 \cdot m(\angle ABO)$.

Следовательно, $m(\angle ABO) = \frac{1}{2} m(\angle AOC) = 30°$, то есть $m(\angle ABC) = 30°$.

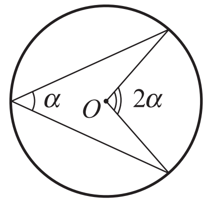
б) Аналогично пункту а) получим

$m(\angle ABC_1) = \frac{\alpha}{2}$, $m(\angle CBC_1) = \frac{\beta}{2}$, то есть $m(\angle ABC) = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

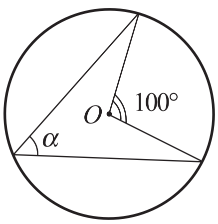
Замечание Угол ABC, изображенный на каждом из рисунков задания **5**, является **углом, вписанным в окружность**.

Определение **Углом, вписанным в окружность,** называется угол, вершина которого лежит на окружности, а его стороны пересекают окружность.

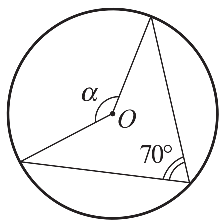
- Градусная мера угла, вписанного в окружность, равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.



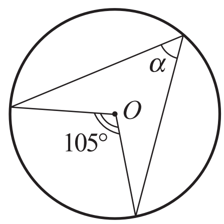
- Найдите величину угла α (точка O – центр окружности):



а)



б)



в)

Упражнения и задачи

1

1. Прочтите: а) $A \in b$, $M \notin c$, $N \in [AM$;
   б) $a \parallel b$, $a \cap c = \{M\}$, $b \cap c = \{N\}$;
   в) $MN > AB$, $AB \perp MN$, $A \in MN$, $B \in MN$;
   г) $d \parallel l$, $AB \perp m$, $\{A, B, C\} \subset d$.
2. Сделайте рисунки, соответствующие каждому из случаев а)–г) упражнения 1.
3. Даны точки A и B, где $d(A, B) = 0{,}000001$ мм. Выберите истинное высказывание.
   а) Между точками A и B лежит одна точка.
   б) Между точками A и B лежат только две точки.
   в) Между точками A и B лежат только пять точек.
   г) Между точками A и B лежит бесконечное множество точек.
4. Заполните пропуски:
   а) 24 дм = ___ см; б) 890 мм = ___ дм;
   в) 7,5 м = ___ см; г) 64 900 см = ___ км;
   д) 0,065 км = ___ дм; е) 7,05 м = ___ мм.
5. Нарисуйте острый угол AOB.
   а) Постройте с помощью линейки смежный ему угол, дополнительный до 90°.
   б) Сгибанием листа бумаги постройте смежный ему угол, дополнительный до 90°.
   в) Сколько решений имеет задача?
   г) Найдите величину дополнительного до 90° угла, если величина угла AOB равна 62°.

6. Нарисуйте угол AOB величиной 40°.
а) Постройте с помощью линейки смежный ему угол, дополнительный до 180°.
б) Сгибанием листа бумаги постройте смежный ему угол, дополнительный до 180°.
в) Сколько решений имеет задача?

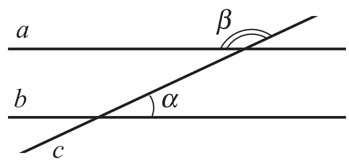
7. Нарисуйте угол величиной 50°.
а) Сгибанием листа бумаги постройте ось симметрии этого угла.
б) Постройте с помощью циркуля и линейки ось симметрии этого угла.
в) Дополните: «Осью симметрии угла является...».

8. Даны точки A и B, где d(A, $Б$) = 0,0003 см.
а) На каком расстоянии от точки A находится середина C отрезка AB?
б) На каком расстоянии от точки A находится середина D отрезка AC?
в) На каком расстоянии от точки A находится середина E отрезка AD?
г) На каком расстоянии от точки A находится середина F отрезка AE?

9. Величина одного из углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 44°. Найдите величины остальных углов.

10. *Работайте в парах!* Найдите величины двух углов, зная, что они являются:
а) вертикальными и дополнительными до 180°;
б) дополнительными до 90°, и величина одного на 10° больше другого;
в) дополнительными до 180°, и величина одного в 9 раз больше другого;
г) конгруэнтными, смежными, и величина угла, образованного биссектрисами этих углов, равна 50°.

11. Точки M, N, K лежат на одной прямой в данном порядке, и $MN : NK = 3 : 4$.
Найдите: а) $\dfrac{MK}{MN}$; б) $\dfrac{NK}{MK}$.



12. Прямые a и b, изображенные на рисунке, параллельны. Найдите величины углов (α или β), образованных секущей и прямыми, если:
а) $\alpha = 25°$; б) $\beta = 120°$; в) $\beta - \alpha = 40°$.

13. Проверьте, могут ли следующие три числа являться сторонами некоторого треугольника (выраженные одной единицей измерения):
а) 9, 10, 16; б) 8, 12, 20; в) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{11}$; г) $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{14}$.

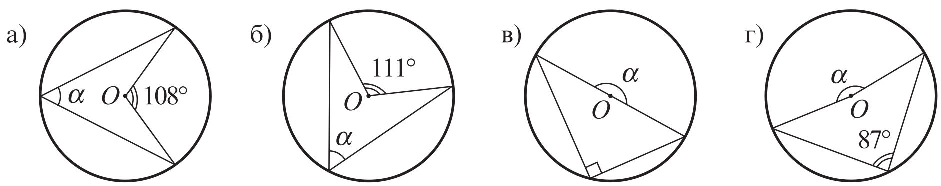
14. *Работайте в парах!* Изобразите рисунок, соответствующий ситуации:
а) Точка M – середина основания тупоугольного равнобедренного треугольника ABC.
б) Треугольники ABC и CMB – равнобедренные, и $AM \cap BC = \{D\}$.
в) Треугольники ABF и GDE – равносторонние, и $G \in [AF]$, $F \in [GE]$.
г) $\Delta BAE \equiv \Delta DEA$, $[BE] \cap AD = \{C\}$.

15. Отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 – медианы треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC, если:
а) BC_1 = 9 см, BA_1 = 10 см, AB_1 = 12 см;
б) $BA_1 = 3\sqrt{5}$ см, $AC_1 = \sqrt{125}$ см, $CB_1 = 2\sqrt{20}$ см.

16. Сколько общих точек у окружности и прямой, если радиус окружности равен $5\sqrt{12}$ см, а расстояние от центра окружности до прямой равно:
а) $6\sqrt{8}$ см; б) $10\sqrt{3}$ см; в) $12\sqrt{5}$ см; г) $15\sqrt{2}$ см?

17. Точки A, B, C лежат на окружности в данном порядке. Найдите:
а) $m(\smile AB)$, если $m(\smile ACB) = 100°$; б) $m(\smile ACB)$, если $m(\smile AB) = 140°$;
в) $m(\smile AC)$, если $m(\smile ABC) = 25°$; г) $m(\smile BC)$, если $\smile AB \equiv \smile BC \equiv \smile AC$.

18. Найдите величину угла α (точка O – центр окружности):



19. Дан треугольник ABC. Величина угла A в 2 раза больше величины угла B и в 3 раза меньше величины угла C. Найдите величины углов треугольника.

20. Постройте треугольник со сторонами 6 см, 7 см, 8 см.

21. Постройте треугольник, две стороны которого равны 8 см и 9 см, а угол между ними равен 45°.

22. Постройте треугольник со стороной 10 см и прилежащими к ней углами 30° и 80°.

23. *Работайте в группах!* Вычислите периметр треугольника:
а) равнобедренного, одна сторона которого 7 см, а другая 15 см;
б) равностороннего, средняя линия которого равна 12 см;
в) разностороннего, стороны которого являются последовательными натуральными числами, и наибольшая из них длиной 28 см.

24. Вычислите:
а) $31°40'29'' + 46°24'37''$;
б) $118°27'35'' + 36°27'18''$;
в) $90° - 17°55'56''$;
г) $142° - 72°34'56''$.

25. Точка M_1 – ортогональная проекция точки $M\,(a, b)$ на ось абсцисс прямоугольной системы координат. Найдите координаты точки M_1, если:
а) $a = 3,\ b = -\sqrt{8}$; б) $a = -0{,}4,\ b = 2\sqrt{5}$.

26. Точка M принадлежит биссектрисе угла AOB. Найдите расстояние от точки M до полупрямой $[OA$, если расстояние от точки M до полупрямой $[OB$ равно:
а) $|\sqrt{7} - 3|$ см; б) $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|$ см.

27. *Работайте в парах!* Найдите величины внешних углов треугольника:
а) прямоугольного, один из углов которого равен 40°;
б) равнобедренного, один из углов которого равен 110°;
в) один из углов которого равен 30°, а другой 80°.

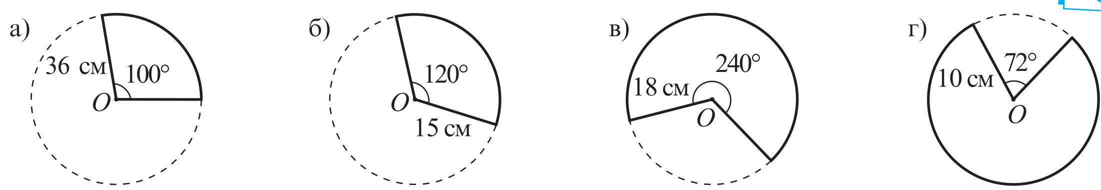
28. Медианы $[AM]$ и $[BN]$ треугольника ABC пересекаются в точке P. Найдите:
а) PM и PN, если $AP = 24$ см, $BP = 30$ см;
б) AP и BP, если $PM = \sqrt{6}$ см, $PN = \sqrt{7}$ см.

29. а) Постройте квадрат со стороной 5 см.
б) Постройте прямоугольник со сторонами 5 см и 7 см.
в) Постройте квадрат с диагональю 7 см.
г) Постройте прямоугольник с диагональю 13 см.

2

30. Рассмотрите рисунок. Вычислите длину дуги окружности, зная величину центрального угла, опирающегося на эту дугу, и радиус окружности (точка O – центр окружности):

$$L_{\bigcirc} = 2\pi R$$



31. На прямой на одинаковом расстоянии друг от друга отметили 20 точек, причем первая и последняя точки определяют отрезок длиной x. На другой прямой аналогично (на таком же расстоянии) отметили 200 точек, причем первая и последняя точки определяют отрезок длиной y. Во сколько раз x меньше y?

32. В треугольнике RTS стороны $RT = 8$ см, $TS = 11$ см и радиус описанной окружности – 6 см. Постройте треугольник RTS.

33. а) Постройте равносторонний треугольник высотой 4 см.
б) У равносторонних треугольников ADI и BCE высоты конгруэнтны. Конгруэнтны ли треугольники ADI и BCE?

34. Докажите, что равнобедренный треугольник является равносторонним тогда и только тогда, когда один из его углов равен 60°.

35. Найдите периметр равностороннего треугольника, средняя линия которого равна $\dfrac{9}{\sqrt{3}}$ см.

36. *Работайте в парах!* Найдите величины углов, образованных при пересечении:
а) двух медиан равностороннего треугольника;
б) трех высот равностороннего треугольника.

37. Медиана $[AA_1]$ и биссектриса $[BB_1]$ равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке M. Найдите площадь треугольника A_1BM, если площадь треугольника ABC равна 216 см^2.

38. Если увеличить на 8 см ширину прямоугольника, то получим квадрат с периметром 96 см. Найдите периметр прямоугольника.

3

39. Дан равнобедренный треугольник ABC, у которого $[AB] \equiv [BC]$. Точки M и N принадлежат внешней области треугольника ABC, причем треугольники ABM и BCN являются равносторонними. Докажите, что $MN \parallel AC$.

40. Сумма расстояний от вершин треугольника ABC до прямой d равна 30 см. Найдите сумму расстояний от середин сторон треугольника ABC до прямой d.

41. Точка O принадлежит внутренней области квадрата $ABCD$.
Докажите, что если $m(\angle OCD) = m(\angle ODC) = 15°$, то треугольник AOB – равносторонний.

§2. Элементы математической логики. Применение

Вспомним

- **Высказывание** (математическое) – это утверждение, о котором с уверенностью можно сказать, истинно оно или ложно. Если высказывание истинно, то говорят, что его истинностное значение – «истина» (обозначают «И» или «1»). Если высказывание ложно, то говорят, что его истинностное значение – «ложь» (обозначают «Л» или «0»).
- Истинные математические высказывания, которые принимаются без доказательств, называются **аксиомами**.
- Математическое высказывание, истинность которого надо доказать, называется **теоремой**.
- Из простых высказываний при помощи слов *и*; *или*; *не*; *если..., то...* можно образовать сложное высказывание.

1 Теорема: *Углы при основании равнобедренного треугольника конгруэнтны.*
Чтобы выделить условие и заключение этой теоремы, запишем ее так:

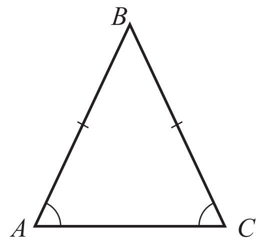
*Если **треугольник является равнобедренным**,* то ***углы при его основании конгруэнтны***.

$\underbrace{\text{треугольник является равнобедренным}}_{\text{Условие}}$, $\underbrace{\text{углы при его основании конгруэнтны}}_{\text{Заключение}}$

Рассмотрите схему. Обратите внимание на связь между упомянутой прямой теоремой и обратной ей теоремой.

Прямая теорема
Условие: ΔABC, $[AB] \equiv [BC]$
Заключение: $\angle A \equiv \angle C$

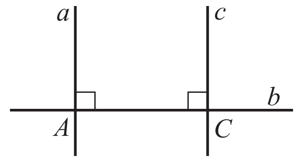
Обратная теорема
Условие: ΔABC, $\angle A \equiv \angle C$
Заключение: $[AB] \equiv [BC]$



а) Определите условие и заключение теоремы: *вертикальные углы конгруэнтны.*
б) Сформулируйте теорему, обратную данной теореме, и найдите ее истинное значение.

Слово «теорема» происходит от греческого слова *theoreo* (в переводе – *исследовать*, *рассматривать*). В древности оно означало «зрелище, представление». В те времена доказательства теорем проводились публично на площадях, ярмарках. Часто они носили характер пари или серьезных споров.

2 Теорема: *На плоскости – две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны между собой.*



Докажем эту теорему.

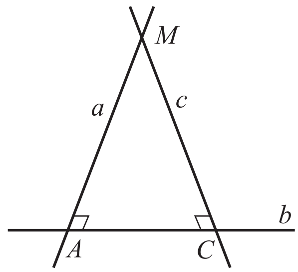
Условие:	*Заключение*:
$a \perp b$	$a \parallel c$
$c \perp b$	

Доказательство:

Обозначим $a \cap b = \{A\}$, $c \cap b = \{C\}$. Предположим, что $a \nparallel c$, то есть $a \cap c = \{M\}$.

Получим, что треугольник AMC имеет два угла величиной 90°: $m(\angle MAC) = m(\angle MCA) = 90°$, что невозможно (сумма углов треугольника равна 180°).

Это противоречие доказывает, что предположение было неверным, значит, $a \parallel c$, ч. т. д. ►

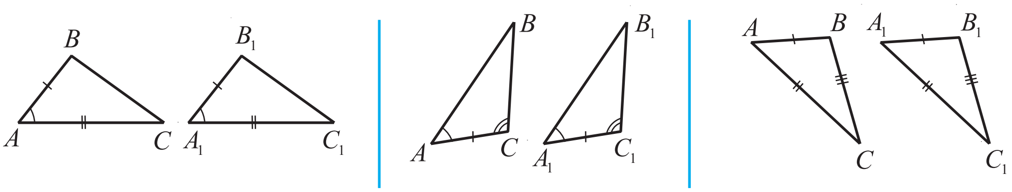


Комментарий. Теорема была доказана **методом от противного**. Этот метод применяется не только в математических доказательствах, но и в повседневных логических рассуждениях.

- Докажите методом от противного следующие верные утверждения:
  а) Углы при основании любого равнобедренного треугольника являются острыми.
  б) Крокодил – это не птица.
  в) Слово *спорт* не является глаголом.
  г) Если сторона квадрата больше 10, то его площадь больше 100.

Вспомним

3 ***Признаки конгруэнтности двух произвольных треугольников***

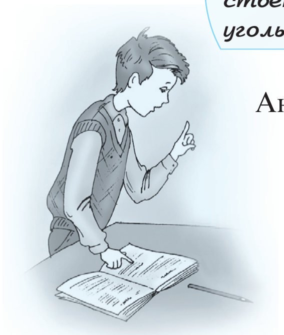


СУС УСУ ССС

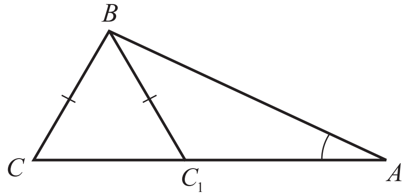
$$\Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$$

Господин X считает, что существует еще один признак конгруэнтности двух треугольников, а именно:

Если две стороны и угол одного треугольника соответственно конгруэнтны двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники конгруэнтны.



Андрей Полонидей опроверг это утверждение таким рисунком:



Заметим, что $\angle A \equiv \angle A$, $[AB] \equiv [AB]$, $[BC] \equiv [BC_1]$, но $\Delta ABC \not\equiv \Delta ABC_1$

Приведенный пример называется **контрпримером**, так как он противоречит утверждению господина X, доказывая тем самым, что оно ложно.

- Приведите контрпример утверждения:
  а) Все простые числа являются четными.
  б) Все птицы умеют летать.
  в) Для любых $a \in \mathbb{R}$, $|a| > 0$.
  г) Сумма двух иррациональных чисел есть число иррациональное.

Упражнения и задачи

1

1. Выберите математические высказывания и установите их истинностное значение:
   а) Существуют простые четные числа. б) Зимой идет снег.
   в) Весной иногда идет дождь. г) Существуют составные нечетные числа.
   д) Кто заказывает, тот и платит. е) Не курите!
2. *Работайте в парах!* Установите истинностное значение высказывания:
   а) Если $a \perp b$ и $a \perp c$, то $b \perp c$. б) Последней цифрой числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 42$ будет 0.
   в) Число 123456 делится на 4. г) В латинском алфавите всего 5 гласных.
   д) Любые три различные точки, лежащие на окружности, неколлинеарны.
3. Сформулируйте отрицание высказывания:
   а) $8 \cdot 8 = 64$. б) $3\sqrt{5} > 4\sqrt{3}$. в) Число 5 является решением уравнения $2x^2 - 3x - 35 = 0$.
   г) Число 7 не является решением неравенства $x - 1 > 5$.
   д) Любое утверждение является математическим высказыванием.
4. Определите истинностное значение: а) высказываний из предыдущего упражнения;
   б) отрицания высказываний из предыдущего упражнения.
5. *Работайте в группах!* Укажите условие и заключение теоремы:
   а) Если натуральное число делится на 4, то оно делится и на 2.
   б) Если $a > b$, то $a + c > b + c$, для любых действительных чисел a, b, c.
   в) Если натуральное число заканчивается 0, то оно делится на 5.
   г) В равностороннем треугольнике все углы конгруэнтны.
   д) Если сторона $[AC]$ треугольника ABC имеет наибольшую длину, то угол B имеет наибольшую градусную меру.
6. Сформулируйте теоремы, обратные теоремам из предыдущего упражнения, и найдите их истинностные значения.

7. Приведите контрпример утверждения:
а) Произведение любых двух рациональных чисел не является целым числом.
б) Все натуральные решения неравенства $|x| < 4$ являются четными числами.
в) Для любых действительных чисел a и b, если $a > b$, то $a^2 > b^2$.
г) Любое число вида $2^n - 1$, где $n \in \mathbb{N}^*$, является простым числом.

8. *Работайте в парах!* Докажите методом от противного следующие истинные утверждения:
а) Прямая и окружность могут иметь не больше двух общих точек.
б) Если сегодня среда, то завтра будет четверг.
в) Любая точка, лежащая на биссектрисе угла, равноудалена от сторон этого угла.

2

9. Укажите условие и заключение теоремы:
а) Медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его биссектрисой.
б) Соответственные углы, образованные двумя параллельными прямыми и секущей, конгруэнтны.
в) Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон.
г) Диагонали параллелограмма при пересечении делятся пополам.
д) Точки, лежащие на медиатрисе отрезка, равноудалены от концов этого отрезка.

10. Пусть d – расстояние от центра окружности $\mathscr{C}(O, r)$ до прямой l. Установите истинностное значение высказывания:
а) Прямая l является внешней прямой по отношению к окружности тогда и только тогда, когда $d > r$.
б) Если $d < r$, то прямая l является секущей по отношению к окружности.
в) Если $d = r$, то прямая l является касательной к окружности.

Если X – высказывание, то $\overline{X}$ – его отрицание.

11. Даны высказывания:
A: *Число 24 делится на* 8. B: *Число 24 делится на* 9.
Установите истинностное значение сложных высказываний:
а) A или B. б) A и B. в) $\overline{B}$ и A. г) $\overline{A}$ или $\overline{B}$. д) $\overline{A}$ и B.

12. Даны утверждения:
A: *Натуральное число a является составным.* B: *Натуральное число a является четным.*
Установите истинностное значение высказывания:
а) Если A, то B. б) Если B, то A. в) Если $\overline{A}$, то $\overline{B}$. г) Если $\overline{B}$, то $\overline{A}$.

13. *Исследуйте!* Покажите, приведя контрпримеры, что следующие утверждения ложны:
а) $\frac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$, для любых действительных чисел a, b, где $b \neq 0$.
б) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{a}{b}$, для любых действительных чисел a, b, где $b \neq 0$.

14. *Работайте в парах!* Даны утверждения:
A: *Господин X играет на пианино.* B: *Господин X – музыкант.*
Установите истинностное значение высказывания:
а) Если A, то B. б) Если B, то A. в) Если $\overline{A}$, то $\overline{B}$. г) Если $\overline{B}$, то $\overline{A}$.

3

15. Известно, что высказывание «Если A, то B» – истинно. Определите истинностное значение высказывания «Если $\overline{B}$, то $\overline{A}$». Обоснуйте примером.

Занимательная математика

16. На листе бумаги записаны 10 высказываний:

Одно из записанных высказываний ложно.
Два записанных высказывания ложны.
Три записанных высказывания ложны.
. . .
Десять записанных высказываний ложны.

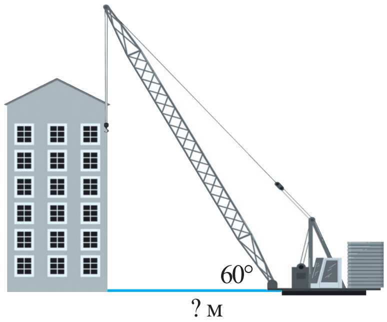
Какое из этих высказываний истинно?

17. Правдолюб всегда говорит правду, а Лжец всегда врет. На какой вопрос они дадут один и тот же ответ?

18. ***Строительная математика***

Длина стрелы крана 36 м.

Каково расстояние от передней части крана до здания?



Время выполнения работы: 45 минут

Итоговый тест

Вариант 1

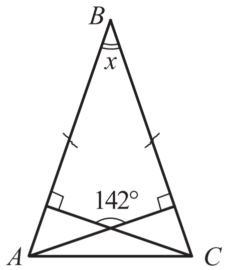
1. Изобразите рисунок, соответствующий ситуации:

$AB \cap CD = \{M\}$,

$EF \cap CD = \{N\}$,

$AB \parallel EF$, $MN \perp AB$.

2. Рассмотрите рисунок ($[AB] \equiv [BC]$) и вычислите x.



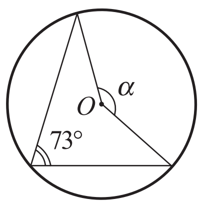
3. Найдите величины дополнительного до 90° и дополнительного до 180° углов для угла с градусной мерой 78°.

4. Запишите углы треугольника ABC в порядке убывания величин его углов, если:

$$\frac{AC}{AB} < 0{,}7 \text{ и } \frac{BC}{AB} > 1{,}1.$$

5. Найдите длину дуги окружности, градусная мера которой равна 40, зная, что радиус окружности – 27 см.

6. Вычислите величину угла α (точка O – центр окружности).



7. Докажите, что если один из углов прямоугольного треугольника равен 45°, то этот треугольник равнобедренный.

Вариант 2

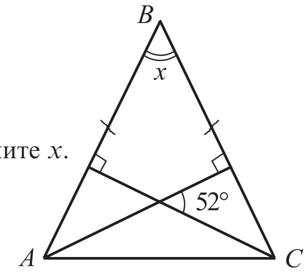
1. Изобразите рисунок, соответствующий ситуации:

$a \cap b = \{A\}$, $a \cap c = \{B\}$,

$b \cap c = \{C\}$,

$\mathrm{m}(\angle BAC) = 90°$.

2. Рассмотрите рисунок ($[AB] \equiv [BC]$) и вычислите x.



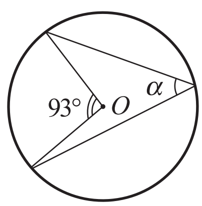
3. Найдите величины дополнительного до 90° и дополнительного до 180° углов для угла с градусной мерой 119°.

4. Запишите стороны треугольника ABC в порядке возрастания их длин, если:

$$\frac{\mathrm{m}(\angle B)}{\mathrm{m}(\angle A)} < 0{,}85.$$

5. Найдите длину дуги окружности, градусная мера которой равна 60, зная, что радиус окружности – 33 см.

6. Вычислите величину угла α (точка O – центр окружности).



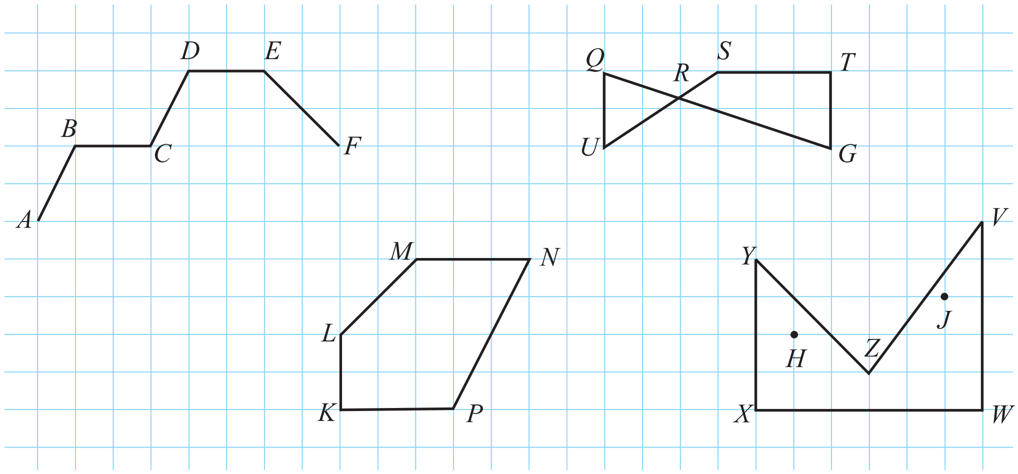
7. Докажите, что если диагонали прямоугольника перпендикулярны, то этот прямоугольник является квадратом.

Глава 2 Четырехугольники. Многоугольники

Математика правильная, точная; она не обманывает.
Георгий Врынчану

§1. Выпуклые многоугольники

1 Рассмотрите ломаные линии, изображенные на рисунке.



Заполните пропуски:

а) $ABCDEF$ – это ______.

б) ______ замкнутые ломаные линии.

в) Замкнутые линии ______ являются многоугольниками, так как...

г) Многоугольники ______ называются ______, так как у них 5 сторон.

д) Многоугольник ______ имеет диагонали ______.

Определения

- Пусть $A_1, A_2, ..., A_n$ – различные точки, любые три из которых – последовательные неколлинеарные точки. Объединение отрезков $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$, ..., $[A_{n-1}, A_n]$ называется **ломаной линией**. Точки $A_1, A_2, ..., A_n$ называются **вершинами ломаной линии**, а отрезки $[A_1, A_2]$, $[A_2, A_3]$, ..., $[A_{n-1}, A_n]$ – **звеньями** или **сторонами** ломаной линии.
- Замкнутая ломаная линия без самопересечений называется **многоугольником**.
- Часть плоскости, ограниченная сторонами многоугольника, называется **внутренней областью многоугольника**. Другая часть плоскости называется **внешней областью многоугольника**.

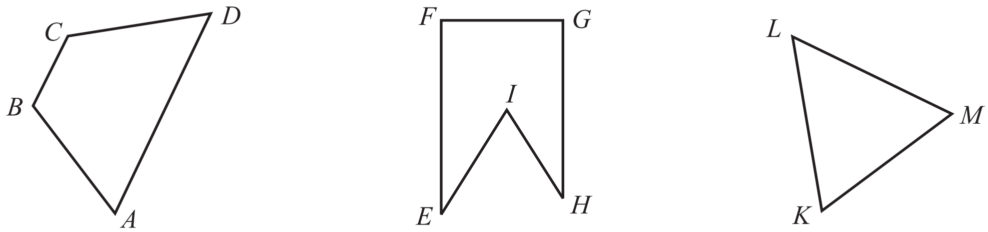
• На рисунке, изображенном выше, найдите многоугольник, у которого любые две точки его внутренней области определяют отрезок, принадлежащий этой области.

Определения

- Многоугольник называется **выпуклым**, если любые две точки его внутренней области определяют отрезок, принадлежащий этой области.
- Многоугольник называется **невыпуклым**, если существуют две точки его внутренней области, определяющие отрезок, пересекающийся с его внешней областью.
- **Диагональю** выпуклого многоугольника называется отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие на одной стороне.
- Многоугольники с 4 сторонами (соответственно, с 5 сторонами, с 6 сторонами) называются **четырехугольниками** (соответственно, **пятиугольниками**, **шестиугольниками**).

В задании 1 многоугольник $KLMNP$ – выпуклый, а многоугольник $XYZVW$ – невыпуклый, так как $[HJ]$ пересекается с внешней областью многоугольника.

- Укажите выпуклые многоугольники.

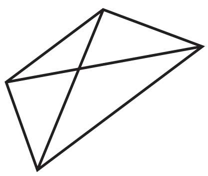


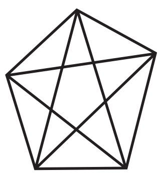
2 Постройте выпуклый многоугольник с:

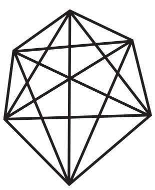
а) 4 сторонами; б) 5 сторонами; в) 6 сторонами; г) 8 сторонами.

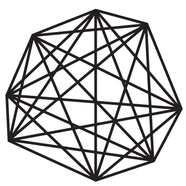
1. Определите, сколько диагоналей исходят из одной вершины многоугольника.
2. Найдите, сколько диагоналей у каждого многоугольника.
3. Найдите сумму величин углов многоугольника.

Обобщите для выпуклого многоугольника с n сторонами.


а) четырехугольник


б) пятиугольник


в) шестиугольник


г) восьмиугольник

Решение:

1. а) Из каждой вершины *четырехугольника* исходит лишь одна диагональ.
   б) Из каждой вершины *пятиугольника* исходят по две диагонали.
   в) Из каждой вершины *шестиугольника* исходят по три диагонали.
   г) Многоугольник с 8 сторонами называется *восьмиугольником*. Из каждой его вершины исходят по 5 диагоналей. Следовательно, из каждой вершины n-угольника исходят $n-3$ диагонали.
2. а) Четырехугольник имеет две диагонали.
   б) Пятиугольник имеет 5 диагоналей.
   в) Шестиугольник имеет 9 диагоналей.
   г) Восьмиугольник имеет 20 диагоналей.

Так как из каждой вершины выпуклого многоугольника с n сторонами могут быть проведены $n-3$ диагоналей, то всего можно построить $n(n-3)$ диагоналей. Однако для любых двух «несмежных» вершин две из диагоналей, построенных из этих вершин, совпадают. Следовательно, всего многоугольник с n сторонами имеет $\dfrac{n(n-3)}{2}$ диагоналей.

3. Сумма величин углов треугольника равна 180°. Так как $n-3$ диагонали, проведенные из одной и той же вершины выпуклого многоугольника, делят его на $n-2$ треугольника, то сумма S_n величин углов выпуклого многоугольника равна $180°(n-2)$.

Значит, $S_4 = 360°$, $S_5 = 540°$, $S_6 = 720°$, $S_8 = 1080°$.

Запомните

Если многоугольник имеет n сторон, то:
а) из каждой его вершины можно построить $n - 3$ диагонали;
б) всего у многоугольника $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей;
в) сумма величин углов многоугольника равна $180°(n-2)$.

3 Зная, что сумма величин углов треугольника равна 180°, перечертите и заполните таблицу.

Название многоугольника	*Количество сторон*	*Количество диагоналей, исходящих из одной вершины*	*Сумма величин углов многоугольника*
Выпуклый четырехугольник	4		
Выпуклый пятиугольник			
Выпуклый шестиугольник			

Упражнения и задачи

1

1. Постройте и обозначьте ломаную линию:
а) незамкнутую, с 5 звеньями, без самопересечений;
б) незамкнутую, с 6 звеньями, с самопересечением;
в) замкнутую, с 5 звеньями, без самопересечений;
г) замкнутую, с 7 звеньями, с самопересечением.

2. Постройте многоугольник:
а) выпуклый с 5 сторонами;
б) невыпуклый с 6 сторонами;
в) выпуклый с 7 сторонами;
г) невыпуклый с 8 сторонами.

3. ***Исследуйте!*** Сколько диагоналей можно провести из одной вершины многоугольника с:
а) 5 сторонами; б) 6 сторонами;
в) 7 сторонами; г) 10 сторонами?

4. Вычислите сумму величин углов выпуклого многоугольника с:
а) 6 сторонами;
б) 7 сторонами;
в) 8 сторонами;
г) 10 сторонами.

5. ***Работайте в парах!*** Вычислите периметр выпуклого многоугольника со сторонами, равными:
а) $7\frac{1}{3}$ см, 6,(2) см, 6 см, 7,(8) см;
б) $8\sqrt{3}$ см, $\sqrt{300}$ см, $\sqrt{192}$ см, $\sqrt{243}$ см.

6. Найдите величины углов выпуклого четырехугольника с двумя параллельными сторонами, зная, что два противоположных угла четырехугольника имеют величины:
а) 60° и 100°; б) 110° и 90°.

7. Найдите величины углов выпуклого многоугольника с n конгруэнтными сторонами, если:
а) $n=4$; б) $n=5$; в) $n=6$; г) $n=10$.

8. Углы A и B выпуклого четырехугольника $ABCD$ дополнительны до 180°. Каково взаимное расположение прямых AD и BC?

9. Периметр четырехугольника – 50 см. Вычислите длины сторон четырехугольника, зная, что их длины, выраженные в сантиметрах, являются последовательными натуральными числами.

2

10. Существует ли выпуклый многоугольник со сторонами:
а) 1 см, 2 см, 3 см, 4 см, 9 см; б) 2 см, 4 см, 10 см, 4 см; в) 0,6 см, 0,1 см, $\frac{1}{3}$ см, $\frac{1}{9}$ см?

11. Найдите величины углов выпуклого четырехугольника, зная, что они прямо пропорциональны числам:
а) 2, 3, 4, 6; б) 2, 3, 6, 7; в) 6, 8, 10, 12.

12. *Работайте в парах!* Найдите величины углов выпуклого четырехугольника, зная, что они обратно пропорциональны числам: а) 2, 3, 6, 9; б) 1, 2, 3, 6; в) 1, 2, 3, 4.

3

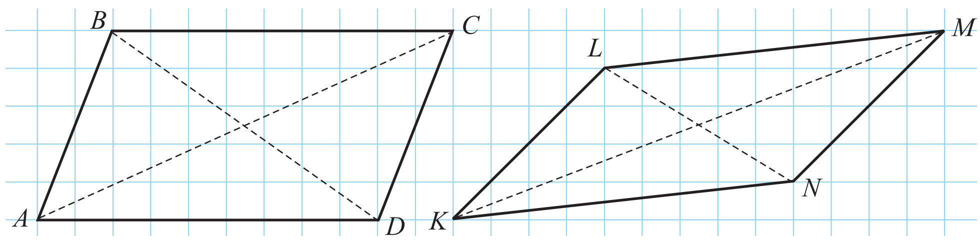
13. *Исследуйте!* Сколько диагоналей у выпуклого многоугольника с:
а) 5 сторонами; б) 6 сторонами;
в) 7 сторонами; г) 10 сторонами?

14. Докажите, что выпуклый многоугольник с n сторонами имеет $\frac{n(n-3)}{2}$ диагоналей.

15. **Внешним углом** выпуклого многоугольника называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине. Докажите, что внешний угол выпуклого четырехугольника равен сумме внутренних углов четырехугольника, несмежных ему, минус 180°.

§2. Параллелограммы

1 Рассмотрите рисунок.



Используя необходимые инструменты, установите:
а) какая связь существует между сторонами каждого четырехугольника, между противолежащими углами, между двумя углами, прилежащими к одной стороне?
б) свойства точки пересечения диагоналей каждого четырехугольника.

Определение

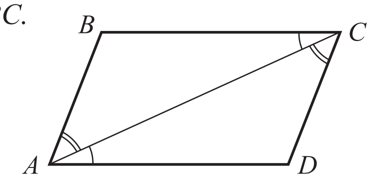
Четырехугольник, у которого две пары параллельных сторон, называется **параллелограммом**.

Четырехугольники $ABCD$ и $KLMN$ являются параллелограммами.

Теорема 1

Противолежащие стороны параллелограмма конгруэнтны.

Докажем теорему 1.
Условие: $ABCD$ – параллелограмм, $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.
Заключение: $[AB] \equiv [CD], [AD] \equiv [BC]$.
Доказательство:



① $\Delta ABC \equiv \Delta CDA$ (признак УСУ: $[AC]$ – общая сторона, $\angle BAC \equiv \angle DCA$, $\angle ACB \equiv \angle CAD$ – пары внутренних накрест лежащих углов при параллельных прямых).
② Из ① следует, что $[AB] \equiv [CD]$, $[AD] \equiv [BC]$, ч.т.д. ►

- Заполните пропуски так, чтобы получить теорему, обратную теореме 1, которая также верна: *Если противолежащие стороны выпуклого четырехугольника* ________, *то четырехугольник является* ________.
- Аналогично доказательству теоремы 1 покажите правомерность следующих высказываний:

Теорема 2 Противолежащие углы параллелограмма конгруэнтны.

Теорема 3 Два угла параллелограмма, прилежащие к одной стороне, дополнительны до 180°.

Теорема 4 Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Обратные теоремам 2–4 также являются теоремами. Чтобы установить, является ли четырехугольник параллелограммом, можно воспользоваться определением параллелограмма или одной из теорем, обратных теоремам 1–4.

Признаки параллелограмма

Выпуклый четырехугольник является параллелограммом, если выполняется хотя бы одно из условий:

1. У четырехугольника две пары параллельных сторон.

2. У четырехугольника одна пара параллельных и конгруэнтных сторон.

3. У четырехугольника противолежащие стороны конгруэнтны.

4. У четырехугольника противолежащие углы конгруэнтны.

5. У четырехугольника пары прилежащих к одной стороне углов дополнительны до 180°.

6. У четырехугольника середины диагоналей совпадают.

2 Впишите одно из понятий *квадрат*, *прямоугольник*, *ромб*, чтобы получить истинное высказывание:

а) Параллелограмм, у которого один угол прямой, называется ______.

б) Прямоугольник, у которого смежные стороны конгруэнтны, является ______.

в) Параллелограмм, у которого смежные стороны конгруэнтны, является ______.

г) У ______ все углы прямые.

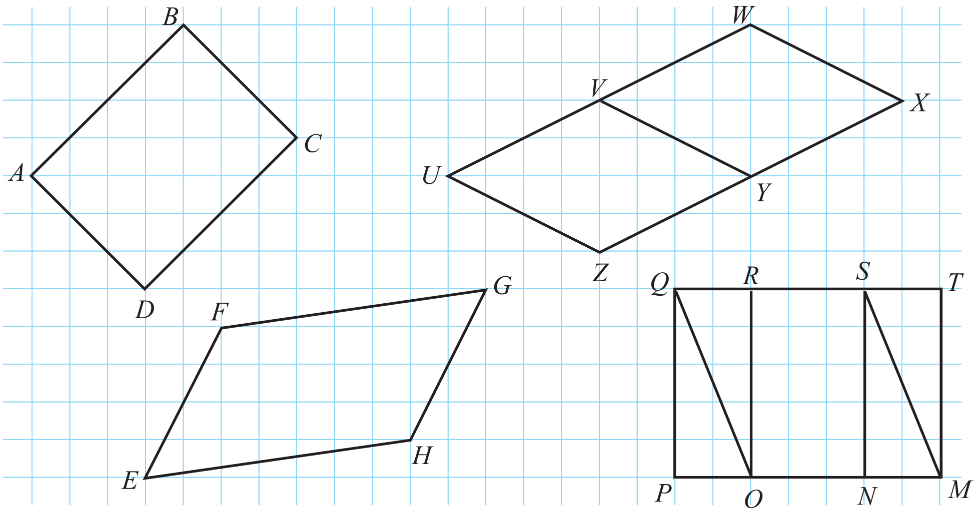
д) У ______ все стороны конгруэнтны.

- Рассмотрите схему и сформулируйте теоремы.

Упражнения и задачи

1

1. Рассмотрите рисунок и выберите:
а) квадраты;
б) прямоугольники;
в) параллелограммы;
г) ромбы.



2. Найдите периметр параллелограмма со сторонами:
а) 3,5 см и 4,5 см; б) $9\sqrt{5}$ см и $\sqrt{180}$ см.

3. Найдите периметр ромба со сторонами:
а) 8,2 см; б) 7,(6) см.

4. ***Работайте в парах!*** Изобразите рисунок, для которого истинно высказывание:
а) Отрезки $[AB]$ и $[CD]$ являются диагоналями параллелограмма.
б) Длина прямоугольника $ABCD$ в 1,5 раза больше его ширины.
в) $ABCD$ – прямоугольник, а $AEFD$ – параллелограмм.
г) У четырехугольника $ABCD$ диагонали конгруэнтны, но он отличается от параллелограмма.

5. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?
а) Длина стороны ромба составляет 25% от его периметра.
б) Ромб, у которого диагонали конгруэнтны, является квадратом.
в) Параллелограмм, у которого все стороны конгруэнтны, является квадратом.
г) Если диагонали четырехугольника перпендикулярны, то этот четырехугольник является ромбом.

6. Градусная мера одного из углов параллелограмма равна 35°. Найдите величины остальных углов параллелограмма.

7. Один из углов параллелограмма имеет величину в 5 раз больше величины его другого угла. Найдите величины остальных углов параллелограмма.

8. Один из углов ромба имеет величину на 20° меньше величины другого угла ромба. Найдите величины остальных углов ромба.

2

9. У прямоугольника $ABCD$ диагональ равна 10 см. Найдите радиус окружности, которой принадлежат точки A, B и C.

10. Диагонали ромба $ABCD$, сторона которого равна 12 см, пересекаются в точке O. Найдите радиус окружности, которой принадлежат точки A, B, O.

11. Периметр четырехугольника – 1 м. Найдите длины сторон четырехугольника, зная, что, выраженные в сантиметрах, они являются четными последовательными числами.

12. ***Работайте в парах!*** Если увеличить на 11 см ширину прямоугольника, то получим квадрат, периметр которого равен 112 см. Чему равен периметр прямоугольника?

13. Периметр параллелограмма $ABCD$ – 50 см. Найдите расстояние между прямыми AD и BC, зная, что $m(\angle A) = 30°$ и $BC = 16$ см.

14. Периметр прямоугольника – 70 см. Найдите измерения прямоугольника, если известно, что, увеличив длину на 10 см, получим удвоенную ширину прямоугольника.

3

15. Вычислите площадь треугольника ABC (угол B – прямой), если $AB = 8$ см, $BC = 12$ см.

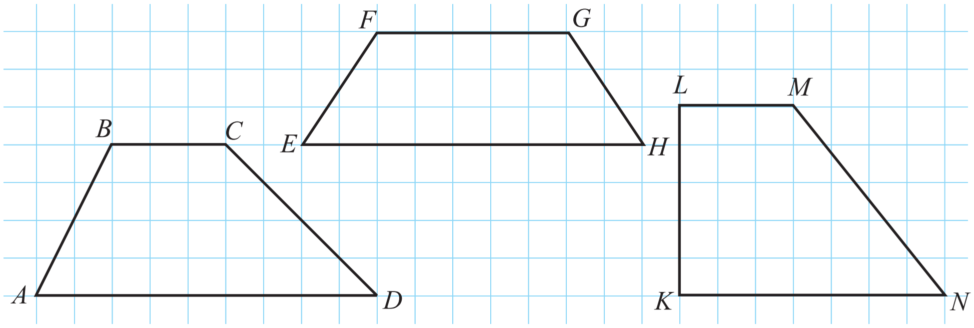
16. Найдите координаты четвертой вершины параллелограмма $ABCD$, если:
а) $A(0; 0)$, $B(1; 3)$, $C(7; 1)$; б) $A(-7; -3)$, $B(5; 2)$, $C(17; -3)$; в) $A(-5; -3)$, $B(5; 4)$, $C(9; 3)$.

§ 3. Трапеция

1 Рассмотрите рисунок.

а) Какая связь существует между элементами каждого четырехугольника?

б) А между его углами?



Определения

- Четырехугольник, у которого две противолежащие стороны параллельны, а две другие не параллельны, называется **трапецией**. Параллельные стороны называются **основаниями**, а две другие – **боковыми сторонами**.
- Трапеция, у которой непараллельные стороны конгруэнтны, называется **равнобокой трапецией**.
- Трапеция, у которой одна из непараллельных сторон перпендикулярна основанию, называется **прямоугольной трапецией**.
- Отрезок, концы которого лежат на прямых, содержащих основания трапеции, и перпендикулярный им, называется **высотой трапеции**.

• Исследуйте четырехугольники, изображенные выше, и заполните пропуски:

а) Четырехугольник $ABCD$ является ________ .

б) Четырехугольник ________ является прямоугольной трапецией.

в) Четырехугольник ________ является равнобокой трапецией.

г) Диагонали трапеции ________ конгруэнтны.

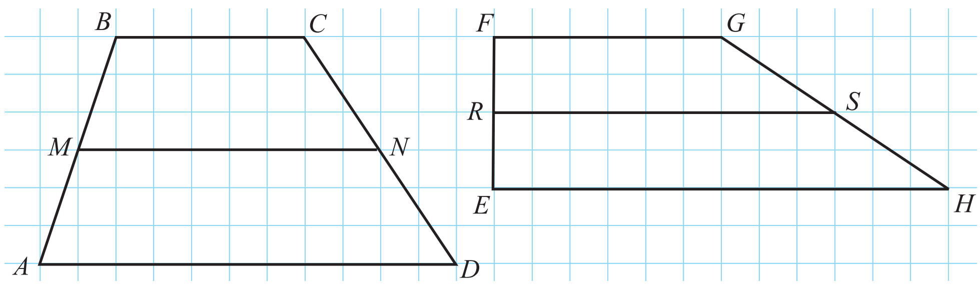
д) У трапеции ________ две пары конгруэнтных углов.

Теорема 1 Диагонали равнобокой трапеции конгруэнтны.

Теорема 2 Углы при основаниях равнобокой трапеции конгруэнтны.

• Докажите теоремы 1 и 2.

2 Рассмотрите рисунок.



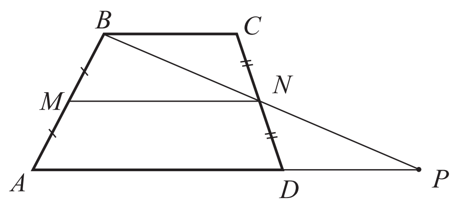
- Дополните:
  а) Точки M, N, R, S являются серединами отрезков ________ соответственно.
  б) Отрезки $[BC], [MN]$ и $[AD]$ являются ________.
  в) Отрезки $[EH], [FG]$ и $[RS]$ являются ________.
- Вычислите $\dfrac{AD+BC}{MN}$ и $\dfrac{EH+FG}{RS}$.

Определение Отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон трапеции, называется **средней линией трапеции**.

Отрезки $[MN]$ и $[RS]$ являются средними линиями трапеций $ABCD$ и, соответственно, $EFGH$.

Теорема 3 Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна полусумме длин оснований.

Докажем теорему 3.



Условие: $ABCD$ – трапеция, $AD \parallel BC$, точки M и N – середины сторон $[AB]$ и соответственно $[CD]$.

Заключение: 1) $MN \parallel AD$, $MN \parallel BC$;

2) $MN = \dfrac{1}{2}(AD+BC)$.

Доказательство:

① Пусть P – точка пересечения прямых BN и AD.

② $\Delta BCN \equiv \Delta PDN$ (признак УСУ: $[CN] \equiv [DN]$,
$\angle BNC \equiv \angle PND$ – вертикальные углы;
$\angle BCN \equiv \angle PDN$ – внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых).

Следовательно, $[BC] \equiv [PD]$, точка N – середина отрезка BP.

③ Отрезок $[MN]$ – средняя линия треугольника ABP.

Следовательно, $MN \parallel AP$ (*), $MN = \dfrac{1}{2}AP = \dfrac{1}{2}(AD+DP) = \dfrac{1}{2}(AD+BC)$.

Согласно (*), $MN \parallel AD$. Так как $AD \parallel BC$, следует, что $MN \parallel BC$, ч.т.д. ►

Упражнения и задачи

1

1. ***Работайте в парах!*** Изобразите рисунок, для которого истинно высказывание:

а) Трапеция $ABCD$ имеет основания AB и CD.
б) Угол C трапеции $ABCD$ – прямой.
в) У прямоугольной трапеции $ABCD$ одно из оснований в два раза меньше другого.
г) Диагонали трапеции $ABCD$ перпендикулярны.
д) У равнобокой трапеции $ABCD$ боковая сторона конгруэнтна меньшему основанию.

2. Найдите величины углов прямоугольной трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$, если:
а) $m(\angle A)+m(\angle D)=160°$;   б) $m(\angle B)+m(\angle D)=130°$.

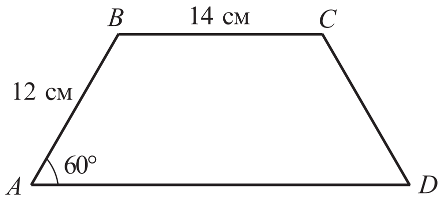
3. Найдите величины углов равнобокой трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$, если:
а) $m(\angle A)+m(\angle D)=160°$;   б) $m(\angle B)+m(\angle C)=220°$.

4. Вычислите длину средней линии трапеции с основаниями:
а) 8 см и 4 см;   б) $2\sqrt{7}$ см и $6\sqrt{7}$ см;   в) 6,(3) см и 9,(3) см.

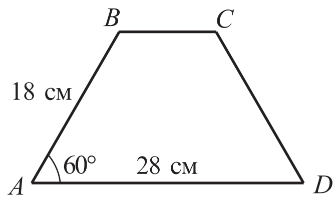
5. Отрезок $[MN]$ – средняя линия трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Найдите:
а) AD, если $MN=10$ см и $BC=6$ см;
б) BC, если $MN=12{,}5$ см и $AD=15$ см.

6. Найдите длины сторон равнобокой трапеции, периметр которой равен 100 см, зная, что боковая сторона конгруэнтна меньшему основанию и в два раза меньше большего основания.

7. Используя данные рисунка, найдите периметр равнобокой трапеции $ABCD$.



а)



б)

8. *Работайте в парах!* Отрезок $[MN]$ – средняя линия трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Найдите:
а) периметр трапеции, если $AB=8$ см, $CD=9$ см, $MN=12$ см;
б) отрезок MN, если $AB=3\sqrt{5}$ см, $DC=4\sqrt{5}$ см, а периметр трапеции равен $21\sqrt{5}$ см.

9. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Найдите $AC+BD$, если $BD=10$ см.

2

10. Диагональ трапеции делит ее среднюю линию на два отрезка. Отношение длин этих отрезков равно $\frac{2}{3}$. Найдите длины оснований трапеции, если длина средней линии трапеции 15 см.

11. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Вычислите периметр трапеции, если $AD=18$ см, $BC=11$ см и $[AC$ – биссектриса угла BAD.

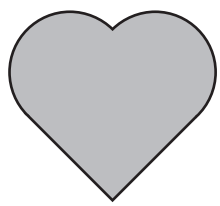
12. *Работайте в парах!* Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Найдите величины углов треугольника, если $AD=2BC$ и $[AC$ – биссектриса угла BAD.

3

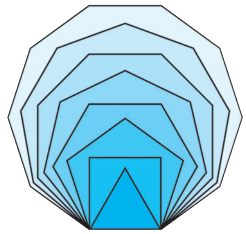
13. Точка E принадлежит большему основанию $[AB]$ трапеции $ABCD$ так, что $[AE]\equiv[DC]$. Докажите, что отрезки AC и DE делятся пополам точкой пересечения.

14. Пусть отрезок $[MN]$ – средняя линия трапеции $ABCD$ с бо́льшим основанием $[AD]$. Найдите MN, если: $MN+AD=31$ см, $MN+BC=25$ см.

15. ***Математика для искусства***
Сердечко (на рисунке) образовано объединением двух полукругов и квадрата (с его внутренней областью). Диагональ квадрата – 16 см. Найдите площадь сердечка.



§4. Правильные многоугольники



1 Исследуйте, какими являются углы и стороны:
а) равностороннего треугольника; б) квадрата.

Решение:

а) Углы равностороннего треугольника конгруэнтны.
Стороны равностороннего треугольника конгруэнтны.

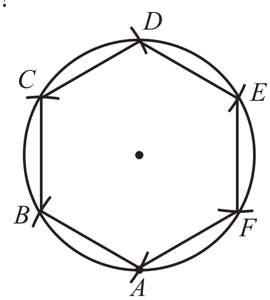
б) Углы квадрата конгруэнтны. Стороны квадрата конгруэнтны.

Запомните

Выпуклый многоугольник, у которого стороны конгруэнтны и углы конгруэнтны, называется **правильным многоугольником**. Сторона правильного многоугольника с n сторонами обозначается l_n.

2 Как построить правильный шестиугольник со стороной a?

Объясняем



Строим окружность радиуса a. Берем произвольно на окружности точку, например, точку A. Фиксируем циркуль в точке A и радиусом, равным радиусу окружности, отмечаем на окружности точку B. Затем аналогично строим точки C, D, E, F (см. рисунок). Все точки соединяем и получаем правильный шестиугольник $ABCDEF$ со стороной a, конгруэнтной радиусу окружности.

- Докажите, что если на рисунке соединить точки A, C, E, получим равносторонний треугольник.

3 Какова величина угла правильного многоугольника с n сторонами?

Решение:

Известно, что сумма величин углов выпуклого многоугольника с n сторонами равна $180°(n-2)$.

Правильный многоугольник – это выпуклый многоугольник с конгруэнтными углами. Следовательно, величина угла правильного многоугольника с n сторонами равна $\dfrac{180°(n-2)}{n}$.

Упражнения и задачи

1

1. Как называется правильный многоугольник с:
а) 3 сторонами; б) 4 сторонами; в) 5 сторонами?

2. ***Работайте в парах!*** Перепишите и дополните:
а) Если ... многоугольник имеет n конгруэнтных сторон и ..., то он является правильным многоугольником с n сторонами.
б) Из каждой вершины правильного многоугольника с 24 сторонами исходят ... диагоналей.
в) Правильный многоугольник, сумма величин углов которого равна 1800°, имеет ... сторон.

3. Найдите величину угла ABC правильного многоугольника:
а) $ABCDEFG$; б) $ABCDEFGHI$; в) $ABCDEFGHIJ$.

4. Найдите периметр правильного многоугольника с n сторонами (длина стороны равна a), если:
а) $n=4$, $a=\frac{3}{20}$ см; б) $n=5$, $a=2\frac{1}{7}$ см;
в) $n=9$, $a=3,(3)$ см; г) $n=6$, $a=2\sqrt{6}$ см.

5. Найдите количество сторон правильного многоугольника с периметром P и стороной a, где:
а) a = 6,8 см, P = 54,4 см; б) a = 26 см, P = 1,3 м;
в) $a=2\frac{5}{6}$ см, P = 17 см; г) $a=\sqrt{12}$ м, $P=10\sqrt{3}$ см.

6. Найдите количество сторон правильного многоугольника, сумма величин углов которого равна:
а) 720°; б) 540°; в) 1620°.

7. ***Исследуйте!*** Как называется правильный многоугольник, величина угла которого равна:
а) 120°; б) 135°; в) 108°?

2

8. Точка M равноудалена от вершин правильного шестиугольника с периметром 66 см. Найдите AM, где A – вершина этого шестиугольника.

9. *Работайте в группах!* Дан правильный шестиугольник. Вычислите:
а) величину угла между малой и большой диагоналями с общим началом;
б) величину угла между двумя малыми диагоналями с общим началом;
в) отношение длин малой и большой диагоналей;
г) отношение между площадью шестиугольника и площадью треугольника, сторонами которого являются малые диагонали.

10. Докажите, что диагонали правильного пятиугольника конгруэнтны.

3

11. Докажите, что каждая диагональ правильного пятиугольника параллельна одной из его сторон.

12. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что AF и BE параллельны.

Упражнения и задачи на повторение

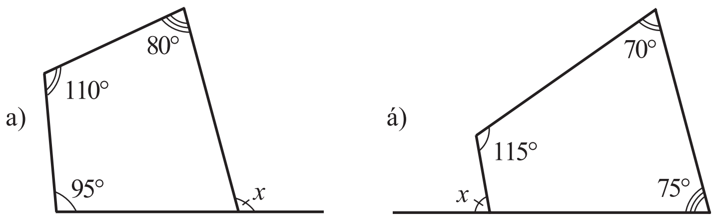
1

1. Постройте линию:
а) кривую, незамкнутую; б) ломаную, замкнутую;
в) ломаную, замкнутую, с 6 звеньями; г) ломаную, незамкнутую, с 5 звеньями.

2. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины выпуклого многоугольника с:
а) 8 сторонами; б) 9 сторонами; в) 12 сторонами; г) 18 сторонами?

3. Сколько сторон у выпуклого многоугольника, если сумма величин его углов равна:
а) 1260°; б) 1800°;
в) 3240°; г) 2700°?

4. *Работайте в парах!*
Вычислите величину угла, обозначенного через x.

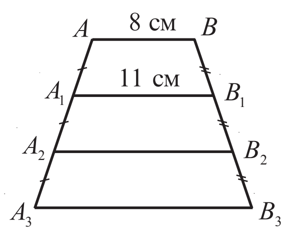


5. Постройте:
а) параллелограмм, у которого диагонали равны 6 см и 8 см, а угол, образованный ими, имеет величину 40°;
б) квадрат с диагоналями 7 см;
в) ромб с диагоналями 8 см и 10 см;
г) прямоугольник, сторона которого равна 5 см и образует с диагональю угол 50°.

6. Постройте:
а) квадрат, периметр которого равен 20 см;
б) ромб со стороной 6 см и одним из углов величиной 60°;
в) прямоугольную трапецию, высота которой равна 5 см и основания 4 см и 6 см;
г) равнобокую трапецию, высота которой равна 5 см и основания 3 см и 7 см.

7. Вершины четырехугольника $MNKP$ являются серединами сторон квадрата $ABCD$, а вершины четырехугольника $VXYZ$ являются серединами сторон четырехугольника $MNKP$.
Вычислите: а) XY, если $AB = 8\sqrt{2}$ см;
б) площадь квадрата $ABCD$, если $XY = 2\sqrt{5}$ см.

8. *Работайте в парах!* Используя данные рисунка, найдите длину отрезков A_2B_2 и A_3B_3, если $AB \parallel A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$.



2

9. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в начале координат декартовой системы координат. Найдите координаты:
а) точек A и B, если $C(4, 6)$, $D(3, -2)$;
б) точек C и D, если $A(1, 1)$, $B(5, -1)$.

10. Пусть $ABCD$ – параллелограмм, $M \in [AD]$, причем $BM \perp AD$. Найдите площадь параллелограмма, если $BM = 8$ см, $AD = 12$ см.
Указание. Пусть $N \in [AD]$, причем $CN \perp AD$. Докажите, что $\Delta ABM \equiv \Delta DCN$.

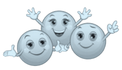
3

11. Найдите площадь ромба, диагонали которого равны 10 см и 12 см.

12. Вычислите площадь равнобокой трапеции, у которой:
а) высота равна 5 см, а основания 6 см и 14 см;
б) высота равна 8 см, а основания 5 см и 7 см.

13. Вычислите сумму величин внешних углов:
а) выпуклого четырехугольника;
б) выпуклого пятиугольника;
в) выпуклого шестиугольника.

14. Какого вида четырехугольник образуют биссектрисы произвольного прямоугольника?

15.  ***Работайте в группах!*** Проект *Приложения геометрических фигур в дизайне*.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Постройте прямоугольник со стороной 6 см, которая образует с его диагональю угол 30°.
2. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины выпуклого многоугольника, если сумма его углов равна 2700°?
3. Найдите величины углов ромба, если одна из его диагоналей образует со стороной угол величиной 20°.
4. Найдите количество сторон правильного многоугольника, сумма величин углов которого равна 1260°. Какова величина угла этого многоугольника?
5. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в начале декартовой системы координат. Найдите координаты точек A, B, C, если точка D имеет координаты $(-3, 2)$, а стороны прямоугольника параллельны осям координат.
6. Вычислите сумму углов выпуклого многоугольника с 7 сторонами.
7. Найдите длину средней линии и расстояние между серединами диагоналей трапеции с основаниями 6,8 см и 9,6 см.

Вариант 2

1. Постройте прямоугольную трапецию, высота которой 4 см и основания 3 см и 5 см.
2. Сколько диагоналей можно провести из одной вершины выпуклого многоугольника, если сумма его углов равна 1980°?
3. Найдите величины углов ромба, если одна из его диагоналей образует со стороной угол величиной 70°.
4. Найдите количество сторон правильного многоугольника, сумма величин углов которого равна 1080°. Какова величина угла этого многоугольника?
5. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в начале декартовой системы координат. Найдите координаты точек A, B, C, если точка D имеет координаты $(1, -5)$, а стороны прямоугольника параллельны осям координат.
6. Вычислите сумму углов выпуклого многоугольника с 8 сторонами.
7. Найдите длину средней линии и расстояние между серединами диагоналей трапеции с основаниями 5,6 см и 7,8 см.

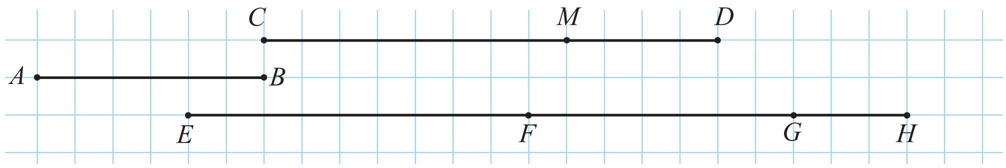
Глава 3 Подобие треугольников

Математика – это наука, которая делает необходимые выводы.
Бенджамин Пирс

§1. Теорема Фалеса

1.1. Пропорциональные отрезки

1 Рассмотрите рисунок и заполните пропуски:



а) $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{3\,\text{см}}{6\,\text{см}} = 0{,}5$, $\quad \dfrac{CD}{EG} = \square$, $\quad \dfrac{EF}{CD} = \square$, $\quad \dfrac{GH}{MD} = \square$;

б) $\dfrac{AB}{CM} = \dfrac{\square}{CD} = \dfrac{GH}{\square} = \dfrac{\square}{EG}$.

- **Отношение двух отрезков** – это отношение их длин, выраженных одной единицей измерения.
- **Отрезки** $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, $[A_3, B_3]$ **пропорциональны** отрезкам $[C_1D_1]$, $[C_2D_2]$, $[C_3, D_3]$, если $\dfrac{A_1B_1}{C_1D_1} = \dfrac{A_2B_2}{C_2D_2} = \dfrac{A_3B_3}{C_3D_3} = k$, где $k \in \mathbb{R}$.
  Число k называется **коэффициентом пропорциональности**.
- Аналогично определяется пропорциональность двух последовательностей, состоящих из 4, 5, ... отрезков.

- Найдите на рисунке задания **1** две последовательности по 4 пропорциональных отрезка. Чему равен их коэффициент пропорциональности?

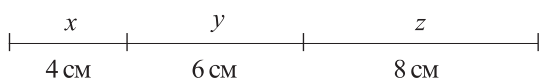
2 Разделите отрезок длиной 18 см на три части, пропорциональные числам 2, 3, 4.

Решаем

Пусть x, y, z – последовательность искомых длин $(x + y + z = 18)$.
Тогда между величинами x, y, z и 2, 3, 4 существует прямо пропорциональная зависимость.

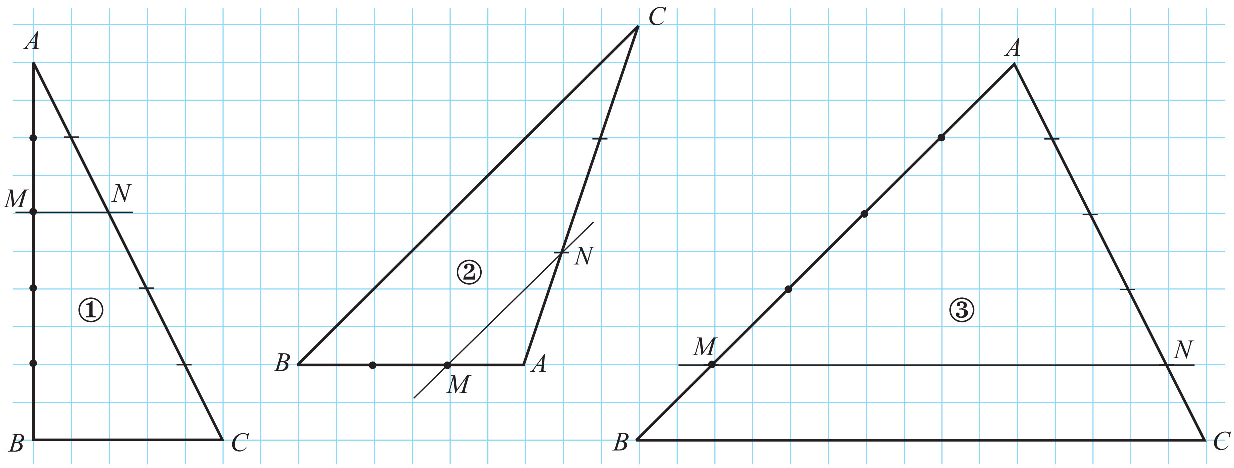
Итак, $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{4} = \dfrac{x+y+z}{2+3+4} = \dfrac{18}{9} = 2.$

Получим: $x = 4$ (см),
$y = 6$ (см),
$z = 8$ (см).



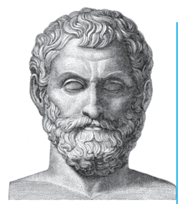
1.2. Теорема Фалеса. Применения

1 Рассмотрите рисунок и сравните в каждом случае значения отношений $\frac{AM}{MB}$ и $\frac{AN}{NC}$. Что вы заметили?



Теорема Фалеса

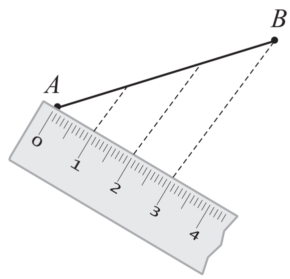
Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, образует на остальных его сторонах пропорциональные отрезки.



Фалес Милетский – древнегреческий философ (624–546 гг. до н. э.)

- Для каждого случая задания **1** составьте другие равные отношения отрезков.

2 Продолжите утверждение так, чтобы получить теорему, обратную теореме Фалеса: *Если прямая образует с двумя сторонами треугольника пропорциональные отрезки, то...*



3 Рассмотрите рисунок и объясните, как можно разделить отрезок на 3 равные части.

- Постройте отрезок длиной $2\frac{1}{7}$ см.

Теорема эквидистантных параллельных прямых

Если три или более параллельные прямые образуют на секущей конгруэнтные отрезки, то они образуют на любой другой секущей конгруэнтные отрезки, и расстояние между каждыми двумя смежными прямыми одинаково (то есть прямые – эквидистантные).

- Рассмотрите рисунок.
  На прозрачной линейке отмечены деления 0 см, 1 см, …, 5 см. Найдите коэффициент пропорциональности отношений длин делений и их теней, если расстояние тени от деления **4 см** до деления **1 см** равно 5 см.

Упражнения и задачи

1

1. Существует ли прямо пропорциональная зависимость между последовательностями:

а) 1, 2, 3, 4 и 5, 6, 7, 8; б) 2, 3, 4, 5 и 4, 6, 8, 10;

в) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ и 5, 6, 7; г) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ и 2,5; 2; 1?

2. Проверьте, будут ли числа из первой строки пропорциональны числам из второй:

а)

2	4	6	10	12
5	10	15	25	30

б)

1,(3)	0,7	11	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
8	4,2	66	1	0,(3)

3. Заполните пропуски так, чтобы числа из первой строки были пропорциональны числам из второй:

а)

4	6	10	12	
	18			27

б)

0,2		1,8		3,2	
	5	9	10		12

4. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите схему и составьте по 5 пропорций, отталкиваясь от пропорции:

а) $\frac{2{,}4}{3{,}6}=\frac{4}{6}$; б) $\frac{0{,}8}{0{,}2}=\frac{10}{2{,}5}$.

$$\frac{a}{b}=\frac{a+c}{b+d}$$

$$\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c} \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \qquad \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

$$\frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c} \qquad \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

5. Заполните таблицу.

а)

Количество кирпичей	Масса (кг)
1	2,5
3	…
5	…
…	100
60	…
…	150

б)

Расстояние (км)	Количество бензина (л)
100	6
150	…
50	…
…	15
350	…
…	28,5

в)

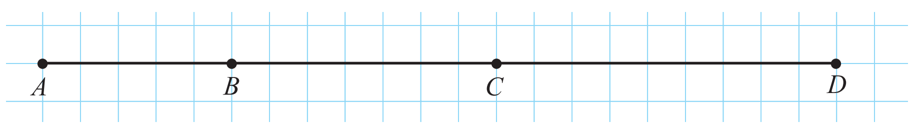
Расстояние (км)	Время (часы)
60	1
40	…
…	5
90	…
…	4,5
510	…

г)

Количество краски (л)	Площадь (м^2)
1	12
…	8
…	14
3,5	…
6	…
…	100

6. Рассмотрите рисунок. Вычислите отношение отрезков:

а) AB и CD; б) AC и AD; в) BC и BD; г) AD и AB.



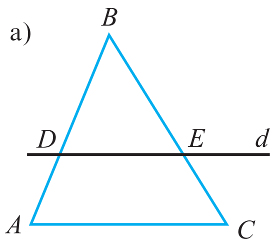
7. Точка C принадлежит отрезку AB, причем $\frac{AC}{BC}=\frac{3}{4}$. Вычислите отношение:

а) $\frac{AB}{AC}$; б) $\frac{BC}{AB}$; в) $\frac{AB}{AB-AC}$; г) $\frac{AB-BC}{AB+AC}$.

8. Вычислите: а) MN, если отношение отрезков MN и KP равно 2,4 и KP = 4 см;
б) KP, если отношение отрезков MN и KP равно 4,2 и MN = 21 см;
в) отношения отрезков MN и KP, если $[MN]$ в 3 раза короче $[KP]$.

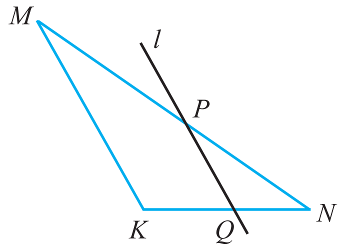
9. *Работайте в парах!*
Прямая на рисунке параллельна стороне треугольника. Заполните соответственно пропуски.

а)



$\frac{BD}{DA}=\frac{\square}{\square}$, $\frac{EC}{BC}=\frac{\square}{\square}$;

б)

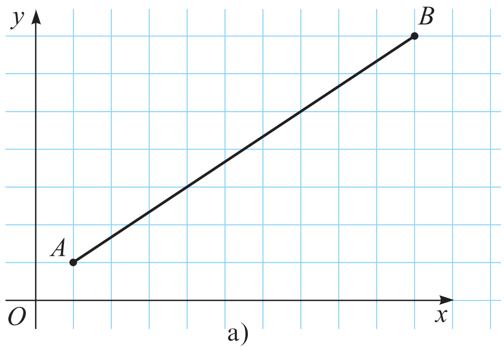


$\frac{MP}{PN}=\frac{\square}{\square}$, $\frac{KN}{QN}=\frac{\square}{\square}$.

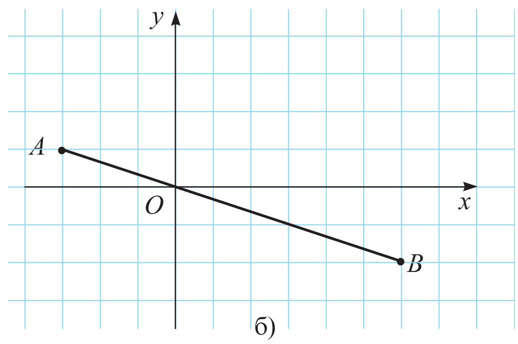
10. Разделите отрезок 12 см на 3 части, пропорциональные числам 1, 2, 3.

11. Разделите отрезок 13,5 см на 3 части, пропорциональные числам 2, 4, 3.

12. Найдите координаты двух точек, которые делят отрезок AB на 3 равных отрезка.



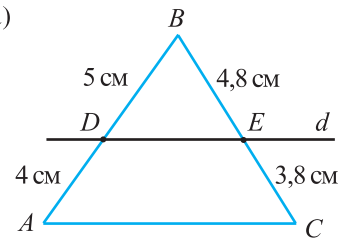
а)



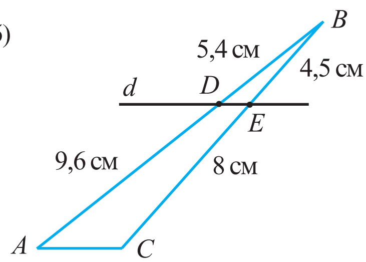
б)

13. *Исследуйте!*
Рассмотрите рисунок. Установите, параллельна ли прямая d стороне треугольника.

а)

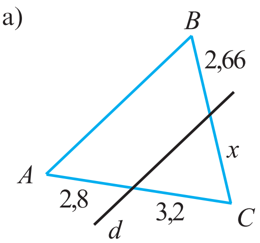


б)

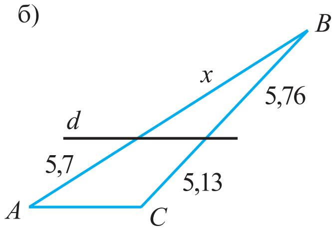


14. Рассмотрите рисунок. Прямая d параллельна стороне треугольника. Найдите x.

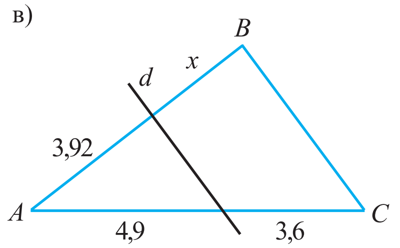
а)



б)



в)



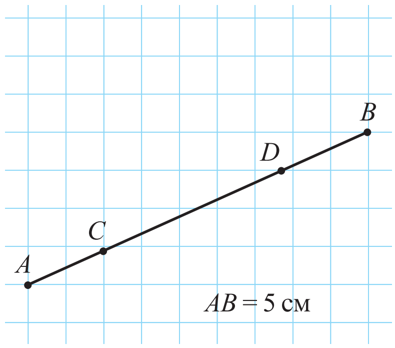
15. С помощью линейки без делений можно построить эквидистантные параллельные прямые. Разделите с помощью линейки:

а) отрезок, равный 6 см, на 4 конгруэнтных отрезка;

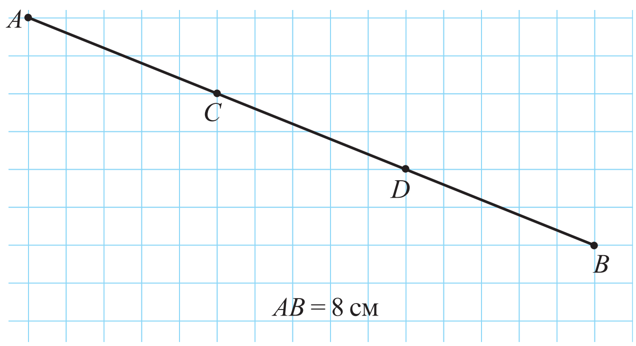
б) отрезок, равный 7 см, на 3 конгруэнтных отрезка.

16. Точки A, B, C, D принадлежат горизонтальным линиям клеточной сетки. Рассмотрите рисунок и найдите длину отрезков AC, CD и BD:

а)



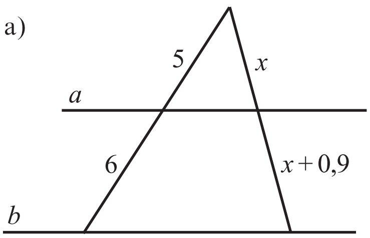
б)



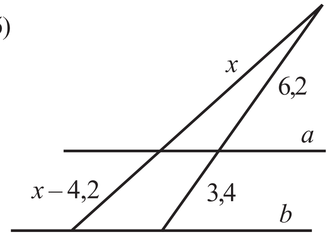
3

17. Прямые a и b, изображенные на рисунке, параллельны. Найдите значение x.

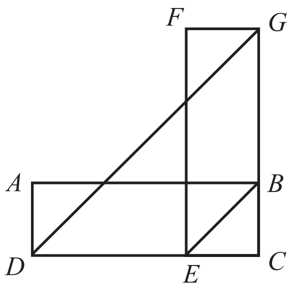
а)



б)



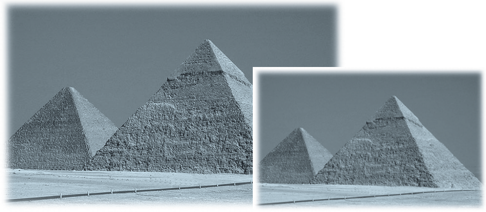
18. Прямоугольники $ABCD$ и $EFGC$ имеют одинаковую площадь. Докажите, что $[DG] \parallel [BE]$.



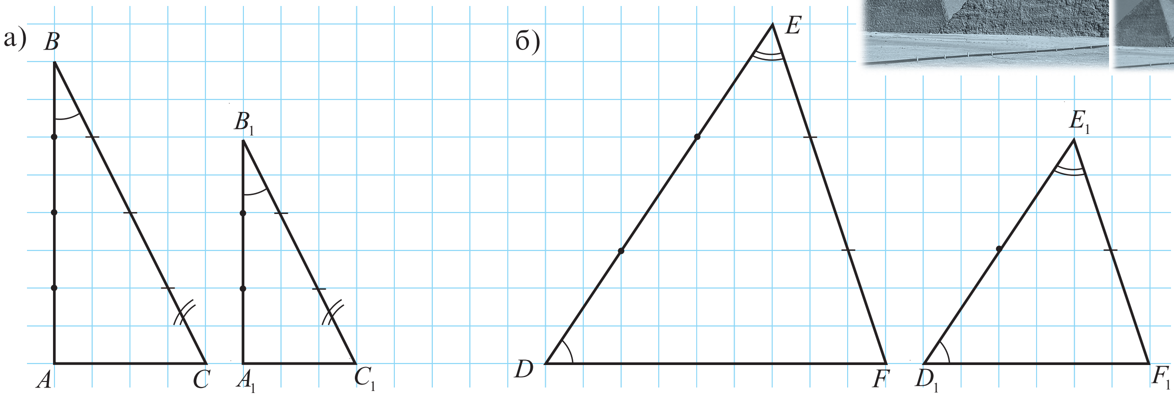
19. ***Математика для спорта***

Шестерня заднего колеса имеет 14 зубьев, а педальная шестерня – 49 зубьев. Радиус окружности заднего колеса 35 см. Какое расстояние проедет велосипед, если 10 раз прокрутить педаль?

§2. Подобные треугольники



1 Рассмотрите рисунок и заполните пропуски.



а) $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{4}{3}$, $\dfrac{AC}{A_1C_1}=\square$, $\dfrac{BC}{B_1C_1}=\square$, $\angle A\equiv\angle A_1$, $\angle B\equiv\angle B_1$, $\angle C\equiv\square$.

б) $\dfrac{DE}{\square}=\dfrac{EF}{E_1F_1}=\dfrac{\square}{D_1F_1}=\dfrac{3}{2}$, $\angle D\equiv\angle D_1$, $\angle E\equiv\square$, $\square\equiv\angle F_1$.

- Какие общие свойства двух пар треугольников вы заметили?

Определение Два **треугольника** называются **подобными**, если их углы соответственно конгруэнтны и стороны соответственно пропорциональны.

Обозначение $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$ читается «треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны» и означает, что $\angle A\equiv\angle A_1$, $\angle B\equiv\angle B_1$, $\angle C\equiv\angle C_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1}=\dfrac{BC}{B_1C_1}=\dfrac{AC}{A_1C_1}=k$.

Число k называется ***коэффициентом пропорциональности*** (или ***коэффициентом подобия***).

Напомним, что в общем из соотношения $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$ не следует, например, что $\Delta ABC\sim\Delta A_1C_1B_1$.

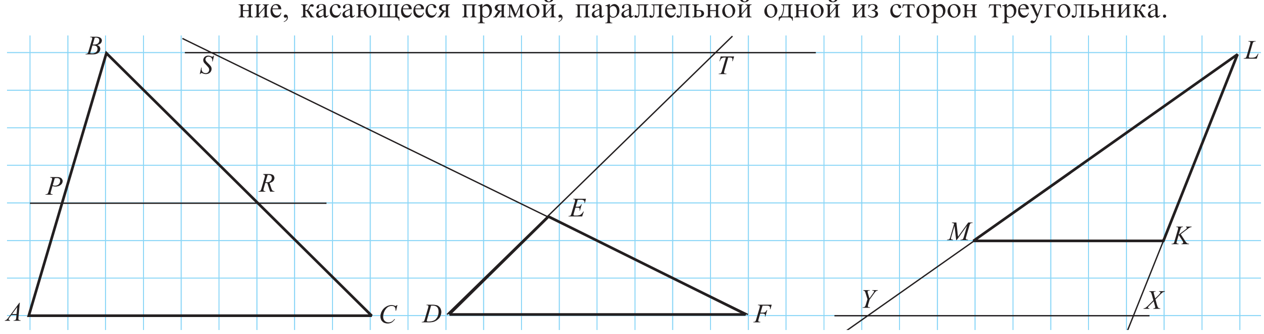
- Докажите теорему:

Теорема транзитивности подобий

Если $\Delta ABC\sim\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_1B_1C_1\sim\Delta A_2B_2C_2$, то $\Delta ABC\sim\Delta A_2B_2C_2$.

Замечание Два конгруэнтных треугольника являются подобными и их коэффициент подобия равен 1.

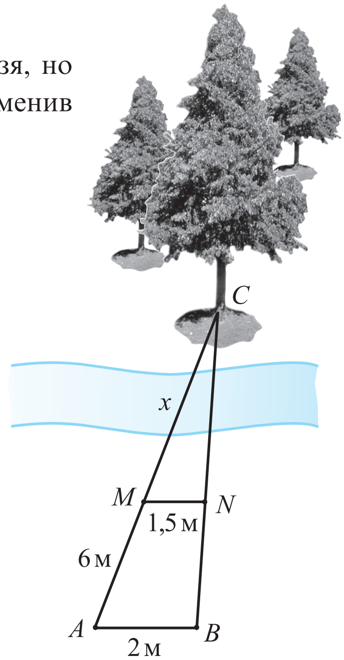
2 Рассмотрите рисунки. Применив теорему Фалеса и используя геометрические инструменты, найдите пары подобных треугольников. Сформулируйте утверждение, касающееся прямой, параллельной одной из сторон треугольника.



Основная теорема подобия (ОТП)

> Прямая, параллельная одной из сторон треугольника, образует с прямыми, содержащими остальные две стороны, треугольник, подобный данному.

- Рассмотрите рисунок ($MN \parallel AB$).
  Пусть расстояние от дерева до точки M найти нельзя, но можно найти длины отрезков AM, MN и AB. Применив ОТП, найдите MC.



Объясняем

① Так как $MN \parallel AB$, согласно ОТП: $\Delta MCN \sim \Delta ACB$.

② $\dfrac{MC}{AC} = \dfrac{MN}{AB}$ (согласно ①). Обозначаем: $MC = x$.

$\dfrac{x}{x+6} = \dfrac{1{,}5}{2} \rightarrow 2x = 1{,}5(x+6)$

$\rightarrow 2x - 1{,}5x = 9$

$\rightarrow 0{,}5x = 9$

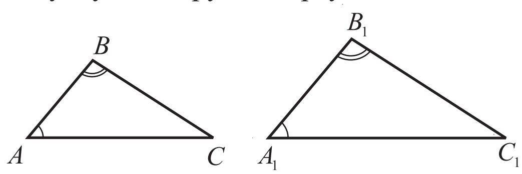
Следовательно, $x = 9 : 0{,}5 = \square$ (м).

Ответ: $\square$ м.

Запомните

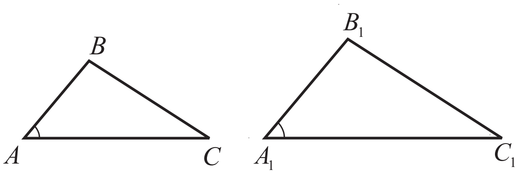
3 **Признаки подобия двух треугольников**

1. **Признак УУ.** Если два угла одного треугольника соответственно конгруэнтны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.



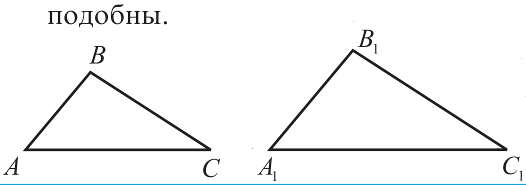
$\left.\begin{array}{l} \angle A \equiv \angle A_1 \\ \angle B \equiv \angle B_1 \end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

2. **Признак СУС.** Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы между этими сторонами конгруэнтны, то треугольники подобны.



$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} \\ \angle A \equiv \angle A_1 \end{array}\right| \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

3. **Признак ССС.** Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.



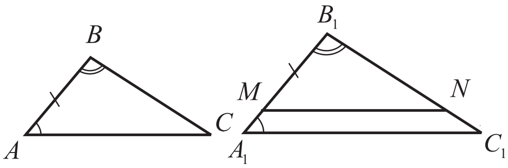
$\left.\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1}\right| \rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A_1B_1C_1$

Докажем признак подобия УУ.

Условие: ΔABC, $\Delta A_1B_1C_1$, $\angle A \equiv \angle A_1$, $\angle B \equiv \angle B_1$.

Заключение: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство:



① Отметим точки M и N, $M \in [A_1B_1]$, $N \in [B_1C_1]$, причем $[MB_1] \equiv [AB]$ и $MN \parallel A_1C_1$.

② $\angle B_1MN \equiv \angle A_1$ (как соответственные углы, образованные секущей A_1B_1 и параллельными прямыми MN и A_1C_1). Следовательно, $\angle B_1MN \equiv \angle A$ (транзитивность конгруэнтности).

③ $\Delta ABC \equiv \Delta MB_1N$ (признак УСУ), значит, $\Delta ABC \sim \Delta MB_1N$ (согласно замечанию, с. 137).

④ $\Delta MB_1N \sim \Delta A_1B_1C$ (по основной теореме подобия, так как $MN \parallel A_1C_1$).

⑤ Из ③ и ④ следует, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (согласно транзитивности подобий),

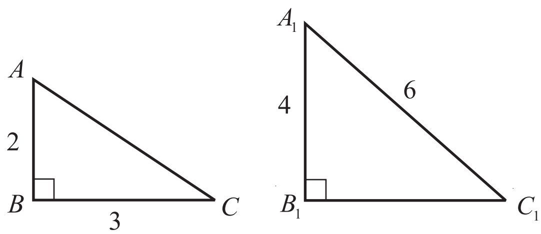
ч. т. д. ►

4 Так как в любом прямоугольном треугольнике есть прямой угол, то два прямоугольных треугольника подобны, если две пары соответствующих сторон пропорциональны или соответствующие острые углы конгруэнтны.

Запомните

Признаки подобия двух прямоугольных треугольников

1. **Признак У.** Если острый угол одного прямоугольного треугольника конгруэнтен острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники подобны.
2. **Признак КК.** Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно пропорциональны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то треугольники подобны.
3. **Признак КГ.** Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно пропорциональны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то треугольники подобны.



- Рассмотрите рисунок. Определите истинностное значение высказывания «Если две стороны одного прямоугольного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого прямоугольного треугольника, то треугольники подобны».

Упражнения и задачи

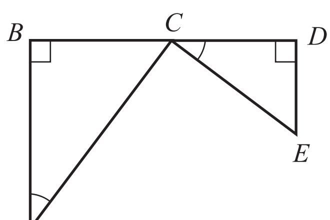
1

1. Запишите соотношения конгруэнтности и равенства, которые следуют из соотношения:

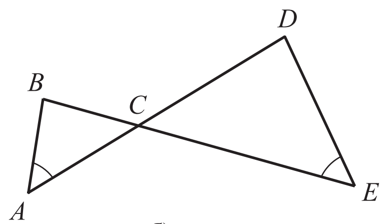
а) $\Delta TRI \sim \Delta OPT$; б) $\Delta POC \sim \Delta SAT$.

2. *Работайте в парах!*

Рассмотрите рисунок. Определите подобные треугольники:

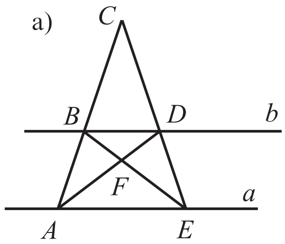


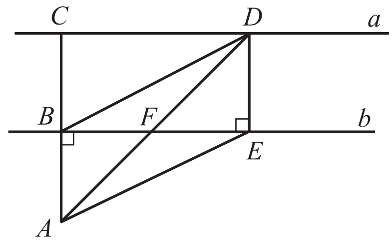
а)



б)

3. ***Работайте в парах!***
Прямые a и b параллельны. Найдите подобные треугольники.

а) 

б) 

4. Найдите величины углов треугольника ABC, если:
а) $m(\angle B)=90°$, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ и $m(\angle F)=35°$;
б) $\angle A \equiv \angle B$, $\Delta ABC \sim \Delta MNK$ и $m(\angle K)=40°$;
в) $\angle A \equiv \angle B$, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ и $\angle D \equiv \angle F$.

5. ***Исследуйте!*** *Истинно* или *Ложно*?
а) Равнобедренные прямоугольные треугольники подобны.
б) Если $\Delta ABC \sim \Delta BAC$, то ΔCBA – равносторонний.
в) Если $\Delta ABC \sim \Delta CBA$ и $m(\angle A)=60°$, то ΔABC – равносторонний.

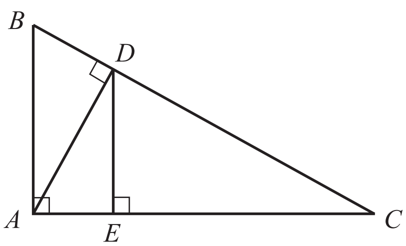
6. Треугольники ABC и DEF подобны. Найдите:
а) периметр треугольника ABC, если периметр треугольника DEF равен 22 см и $\frac{AB}{DE}=1{,}5$;
б) коэффициент пропорциональности, если периметр треугольника ABC в $\sqrt{5}$ раз больше периметра треугольника DEF.

7. Диагонали трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием AD пересекаются в точке O. Запишите пары образованных подобных треугольников.

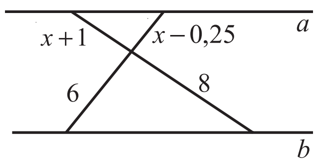
8. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ и $[BM]$, $[EN]$ – высоты треугольников ABC и DEF, $M \in AC$, $N \in DF$. Найдите другие подобные треугольники.

2

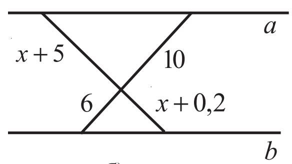
9. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите рисунок. Найдите подобные треугольники.



10. Прямые a и b параллельны. Найдите x.

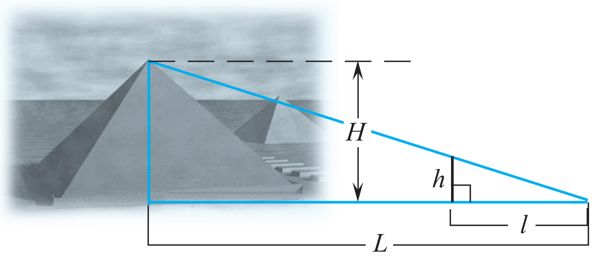


а)



б)

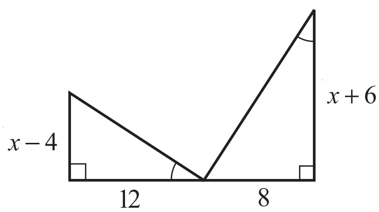
11. Рассмотрите рисунок. Найдите высоту (H) пирамиды, если L – длина тени пирамиды, h – длина палки, а l – длина тени палки и:
а) L = 90 м, h = 1,5 м, l = 2 м;
б) L = 120 м, h = 1,2 м, l = 1,8 м.



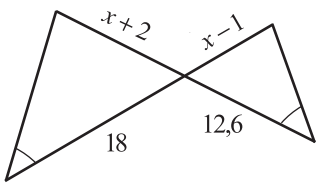
12. Найдите длины сторон треугольника, периметр которого равен 52 см, если он подобен треугольнику со сторонами 15 см, 20 см и 30 см.

3

13. Рассмотрите рисунок и найдите x:



а)



б)

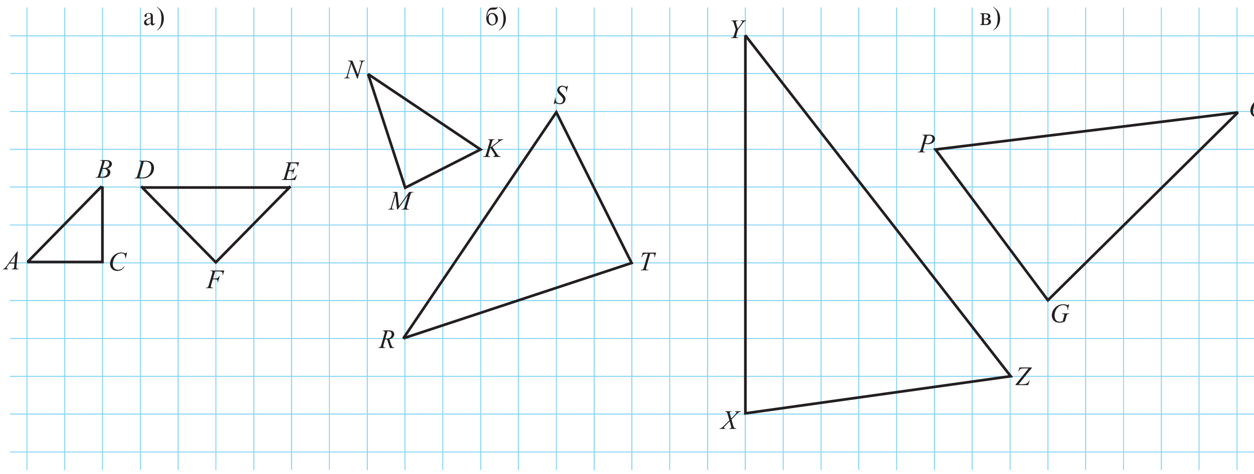
14. Точки A, B, C, D, E, F принадлежат окружности. Какие два треугольника с вершинами в данных 6 точках подобны, если:
а) $\frac{AF}{CD}=\frac{FE}{DB}=\frac{AE}{CB}$;
б) $\angle DFE \equiv \angle ABC$, $\angle DEF \equiv \angle BCA$;
в) $\frac{DE}{DA}=\frac{CF}{CB}$ и $\angle ADE \equiv \angle BCF$?

Упражнения и задачи на повторение

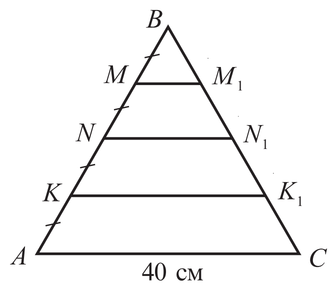
1

1. Запишите отношения, которые следуют из соотношения:
а) $\Delta SAT \sim \Delta ROC$; б) $\Delta LMN \sim \Delta FED$.

2. Рассмотрите рисунок. Покажите, что треугольники подобны.



3. *Работайте в парах!*
Рассмотрите рисунок.
$MM_1 \parallel NN_1 \parallel KK_1 \parallel AC$.
Найдите MM_1, NN_1, KK_1.



4. Через середину большей стороны треугольника проходит прямая, которая отсекает от него подобный ему треугольник. Найдите длину меньшей стороны образованного треугольника, если стороны исходного треугольника имеют длины, равные:
а) 8 см, 9 см, 10 см;
б) 12 см, 15 см, 18 см.

5. Дан треугольник ABC со сторонами AB = 12 см, AC = 6 см. Постройте отрезок MK, где $M \in [AB]$, $K \in [AC]$ и AM = 4 см, AK = 2 см. Покажите, что треугольник с вершинами в точках A, M, K подобен треугольнику ABC, и найдите коэффициент подобия.

6. Дан треугольник ABC, у которого $m(\angle A) = 74°$ и $m(\angle B) = 76°$. Постройте отрезок AK, где $K \in [BC]$, так, чтобы треугольник с вершинами в точках A, B, K был подобен треугольнику ABC. Найдите $m(\angle BAK)$ и $m(\angle AKB)$.

7. Точка пересечения диагоналей трапеции делит одну из диагоналей на два отрезка длиной 4 см и 6 см. Найдите длину большего основания трапеции, если длина меньшего основания – 10 см.

8. Точка M принадлежит стороне AC треугольника ABC, причем $\angle ACB \equiv \angle ABM$. Найдите AB, если AM = 5 см, MC = 15 см.

2

9. Из шести отрезков длиной 8 см, 12 см, 16 см, 18 см, 24 см и 36 см были образованы два подобных треугольника. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

10. *Работайте в парах!* Дан треугольник ABC. Докажите, что треугольник, вершинами которого являются середины сторон треугольника ABC, подобен треугольнику ABC.

11. Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причем $\angle B \equiv \angle B_1$, $\angle C \equiv \angle C_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = 3$. Найдите длину медианы A_1M_1, если длина медианы AM равна 12 см.

12. Два подобных неконгруэнтных треугольника имеют две пары конгруэнтных сторон длиной 6 см и 9 см. Найдите длины других сторон треугольников.

13. Диагональ трапеции делит ее на два подобных треугольника. Во сколько раз большее основание длиннее меньшего основания, если одна боковая сторона трапеции в 3 раза длиннее другой боковой стороны?

14. ***Работайте в парах!*** Дан треугольник ABC, у которого $m(\angle A) = 40°$. Биссектриса угла A делит треугольник ABC на два треугольника так, что один из них подобен треугольнику ABC. Найдите величину наибольшего угла треугольника ABC.

3

15. Пусть $[AA_1]$ и $[BB_1]$ – высоты треугольника ABC. Докажите, что треугольник с вершинами в точках A_1, B_1 и C подобен треугольнику ABC.

16. ***Работайте в группах!*** Проект *Применение подобных треугольников в строительстве*.

Итоговый тест

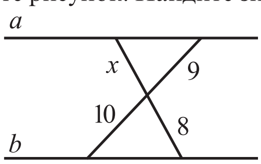
Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

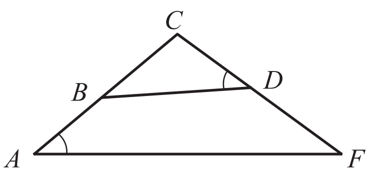
1. Запишите отношения, которые следуют из соотношения:

$$\Delta PRO \sim \Delta EVA.$$

2. Рассмотрите рисунок. Найдите значение x $(a \parallel b)$.



3. Рассмотрите рисунок. Найдите два подобных треугольника. Обоснуйте.



4. Разделите отрезок AB длиной 18 см на части, пропорциональные числам 2, 2, 5.

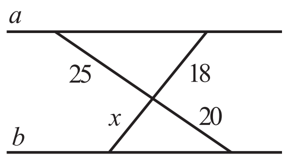
5. Дан параллелограмм $ABCD$, у которого $AB = 42$ см, $E \in [BC]$, причем $\frac{BE}{BC} = \frac{5}{7}$. Прямая DE пересекает прямую AB в точке F. Найдите BF.

Вариант 2

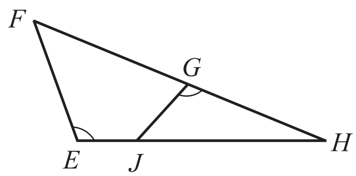
1. Запишите отношения, которые следуют из соотношения:

$$\Delta CON \sim \Delta RAS.$$

2. Рассмотрите рисунок. Найдите значение x $(a \parallel b)$.



3. Рассмотрите рисунок. Найдите два подобных треугольника. Обоснуйте.



4. Разделите отрезок MN длиной 15 см на части, пропорциональные числам 3, 3, 4.

5. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 10 см. Точка E принадлежит стороне CD, причем $\frac{CE}{ED} = 0{,}5$. Найдите расстояние от точки C до прямой AE.

Глава 4 Метрические отношения в прямоугольном треугольнике

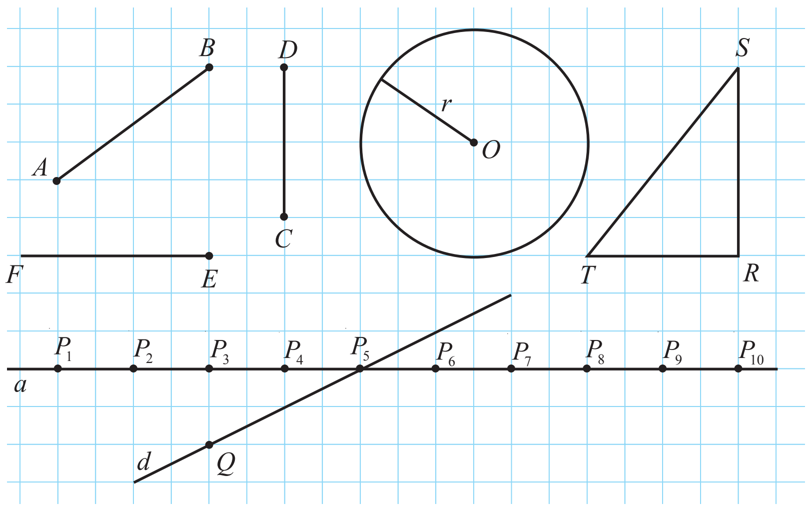
Фантазия, воображение и доказательство принадлежат математике.

Григорий Мойсил

§1. Теорема высоты. Теорема катетов

1 Рассмотрите рисунок и заполните таблицу.

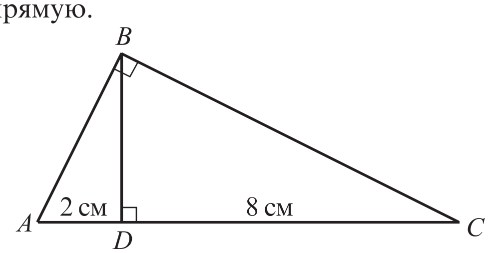
Ортогональная проекция фигуры на прямую – это множество ортогональных проекций точек этой фигуры на прямую.



Геометрическая фигура	$[AB]$	$[CD]$	$\mathscr{C}(O,r)$	ΔSTR	$[EF$	d	P_8	$[QP_5]$
Ортогональная проекция фигуры на прямую a	$[P_1P_3]$							

Замечание В дальнейшем под проекцией некоторой фигуры на прямую будем понимать ортогональную проекцию этой фигуры на прямую.

2 Рассмотрите рисунок и вычислите BD.



Объясняем ① Рассмотрим треугольники ADB и BDC:

$\angle ADB \equiv \angle BDC$ (прямые углы),

$\angle ABD \equiv \angle BCD$ (имеют один и тот же угол, дополнительный до 90°, $\angle CBD$).

Следовательно, $\Delta ABD \sim \Delta BCD$ (признак УУ). (*)

② Из (∗) следует, что $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{BD}{\square}$ или

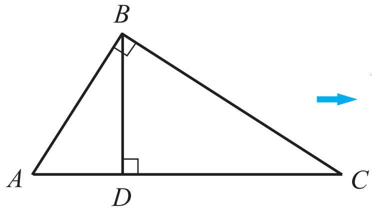
$BD^2=\square\cdot\square.$

$BD=\sqrt{\square}=\square$ (см).

Ответ: $\square$ см.

Теорема высоты

Квадрат длины высоты, проведенной к гипотенузе прямоугольного треугольника, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.



$\Rightarrow\ BD^2=AD\cdot DC$

Решение задачи **2** на самом деле доказывает теорему высоты. Тем не менее, докажем эту теорему еще раз.

Условие: ΔABC, $m(\angle B)=90°$, $D\in[AC]$, $BD\perp AC$.

Заключение: $BD^2=AD\cdot DC$.

Доказательство:

① $\angle ADB\equiv\angle BDC$ (прямые углы).

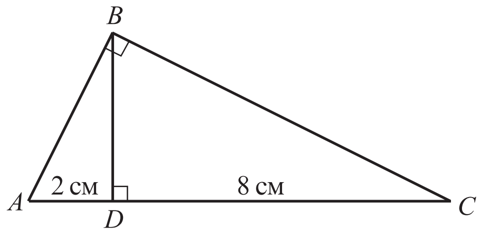
② $\angle ABD\equiv\angle BCD$ (имеют один и тот же угол, дополнительный до 90°, $\angle CBD$).

③ $\Delta ABD\sim\Delta BCD$ (из ① и ②, признак УУ или признак У).

④ Из ③ следует, что $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{BD}{CD}$ или $BD^2=AD\cdot CD$, ч. т. д. ►

• Число $\sqrt{ab}$ называется ***средним геометрическим*** (или ***средним пропорциональным***) действительных положительных чисел a и b. Применив это понятие, сформулируйте теорему высоты по-другому.

3 Рассмотрите рисунок и вычислите AB.



Объясняем ① Рассмотрим треугольники ABC и ADB:

$\angle ABC\equiv\angle ADB$ (прямые углы),

$\angle ACB\equiv\angle ABD$ (имеют один и тот же угол, дополнительный до 90°, $\angle A$).

Следовательно, $\Delta ABC\sim\Delta ADB$ (признак УУ).

② Из (∗) следует $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{\square}{AB}$ или

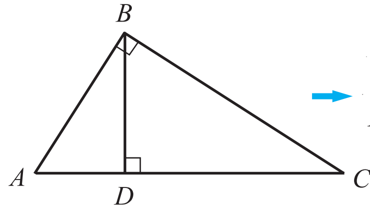
$AB^2=\square\cdot\square.$

$AB=\sqrt{\square}=\square$ (см).

Ответ: $\square$ см.

Теорема катета

Квадрат длины катета прямоугольного треугольника равен произведению длины гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.



$$AB^2 = AD \cdot AC$$
$$BC^2 = CD \cdot AC$$

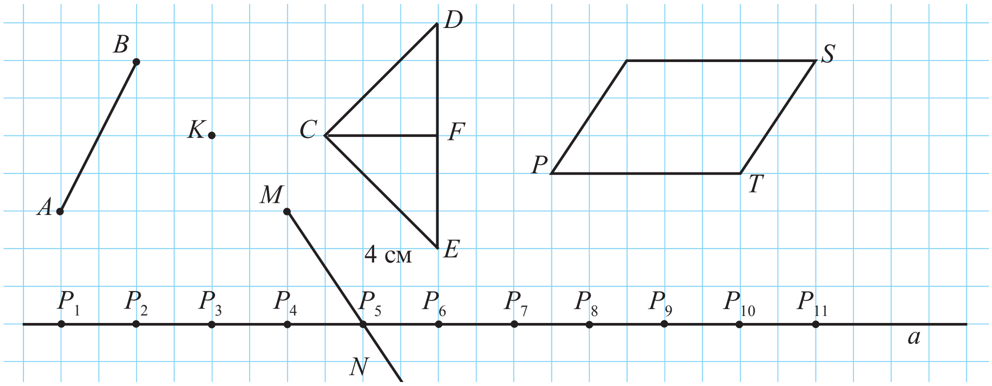
Замечание Решение задачи **3** на самом деле доказывает теорему катета.

- Докажите теорему катета.
- Применив понятие среднего геометрического, дайте другую формулировку теоремы катета.
- Вычислите длину катета BC.

Упражнения и задачи

1

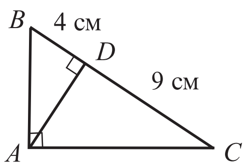
1. Рассмотрите рисунок и заполните таблицу.



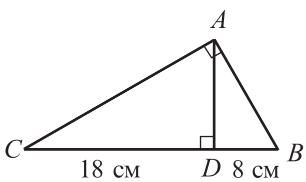
Геометрическая фигура	$[AB]$	K	ΔCDE	$[MN$	ΔCFE	$[P_5P_9]$	$PRST$	S
Ортогональная проекция фигуры на прямую a								

2. Рассмотрите рисунок и вычислите AD:

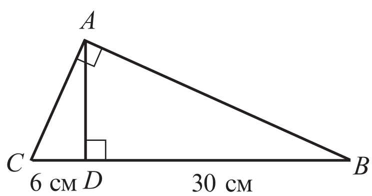
а)



б)

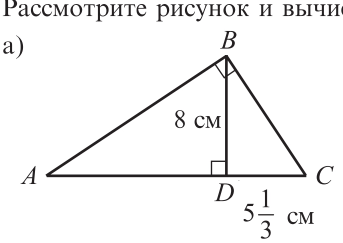


в)

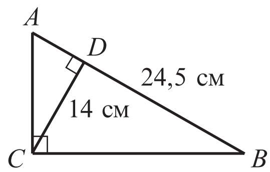


3. Рассмотрите рисунок и вычислите AD:

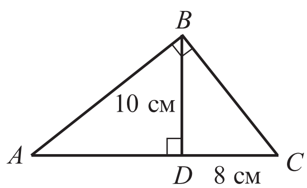
а)



б)



в)



4. ***Работайте в парах!*** Найдите длины катетов прямоугольного треугольника, если высота треугольника, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу на два отрезка длинами:

а) 6 см и 24 см; б) 12 см и 16 см;

в) 8 см и 10 см; г) $\sqrt{3}$ см и $2\sqrt{3}$ см.

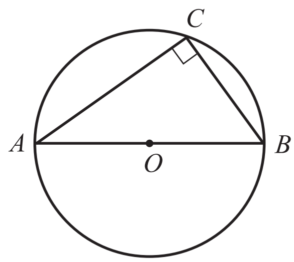
2

5. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно $\frac{5}{6}$, а длина гипотенузы 122 см. Найдите длины отрезков, на которые высота, проведенная из вершины прямого угла, делит гипотенузу.

6. Отношение катетов прямоугольного треугольника равно $\frac{3}{7}$, а длина высоты, проведенной из вершины прямого угла, 42 см. Найдите длины отрезков, на которые эта высота делит гипотенузу.

7. ***Работайте в парах!*** Известно, что если $[AB]$ – диаметр окружности, а C – точка, принадлежащая окружности, то $m(\angle ACB) = 90°$. Постройте с помощью линейки и циркуля на клеточной сетке тетради отрезок длиной:

а) $\sqrt{15}$ см; б) $\sqrt{24}$ см; в) $3\sqrt{4}$ см.

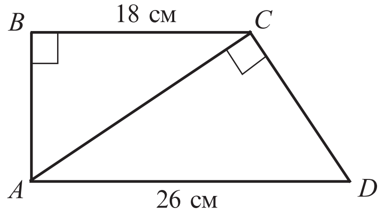


8. Дана трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием $[AD]$.
Найдите CD, если $BC \perp CD$, $BD \perp AB$, $[AB] \equiv [BC]$ и $AD = 10$ см.

9. Докажите, что в любом прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу пропорциональны квадратам катетов.

10. Треугольник ABC – равнобедренный, прямоугольный, с гипотенузой $[AC]$. Найдите длины катетов, если $AC = 10$ см.

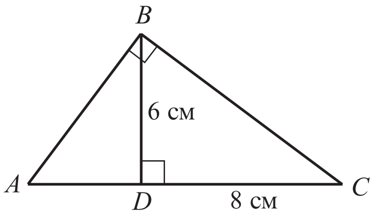
11. Рассмотрите рисунок и найдите длину высоты трапеции $ABCD$.



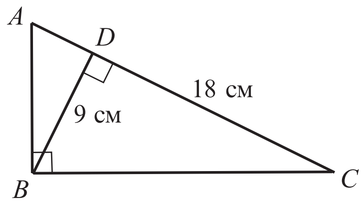
12. Отношение проекций катетов на гипотенузу прямоугольного треугольника равно 0,25. Найдите длину высоты, проведенной из вершины прямого угла, если длина гипотенузы равна 20 см.

13. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите рисунок и найдите AD.

а)



б)



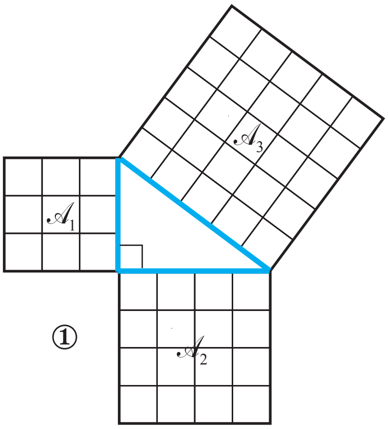
3

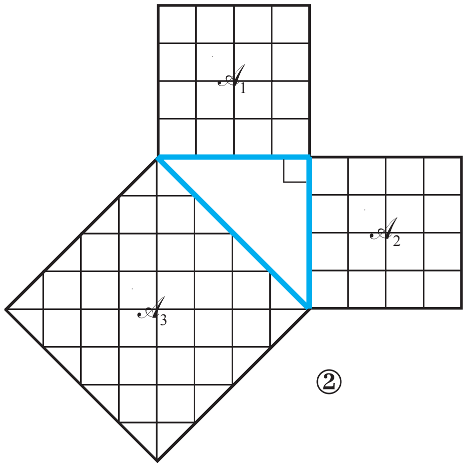
14. Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 30 см, а длина проекции одного катета составляет 80% от длины гипотенузы. Найдите длины катетов.

15. Точка M – середина стороны $[BC]$ треугольника ABC, и треугольник ABM – равносторонний. Докажите, что точка A – проекция точки C на AB.

§2. Теорема Пифагора. Применения

1 Рассмотрите рисунки и заполните таблицу. Сравните значения последних двух колонок.



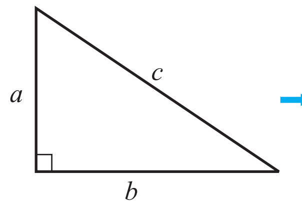


Фигура	Площадь $\mathcal{A}_1$	Площадь $\mathcal{A}_2$	Площадь $\mathcal{A}_3$	Площадь $\mathcal{A}_1$ + Площадь $\mathcal{A}_2$
①		16		
②			32	
③				

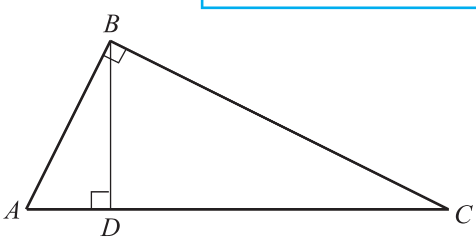
- Обозначив через a и b длины катетов, а через c – длину гипотенузы прямоугольного треугольника, сформулируйте истинное математическое высказывание, выражающее зависимость c от a и b.

Теорема Пифагора

Квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов длин его катетов.



→ $c^2 = a^2 + b^2$



Докажем теорему Пифагора.

Условие: ΔABC, $m(\angle B) = 90°$.

Заключение: $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

Доказательство:

① Проведем высоту $[BD]$, $D \in (AC)$.

② Применим теорему катета для каждого из катетов треугольника ABC:

$AB^2 = AD \cdot AC$, (1)

$BC^2 = CD \cdot AC$. (2)

③ Сложив соотношения (1) и (2), получим

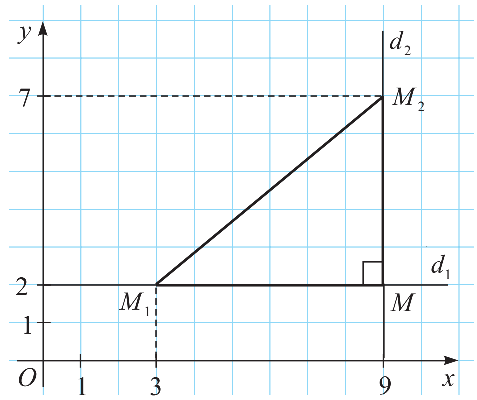
$AB^2 + BC^2 = AD \cdot AC + CD \cdot AC = AC(AD + CD) = AC \cdot AC = AC^2$.

④ Из ③ следует, что $AC^2 = AB^2 + BC^2$, ч. т. д. ▶

- Длина гипотенузы прямоугольного треугольника равна 10 см, а один из катетов равен 8 см. Найдите длину другого катета.

- Продолжите утверждение так, чтобы получить теорему, **обратную теореме Пифагора**: *Если квадрат длины одной стороны равен сумме квадратов длин двух других сторон треугольника, то...*

2 Пусть $M_1(3, 2)$ и $M_2(9, 7)$ – две точки, заданные в декартовой системе координат xOy. Найдите расстояние между точками M_1 и M_2.



Объясняем

① Отметим точки M_1 и M_2 в системе xOy.

② Проведем через точку M_1 прямую d_1 параллельно оси Ox, а через точку M_2 – прямую d_2 параллельно оси Oy.

③ Пусть M – точка пересечения прямых d_1 и d_2.

ΔM_1MM_2 – прямоугольный, $m(\angle M) = 90°$.

④ По теореме Пифагора,

$$M_1M_2 = \sqrt{M_1M^2 + M_2M^2} = \sqrt{(9 - \square)^2 + (\square - 2)^2} = \square \text{ (л. е.).}$$

Ответ: $M_1M_2 = \square$ линейных единиц.

Интересно и полезно

Существует около 300 способов доказательства теоремы Пифагора. В школе Пифагора эта теорема называлась «мостом ослов».

Пифагор (570–495 гг. до н. э.) – древнегреческий философ и математик

- Докажите следующую теорему.

Теорема

Если $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ – две точки, заданные в декартовой системе координат, то $M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

- Применив теорему Пифагора, постройте отрезок, длина которого равна:

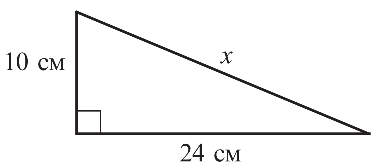
а) $3\sqrt{2}$ см; б) $\sqrt{19}$ см.

Упражнения и задачи

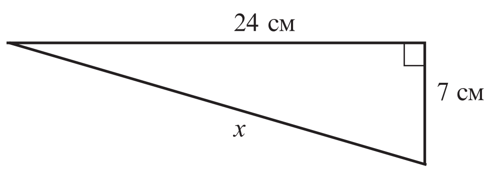
1

1. Рассмотрите рисунок и вычислите x:

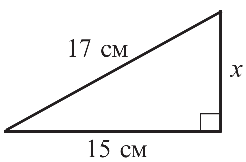
а)



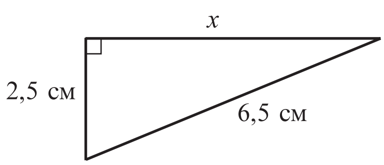
б)



в)



г)



2. Найдите длину диагонали прямоугольника со сторонами 16 см и 30 см.

3. Чему равна длина стороны квадрата с диагональю $\sqrt{14}$ см?

4. Найдите длину гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника, площадь которого равна 100 см^2.

5. Определите длину стороны ромба с диагоналями:
а) 30 см и 70 см; б) 140 см и 48 см.

6. Найдите высоту равностороннего треугольника со сторонами:
а) 10 см; б) $12\sqrt{3}$ см.

7. *Работайте в парах!*
Вычислите расстояние между точками:
а) $A(-1;\ 4)$ и $B(4;\ 12)$; б) $C(4;\ -3)$ и $D(7;\ -2)$;
в) $E(7;\ 5)$ и $F(-5;\ 11)$; г) $G(9;\ -9)$ и $H(-1;\ -4)$.

8. Найдите длину стороны равностороннего треугольника, высота которого равна:
а) 8 см; б) $\sqrt{3}$ см.

9. Проверьте, является ли треугольник прямоугольным, зная, что длины его сторон равны:
а) 16 см, 30 см, 34 см; б) 8 см, 12 см, 16 см;
в) 9 см, 15 см, $3\sqrt{34}$ см; г) 15 см, 20 см, 25 см.

2

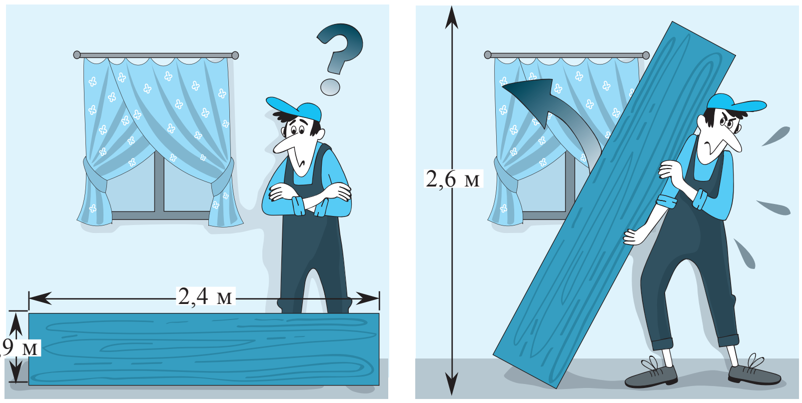
10. *Работайте в парах!* Прямоугольник, периметр которого равен 544 см, имеет измерения, пропорциональные числам 5 и 12. Найдите длину диагонали прямоугольника.

11. Найдите длину диагонали прямоугольника, площадь которого равна 480 см^2, а периметр 92 см.

12. Пусть $[CD]$ – высота треугольника ABC. Найдите AC, если $AB = 3$ см, $CD = \sqrt{3}$ см, $AD = BC$.

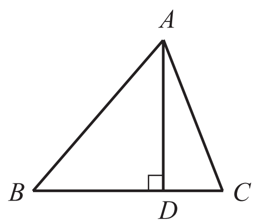
13. Одна сторона прямоугольного треугольника на 10 см длиннее второй, а вторая на 10 см короче третьей. Найдите длину гипотенузы.

14. *Исследуйте!* Боковая сторона шкафа имеет форму прямоугольника (см. рисунок) размером 2,4 м на 0,9 м. Высота стен комнаты 2,6 м. Учитывая размеры шкафа, определите, можно ли его приподнять и прикрепить к стене.
Какой максимальной ширины может быть боковая сторона, чтобы шкаф можно было приподнять?



3

15. Рассмотрите рисунок и найдите AD, если $\dfrac{DB}{CD} = 3,(3)$, $AB = 50$ см, $AC = 41$ см.



16. Длины сторон треугольника – 10 см, 17 см и 21 см. Найдите длину высоты, проведенной к большей стороне.

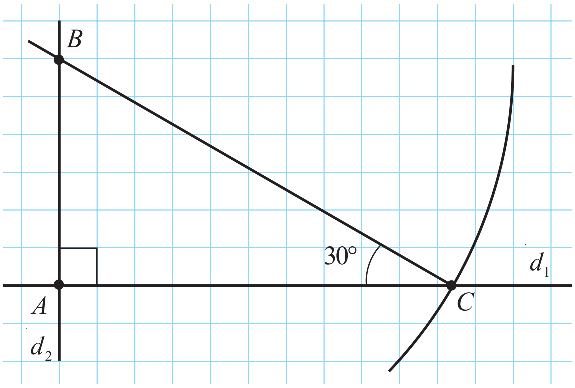
17. Докажите, что в прямоугольной трапеции разность квадратов длин диагоналей равна разности квадратов длин оснований.

18. *Занимательная математика*
Если $a^2 + b^2 = c^2$, где a, b, c – натуральные ненулевые числа, то a, b, c называются **пифагоровы числа**, а (a, b, c) – **пифагоровы тройки**.
Составьте пять пифагоровых троек из чисел 7, 8, 9, 15, 17, 24, 25, 35, 36, 39, 40, 41, 112, 113 (каждое число можно использовать несколько раз).

§3. Элементы тригонометрии в прямоугольном треугольнике

1 Постройте на клеточной сетке тетради, используя только линейку и циркуль, угол величиной 30°.

Объясняем ① Клеточная сетка позволяет с помощью линейки построить только параллельные или перпендикулярные прямые.



Построим перпендикулярные прямые d_1 и d_2, где $\{A\} = d_1 \cap d_2$.

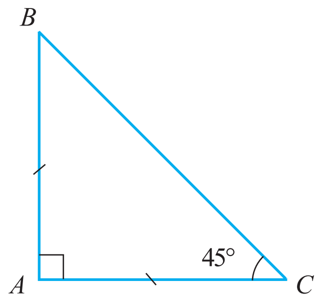
② Отметим на прямой d_2 произвольную точку B.

③ Построим окружность $\mathscr{C}(B,\ 2AB)$, где $\{C, C_1\} = \mathscr{C}(B,\ 2AB) \cap d_1$ (точка C_1 не отмечена на рисунке).

④ Построим $[CB$.

⑤ $\mathrm{m}(\angle ACB) = 30°$ (ΔBAC – прямоугольный, $\mathrm{m}(\angle A) = 90°$, $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$).

- При решении задачи имеем в виду, что в треугольнике BAC с прямым углом A имеет место равенство $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{2}$, тогда $\mathrm{m}(\angle BCA) = 30°$. Применив рисунок и теорему Пифагора, определите, при каком значении отношения $\frac{AB}{BC}$ построенный угол BCA будет равен 45°.

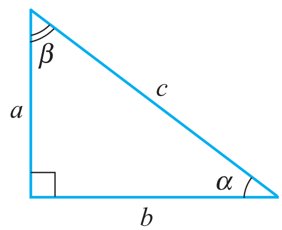


Замечание Каждому острому углу прямоугольного треугольника соответствует единственное значение отношения противолежащего катета к гипотенузе, независимо от измерений треугольника, и наоборот.

Это утверждение будет истинным и в случае отношений между другими сторонами прямоугольного треугольника. Так как упомянутые отношения определяют единственным образом величину угла, то часто удобнее использовать эти отношения, чем углы. Поэтому отношения сторон прямоугольного треугольника имеют специальные названия и обозначения.

Определения

- **Синусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.
  Синус угла α обозначается символом $\sin\alpha$.
  Согласно рисунку, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$.



- **Косинусом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.
  Косинус угла α обозначается символом $\cos\alpha$. Согласно рисунку, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$.
- **Тангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему катету.
  Тангенс угла α обозначается символом $\mathrm{tg}\,\alpha$. Согласно рисунку, $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$.
- **Котангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к противолежащему катету.
  Котангенс угла α обозначается символом $\mathrm{ctg}\,\alpha$. Согласно рисунку, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$.

- Запишите отношения, определяющие синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла β треугольника, изображенного в определениях.

Замечания

1. Так как длина катета меньше длины гипотенузы, синус и косинус острого угла – это положительные числа меньше 1.
2. Синус, косинус, тангенс, котангенс называются **тригонометрическими функциями**.
3. Тригонометрические функции *синус* и *косинус* являются **кофункциями** по отношению друг к другу, так же, как и функции *тангенс* и *котангенс*.

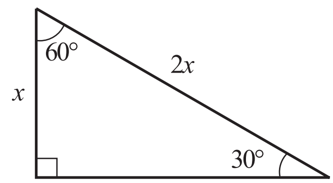
Практическая работа

1. Так как катет, противолежащий углу 30°, в два раза короче гипотенузы, то $\sin 30° = \frac{1}{2}$.

   Рассмотрите рисунок.

   Применив теорему Пифагора и определения тригонометрических функций, вычислите:

   $\cos 30°,\ \operatorname{tg} 30°,\ \operatorname{ctg} 30°,\ \sin 60°,\ \cos 60°,\ \operatorname{tg} 60°,\ \operatorname{ctg} 60°.$



2. Взяв на заметку, что если один из углов прямоугольного треугольника равен 45°, то его катеты конгруэнтны, вычислите:

$$\sin 45°,\ \cos 45°,\ \operatorname{tg} 45°,\ \operatorname{ctg} 45°.$$

3. Заполните таблицу:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
30°	$\frac{1}{2}$			
45°		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	

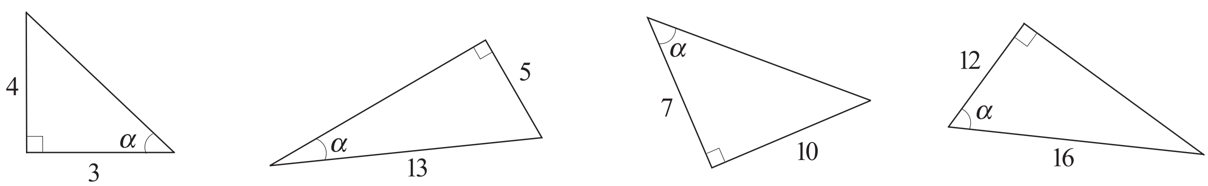
Замечание

Таблица значений тригонометрических функций коротко называется ***тригонометрической таблицей***.

Упражнения и задачи

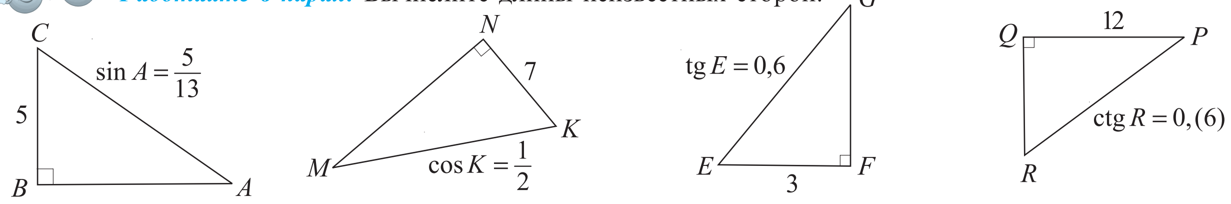
1

1. Вычислите, используя данные с рисунка, $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$:



а) б) в) г)

2. ***Работайте в парах!*** Вычислите длины неизвестных сторон:



а) б) в) г)

3. Вычислите, применив тригонометрическую таблицу:

а) $\sin 45° + \cos 45°$; б) $\sin 60° \cdot \operatorname{tg} 60°$;

в) $\cos 30° \cdot \operatorname{ctg} 30°$; г) $\frac{\sin 30°}{\cos 60°}$; е) $\frac{\cos 30°}{\sin 60°}$.

4. Сравните с помощью тригонометрической таблицы:

а) $\frac{\sin 30°}{\cos 30°}$ и $\operatorname{tg} 30°$; б) $\frac{\sin 45°}{\cos 45°}$ и $\operatorname{tg} 45°$;

в) $\operatorname{ctg} 60°$ и $\frac{\cos 60°}{\sin 60°}$; г) $\operatorname{ctg} 30°$ и $\frac{\cos 30°}{\sin 30°}$;

е) $\operatorname{tg} 30°$ и $\frac{1}{\operatorname{ctg} 30°}$.

5. Применив тригонометрическую таблицу, расположите числа в порядке возрастания:

а) 1, $\sin 45°$, $\sin 30°$, 0, $\sin 60°$;

б) 0, $\cos 45°$, $\cos 30°$, 1, $\cos 60°$;

в) $\operatorname{tg} 60°$, $\operatorname{tg} 30°$, $\operatorname{tg} 45°$, 1, 0;

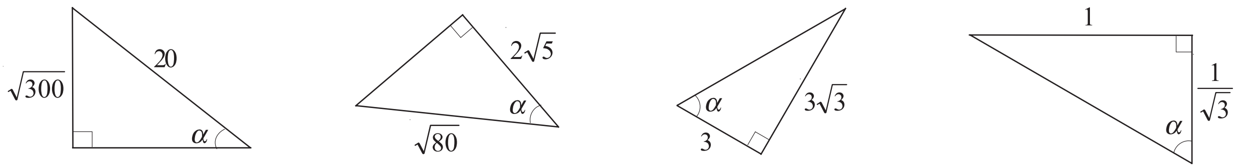
г) $\operatorname{ctg} 30°$, $\operatorname{ctg} 60°$, $\operatorname{ctg} 45°$, 0, 1.

6. Постройте треугольник DEF с прямым углом E и:

а) $\sin F = 0{,}7$; б) $\cos D = 0{,}5$;

в) $\operatorname{tg} F = 1{,}4$; г) $\operatorname{ctg} D = 4\frac{1}{3}$.

7. ***Работайте в парах!*** Найдите величину угла α треугольника, применив тригонометрическую таблицу:

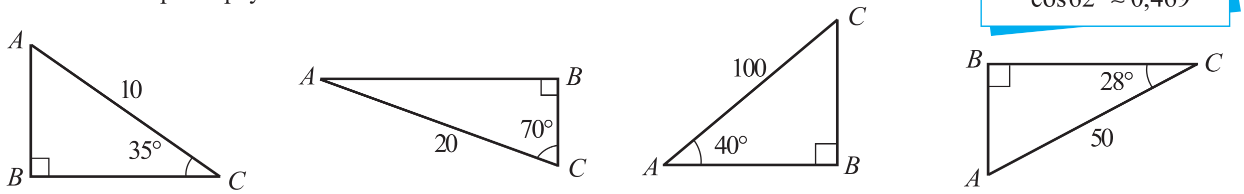


а) б) в) г)

2

$\sin 35° \approx 0{,}574$
$\cos 70° \approx 0{,}342$
$\sin 50° \approx 0{,}766$
$\cos 62° \approx 0{,}469$

8. Рассмотрите рисунок и приложенные данные, затем найдите длины неизвестных сторон треугольника ABC:



а) б) в) г)

9. ***Работайте в группах!*** Треугольник ABC с прямым углом B, $AB = 15$ см, $BC = 9$ см. Вычислите:

а) $\sin^2 A + \cos^2 A$; $\sin^2 C + \cos^2 C$; б) $\frac{\sin A}{\cos A}$, $\operatorname{tg} A$; $\frac{\sin C}{\cos C}$, $\operatorname{tg} C$;

в) $\frac{\cos A}{\sin A}$, $\operatorname{ctg} A$; $\frac{\cos C}{\sin C}$, $\operatorname{ctg} C$; г) $\frac{1}{\cos^2 A}$, $1 + \operatorname{tg}^2 A$; $\frac{1}{\cos^2 C}$, $1 + \operatorname{tg}^2 C$;

е) $\frac{1}{\sin^2 A}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 A$; $\frac{1}{\sin^2 C}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 C$.

10. Периметр треугольника ABC с прямым углом B равен $\mathscr{P}$. Найдите длины сторон треугольника, если:

а) $\mathscr{P} = 120$ см, $\operatorname{tg} C = 2{,}4$; б) $\mathscr{P} = 28{,}8$ см, $\sin C = 0{,}6$;

в) $\mathscr{P} = 42$ см, $\operatorname{ctg} A = 1{,}05$; г) $\mathscr{P} = 57{,}2$ см, $\cos A = 0{,}352$.

11. *Исследуйте!* Установите, истинно ли высказывание:

а) «Существует острый угол α, для которого $\sin\alpha = \sqrt{2-\sqrt{3}}$»;

б) «Существует острый угол α, для которого $\cos\alpha = \dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$»;

в) «Существует острый угол α, для которого $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}+2$»;

г) «Существует острый угол α, для которого $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$».

3

12. Докажите, что $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ для любого острого угла α.

13. Докажите, что для любого острого угла α имеют место соотношения:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$;   б) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$, $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$.

14. Взяв на заметку соотношения из упражнений **12**, **13**, вычислите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, зная, что $\sin\alpha = 0{,}8$

15. Дан треугольник MNK с прямым углом N. Вычислите:

а) sin M, cos M, tg M, ctg M, sin K, tg K, ctg K, если $\cos K = 0{,}6$;

б) cos M, tg M, ctg M, sin K, cos K, tg K, ctg K, если $\sin M = \dfrac{5}{13}$;

в) sin M, cos M, tg M, ctg M, sin K, cos K, ctg K, если $\operatorname{tg} K = 2{,}4$;

г) sin M, cos M, tg M, sin K, cos K, tg K, ctg K, если $\operatorname{ctg} M = 1$.

16. а) Известно, что $\sin 19° \approx 0{,}33$. Вычислите $\sin 71°$.   б) Известно, что $\cos 64° \approx 0{,}44$. Вычислите $\cos 36°$.

в) Известно, что $\sin 25° \approx 0{,}42$. Вычислите tg 65°.   г) Известно, что $\cos 40° \approx 0{,}77$. Вычислите ctg 50°.

17. Зная, что для любого острого угла α, $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$, найдите значение выражения $\dfrac{2\sin\alpha + \cos\alpha}{3\cos\alpha - 2\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

18. *Математика для жизни*

На круглый стол с радиусом 1,5 м постелили квадратную скатерть со стороной 2 м так, что центр круга совпал с центром квадрата. Высота стола 80 см.

а) Какова максимальная длина свисающей части скатерти?

б) Какова минимальная длина свисающей части скатерти?

в) Насколько большой может быть сторона другой скатерти, чтобы она не доставала до пола?

Упражнения и задачи на повторение

1

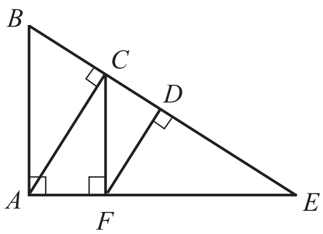
1. Рассмотрите рисунок и найдите проекцию:

а) точки C на прямую AE;

б) точки F на прямую BE;

в) отрезка AC на прямую AE;

г) отрезка AF на прямую BE.



2. Найдите длину высоты прямоугольного треугольника, если длины проекций катетов на гипотенузу равны:

а) 24 см и 54 см;   б) 36 см и 49 см.

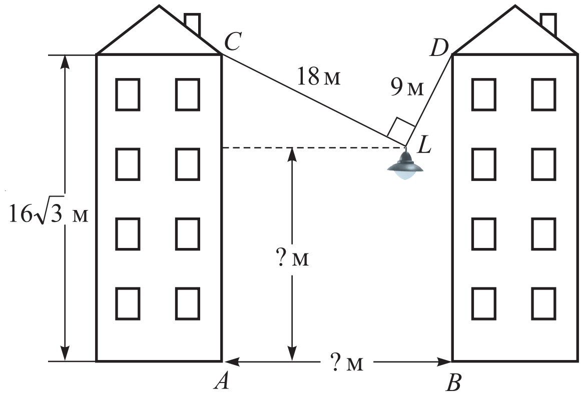
3. Найдите длины катетов прямоугольного треугольника, если длины проекций катетов на гипотенузу равны:
а) 16 см и 36 см; б) 0,25 см и 2 см.

4. Сумма длин катетов прямоугольного треугольника – 34 см, а длина гипотенузы – 26 см. Найдите длины катетов.

5. ***Работайте в парах!*** Площадь прямоугольного треугольника равна 15 см^2, а длина гипотенузы равна $\sqrt{61}$ см. Найдите длины катетов.

6. Найдите длину высоты равностороннего треугольника со стороной 18 см.

7. ***Работайте в группах!*** Лампа, освещающая улицу, подвешена на двух перпендикулярных друг другу кабелях (см. рисунок: L – лампа, $m(\angle CLD) = 90°$) длиной 18 м и 9 м, прикрепленных на высоте $16\sqrt{3}$ м от земли (точки C и D находятся на одинаковой высоте от земли).
а) Найдите ширину улицы (то есть AB).
б) Вычислите, на какой высоте от земли подвешена лампа.



8. Найдите радиус окружности, которой принадлежат вершины равностороннего треугольника со сторонами, равными 9 см.

9. Найдите длину высоты равностороннего треугольника, площадь которого равна $36\sqrt{3}$ см^2.

10. ***Работайте в парах!*** Вершины квадрата $MNKP$ делят каждую сторону квадрата $ABCD$ в отношении 3:4. Найдите:
а) сторону квадрата $MNKP$, если AB = 28 см;
б) сторону квадрата $ABCD$, если MN = 10 см.

11. Найдите длину основания равнобедренного треугольника, если высота, проведенная к основанию, равна 10 см, а проведенная к боковой стороне – 12 см.

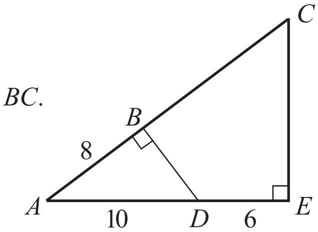
12. Дана трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD, $AB = 6$ см, $CD = 8$ см, $AD = 20$ см, $BC = 10$ см. Найдите высоту трапеции.

2

13. Найдите длины катетов прямоугольного треугольника с гипотенузой 10 см, если длина высоты, проведенной к гипотенузе, составляет 40% от длины гипотенузы.

14. Пусть BD – высота треугольника ABC.
Найдите BD и DC, если AB = 12 см, BC = 14 см, AD = 8 см.

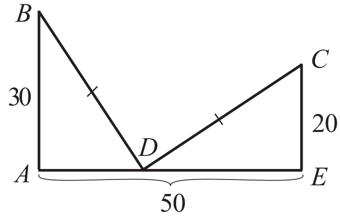
15. ***Работайте в парах!*** Рассмотрите рисунок и вычислите BC.
Указание. Примените cos$A$.



3

16. Найдите длины катетов прямоугольного треугольника, один из углов которого равен 30°, если один из катетов на 30 см короче гипотенузы.

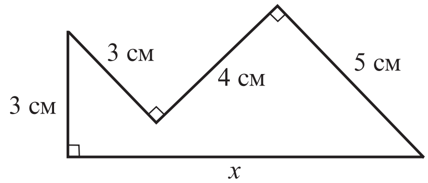
17. Рассмотрите рисунок и найдите AD.



18. Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла является биссектрисой угла, образованного медианой и высотой, проведенных из этой же вершины.

• *Задача для чемпионов*

19. Рассмотрите рисунок и найдите длину x.



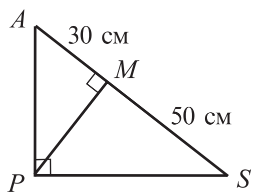
20. ***Работайте в группах!*** Проект *Приложения метрических отношений в строительстве*.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Рассмотрите рисунок и найдите:
а) проекцию точки P на прямую AS;
б) проекцию катета PS на прямую AS.



2. Рассмотрите рисунок задания **1** и найдите:
а) PM;
б) AP и PS.

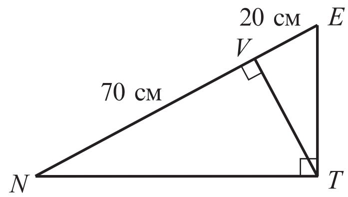
3. Найдите длину диагонали квадрата, площадь которого равна 20 см^2.

4. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием AD, $m(\angle A) = 90°$. Найдите длину высоты трапеции, если:
$AD = 25$ см, $BC = CD = 13$ см.

5. Найдите длину прямоугольника, ширина которого равна $8\sqrt{5}$ см, а диагональ – 32 см.

Вариант 2

1. Рассмотрите рисунок и найдите:
а) проекцию точки T на прямую NE;
б) проекцию катета ET на прямую NE.



2. Рассмотрите рисунок задания **1** и найдите:
а) VT;
б) NT и ET.

3. Найдите длину гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника, площадь которого равна 20 см^2.

4. Дана равнобедренная трапеция с меньшим основанием 34 см и бóльшим основанием 66 см. Найдите длину высоты трапеции.

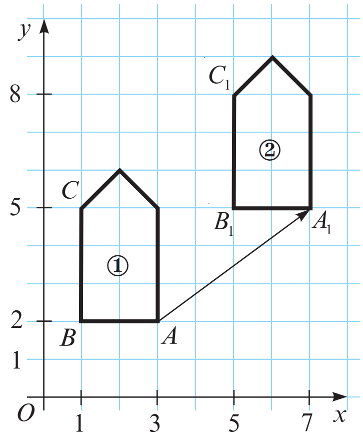
5. Найдите длины катетов равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 12 см.

Глава 5 Векторы на плоскости

Решить задачу означает найти выход из затруднения.
Джордж Пойа

§1. Параллельный перенос. Понятие вектора

1.1. Параллельный перенос



1 Фигура ② получена из фигуры ① переносом на 4 линейные единицы вправо и на 3 линейные единицы вверх каждой ее точки.
Рассмотрите рисунок и заполните пропуски.

- Точка $A(3;\ 2)$ переходит в точку $A_1(7;\ 5)$.
- Точка $B(1;\ 2)$ переходит в точку $B_1(\square;\ \square)$.
- Точка $C(\square;\ \square)$ переходит в точку $C_1(5;\ 8)$.
- Если точка $M(x;\ y)$ переходит в точку $M_1(x_1;\ y_1)$, то $x_1 = x + 4$, $y_1 = y + \square$.

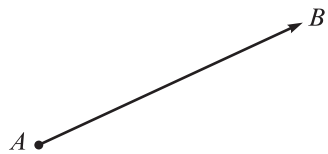
Замечание Говорят, что фигура ② получена из фигуры ① в результате параллельного переноса, заданного формулами $x_1 = x + 4$, $y_1 = y + 3$.

Определение Отображение плоскости на себя, при котором каждая точка $M(x;\ y)$ плоскости отображается в точку $M_1(x + a;\ y + b)$, где a и b – действительные числа, называется **параллельным переносом**.
Точка M_1 называется **образом** точки M при данном параллельном переносе.

2 Установите истинностное значение высказываний и сформулируйте выводы.
а) Параллельный перенос сохраняет расстояние между точками.
б) При параллельном переносе образом отрезка является конгруэнтный ему отрезок.
в) При параллельном переносе образом прямой является параллельная ей прямая.
г) При параллельном переносе образом окружности является конгруэнтная ей окружность.

1.2. Понятие вектора

Запомните Любая упорядоченная пара точек A и B на плоскости определяет **направленный отрезок**, обозначенный $\overrightarrow{AB}$.
Точка A называется **началом**, а точка B – **концом** направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$.



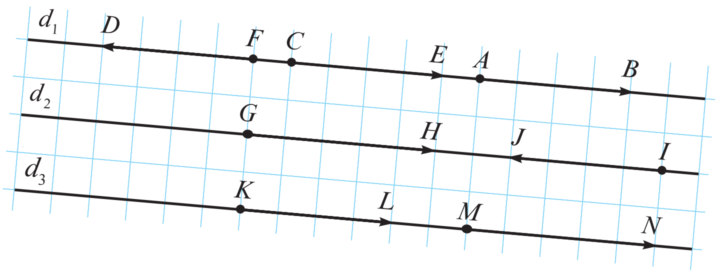
Кроме начала и конца, направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ характеризуется:

1. **модулем (абсолютной величиной)** – длиной отрезка AB (обозначается $|\overrightarrow{AB}|$);
2. **направлением**, определенным прямой AB или любой другой прямой, параллельной AB, и стрелкой.

Замечание Если A и B – две различные точки, то $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ – два отрезка с **разными направлениями** (или **противоположно направленные**).

1 Рассмотрите рисунок. Выберите все направленные отрезки, имеющие одинаковые модуль и направление, как у отрезка $\overrightarrow{AB}$.

Объясняем Зная, что прямые d_1, d_2 и d_3 параллельны, получим, что $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{KL}$ имеют одинаковые модуль и направление, как у направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$.

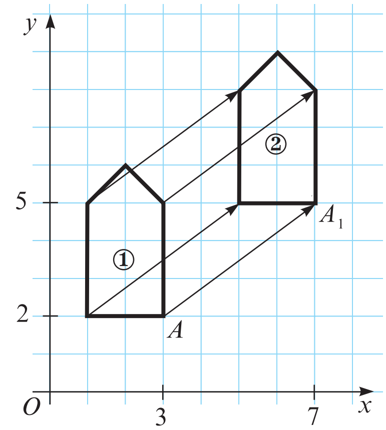


Определение

Вектором называется множество всех направленных отрезков, имеющих одинаковые модуль и направление, как у заданного направленного отрезка.

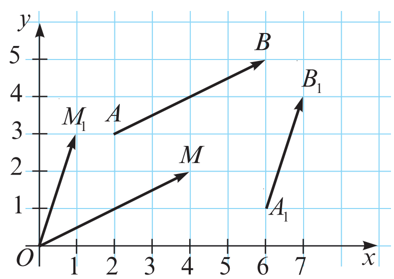
Вектор обозначается маленькой буквой латинского алфавита и над буквой ставится стрелка, или одним из направленных отрезков, которые определяют этот вектор. Таким образом, направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{KL}$ (изображенные на рисунке задачи **1**) определяют один и тот же вектор, который можно обозначить $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{v}$ или $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{KL}$ и т. д.

Замечание Анализируя пример **1** из раздела 1.1 данного параграфа, заметим, что каждый направленный отрезок с началом, принадлежащим фигуре ①, и концом, принадлежащим фигуре ②, являющимся образом этого начала, определяет тот же вектор, что и вектор $\overrightarrow{AA_1}$ (см. рисунок).



Следовательно, это преобразование на плоскости можно назвать **параллельным переносом, заданным вектором** $\overrightarrow{AA_1}$.

2 Рассмотрите рисунок. Сравните изменение координат при перемещении по направленным отрезкам AB и A_1B_1 с координатами точек M и M_1 соответственно. Что вы заметили?



Объясняем $A(2; 3)$, $B(6; 5)$.

Координата x увеличивается на $6-2=4$ (единицы), а y – на $5-3=2$ (единицы).

$M(4; 2)$

$A_1(6; 1)$, $B_1(7;$ ☐ $)$

Координата x увеличивается на 1 (единицу), а y на ☐ -1 = ☐ (единицы).

$M_1(1;$ ☐ $)$

Заметим, что $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OM}$ изображают один и тот же вектор, а $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{OM_1}$ – другой вектор.

Говорят, что вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет координаты $(4; 2)$, а вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ – координаты (1; ☐).

Определение

> Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. **Координатами вектора** $\overrightarrow{AB}$ являются числа x_2-x_1 и y_2-y_1.

Обозначаем $\overrightarrow{AB}(x_2-x_1; y_2-y_1)$.

Замечания

1. В примере **2** векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ можно обозначить соответственно $\overrightarrow{AB}(4; 2)$ и $\overrightarrow{A_1B_1}(1; 3)$.
2. **Нулевой вектор** имеет координаты $(0; 0)$. Обозначаем $\vec{0}(0, 0)$.
3. **Равные векторы** имеют равные соответствующие координаты: $\vec{u}(a, b)=\vec{v}(c, d)$, если $a=c$ и $b=d$.
4. **Модулем** (или **длиной**) **вектора** называется модуль (длина) направленного отрезка, изображающего этот вектор.
5. Для краткости высказывания вместо выражения «вектор, изображением которого является направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$» будем говорить «вектор $\overrightarrow{AB}$».
6. **Коллинеарные векторы** одинаково направлены или противоположно направлены (то есть лежат на совпадающих или параллельных прямых).
7. Даны точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$. Так как модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ равен длине отрезка AB, следует, что $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.
8. Для изображения вектора, заданного координатами, для удобства в качестве начала этого вектора будем брать точку $(0; 0)$.

Применяем Найдите длину вектора:

а) $\overrightarrow{AB}$, если $A(-2; 1)$, $B(6; 16)$;

б) $\vec{a}(3; 4)$.

Решение:

а) $AB=\sqrt{(6-(-2))^2+(16-1)^2}=\sqrt{8^2+15^2}=\sqrt{289}=17$.

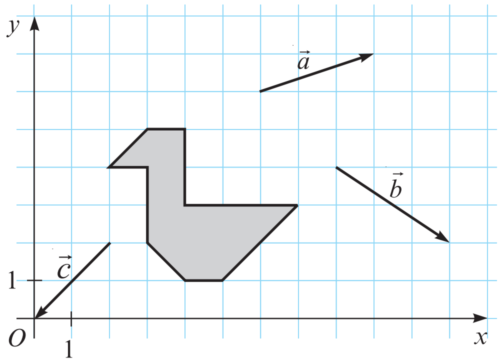
б) Рассмотрим $\vec{a}=\overrightarrow{OM}$, где O – начало прямоугольной системы координат. Следовательно, точка M имеет координаты $(3, 4)$.

$OM=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$. То есть, $|\vec{a}|=5$.

Заключение Модуль вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ можно вычислить по формуле $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

Упражнения и задачи

1



1. Найдите образы точек A, B, C при параллельном переносе, заданном формулами $x_1 = x - 3$ и $y_1 = y + 5$, если:

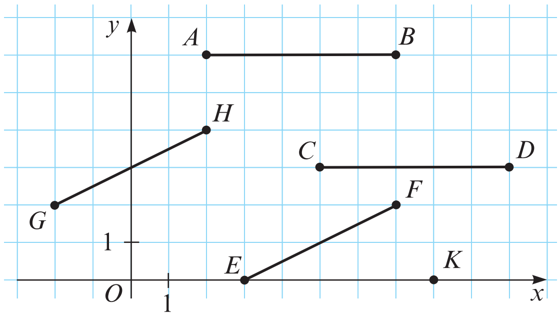
а) $A(1; 2)$, $B(-2; 5)$, $C(4; -6)$;

б) $A(2; 9)$, $B(-3; 7)$, $C(-8; -5)$;

в) $A(0; 4)$, $B(4; -9)$, $C(-11; 7)$.

2. ***Работайте в парах!*** Скопируйте рисунок и постройте образ закрашенной фигуры, который получится при параллельном переносе заданным вектором:

а) $\vec{a}$; б) $\vec{b}$; в) $\vec{c}$.



3. Рассмотрите рисунок. Запишите формулы, которыми задан параллельный перенос, при котором:

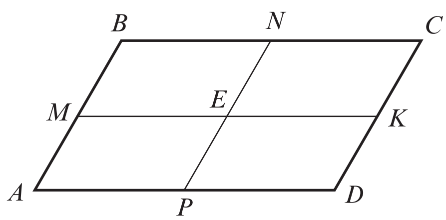
а) отрезок AB переходит в отрезок CD;

б) отрезок EF переходит в отрезок GH;

в) отрезок AB переходит в отрезок EK.

4. При параллельном переносе точка $A(3; 0)$ переходит в точку $B(0; 3)$. В какую точку при этом параллельном переносе перейдет точка:

а) $M(1; 4)$; б) $N(4; 1)$; в) $K(1; -1)$; г) $P(-3; 7)$?



5. ***Работайте в парах!*** Точки M, N, K, P являются серединами сторон параллелограмма $ABCD$ (см. рисунок), а точка E – точкой пересечения отрезков MK и NP.

Запишите все векторы (которые можно взять на рассмотрение на данном рисунке), равные вектору:

а) $\overrightarrow{AM}$; б) $\overrightarrow{BN}$; в) $\overrightarrow{AE}$; г) $\overrightarrow{DE}$.

6. Изобразите в декартовой системе координат вектор с началом в точке $O(0; 0)$ и координатами:

а) $(3; 5)$; б) $(-2; 4)$; в) $(-4; 2)$; г) $(-7; -3)$.

7. Изобразите в декартовой системе координат вектор:

а) с началом в точке $A(1; 2)$ и координатами $(2; 2)$;

б) с началом в точке $B(-1; 1)$ и координатами $(4; -3)$;

в) с началом в точке $C(3; -4)$ и координатами $(-3; 4)$.

8. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

а) $A(1; 1)$, $B(4; 5)$; б) $A(-4; 5)$, $B(1; 17)$;

в) $A(2; -5)$, $B(13; 55)$; г) $A(-7; 6)$, $B(28; 18)$.

9. Найдите модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ из упражнения **8**.

10. Найдите модуль вектора:

а) $\vec{a}(5; 12)$; б) $\vec{b}(8; 15)$;

в) $\vec{c}(7; 24)$; г) $\vec{d}(9; 40)$.

2

11. Найдите координаты точек A, B, C, если при параллельном переносе, заданном формулами $x_1 = x + 2$, $y_1 = y - 7$, они переходят соответственно в точки:

а) $A_1(0; 2)$, $B_1(3; 1)$, $C_1(-1; 1)$;

б) $A_1(3; 10)$, $B_1(8; -4)$, $C_1(6; 0)$;

в) $A_1(0; -3)$, $B_1(3; 8)$, $C_1(-9; 6)$.

12. ***Исследуйте!*** Существует ли параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку B, а точка C – в точку D, если:

а) $A(3; 3)$, $B(7; 5)$, $C(3; 1)$, $D(7; 3)$;

б) $A(-1; 3)$, $B(1; 2)$, $C(-1; -2)$, $D(-1; -1)$;

в) $A(-2; -1)$, $B(6; 1)$, $C(2; -2)$, $D(10; 0)$?

13. Даны точки $A(-2;\,4)$ и $B(0;\,2)$. Найдите координаты точки C, если:

а) отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ противоположно направленные и имеют один и тот же модуль;

б) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$ равны (точка O – начало прямоугольной системы координат);

в) векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{OC}$ коллинеарные, одинаково направлены, а модуль вектора $\overrightarrow{OC}$ в два раза больше модуля вектора $\overrightarrow{AB}$ (точка O – начало прямоугольной системы координат).

14. *Работайте в парах!* Найдите действительные числа m и n, при которых равны векторы:

а) $\vec{a}(2m-1;\,8)$ и $\vec{b}(9;\,3n-1)$;

б) $\vec{a}(10;\,-4n+5)$ и $\vec{b}(-m+7;\,13)$;

в) $\vec{a}(m+6;\,11-n)$ и $\vec{b}(-3m+14;\,n-11)$.

15. Найдите координаты вектора, модуль которого равен 16, и который образует с осью Ox угол величиной:

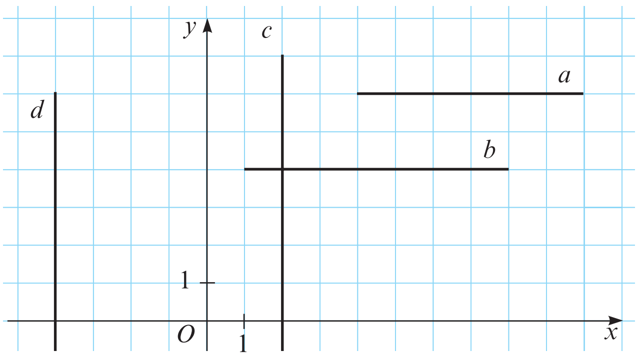
а) 60°; б) 30°; в) 45°.

3

16. Рассмотрите рисунок.
Запишите формулы, задающие параллельный перенос, при котором:

а) прямая a переходит в прямую b;

б) прямая c переходит в прямую d.



17. Даны точки $A(-2;\,1)$, $B(4;\,4)$, $C(-3;\,1)$.
Найдите координаты точки D, если:

а) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$;

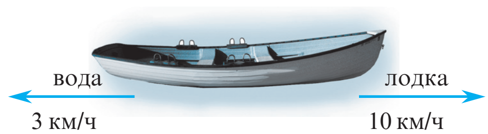
б) $2|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ одинаково направлены;

в) $|\overrightarrow{CD}|=2|\overrightarrow{AB}|$ и векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ противоположно направлены.

18. Даны точки $A(2;\,4)$, $B(6;\,-4)$, $C(-8;\,-1)$. Покажите, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ перпендикулярны.

§2. Операции с векторами

2.1. Сложение векторов

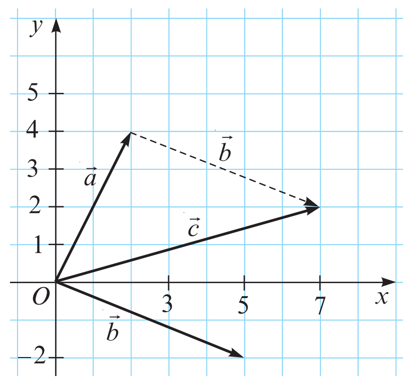


Суммой векторов $\vec{a}(a_1;\,a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\,b_2)$ называется вектор $\vec{c}(a_1+b_1;\,a_2+b_2)$.
Обозначаем: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

1 Изобразите в одной и той же декартовой системе координат векторы $\vec{a}(2;\,4)$, $\vec{b}(5;\,-2)$ и $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$.

Изображаем Помним, что $\vec{c}(2+5;\,4-2)=\vec{c}(7;\,2)$.
На рисунке изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Вектор $\vec{c}$ еще называется **результирующим вектором** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Результирующий вектор векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно изобразить, применив правило треугольника.

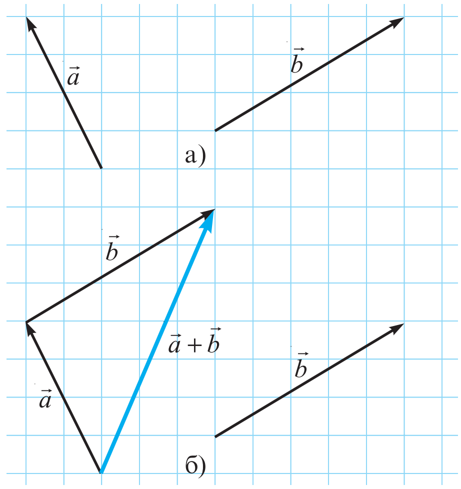


Запомните

Правило треугольника

Чтобы изобразить результирующий вектор (сумму) двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображаем второй вектор (то есть, $\vec{b}$) так, чтобы его начало совпало с концом первого вектора (то есть, $\vec{a}$), затем соединяем начало первого вектора с концом второго вектора.

Применяем 2 Изобразите сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, представленных на рисунке.



Решение:

Применим правило треугольника (рис. б).

1. Перемещаем вектор $\vec{b}$ так, чтобы его начало совпало с концом вектора $\vec{a}$.
2. Соединим начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$ (в новом положении).

- Перечертите рисунок а), затем изобразите вектор $\vec{b}+\vec{a}$. Что вы заметили?

Свойства сложения векторов

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

1° Коммутативность → $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$.

2° Ассоциативность → $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3° Существование нейтрального элемента → $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

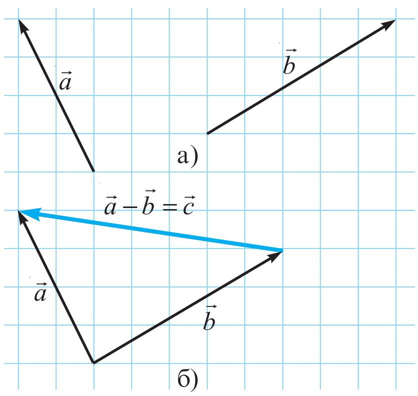
• Докажите свойство 2°, применив координаты вектора.

2.2. Разность векторов

Разностью векторов $\vec{a}(a_1;\,a_2)$ и $\vec{b}(b_1;\,b_2)$ называется вектор $\vec{c}(a_1-b_1;\,a_2-b_2)$.
Обозначаем: $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$.

Замечание Очевидно, что вектор $\vec{c}$ является разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если и только если $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

Применяем 3 Изобразите разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то есть $\vec{a}-\vec{b}$, изображенных на рисунке а).



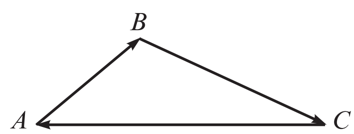
Решение:

Обозначим $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$. Так как $\vec{a}$ – это сумма векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, следует, что вектор $\vec{a}$ имеет общее начало с вектором $\vec{b}$ и общий конец с вектором $\vec{c}$.

1. Сводим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в общее начало.
2. Соединяем конец вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$.

Замечания

1. Если ABC – треугольник, то $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$.

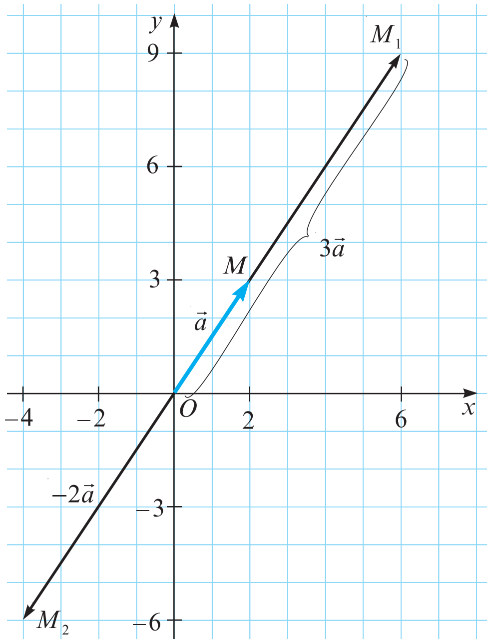


2. Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – три ненулевых вектора, таких, что $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$, то существует треугольник со сторонами $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$.

2.3. Умножение вектора на действительное число

Если $\vec{a}(a_1;\,a_2)$, а k – действительное число, то через $k\vec{a}$ обозначим вектор $(ka_1;\,ka_2)$.

1 Дан вектор $\vec{a}(2;\,3)$. Изобразите векторы $\vec{a}$, $\vec{u}=3\vec{a}$ и $\vec{v}=-2\vec{a}$.



Решаем

$3\vec{a}=\vec{u}=(3\cdot 2;\,3\cdot 3)=\vec{u}=(6;\,9)$.

$-2\vec{a}=\vec{v}=(-2\cdot 2;\,-2\cdot 3)=\vec{v}=(-4;\,-6)$.

На рисунке изображены векторы $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OM_1}=3\vec{a}$, $\overrightarrow{OM_2}=-2\vec{a}$.

Замечания

Пусть $\vec{a}$ – вектор и k – действительное число.

1. Векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ коллинеарные.
2. Векторы $\vec{a}$ и $k\vec{a}$ одинаково направлены при $k>0$ и противоположно направлены при $k<0$.
3. Для любого ненулевого натурального числа k и любого вектора $\vec{a}$ имеет место соотношение:

$$k\vec{a}=\underbrace{\vec{a}+\vec{a}+\ldots+\vec{a}}_{k\text{ раз}}.$$

4. Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два коллинеарных вектора, то существует действительное число k такое, что $\vec{b}=k\vec{a}$.

- Применив координаты векторов, докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и для любых действительных чисел k, t имеют место ***свойства умножения векторов на действительные числа***:

1°. $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$; 2°. $(k+t)\vec{a}=k\vec{a}+t\vec{a}$; 3°. $(kt)\vec{a}=k(t\vec{a})$.

Применяем **2** Определите, являются ли точки $A(-5;\,2)$, $B(-1;\,1)$, $C(7;\,-1)$ коллинеарными.

Решение:

Точки A, B, C коллинеарные, если и только если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарные.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ являются коллинеарными, если и только если существует действительное число k такое, что $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AB}(-1-(-5);\,1-2)=\overrightarrow{AB}(4;\,-1)$;

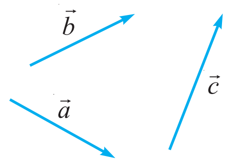
$\overrightarrow{BC}(7-(-1);\,-1-1)=\overrightarrow{BC}(8;\,-2)$;

$k\overrightarrow{BC}(k\cdot 8;\,k\cdot(-2))=k\overrightarrow{BC}(8k;\,-2k)$.

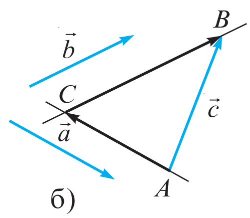
Следовательно, получим систему $\begin{cases}8k=4,\\-2k=-1,\end{cases}$ решением которой является $k=0{,}5$.

Ответ: Да, точки A, B, C являются коллинеарными.

2.4. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам



а)



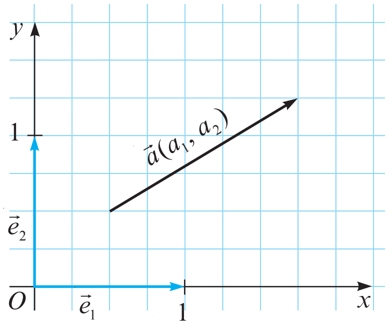
б)

1 Пусть $\vec a$ и $\vec b$ – два неколлинеарных вектора (рис. а). Покажем, что любой вектор $\vec c$ можно задать формулой $\vec c = k_1\vec a + k_2\vec b$, где k_1 и k_2 – два действительных числа.

Решение:

1) Пусть $\vec c = \overrightarrow{AB}$. Проведем через точки A и B прямые, параллельные соответственно векторам $\vec a$ и $\vec b$. Пусть C – точка их пересечения (рис. б). Тогда
$$\vec c = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}. \qquad (*)$$
2) Согласно замечанию 4 из раздела 2.3, так как векторы $\vec a$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарные, так же как и векторы $\vec b$ и $\overrightarrow{CB}$, то существуют действительные числа k_1 и k_2 такие, что:
$$\overrightarrow{AC} = k_1\vec a,\ \overrightarrow{CB} = k_2\vec b. \qquad (**)$$
3) Подставим (**) в (*): $\vec c = \overrightarrow{AB} = k_1\vec a + k_2\vec b$, ч. т. д. ►

Замечание Соотношение $\vec c = k_1\vec a + k_2\vec b$, рассмотренное в задаче, называется **разложением вектора** $\vec c$ по двум неколлинеарным векторам $\vec a$ и $\vec b$.



2 Рассмотрите рисунок.

Даны векторы $\vec e_1(1, 0)$, $\vec e_2(0, 1)$, $\vec a(a_1, a_2)$.

Запишите разложение вектора $\vec a$ по векторам $\vec e_1$ и $\vec e_2$.

Решение:

Так как векторы $\vec e_1$ и $\vec e_2$ неколлинеарные, необходимо найти действительные числа k_1 и k_2 такие, что
$$\vec a = k_1\vec e_1 + k_2\vec e_2. \qquad (*)$$
Распишем соотношение (*).

$\vec a(a_1, a_2) = k_1\vec e_1(1, 0) + k_2\vec e_2(0, 1)$.

Обозначим $k_1\vec e_1$ через $\vec u$ и $k_2\vec e_2$ через $\vec v$.

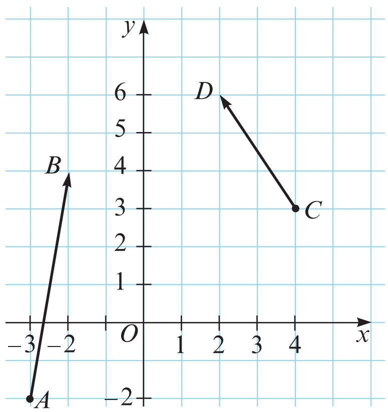
Получим $\vec a(a_1, a_2) = \vec u(k_1, 0) + \vec v(0, k_2)$ или $\vec a(a_1, a_2) = \vec c(k_1, k_2)$, где $\vec c = \vec u + \vec v$.

Следовательно, $k_1 = a_1$, $k_2 = a_2$, то есть $\vec a(a_1, a_2) = a_1\vec e_1 + a_2\vec e_2$.

Замечание Векторы $\vec e_1(1, 0)$ и $\vec e_2(0, 1)$ называются **единичными векторами**.

2.5. Скалярное произведение двух векторов (дополнительно)

Скалярным произведением векторов $\vec a(a_1; a_2)$ и $\vec b(b_1; b_2)$ называется $a_1b_1 + a_2b_2$, обозначаем $\vec a \cdot \vec b$.



Примеры

1. Скалярным произведением векторов $\vec a(1; -4)$ и $\vec b(2; 3)$ является число $1 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 = -10$. Значит, $\vec a \cdot \vec b = -10$.
2. Найдем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, изображенных на рисунке 1.

   Решение:

   Имеем $A(-3; -2)$, $B(-2; 4)$, $C(4; 3)$, $D(2; 6)$.

   $\overrightarrow{AB}(-2-(-3); 4-(-2)) = \overrightarrow{AB}(1; 6)$, $\overrightarrow{CD}(2-4; 6-3) = \overrightarrow{CD}(-2; 3)$.

   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 1 \cdot (-2) + 6 \cdot 3 = 16$.

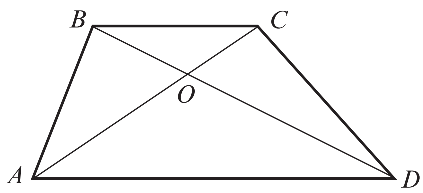
   Ответ: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 16$.

Замечания

1. Если два вектора лежат на перпендикулярных прямых, то их скалярное произведение равно 0.
2. Если скалярное произведение двух векторов равно 0, то их направления перпендикулярны.
3. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|$, для любого вектора $\vec{a}$.

Упражнения и задачи

1



1. Рассмотрите рисунок и найдите:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$;

б) $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$;

в) $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{OD}$.

2. *Работайте в парах!* Рассмотрите рисунок предыдущего упражнения и найдите:

а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{OD}$; б) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BO}$; в) $\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DO}$, $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BO}$.

3. Даны векторы $\vec{a}(-3;\sqrt{5})$, $\vec{b}(0{,}8;-6)$. Найдите координаты вектора:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $2\vec{a}$; г) $0{,}5\vec{b}$; е) $3\vec{a}-2\vec{b}$.

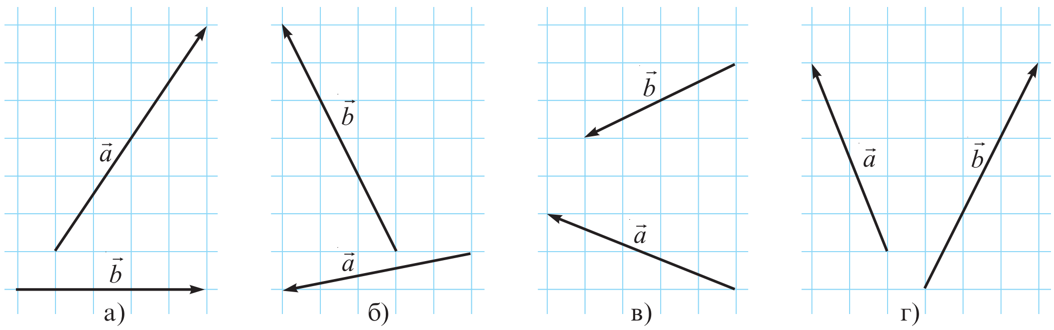
4. Даны векторы $\vec{a}(12;16)$, $\vec{b}\left(\frac{2}{3};-9\right)$. Найдите координаты вектора:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $0{,}25\vec{a}$; г) $3\vec{b}$; е) $6\vec{b}+2\vec{a}$.

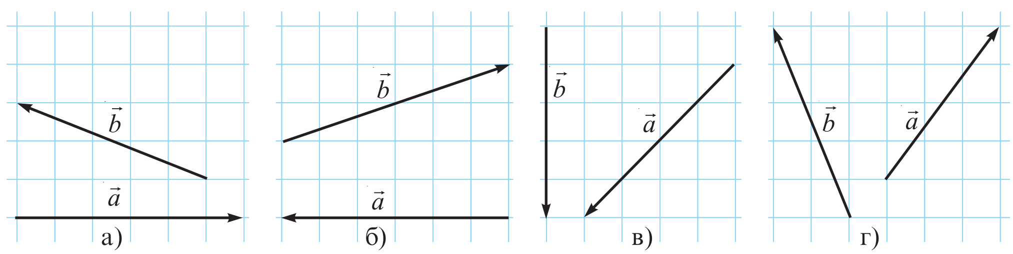
5. Даны векторы $\vec{a}(2;1)$, $\vec{b}(-1;3)$. Найдите модуль вектора:

а) $2\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-2\vec{b}$; в) $3\vec{a}-3\vec{b}$; г) $-5\vec{a}+4\vec{b}$.

6. *Работайте в парах!* Перечертите рисунок, затем постройте сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



7. *Работайте в парах!* Перечертите рисунок, затем постройте разность $\vec{a}-\vec{b}$.

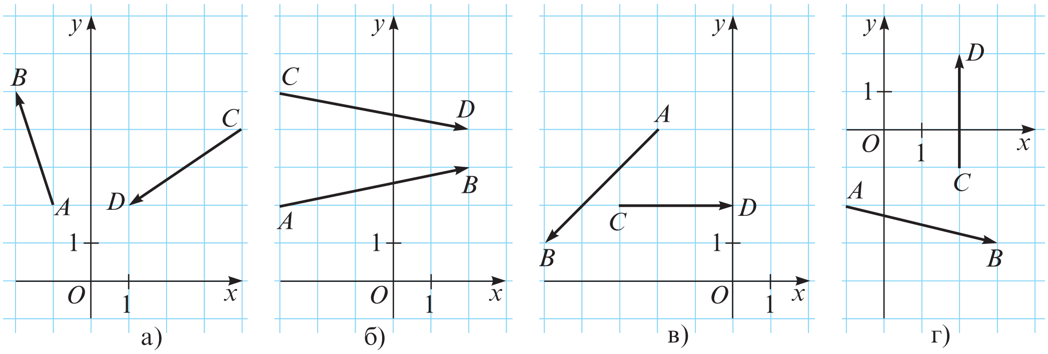


8. Для каждого рисунка из упражнения 7 постройте векторы $2\vec{a}$ и $-2\vec{b}$.

9 (дополнительно). Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a}(3;1)$, $\vec{b}(0;5)$; б) $\vec{a}(2;-4)$, $\vec{b}(6;2)$; в) $\vec{a}(\sqrt{2};3)$, $\vec{b}(3\sqrt{2};1)$; г) $\vec{a}\left(-8;\frac{2}{3}\right)$, $\vec{b}\left(\frac{3}{4};9\right)$.

10 (дополнительно). Рассмотрите рисунок. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$:



а) б) в) г)

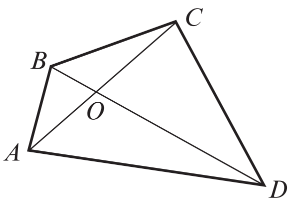
2

11. Рассмотрите рисунок и найдите:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$;

б) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}$;

в) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$.



12. Точки M и N соответственно являются серединами сторон AB и AC треугольника ABC.
Заполните пропуски: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+$ ___, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+$ ___.
Следовательно, $2\overrightarrow{MN}=$ ___.

13. Найдите вектор $\vec{x}$, зная, что:

а) $\vec{x}+\vec{a}(-5;\,3)=\vec{b}(3;\,2)$; б) $\vec{a}(-1;\,6)-2\vec{x}=\vec{b}(9;\,10)$;

в) $3\vec{x}+\vec{a}(4;\,8)=\vec{b}(-8;\,23)$; г) $\vec{a}(7;\,13)+\vec{x}=2\vec{x}-\vec{b}(0;\,5)$.

14. ***Исследуйте!*** Определите, являются ли точки A, B и C коллинеарными, зная, что:

а) $A(5;\,4)$, $B(2;\,2)$, $C(11;\,8)$; б) $A(10;\,-2)$, $B(-3;\,1)$, $C(2;\,0)$;

в) $A(-5;\,-2)$, $B(10;\,3)$, $C(4;\,1)$; г) $A(6;\,0)$, $B(2;\,3)$, $C(-1;\,-1)$.

15. Найдите значение m, при котором векторы $\vec{a}(3;\,2)$ и $\vec{b}(m-1;\,6-2m)$ лежат на перпендикулярных прямых.

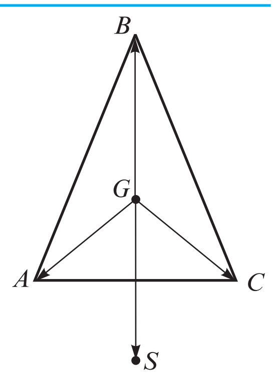
16. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны, зная, что:

а) $A(-1;\,2)$, $B(-2;\,5)$, $C(1;\,2)$, $D(4;\,3)$; б) $A(2;\,3)$, $B(-3;\,2)$, $C(-3;\,3)$, $D(-2;\,0)$;

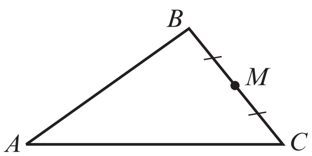
в) $A(-2;\,4)$, $B(-5;\,1)$, $C(-3;\,2)$, $D(0;\,-1)$; г) $A(3;\,-3)$, $B(-1;\,-2)$, $C(2;\,-1)$, $D(3;\,3)$.

3

17. Точка G является центром тяжести равнобедренного треугольника ABC с основанием AC, а точка S такая, что $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{GS}$. Докажите, что $AGCS$ – ромб.



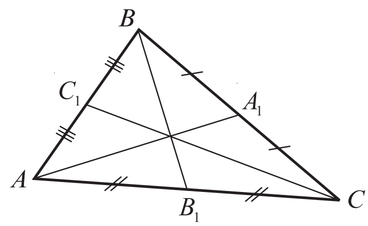
18. Докажите, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место соотношение
$|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$.



19. Точка M – середина стороны BC треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM}$. (*Указание*. «Дополните» треугольник ABC до параллелограмма.)

20. Точка M – точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$.
Докажите, что $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.

21. Пусть точки A_1, B_1, C_1 – середины сторон треугольника ABC (см. рисунок).
Докажите, что $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=0$.



22. Докажите, что для любого треугольника ABC существует другой треугольник, стороны которого параллельны и соответственно конгруэнтны медианам треугольника ABC.
(*Указание*. Примените замечание 2 из раздела 2.1.)

23. Найдите векторы $\vec{x}$ и $\vec{y}$, если:

а) $\begin{cases}\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}(-2;\,6);\\ 2\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}(5;\,0);\end{cases}$ б) $\begin{cases}\vec{x}-\vec{y}=\vec{a}(-3;\,7);\\ 3\vec{x}+2\vec{y}=\vec{b}(16;\,1);\end{cases}$

в) $\begin{cases}-\vec{x}+2\vec{y}=\vec{a}(12;\,-3);\\ 4\vec{x}-\vec{y}=\vec{b}(-6;\,-2).\end{cases}$

24. Точка G – центр тяжести треугольника ABC.
Докажите, что $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.
(*Указание.* Примените соотношение из упражнения **21** и соотношение $\overrightarrow{GA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MA}$, где M – точка стороны BC.)

25. Дан параллелограмм $ABCD$. Заполните пропуски:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\boxed{}$. (1)

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\boxed{}$. (2)

Возведя каждое из соотношений (1) и (2) в квадрат, получим:

$\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2=\boxed{}$. (3)

$\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}^2=\boxed{}$. (4)

Сложив соотношения (3) и (4), получим

$2AB^2+2AD^2=\boxed{}$.

26. Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c направление вектора $\vec{v}(a,b)$ перпендикулярно прямой $ax+by=c$.

Упражнения и задачи на повторение

1

1. Найдите образы точек A, B, C при параллельном переносе, заданном формулами $x_1=x+4$ и $y_1=y-3$, если:
а) $A(-1;\,0)$, $B(0;\,2)$, $C(-1;\,3)$;
б) $A(1;\,3)$, $B(-1;\,7)$, $C(2;\,-6)$;
в) $A(4;\,4)$, $B(12;\,5)$, $C(0;\,8)$.

2. ***Работайте в парах!*** Запишите формулы, задающие параллельный перенос, при котором:
а) точка $A(4;\,10)$ переходит в точку $A_1(10;\,4)$;
б) точка $B(-5;\,8)$ переходит в точку $B_1(8;\,2)$;
в) точка $O(0;\,0)$ переходит в точку $O_1(7;-6)$.

3. При параллельном переносе точка $A(0;\,-1)$ переходит в точку $A_1(1;\,3)$. В какую точку перейдет:
а) точка $B(2;\,4)$;
б) начало прямоугольной системы координат;
в) точка $C(5;\,4)$;
г) точка, симметричная точке $D(3;\,2)$ относительно $O(0;\,0)$?

4. Найдите длину отрезка AB, если:
а) $A(7;\,4)$, $B(3;\,1)$; б) $A(5;\,2)$, $B(-1;\,2)$;
в) $A(4;\,-1)$, $B(8;\,2)$; г) $A(4;\,3)$, $B(0;\,1)$.

5. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:
а) $A(5;\,3)$, $B(5;\,4)$; б) $A(0;\,-9)$, $B(1;\,1)$;
в) $A(0;\,8)$, $B(-8;\,0)$; г) $A(10;\,-3)$, $B(2;\,1)$.

6. Даны точки $A(2;\,1)$, $B(4;\,5)$ и $C(1;\,-3)$. Найдите координаты точки D, зная, что $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

7. Найдите модуль вектора AB, зная, что:
а) $A(1;\,0)$, $B(2;\,1)$; б) $A(-4;\,3)$, $B(6;\,27)$;
в) $A(9;\,-9)$, $B(18;\,3)$; г) $A(-17;\,-22)$, $B(1;\,58)$.

8. Найдите вектор, противоположный вектору с координатами:
а) $(5;\,3)$; б) $(-7;\,2)$; в) $(6;\,8)$; г) $(0;\,-25)$.

9. ***Работайте в парах!*** Найдите координаты конца вектора, у которого:
а) начало в точке $A(3;\,3)$ и координаты $(1;\,-1)$;
б) начало в точке $B(5;\,0)$ и координаты $(-2;\,7)$;
в) начало в точке $C(-4;\,9)$ и координаты $(3;\,-4)$;
г) начало в точке $D(9;\,-4)$ и координаты $(-5;\,0)$.

10. Найдите сумму векторов:
а) $(6;\,2)$ и $(-5;\,4)$; б) $(16;\,2)$ и $(1;\,-1)$;
в) $(4;\,8)$ и $(4;\,-3)$; г) $\left(\frac{3}{4};\,0\right)$ и $\left(-\frac{1}{2};\,7\right)$.

11. Найдите разность векторов из упражнения **10**.

12. Найдите скалярное произведение векторов из упражнения **10**.

13. *Работайте в группах!* Даны точки $A(3;\,2)$, $B(-5;\,3)$.

а) Найдите координаты векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$, где $O(0;\,0)$.

б) Найдите координаты середины отрезка AB.

в) Найдите координаты векторов $2\overrightarrow{AB}$, $0{,}5\overrightarrow{OA}$, $4\overrightarrow{AB}$.

14. Дан ромб $ABCD$. Определите:

а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}$; г) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}$.

2

15. Найдите значения x, если:

а) $\vec{a}=(x;\,10)$ и $|\vec{a}|=26$;

б) $\vec{a}=(10;\,x)$ и $|\vec{a}|=12{,}5$;

в) $\vec{a}=(x;\,8)$ и $|\vec{a}|=4\sqrt{13}$;

г) $\vec{a}=(-9;\,x)$ и $|\vec{a}|=3\sqrt{13}$.

16. Даны векторы $\overrightarrow{AB}(3;\,-2)$, $\overrightarrow{BC}(-4{,}5;\,3)$. Докажите, что точки A, B, C коллинеарные.

17. *Исследуйте!* Установите, являются ли коллинеарными векторы:

а) $\vec{a}(1;\,-3)$, $\vec{b}(1;\,3)$; б) $\vec{a}(0;\,-1)$, $\vec{b}(1;\,0)$;

в) $\vec{a}(3;\,-2)$, $\vec{b}(-3;\,2)$; г) $\vec{a}(4;\,-2)$, $\vec{b}(-2;\,1)$.

18. Даны точки $A(1;\,-2)$, $B(-1;\,1)$, $C(2;\,3)$. Найдите длины сторон треугольника.

19. При каких значениях x перпендикулярны векторы:

а) $\vec{a}(3;\,2)$, $\vec{b}(x;\,-1)$; б) $\vec{a}(5;\,x)$, $\vec{b}(0;\,-3)$;

в) $\vec{a}(x;\,-6)$, $\vec{b}(4;\,5)$?

3

20. Даны точки $A(-1;\,2)$, $B(1;\,-2)$, $C(2;\,0)$, $D(1;\,6)$.

а) Докажите, что $AD \parallel BC$. б) Найдите площадь $ABCD$.

21. Даны точки $A(3;\,5)$, $B(-3;\,1)$. Найдите координаты точки C, лежащей на оси Ox, если известно, что треугольник ABC – равнобедренный, с основанием $[AB]$.

22. Определите вид треугольника ABC (по сторонам), если:

а) $A(-1;\,-1)$, $B(6;\,0)$, $C(2;\,3)$; б) $A(3;\,-1)$, $B(1;\,2)$, $C\left(2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2};\,\dfrac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$.

23. Определите вид четырехугольника $ABCD$, если:

а) $A(3;\,2)$, $B(8;\,6)$, $C(3;\,6)$, $D(8;\,2)$; б) $A(6;\,0)$, $B(5;\,6)$, $C(1;\,3)$, $D(2;\,-3)$.

Итоговый тест

Время выполнения работы: 45 минут

Вариант 1

1. Образом точки $A(7;\,-4)$ при параллельном переносе является точка $A_1(1;\,3)$. Найдите образ точки $B(-3;\,5)$.

2. Найдите модуль вектора с началом в точке $A(-9;\,20)$ и концом $B(3;\,-15)$.

3. Являются ли точки $A(12;\,2)$, $B(-8;\,-2)$, $C(2;\,0)$ коллинеарными?

4. Точки $A(-2;\,1)$, $B(1;\,-4)$, $C(6;\,-3)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки D.

Вариант 2

1. Образом точки $A(-3;\,6)$ при параллельном переносе является точка $A_1(7;\,2)$. Найдите образ точки $B(-1;\,8)$.

2. Найдите модуль вектора с началом в точке $A(20;\,-3)$ и концом $B(-4;\,4)$.

3. Являются ли точки $A(-2;\,10)$, $B(4;\,-5)$, $C(2;\,0)$ коллинеарными?

4. Точки $A(8;\,4)$, $B(-2;\,3)$, $C(4;\,-1)$ являются вершинами параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты точки D.

Ответы и указания

Алгебра

Глава 1. Действительные числа. Повторение и дополнения

§1. **1.** Например, $-\sqrt{25}\in\mathbb{R}$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{Z}_-$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{Q}_-$, $-\sqrt{25}\in\mathbb{R}_-$. **2.** а) Л; б) Л; в) Л; г) И; д) И; е) Л; ж) И; з) А. **5.** а) Л; б) Л; в) Л; г) Л; д) И; е) А. **7.** а) 7,8; б) 6; г) 5,48; е) $\sqrt{22}$. **8.** $-4{,}5; -\sqrt{20}; -1; \sqrt{9}; 3{,}27; |4{,}28|; |-6{,}(2)|$. **10.** а) $\mathbb{Z}$; в) $\mathbb{I}_-$; г) $\mathbb{Q}$; д) $\mathbb{N}$; е) $\{0\}$. **12.** а) $\sqrt{19}-4$; б) $\sqrt{10}-2$; в) $2\sqrt{2}-\sqrt{7}$; г) $\sqrt{22}-3\sqrt{2}$. **13.** б) $\begin{cases}1-x, \text{ если } x\le 1\\ -1+x, \text{ если } x>1;\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x-6, \text{ если } x\ge 2\\ -3x+6, \text{ если } x<2.\end{cases}$ **15.** 2) а) $\left\{x \,\middle|\, -1\frac{2}{5}<x<2\right\}$; в) $\{x|-6{,}5<x<\sqrt{10}\}$; д) $\{x|-2<x<5\}$; е) $\{x\,|\,x<\sqrt{2}$ или $x>\sqrt{5}\}$. **17.** 28. **18.** *Указание*. Примените формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$. **20.** а) =; б) >; в) =; г) <. **22.** 18.

§2. **2.** 2) 350; 5) 642; 14,4; 6) 0,225; 1035; 14,4. **4.** а) $D_{108}=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 108\}$; в) $(108, 54)=54$; г) $[108, 54]=108$. **5.** б) $-81{,}4$. **7.** а) -1 и 0; б) 3 и 4; в) 5 и 6; г) -23 и -22. **9.** 3 761 плитка. **12.** в) $\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}$; г) $0{,}5\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{7}$. **14.** $4{,}77888\cdot 10^{24}$ кг. **17.** а) Например, $(4+\sqrt{3})+(1-\sqrt{3})$; г) например, $2\sqrt{15}+\sqrt{15}$; д) например, $(-1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})$. **19.** а), б) *Указание*. Примените формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ и $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. **20.** а), б) *Указание*. Примените формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ и $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$. **21.** а) $S=\{1{,}5; 1; -2\sqrt{5}\}$. **22.** 1480 фунтов. **23.** *Указание*. Примените формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ и $\sqrt{x^2}=|x|$, $x\in\mathbb{R}$.

§3. **4.** а) x^{12}; б) a^8; в) $64y^5$; г) a^5b^{11}. **7.** д) $\frac{25}{4}$; е) 9. **17.** а) 12; б) $9\frac{1}{4}$; в) $5\frac{29}{64}$; г) $-7\frac{1}{12}$. **18.** а) 2; б) 4; в) 6; г) 5; д) 10; е) $\frac{1}{9}$; ж) 3. **19.** а) $x^{-2}y$; б) a^4b^4; в) 1; г) $1{,}25ab^2$. **20.** в) $\left(\frac{2y^2}{x}\right)^{-5}$; г) $(5a^{-5}b^{-1})^3$. **22.** $\approx$ 5974 года. **23.** 5,34 кг. **24.** а) x^5; б) x^4; в) x^3; г) x^{13}. **25.** а) $2\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{5}$. **26.** а) ab; б) $\frac{a}{b}$; в) a^3b^3; г) $\frac{a^2}{b^3}$. **28.** а) $\frac{y-x}{x^2y^2}$; б) $x+y$; в) $\frac{1+a}{1-a}$; г) $\frac{a-1}{a}$. **29.** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

§4. **3.** в) 9; г) 6. **4.** а) 1) $\approx 3{,}5$; 2) $\approx 3{,}46$; 3) $\approx 3{,}464$. **6.** а) $a\ge 0$; б) $a\ge -2$; в) $a\le 1$; г) $a\ge 1$. **7.** а) 2 и 3; б) 4 и 5; в) 6 и 7; г) 12 и 13. **9.** а) 1; б) 0; в) 5; г) 7. **11.** а) 44; б) 35; в) 7,2; г) $\frac{6}{13}$; д) $\frac{4}{45}$; е) 51. **12.** а) 36; б) 60; в) 42; г) 135; д) 5; е) 15. **13.** а) $6\sqrt{2}$; б) $4\sqrt{3}$; в) $5\sqrt{3}$; г) $3\sqrt{10}$; д) $\sqrt{6}$; е) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **14.** а) $\sqrt{45}$; б) $\sqrt{75}$; в) $\sqrt{28}$; г) $-\sqrt{18}$; д) $\sqrt{108}$; е) $\sqrt{3}$. **16.** 14 мм. **17.** а) $x\in[0; +\infty)$; б) $x\in(-\infty; 0)$; в) $x\in(0; +\infty)$; г) $x\in\mathbb{R}$; д) $x\in\mathbb{R}^*$; е) $x\in\varnothing$; ж) $x\in[1; +\infty)$; з) $x\in\mathbb{R}$. **19.** а) 1; б) 6. **20.** а) $2\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $7+2\sqrt{3}$; г) 1. **22.** а) 2,38; б) 0,123; в) 26,32; г) 3,504. **25.** а) 1,2; б) 20; в) 40; г) 70. **26.** а) $\sqrt{11}$; б) 1; в) 3; г) $\frac{2}{19}$. **27.** а) $\sqrt{15}$; б) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; в) $\sqrt{11}+1$; г) $\sqrt{7}-1$. **28.** а) $-4ab^5\sqrt{2a}$; б) $-2(a-3)\cdot\sqrt{-2(a-3)}$. **29.** а) $-\sqrt{3a^2}$; б) $\sqrt{x^3}$; в) $-\sqrt{-y^3}$; г) $\sqrt{(a-b)^3}$. **30.** а) $-\frac{a^4b^6}{c}$; б) x^2y^8; в) $\sqrt{3}$. **32.** $\sqrt{2012}+\sqrt{2014}<2\sqrt{2013}$. **33.** а) 4; б) $2\sqrt{5}$. **34.** а) $\sqrt{6}-1$; б) $2+\sqrt{3}$.

Упражнения и задачи на повторение

2. а) a^{-14}; б) x^3. **4.** а) 180; б) 21; в) 3. **5.** а) $9\sqrt{5}$; б) $7-4\sqrt{3}$; в) 1; г) $11-22\sqrt{2}$. **6.** а) $-6xy\sqrt{y}$; б) $\frac{a^3}{5b}$. **9.** $x\in(-\infty; 0)$; $y\in(-\infty; 0)$. **10.** $a=0$ и $b\in[0; +\infty)$ или $b=0$ и $a\in[0; +\infty)$. **11.** а) $\sqrt{\frac{a}{b}}$; б) $\frac{2}{\sqrt{b}}$. **12.** а) $\frac{2b^2+a}{a^2b^4}$; б) $\frac{a^4}{1+2a^2+a^4}$. **14.** 1. **15.** а) 0; б) 0. **16.** 2.

Глава 2. Алгебраические выражения

§1. **3.** а) $9{,}5\sqrt{7}+12\sqrt{3}-7\sqrt{10}$; б) $\sqrt{15}+16\sqrt{2}$. **4.** а) $-\frac{17{,}8}{4}a+\frac{13}{5}b+\sqrt{7}$; б) $-1+6ab^2-100ab$.

5. а) $4{,}12x^2y=4x^2y+0{,}12x^2y$; б) $-3\sqrt{2}tz=-\sqrt{2}tz-\sqrt{2}tz-\sqrt{2}tz$; в) $6{,}(15)ab=6ab+0{,}(15)ab=6ab+\frac{5}{33}ab$; г) $-\frac{2}{7}xy^2=-\frac{1}{7}xy^2-\frac{1}{7}xy^2$. **6.** а) $-21x^3y^4z^4$; б) $14a^4b^2$. **7.** а) $13xy^{-1}$; б) $-\frac{1}{3}a^{-1}b^2$; в) $-\sqrt{3}tz$; г) $4{,}6a^{-1}b$. **8.** а) $9x^2y^4$;

б) $25a^8b^4$; в) $-\dfrac{125}{1331t^3z^3}$. **9.** а) Л; б) Л; в) Л; г) И; д) Л; е) Л. **10.** а) m^2+mn; б) z^2-zy; в) $3ab-6ac$; г) $-2\sqrt{2}x+2y$; д) $1{,}7x^2+5{,}1xy$; е) $\sqrt{14}a+7$. **11.** а) $-12x^3y^6+32x^2y^2z$; б) $-65a^3b^4+130a^2b^2c$; в) $-\sqrt{98}t^2z+\sqrt{147}t^3z^3$; г) $12a^3b^3-10a^2b$. **12.** а) 9 см^2; б) 19 см^2. **13.** а) $10x^2-21y^2-xy-2x+3y$; б) a^3-b^3; в) a^3+b^3; г) $x^3+x^2y-y^2x-y^3$. **14.** а) $7ab(b+2a)$; б) $-0{,}8x^2y^3(4{,}5-x^2y^2)$; в) $\sqrt{17}xy(2y^3-x)$; г) $-tz(15z+\sqrt{5}t)$. **16.** а) $7x^2y-3\sqrt{7}x^2+2\sqrt{7}xy-xy+y^2-7x^2y^2$; б) $\dfrac{5x^4y-245+x^6y^2-x^4y^6}{7}$. **18.** а) $-6a$; б) $-100x$. **20.** Второй шахматист. **21.** а) $x\cdot x\cdot(x^2-1{,}7x+0{,}7)$. **22.** $2\sqrt{3}$. **23.** а) 5; б) –2; в) 0; г) 1. **24.** а) Л; б) И. **25.** а) 3,5 км; б) 7 км; в) 10,5 км; г) 14 км. **29.** а) $S=\{0;\,4\}$; б) $S=\{0;\,1\}$. **31.** $\sqrt{a+1}-1$.

§2. **4.** а) Л; б) Л; в) И; г) F. **5.** а) $(\sqrt{3}+2x)^2=3+4\sqrt{3}x+4x^2$; б) $(2{,}5x+\sqrt{2}y)^2=6{,}25x^2+2\cdot2{,}5x\cdot\sqrt{2}y+2y^2$; в) $(a^2-2b^3)^2=a^4-4\cdot a^2\cdot b^3+4b^6$; г) $(t^2-\sqrt{3}z^4)^2=t^4-2\cdot t^2\cdot\sqrt{3}z^4+3z^8$. **6.** а) $(x-\sqrt{11})^2=x^2-2\sqrt{11}x+11$; б) $(-x-\sqrt{11})^2=x^2+2\sqrt{11}x+11$; в) $(-x+\sqrt{11})^2=x^2-2\sqrt{11}x+11$; г) $(x+\sqrt{11})^2=x^2+2\sqrt{11}x+11$; д) $(\sqrt{11}-x)^2=11-2\sqrt{11}x+x^2$; е) $(\sqrt{11}+x)^2=11+2\sqrt{11}x+x^2$. **8.** а) И; б) Л; в) Л; г) И. **15.** а) 10; б) $8\sqrt{10}+18$. **18.** а) $(120+40\sqrt{5})$ см^2; б) $(24+6\sqrt{15})$ см^2; в) $(645-100\sqrt{5})$ см^2; г) $(10\,200-1\,000\sqrt{8})$ см^2. **19.** а) 44 см^2; б) 90 см^2. **31.** б) 0, 1 или 4. **32.** а) $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$. **38.** а) 2; б) 2.

§3. **1.** а) $(x-5)^2$; б) $(4a-1)^2$; в) $(6ab+1)^2$; г) $(x+8)^2$; д) $(8xy-1)^2$; е) $(1+9x)^2$. **2.** а) И; б) И; в) Л; г) Л. **4.** а) $(1+x)^3$; б) $(4a+b)^3$; в) $(10+t)^3$; г) $(x+2y)^3$. **5.** а) $13(2xy-3z)$; б) $-11xy(11x-y)$; в) $2{,}5a^3b^2(5-a)$; г) $\sqrt{2}t(2t-5)$. **6.** а) $a^3(6+a^2b)(36-6a^2b+a^4b^2)$; б) $x^6(5+x^2y)(25-5x^2y+x^4y^2)$; в) $t^3(3+z)(9-3z+z^2)$. **7.** а) $a^3(b-a)(b^2+ab+a^2)$; б) $t^3(t^4-2z)(t^8+2zt^4+4z^2)$; в) $x^3y^3(x-y)(x^2+xy+y^2)$. **8.** а) $(a-\sqrt{7})(a+\sqrt{7})(a+\sqrt{5})$; б) $(xy-2)(3x-y)$. **9.** а) $4tz$; б) $a(a-b)(a+b)$; в) $(x^2+5)(x+1)(x-1)$; г) $(x-y)^2(x+y)^2$. **10.** а) $(x-3)(x-1)$; б) $(x+6)(x+4)$; в) $a(a-2b-3)$; г) $a^2(b-2)(b-3)$. **13.** 5. **14.** а) $13=7^2-6^2$. **15.** а) 0; б) 4; в) 0; г) –5. **17.** а) $x^{-3}(3+4x^{-1}y)(9-12x^{-1}y+16x^{-2}y^2)$; б) $t^3(8t^3+0{,}1z^2)(64t^6-0{,}8t^3z^2+0{,}01z^4)$. **18.** а) $t^3z^{-9}(2t^2z-1)(4t^6z^2+2t^3z+1)$; б) $a^{15}(9a^2b^3-0{,}2)(81a^4b^6+1{,}8a^2b^3+0{,}04)$. **19.** 11 и 12. **22.** а) $(t^2+t+1)^2$; б) $(x^2+3x+1)^2$.

§4. **1.** а) Да; б) нет; в) да; г) нет. **4.** а) $m-n$; б) $5(x-2)$; в) $5(a-1)$; г) $4m-n$. **5.** а) 10; б) $2mn+m^2+8$; в) $-2a-10b$; г) $4t+1$. **7.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **8.** а) $2x^2-21xy-2y^2$; б) m^2-9n^2; в) $5x^2+24x+17$; г) $2(t^2+1)$; д) $3x^2-16$; е) $3z-7$. **9.** а) 1) $a\in\mathbb{R}\setminus\{-8\}$; 2) $E(x)=a-8$; б) 1) $x\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$; 2) $E(x)=x+5$; в) 1) $t\in\mathbb{R}\setminus\{\pm10\}$; 2) $E(t)=\dfrac{2}{t+10}$. **11.** а) $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$; б) $E(x)=\dfrac{a-c}{x-2}$.

Упражнения и задачи на повторение

1. а) $7{,}5xy+25$; б) $14{,}75a^2b^3-3{,}6ab-0{,}7$; в) $-5a^2-28a-15$. **2.** а) И; б) Л; в) Л. **4.** а) 1; б) 8. **5.** а) $(x+5)(x-5)$; б) $(2+9t)(2-9t)$; в) $(2+a)(4-2a+a^2)$; г) $(c+2x)(c^2-2xc+4x^2)$. **6.** а) a^9-1; б) m^3-1. **8.** а) $S=\left\{-\dfrac{5}{2};\,\dfrac{5}{2}\right\}$; б) $S=\{-8;\,8\}$; в) $S=\{-0{,}6;\,0{,}6\}$; г) $S=\{-10;\,10\}$. **15.** а) $(a-b)(1-a-b)$; б) $(x+y)(x-y-1)$; в) $(x+y)(1-x^2+xy-y^2)$; г) $(a-b)(a^2+ab+b^2-1)$. **16.** а) $\dfrac{(x-1)^2}{x^3+1}$; б) $-\dfrac{x}{x^2+x+1}$. **17.** а) $(3x+1)(21x^2-6x+1)$; б) $(t+1)\left(\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{2}t+1\right)$; в) $-z(z+2)(z^2+z+1)(z^2+3z+3)$. **23.** $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+(y-2)^2+(\sqrt{3})^2$. **24.** $12\,098^3$.

Глава 3. Уравнения и неравенства. Системы

§1. **5.** а) $S=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$; б) $S=\{5\}$; в) $S=\{5\}$; г) $S=\{10{,}5\}$. **6.** а) $S=\{2\sqrt{3}\}$; б) $S=\varnothing$. **7.** а) $S=\{1{,}2\}$; б) $S=\varnothing$. **8.** а) $x=10$; б) $x=3$; в) $x=35$. **11.** $x=7$. **12.** $y=3$. **13.** а) $S=\{5\}$; б) $S=\{2{,}5\}$; в) $S=\{0\}$; г) $S=\{-3\}$. **16.** а) $S=\{-4;\,4\}$; б) $S=\{-7;\,7\}$; в) $S=\{3\}$; г) $S=\varnothing$. **17.** 2 кг. **18.** 4 км/ч. **19.** а) $S=\{-2;\,5\}$; б) $S=\{3;\,4\}$; в) $S=\left\{\dfrac{2}{3};\,2\right\}$; г) $S=[11;\,+\infty)$. **20.** 16 км/ч, 20 км/ч; 12 км. **21.** 350 леев.

§2. **4.** а) $y=-2x+5$; б) $x=-0{,}5y+2{,}5$. **6.** $y=-0{,}2$. **8.** а) Нет; б) нет; в) да; г) нет. **9.** а) $S=\{(4;2)\}$; б) $S=\{(0;4)\}$; в) $S=\{(4;2)\}$; г) $S=\{(5;1)\}$. **10.** а) $S=\{(2;9)\}$; б) $S=\{(1;3)\}$; в) $S=\{(2;7)\}$; г) $S=\{(5;2)\}$. **11.** а) $S=\{(3;7)\}$; б) $S=\{(2;5)\}$; в) $S=\{(2;0)\}$; г) $S=\varnothing$. **13.** $b=3$. **14.** $a=3$. **17.** а) $S=\{(3;2)\}$; б) $S=\{(6;1)\}$; в) $S=\{(0{,}2;0{,}4)\}$; г) $S=\{(6;12)\}$. **19.** 1,6 кг риса; 2,4 кг пшена. **20.** 35 лет; 9 лет. **21.** 6 комнат с 2 кроватями; 10 комнат с 3 кроватями. **22.** По 600 леев. **23.** 8 миллионов леев; 5 миллионов леев. **24.** а) 256 леев 50 банов; б) 313,5 лея. **25.** а) $S=\{(2;3)\}$; б) $S=\{(-2;4)\}$. **26.** $m=3$. **27.** $a=-3$. **28.** Направление BC – 24 машины; направление BD – 12 машин; направление DE – 14 машин; направление CE – 22 машины. **29.** а) 8 миллионов леев; 5 миллионов леев; б) 14 миллионов леев; 12 миллионов леев. **30.** 10 л 20-процентного раствора; 20 л 50-процентного раствора.

§3. **2.** а) $[-4{,}5;\sqrt{5})$; $(0;2)$; г) $(\sqrt{7};2013)$; $\{15\}$. **6.** а) $\{-1;0\}$; б) $\{1;2;3;4\}$; в) $\{2;3\}$. **9.** а) $S=[3;+\infty)$; б) $S=(-\infty;10)$; в) $S=\left(-\infty;-\frac{3}{7}\right]$; г) $S=[-9;+\infty)$. **11.** а) $S=(-\infty;-3)$; б) $S=\left[-\frac{6}{11};+\infty\right)$; в) $S=\left(-\infty;-\frac{5}{9}\right]$; г) $S=\varnothing$; д) $S=(3;6]$. **12.** в) $[-1{,}7;0)\cup(-1;\sqrt{7}]$; г) $[-\sqrt{11};-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{2};\sqrt{21}]$. **13.** в) $A\cup B=\mathbb{Z}$; $A\cap B=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$; $A\setminus B=\mathbb{Z}\setminus\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$; $B\setminus A=B\setminus\mathbb{Z}=[-4,5)\setminus\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$. **17.** а) $S=\left[1\frac{5}{24};+\infty\right)$; б) $S=\left(-\infty;-\frac{3}{11}\right)$; в) $S=\left(2\frac{2}{3};+\infty\right)$. **18.** а) $x\in\left(-\infty;-\frac{13}{15}\right]$; б) $x\in(-\infty;1{,}2)$. **19.** а) $y\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$; б) $y\in\left(-\infty;72\frac{2}{3}\right]$; в) $y\in\left[-119\frac{1}{3};+\infty\right)$. **20.** 0. **21.** а) $x\in[1{,}6;+\infty)$; б) $x\in(3{,}75;+\infty)$. **22.** а) $S=\varnothing$; б) $S=(-24;-1)$; в) $S=\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$; г) $S=\left(-\frac{1}{5};5\right)$. **23.** а) $x\in\varnothing$; б) $x\in\left[-4;\frac{1}{4}\right)$. **24.** г) *Указание*. Проанализируйте случаи: $a<b$, $a=b$ и $a>b$. **25.** а) $a\in(-\infty;0)$; б) $a\in(0;+\infty)$; в) $a\in(0;+\infty)$; г) $a\in(-\infty;0)$. **26.** $5\pi<l<5{,}2\pi$. **29.** а) $S=(-\infty;4]$; б) $S=(-\infty;-3)$; в) $S=(-\infty;1{,}6)$. **30.** 1) $a\in(2;+\infty)$; 2) $a=2$; 3) $a\in(-\infty;2)$; 4) $a\in\varnothing$. **31.** а) $S=[-2;-1)$; б) $S=(-\infty;-3)\cup(3;4]$; в) $S=[-7;-5)\cup(5;7]$. **32.** Больше 21 л, но меньше 28,75 л. *Указание*. Чтобы найти температуру разбавленной воды, воспользуйтесь формулой $t=\dfrac{V_1\cdot t_1+V_2\cdot t_2}{V_1+V_2}$.

Упражнения и задачи на повторение

2. а) 3; б) 5; в) 1; г) –1; д) –1; 0; е) –1. **3.** а) $\mathbb{R}\setminus\{1\}$; б) $\mathbb{R}$; в) $\mathbb{R}_+$; г) $\mathbb{R}$. **4.** а) $S=\varnothing$; б) $S=\{0{,}2\sqrt{5}\}$. **5.** а) $S=\{10\}$; б) $S=\{10\}$. **6.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **9.** а) Нет; б) да; в) нет; г) нет. **10.** а) $S=\left(\frac{1}{6};\frac{1}{6}\right)$; б) $S=\varnothing$; в) $S=(2;-1)$. **12.** а) Нет; б) да. **15.** а) –2, –1, 0; б) 0, 1, 2; в) 2, 3. **17.** а) $S=(1{,}5;+\infty)$; б) $S=(-\infty;2]$; в) $S=(-\infty;-3)$; г) $S=[0{,}5;+\infty)$; д) $S=(-2{,}4;+\infty)$; е) $S=(-0{,}1\sqrt{10};+\infty)$. **18.** а) –2; б) 3, 6; в) 1, 3, 6. **19.** а) $S=[-2,4)$; б) $S=(5;+\infty)$; в) $S=(-\infty;-2)$. **20.** $t=3$. **21.** а) $S=\{3\}$; б) $S=\{6\}$; в) $S=\{-8{,}2\}$; г) $S=\left\{1\frac{11}{38}\right\}$. **22.** а) Да; б) да; в) нет. **23.** а) $S=\{-5;5\}$; б) $S=\{-3;3\}$; в) $S=\{-2;2\}$; г) $S=\varnothing$. **25.** а) $S=\{(2;2)\}$; б) $S=\{(1;5)\}$; в) $S=\{(1;0)\}$. **26.** $y=3$. **27.** $x=4{,}5$. **29.** 18. **31.** $S=(-\infty;0{,}9]$. **32.** а) $S=[-1{,}5;2]$; б) $S=\left[\frac{1}{4};\frac{7}{4}\right)$. **33.** $x\in[-2{,}8;5)$. **35.** а) $S=\left(-5;2\frac{16}{17}\right]$; б) $S=\varnothing$. **36.** а) $S=\left[\frac{1}{3};1{,}5\right)$; б) $S=\left[\frac{1}{6};+\infty\right)$; в) $S=[-0{,}25;12{,}5)$. **37.** 12 см. **38.** 16 мужчин, 32 женщины. **39.** У Даны 7 конфет, у Лены 5 конфет. **40.** $V_{\text{моторной лодки}}$ = 18 км/ч; $V_{\text{течения реки}}$ = 2 км/ч. **41.** Скорость первого велосипедиста – 14 км/ч, скорость второго – 10 км/ч. **42.** Расстояние – 1080 км, скорость самолета – 228 км/ч. **43.** а) 12 велосипедов, 8 автомобилей; б) 2-местных номеров – 20, 3-местных номеров – 34. **44.** $A\cap B=\{0,1,2,3,4,5\}$. **45.** $S=\{-6\}$. **46.** $S=\mathbb{R}$. **47.** $m=-\frac{1}{3}$. **48.** Сметана – 210 г, мука – 390 г, сахар – 170 г, масло – 30 г. **49.** 11 км. **50.** Не меньше $\frac{2}{3}$ кг и не больше $2\frac{4}{5}$ кг.

Глава 4. Функции. Последовательности

§1. **2.** б) $\{2\}$; в) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$. **3.** $s(t)=80t$. **4.** $A(x)=8x$. **5.** б) 2) $D(f)=\mathbb{R}$; $E(f)=[0,+\infty)$. **7.** а) $A(2; 3)$, $B(-1; 4)$, $C(4; 0)$, $D(3; -1)$, $E(-2; -2)$. **8.** б) 1) а) ± 2; б) $\pm\sqrt{2}$; в) ± 3. **9.** 1) а) $A\notin G_f$; 2) а) $O\in G_f$; 3) а) $B\notin G_f$. **11.** а) $E(f)=\left\{-\frac{3}{4}; -1; -\frac{3}{2}; -3; 3; \frac{3}{2}; 1; \frac{3}{4}\right\}$. **12.** б) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$; г) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **16.** а) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{-2; 6\}$; б) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. **17.** а) -2; б) 2.

§2. **1.** а) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2{,}5$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-5$; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x-1$. **3.** а) 2; б) -1; в) $-1{,}5$; г) 0; д) 0; е) 10. **4.** в) II и IV; г) I и III. **5.** а) $\frac{1}{10}$; б) $-\sqrt{3}$; в) 2,1; г) $0{,}5\sqrt{2}$. **6.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **8.** а) Острый; б) тупой; в) острый; г) тупой. **9.** Задает функцию, но не I степени. **10.** Прямая пропорциональность. **12.** а) $R(x)=50-9{,}5x$; б) $D(R)=\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. **13.** а) 1) $\frac{1}{5}$; 3) $f(x)>0$ при $x\in\left(-\infty; \frac{1}{5}\right)$; $f(x)<0$ при $x\in\left(\frac{1}{5}; +\infty\right)$; 4) тупой; 5) не является строго возрастающей. **14.** б) 1) 0; 3) $g(x)>0$ при $x\in(-\infty; 0)$; $g(x)<0$ при $x\in(0; +\infty)$; 4) тупой; 5) не является строго возрастающей. **15.** а) $f(x)=-1{,}5x+3$. **16.** б) $f(x)=-0{,}2x$. **19.** $f(x)=x+4$.

§3. **1.** $f(x)=\frac{1}{x}$; $f(x)=\frac{5}{x}$; $f(x)=-\frac{7}{x}$. **4.** а) Л; б) И; в) Л; г) Л; д) Л; е) И. **5.** а) II и IV; б) I и III. **6.** б) 1) Возрастающая; 2) $f(x)>0$ при $x\in(-\infty; 0)$; $f(x)<0$ при $x\in(0; +\infty)$; 3) II и IV. **8.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **10.** а) $f(x)=-\frac{36}{x}$; б) $f(x)=\frac{32}{x}$.

§4. **1.** $x\in\left\{2{,}25; \frac{100}{9}; 25; 49; 65{,}61\right\}$. **3.** а) Л; б) И; в) Л; г) Л; д) И. **4.** а) Да; б) да; в) да; г) нет. **6.** а) 7; б) 0,2; в) 11; г) 25. **7.** $x\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 99\}$. **11.** а) $S=\{4\}$; б) $S=\{4\}$; в) $S=\{4\}$; г) $S=\varnothing$.

§5. **1.** 1, 3, 5, 7, 9. **2.** 0, 3, 6, 9, 12. **3.** $\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}$. **4.** а) 2, -1, -4, -7, -10; б) 0, 2, 6, 12, 20; в) 1, $\frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \frac{5}{3}$; г) -3, $+3$, -3, $+3$, -3. **5.** а) x_{n-1}, x_n; б) x_{n+2}, x_{n+3}. **6.** $c_3=\frac{3}{4}$, $c_7=\frac{3}{8}$, $c_{100}=\frac{3}{101}$. **8.** 2, 7, 22, 67, 202. **9.** а) 7, 15, 27, 35, 39. **10.** а) -2, $+2$, -2, $+2$, -2; б) 0, -1, -2, -3, -4. **11.** б) $b_3=\frac{8}{7}$, $b_7=\frac{128}{15}$, $b_{12}=\frac{4096}{25}$. **12.** в). **13.** а) Да; б) да; в) нет. **14.** 4 отрицательных члена. **15.** в) 1, 1, 2, 3, 5; г) 3, 1, -3, -11, -27. **19.** а) $a_1=5$, $a_{n+1}=(-1)^{n+1}a_n$, $n\in\mathbb{N}^*$. **20.** $c_n=(2n-1)^2$, $n\in\mathbb{N}^*$. **22.** Да.

Упражнения и задачи на повторение

4. б) $f(1)=f(-2)=f(5)=f(10)=2{,}(3)$; г) $f(1)=1$; $f(-2)$ не существует; $f(5)=\sqrt{5}$; $f(0{,}1)=\sqrt{0{,}1}$. **5.** а) И; б) Л; в) Л; г) Л. **6.** а) $D(f)=\mathbb{R}_+$; б) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{3\}$; в) $D(f)=\mathbb{R}$; г) $D(f)=[2,+\infty)$; д) $D(f)=\mathbb{R}_+^*$; е) $D(f)=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$. **7.** а) 12; б) -50; в) $-\frac{8}{11}$; г) 10000. **8.** 2, 1, 4, 2, 8. **9.** а) -1, 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26. **10.** 17. **12.** $m=4n$. а) 400; б) $D(f)=\mathbb{N}$, $E(f)=\{0, 4, 8, 16, 32, ...\}$. **16.** а) 1) Например, 2; 2) например, -3; б) 1) например, $\sqrt{2}$; 2) например, $-1{,}2$; в) 1) например, 5; 2) например, -8; е) 1) например, -2; 2) например, 7. **18.** а) 1) Например, 3; 2) например, -5; г) 1) например, -3; 2) например, 5. **19.** а) 5; б) 10; в) 12. **20.** а) $x=y=\frac{1}{4}$; б) не имеет; в) $x=y=0$; г) $x=y=-\sqrt{5}$. **22.** $x_9=-45$. **23.** Начиная с номера 21. **24.** а) 64; б) 6. **25.** Не принадлежит. **26.** а) $f(f(-2))=20$; $f(f(f(0)))=7$; б) $x=0{,}25$.

Глава 5. Уравнения II степени с одним неизвестным

§1. **2.** б) Первый коэффициент $-0{,}7$; второй коэффициент -3; свободный член 0,5. д) Первый коэффициент 1; второй коэффициент 0; свободный член 0. е) Первый коэффициент $\sqrt{2}$; второй коэффициент $-\sqrt{5}$; свободный член 0. **3.** б) $a=-0{,}5$; $b=-1$; $c=4$; $p=2$; $q=-8$. **8.** а) $2x^2-2x+1=0$; б) $2x^2+(2\sqrt{2}-10)x-1=0$; в) $x^2-10x+1=0$; г) $2x^2+30x-2=0$. **9.** а) Например, $-x^2+2x-1=0$. в) Например, $m^2-2m=0$. г) Например, $-2z^2-5=0$. **10.** а) $x^2+0{,}5x-3=0$; б) $x^2+3x+2=0$; в) $x^2+0x+0{,}25=0$; г) $x^2+\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}=0$. **13.** а) $S=\{1, 3\}$; б) $S=\{-3; -1\}$; в) $S=\{1; 4\}$; г) $S=\{-8; -4\}$. **14.** 11, 12.

§2. **3.** а) $S=\{-3;\ 3\}$; б) $S=\{-11;\ 11\}$; в) $S=\{-5;\ 5\}$; г) $S=\varnothing$. **7.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 0. **8.** а) $S=\{-3,\ 3\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\left\{0;\ \frac{2}{5}\right\}$; г) $S=\{0;\ 2\}$; д) $S=\{-1\}$; е) $S=\varnothing$. **9.** а) $x_1=0,\ x_2=3{,}5$; б) $x_1=0,\ x_2=\frac{1}{6}$; в) $x_1=-1,\ x_2=1$; г) $x_1=0$. **10.** а) $S=\{1\}$; б) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; в) $S=\{3\}$; г) $S=\left\{-\frac{1}{5}\right\}$. **11.** а) $x_1=0,\ x_2=-\frac{1}{3}$; б) $x_1=\frac{1}{2}$. **12.** а) $S=\{-\sqrt{a},\ \sqrt{a}\ |\ a\in\mathbb{R}_+\}$; б) $S=\{a\,|\,a\in\mathbb{R}\}$; в) $S=\{\pm\sqrt{-2b}\,|\,b\in\mathbb{R}_-\}$; г) $S=\varnothing$.

§3. **2.** а) $S=\{-2;\ \sqrt{7}\}$; б) $S=\{\sqrt{15};\ 4\}$; в) $S=\left\{-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right\}$; г) $S=\{-4;\ 3\}$. **3.** а) $x_1=-1,\ x_2=2$; б) $t_1=3,\ t_2=7$; в) $z_1=-7{,}8,\ z_2=-1{,}2$; г) $x_1=-3,\ x_2=1$. **4.** а) $S=\left\{-\frac{2}{3};\ \frac{1}{2}\right\}$; б) $S=\{-\sqrt{2};\ \sqrt{11}\}$; в) $S=\{\sqrt{7};\ \sqrt{10}\}$; г) $S=\{\sqrt{3};\ \sqrt{5}\}$. **5.** а) $(x+10)(x+6)=0$; б) $(x-3{,}5)(x-1{,}5)=0$; в) $(x-\sqrt{21})[x-(\sqrt{21}+1)]=0$; г) $2(x-4{,}5)(x-4)=0$. **6.** а) $S=\{3;\ 7\}$; б) $S=\{-2;\ -0{,}5\}$; в) $S=\left\{-4;\ -3\frac{24}{25}\right\}$. **7.** а) $x_1=-2,\ x_2=1$; б) $x_1=-10,\ x_2=10$; в) $x_1=-5,\ x_2=-4$; г) $x_1=2,\ x_2=2\frac{1}{6}$. **8.** а) –14; б) 0; в) –70; г) 12. **9.** а) –30; б) 5; в) 25; г) 15. **10.** а) $S=\{-7;\ 3\}$; б) $S=\left\{-\frac{1}{5};\ \frac{3}{5}\right\}$; в) $S=\left\{-\frac{2}{7};\ \frac{4}{7}\right\}$; г) $S=\left\{-\sqrt{3};\ \frac{5\sqrt{3}}{3}\right\}$. **11.** а) Сумма равна 0, произведение равно $-\frac{4+\sqrt{7}}{2}$; в) сумма равна $-\frac{2}{\sqrt{11}}$, произведение равно $-10\frac{10}{11}$; г) сумма равна $\frac{1}{\sqrt{5}}$, произведение равно $-31\frac{1}{5}$.

§4. **2.** а) $S=\{-4;\ 2\}$; б) $S=\{-2;\ 14\}$; в) $S=\{-1;\ 3\}$; г) $S=\left\{-3;\ \frac{7}{3}\right\}$. **3.** а) 36; б) 256; в) 256; г) 2304; д) 1; е) –4. **4.** а) –; б) +; в) –; г) +. **6.** а) $S=\{-4;\ 2\}$; б) $S=\{-2;\ 14\}$; в) $S=\{-1;\ 3\}$; г) $S=\left\{-3;\ \frac{7}{3}\right\}$; д) $S=\left\{\frac{1}{5}\right\}$; е) $S=\{4\}$. **8.** а) $S=\left\{-1;\ -\frac{3}{4}\right\}$; б) $S=\left\{-3\frac{1}{8};\ 3\right\}$; в) $S=\{-8;\ 7\}$; г) $S=\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$; д) $S=\{-7;\ 8\}$; е) $S=\left\{-1;\ 4\frac{2}{3}\right\}$. **9.** а) $x\in\{\pm2{,}5\}$; б) $x\in\varnothing$; в) $x\in\{0;\ 1\}$; г) $x\in\{1\pm\sqrt{2}\}$. **10.** а) $x_1+x_2=2,\ x_1\cdot x_2=-9$; б) $x_1+x_2=1,\ x_1\cdot x_2=-12$; в) $x_1+x_2=\frac{5}{3},\ x_1\cdot x_2=\frac{2}{3}$; г) $x_1+x_2=\frac{5}{2},\ x_1\cdot x_2=-5$. **11.** а) $x=5$; б) $x\in\{2;\ 4\}$; в) $x\in\{\pm1\}$. **12.** а) $x\in\{-5;\ -3\}$; б) $t=2$; в) $z\in\{-1;\ 23\}$. **13.** 16, 17 и 18; –18, –17 и –16. **15.** а) $S=\{-1;\ 23\}$; в) $S=\{-10;\ 8\}$; г) $S=\left\{\frac{10\pm\sqrt{2}}{7}\right\}$; д) $S=\left\{-1;\ 2\frac{7}{15}\right\}$; е) $S=\{2\pm0{,}4\sqrt{30}\}$. **16.** а) $b=-8,\ S=\{-1;\ 5\}$; б) $b=14,\ S=\left\{-1\frac{11}{13};\ 3\right\}$.

§5. **2.** а) 64; б) 64; в) –56; г) –56. **3.** а) $S=\{1;\ 2\}$; б) $S=\{-1;\ -2\}$; в) $S=\left\{\frac{3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$; г) $S=\left\{\frac{-3-\sqrt{17}}{2};\ \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$. **4.** а) $S=\{-8;\ 5\}$; б) $S=\{-6;\ 8\}$; в) $S=\{-11;\ -8\}$. **5.** а) $x_1+x_2=-9,\ x_1\cdot x_2=20$; б) $x_1+x_2=16,\ x_1\cdot x_2=63$; в) $x_1+x_2=1,\ x_1\cdot x_2=56$. **6.** а) Оба решения положительны; б) одно решение положительно, другое – отрицательно; в) оба решения отрицательны. **7.** а) $x_2=-7,\ p=2$. **8.** $x_2=5{,}3,\ c=106$. **9.** а) $S=\{3\pm\sqrt{3}\}$; б) $S=\{-1\pm\sqrt{5}\}$. **10.** $c=-8$.

§6. **1.** а) $x_1=1,\ x_2=5$; б) $x_1=-1$; в) $t_1=-9,\ t_2=1$; г) $z_1=-1,\ z_2=14$. **2.** а) $x_1+x_2=3,\ x_1\cdot x_2=-4$; б) $x_1+x_2=-3,\ x_1\cdot x_2=-4$; в) $x_1+x_2=-6,\ x_1\cdot x_2=5$; г) $x_1+x_2=4,\ x_1\cdot x_2=3$. **3.** а) $x_1+x_2=5,\ x_1\cdot x_2=-10$; б) $x_1+x_2=-11,\ x_1\cdot x_2=-12$; в) $t_1+t_2=-\sqrt{3},\ t_1\cdot t_2=-30$; г) $z_1+z_2=36,\ z_1\cdot z_2=320$. **4.** а) $x_1=7,\ x_2=9$; б) $x_1=-8,\ x_2=6$; в) $t_1=-7,\ t_2=8$; г) $z_1=4,\ z_2=5$. **6.** а) $x_1+x_2=4{,}5,\ x_1\cdot x_2=-5$; б) $x_1+x_2=-\frac{12}{5},\ x_1\cdot x_2=\frac{7}{5}$. **7.** в) $S=\left\{0,\ \frac{12}{7}\right\}$; г) $S=\{\pm4\}$. **9.** б) $S=\varnothing$. **11.** $x_2=-7,\ p=-1$. **12.** $t_2=-3,\ c=-165$. **13.** $c=-12$. **14.** $m=-13$. **15.** а) $S=\{-1\}$; б) $S=\{7\}$. **17.** а) $t_1=\sqrt{5},\ t_2=3$; б) $t_1=-3,\ t_2=n^2$. **18.** $a=-1$ или $a=6$. **19.** $a=-1$ или $a=3$.

§7. **2.** а) x^2+3x+2; б) $6x^2-6x-72$; в) $2t^2-11t+5$; г) $z^2+1{,}5z-1$. **3.** б) $5(2x-1)(2x+1)$; г) $(2x+5)(x-3)$; д) $-8(x-1{,}5)(x+1)$. **4.** а) $(x-2)(3x+7)$; б) $(4-x)(x+1)$; в) $6(3x+7)(x-2)$; е) $(z-2)(3z+10)$. **5.** а) –5; б) –12. **6.** а) 5; б) 9. **8.** $c\in(-\infty;\ 4]$. **9.** $c\in\left\{-3;\ 1\frac{4}{9}\right\}$.

§8. **1.** 8 и 12; –12 и –8. **2.** 26 рядов. **3.** $S=\{-1\}$. **4.** $A\cap B=\{1\}$. **5.** 1 и 3; –3 и –1. **6.** а) 12 м; б) 780 леев; в) 0,48 кг. **7.** 150 см². **8.** а) $\frac{1}{25}$; б) $-\frac{216}{125}$; в) $\frac{61}{25}$; г) $\frac{121}{25}$. **9.** $c=9$. **11.** а) 90 м; б) 108 кг; в) 680,4 лея. **12.** 5 и 15. **13.** а) 36 м и 50 м; б) 172 м. **14.** 12 м и 4 м. **15.** 7 и 8; –8 и –7. **16.** 11 шахматистов. **17.** *Указание:* Примените подстановку $|x|=t$.

Упражнения и задачи на повторение

6. а) 64; б) 4; в) 1; г) 49. **7.** а) $S=\{-3;\ 4\}$; б) $S\in\varnothing$; в) $S\in\varnothing$. **8.** а) $S=\{\pm 7\}$; б) $S=\{\pm 10\}$; в) $S=\left\{-\frac{3}{8};\ 0\right\}$; г) $S\in\varnothing$. **9.** а) $S=\{1;\ 9\}$; б) $S=\{-3;\ 1\}$; в) $S=\{1;\ 7\}$; г) $S=\{-2;\ -0{,}4\}$. **10.** а) $S=\{-7;\ 1\}$; б) $S=\{2;\ 5\}$. **13.** а) $S=\left\{-2;\ \frac{3}{2}\right\}$; б) $S=\left\{-2;\ \frac{2}{3}\right\}$; в) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$. **15.** а) $S=\{-2;\ 2\}$; б) $S=\{0;\ 2{,}5\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\{0\}$. **16.** а) $\Delta=121$, $S=\{-2;\ 9\}$; б) $\Delta=1$, $S=\left\{\frac{2}{3};1\right\}$; в) $\Delta=1$, $S=\left\{1\frac{2}{3};\ 2\right\}$; г) $\Delta=0$, $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **18.** 12, 13 и 14. **19.** 1 или 9. **20.** а) $x=3$; б) $x=10$. **23.** а) $x\approx-0{,}2$ или $x\approx 6{,}2$; б) $x\approx-3{,}7$ или $x\approx-0{,}3$; в) $x\approx-0{,}7$ или $x\approx 2{,}7$. **24.** а) $S=\left\{\frac{2}{3};4\right\}$; б) $S=\{-1;\ 2\}$; в) $S=\left\{-4\frac{1}{4};0\right\}$; г) $S=\left\{\frac{-8-\sqrt{73}}{3};\ \frac{-8+\sqrt{73}}{3}\right\}$; д) $S=\left\{\frac{1}{6};1\right\}$; е) $S=\{10-4\sqrt{10};\ 10+4\sqrt{10}\}$. **27.** а) $(x-7)(x-3)$; б) $(2x-3)(3x-1)$; в) $(x+3)(3x-2)$; г) $(-2x-1)(x-2)$. **28.** 50 см. **29.** 21 ученик. **30.** 1 секунд и 3 секунды. **31.** 30 у.е. **34.** а) $-1{,}006$; б) $-\frac{100}{103}$. **37.** а) $S=\{-1;\ 1\}$; б) $S=\{-1;\ 1\}$; в) $S=\left\{-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$; г) $S=\left\{-\sqrt{3};-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ \sqrt{3}\right\}$. **38.** а) $m=2$, $x_2=3$; б) $m=-27$, $x_2=-\frac{9}{2}$. **39.** а) $m=\pm 6$; б) $m=0$, $m=\frac{4}{9}$; в) $m=\frac{1}{2}$; г) $m=20\pm 6\sqrt{5}$. **41.** а) $S=\{-1\}$; б) $S=\{-3;\ 3\}$; в) $S=\{-5;\ 5\}$; г) $S=\{-3\sqrt{7};\ 7\}$. **42.** а) 169; б) $\frac{13}{14}$; в) 141; г) 113. **43.** а) $a=-12$; б) $a=3$. **44.** 10 команд. **45.** а) $a\in\left(3\frac{1}{8};+\infty\right)$; б) $a\in\left\{-\frac{1}{7};\ 0;\ 1\right\}$.

Геометрия

Глава 1. Повторение и дополнения

§1. **4.** а) 24 дм = 240 см; б) 890 мм = 8,9 дм; в) 7,5 м = 750 см; г) 64900 см = 0,649 км. **9.** 44°, 136°, 136°. **10.** а) 90°, 90°; б) 40°, 50°; в) 18°, 162°; г) 50°, 50°. **11.** а) $2\frac{1}{3}$; б) $\frac{4}{7}$. **12.** а) $\beta=155°$. **13.** а) Да; б) нет; в) да. **15.** а) 62 см; б) $24\sqrt{5}$ см. **16.** а) 2; б) 1; в) 0; г) 0. **18.** а) $\alpha=54°$; б) $\alpha=55°30'$. **19.** 20°, 40°, 120°. **28.** а) $PM=12$ см, $PN=15$ см. **30.** а) 20π см; б) 10π см; в) 24π см; г) 4π см. **31.** В 10 раз. **34.** Равнобедренный треугольник ABC имеет основание BC. 1) Если $\angle B$ равен 60°, то $m(\angle C)=60°$ и $m(\angle A)=60°$. 2) Если $\angle A$ равен 60°, то $m(\angle B)=m(\angle C)=(180°-60°):2=60°$. Таким образом, равнобедренный треугольник, один из углов которого равен 60°, является равносторонним. Наоборот, если ABC равносторонний треугольник, то он является и равнобедренным треугольником с углом 60°. **35.** $18\sqrt{3}$ см. **36.** а) 60°, 60°, 120°, 120°; б) 6 углов 60°. **37.** 36 см². **38.** 80 см. **40.** 15 см.

§2. **2.** а) Л; б) И; в) И; г) Л. **7.** а) Например, $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$, $\sqrt{27}\notin\mathbb{Q}$, но $\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}=9\in\mathbb{Q}$. **15.** И. **16.** *Девять записанных высказываний ложны.* **17.** *Имя твое Правдолюб?* **18.** 18 м.

Глава 2. Четырехугольники. Многоугольники

§1. **3.** а) 2; б) 3; в) 4; г) 7. **4.** а) 720; б) 900°; в) 1080°; г) 1440°. **5.** а) 27,(4) см; б) $35\sqrt{3}$ см. **6.** а) 120°, 80°; б) 70°, 90°. **7.** а) 90° каждый; б) 108° каждый; в) 120° каждый; г) 144° каждый. **8.** Параллельны. **9.** 11 см, 12 см, 13 см, 14 см. **10.** а) Да; б) нет; в) нет. **11.** а) 48°, 72°, 96°, 144°; б) 40°, 60°, 120°, 140°; в) 60°, 80°, 100°, 120°. **12.** а) 162°, 108°, 54°, 36°; б) 180°, 90°, 60°, 30°. **13.** а) 5; б) 9; в) 14; г) 35.

§2. **2.** а) 16 см; б) $30\sqrt{5}$ см. **3.** а) 32,8 см; б) 30,(6) см. **5.** а) И; б) И; в) Л; г) Л. **6.** 35°, 145°, 145°. **7.** 30°, 30°, 150°, 150°. **8.** 80°, 80°, 100°, 100°. **9.** 5 см. **10.** 6 см. **11.** 22 см, 24 см, 26 см, 28 см. **12.** 90 см. **13.** 4,5 см. **14.** 15 см, 20 см. **15.** 48 см^2. **16.** а) $D(6; -2)$; б) $D(5; -8)$; в) $D(1; -4)$.

§3. **2.** а) 90°, 90°, 70°, 110; б) 90°, 90°, 40°, 140°. **3.** а) 80°, 80°, 100°, 100°; б) 110°, 110, 70°, 70°. **4.** а) 6 см; б) $4\sqrt{7}$ см; в) 7,8(3) см. **5.** а) 14 см; б) 10 см. **6.** 20 см, 20 см, 20 см, 40 см. **7.** а) 64 см; б) 74 см. **8.** а) 41 см; б) $7\sqrt{5}$ см. **9.** 20 см. **10.** 12 см и 18 см. **11.** 51 см. **12.** 60° , 60°, 120°, 120°. **14.** 14 см.

§4. **3.** а) $a \approx 128°34'$; б) 140°; в) 144°. **5.** а) 8; б) 5; в) 6. **6.** а) 6; б) 5; в) 11. **7.** а) Правильный шестиугольник; б) правильный восьмиугольник; в) правильный пятиугольник. **8.** 11 см. **9.** а) 30°; б) 60°; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 2.

Упражнения и задачи на повторение

2. а) 5; б) 6; в) 9; г) 15. **3.** а) 9; б) 12; в) 20; г) 17. **4.** а) 105°; б) 80°. **7.** а) $4\sqrt{2}$ см; б) 80 см^2. **8.** $A_2B_2 = 14$ см, $A_3B_3 = 17$ см. **9.** а) $A(-4; -6)$; $B(-3; 2)$; б) $C(-1; -1)$; $D(-5; 1)$. **10.** 96 см^2. **11.** 60 см^2. **12.** а) 50 см^2; б) 48 см^2. **13.** а) 360°; б) 360°; в) 360°. **14.** Параллелограмм.

Глава 3. Подобие треугольников

§1. **1.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **2.** а) Да; б) да.

3. а)

4	6	10	12	9
12	18	30	36	27

; б)

0,2	1	1,8	2	3,2	2,4
1	5	9	10	16	12

. **6.** а) $\frac{AB}{CD} = 0,(5)$; б) $\frac{AC}{AD} = \frac{4}{7}$; в) $\frac{BC}{BD} = 0,4375$; г) $\frac{AD}{AB} = 4,2$.

7. а) 2,(3); б) $\frac{4}{7}$; в) 1,75; г) 0,3. **8.** а) 9,6 см; б) 5 см; в) 0,(3). **10.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$. **11.** $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$. **12.** а) $C(4; 3)$, $D(7; 5)$; б) $O(0; 0)$, $C(3; -1)$. **13.** а) Нет; б) да. **14.** а) 3,04; б) 6,4; в) 2,88. **16.** а) $AC = BD = 1{,}25$ см, $CD = 2{,}5$ см; б) $AC = CD = BD = 2,(6)$ см. **17.** а) 4,5; б) 9,3.

§2. **2.** а) $\Delta ABC \sim \Delta CDE$; б) $\Delta ABC \sim \Delta EDC$. **3.** а) $\Delta AFE \sim \Delta DFB$; б) $\Delta ABF \sim \Delta DEF$, $\Delta BCD \sim \Delta BED$. **4.** а) $m(\angle A) = 55°$, $m(\angle C) = 35°$; б) $m(\angle A) = m(\angle B) = 70°$, $m(\angle C) = 40°$; в) $m(\angle A) = m(\angle B) = m(\angle C) = 60°$. **5.** а) И; б) Л; в) И. **6.** а) 33 см; б) $\sqrt{5}$. **7.** $\Delta AOD \sim \Delta COB$. **8.** $\Delta BMC \sim \Delta ENF$, $\Delta AMB \sim \Delta DNE$. **9.** $\Delta ABC \sim \Delta EDC \sim \Delta DBA \sim \Delta EAD$. **10.** а) 4; б) 7. **11.** а) 67,5 м; б) 80 м. **12.** 12 см, 16 см, 24 см. **13.** а) 10; б) 8. **14.** а) $\Delta AEF \sim \Delta CBD$; б) $\Delta ABC \sim \Delta DFE$; в) $\Delta ADE \sim \Delta BCF$.

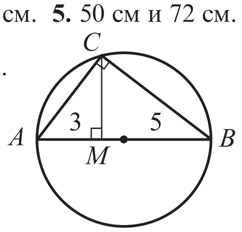
Упражнения и задачи на повторение

3. $MM_1 = 10$ см, $NN_1 = 20$ см, $KK_1 = 30$ см. **4.** а) Одно из решений равно 4 см; б) одно из решений равно 6 см. **5.** $k = 3$. **6.** $m(\angle BAK) = 30°$, $m(\angle AKB) = 74°$. **7.** 15 см. **8.** 10 см. **9.** $k = 2$ или $k = \frac{1}{2}$. **11.** 4 см. **12.** 4 см, 6 см, 9 см и 6 см, 9 см, 13,5 см. **13.** В 9 раз. **14.** 120°.

Глава 4. Метрические отношения в прямоугольном треугольнике

§1. **2.** а) 6 см; б) 12 см; в) $6\sqrt{5}$ см. **3.** а) 12 см; б) 8 см; в) 12,5 см. **4.** а) $6\sqrt{5}$ см и $12\sqrt{5}$ см; б) $4\sqrt{21}$ см и $8\sqrt{7}$ см; в) 3 см и $3\sqrt{2}$ см. **5.** 50 см и 72 см. **6.** 18 см и 98 см.

7. а) *Указание.*



ΔABC – прямоугольный,
$AM = 3$ см,
$MB = 5$ см,
$CM = \sqrt{15}$ см.

10. $5\sqrt{2}$ см. **11.** 12 см. **12.** 8 см. **13.** а) 4,5 см; б) 4,5 см. **14.** $6\sqrt{5}$ см, $12\sqrt{5}$ см.

§2. **1.** а) 26 см; б) 25 см; в) 8 см; г) 6 см. **2.** 34 см. **3.** $\sqrt{7}$ см. **4.** 20 см. **5.** а) $5\sqrt{58}$ см; б) 74 см. **6.** а) $5\sqrt{3}$ см; б) 18 см. **7.** а) 13; б) $\sqrt{10}$; в) $6\sqrt{5}$; г) $5\sqrt{5}$. **8.** а) $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см; б) 2 см. **9.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **10.** 208 см. **11.** 34 см. **12.** $\sqrt{7}$ см. **13.** 50 см. **15.** 40 см.

§3. **1.** а) $\sin\alpha=0{,}8$, $\cos\alpha=0{,}6$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$; б) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg}\alpha=2{,}4$; в) $\sin\alpha=\frac{10}{\sqrt{149}}$, $\cos\alpha=\frac{7}{\sqrt{149}}$, $\mathrm{tg}\alpha=1\frac{3}{7}$, $\mathrm{ctg}\alpha=0{,}7$; г) $\sin\alpha=\frac{\sqrt7}{4}$, $\cos\alpha=0{,}75$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sqrt7}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha=\frac{3\sqrt7}{7}$. **2.** а) $AC=13$, $AB=12$; б) $MK=14$, $MN=7\sqrt3$; в) $FG=1{,}8$, $EG=\frac{9\sqrt{26}}{5}$; г) $QR=8$, $PR=4\sqrt{13}$. **7.** а) 60°; б) 60°. **9.** а) $\sin^2 A+\cos^2 A=1$, $\sin^2 C+\cos^2 C=1$; б) $\frac{\sin A}{\cos A}=\mathrm{tg}A=0{,}75$, $\frac{\sin C}{\cos C}=\mathrm{tg}C=1,(3)$; в) $\frac{\cos A}{\sin A}=\mathrm{ctg}A=1,(3)$, $\frac{\cos C}{\sin C}=\mathrm{ctg}C=0{,}75$; г) $\frac{1}{\cos^2 A}=1+\mathrm{tg}^2A=1{,}5625$, $\frac{1}{\cos^2 C}=1+\mathrm{tg}^2C=2,(7)$; д) $\frac{1}{\sin^2 A}=1+\mathrm{ctg}^2A=2,(7)$, $\frac{1}{\sin^2 C}=1+\mathrm{ctg}^2C=1{,}5625$. **10.** а) $BC=20$ см, $AB=48$ см, $AC=52$ см; б) $AB=7{,}2$ см, $BC=9{,}6$ см, $AC=12$ см; в) $AB=12$ см, $BC=12{,}6$ см, $AC=17{,}4$ см; г) $AB=23{,}4$ см, $BC=8{,}8$ см, $AC=25$ см. **11.** а) И; б) Л; в) И; г) И. **15.** а) $\sin M=0{,}6$, $\cos M=\sin K=0{,}8$, $\mathrm{tg}M=\mathrm{ctg}K=0{,}75$, $\mathrm{ctg}M=\mathrm{tg}K=1,(3)$; б) $\cos M=\sin K=\frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}M=\mathrm{ctg}K=\frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg}M=\mathrm{tg}K=2{,}4$, $\cos K=\frac{5}{13}$; в) $\sin M=\cos K=\frac{5}{13}$, $\cos M=\sin K=\frac{12}{13}$, $\mathrm{tg}M=\mathrm{ctg}K=\frac{5}{12}$, $\mathrm{ctg}M=2{,}4$; г) $\sin M=\cos M=\sin K=\cos K=\frac{\sqrt2}{2}$, $\mathrm{tg}M=\mathrm{tg}K=\mathrm{ctg}K=1$. **16.** а) $\sin 71°\approx0{,}95$; б) $\cos 36°\approx0{,}80$; в) $\mathrm{tg}\,65°\approx2{,}14$; г) $\mathrm{ctg}\,50°\approx0{,}84$. **17.** 1.

Упражнения и задачи на повторение

1. а) F; б) D; в) $[AF]$; г) $[CD]$. **2.** а) 36 см; б) 42 см. **3.** а) $8\sqrt{13}$ см и $12\sqrt{13}$ см; б) $\frac{3\sqrt2}{2}$ см и 0,75 см. **4.** 10 см и 24 см. **5.** 5 см и 6 см. **6.** $9\sqrt3$ см. **7.** а) $9\sqrt3$ м; б) $6\sqrt5$ м. **8.** $3\sqrt3$ см. **9.** $6\sqrt3$. **10.** а) 20 см; б) 14 см. **11.** 15 см. **12.** $\frac{9\sqrt{11}}{5}$ см. **13.** $2\sqrt5$ см и $4\sqrt5$ см. **14.** $BD=4\sqrt5$ см, $DC=2\sqrt{29}$ см. **15.** 12. **16.** 1 случай: 30 см, $30\sqrt3$ см; 2 случай: $60+30\sqrt3$ см и $90+60\sqrt3$ см; 3 случай: $60-30\sqrt3$ см и $90-60\sqrt3$ см. **17.** 20.

Глава 5. Векторы на плоскости

§1. **1.** а) $A_1(-2;7)$, $B_1(-5;10)$, $C_1(1;-1)$; б) $A_1(-1;14)$, $B_1(-6;12)$, $C_1(-11;0)$; в) $A_1(-3;9)$, $B_1(1;-4)$, $C_1(-14;12)$. **3.** а) $x_1=x+3$, $y_1=y-3$; б) $x_1=x-5$, $y_1=y+4$; в) $x_1=x+1$, $y_1=y-6$. **4.** а) $M_1(-2;7)$; б) $N_1(1;4)$; в) $K_1(-2;2)$; г) $P_1(-6;10)$. **5.** а) $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{EN}$, $\overrightarrow{PE}$, $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{KC}$; б) $\overrightarrow{ME}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{EK}$, $\overrightarrow{PD}$; в) $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PD}$, $\overrightarrow{EC}$; г) $\overrightarrow{KN}$, $\overrightarrow{PM}$, $\overrightarrow{EB}$. **8.** а) (3; 4); б) (5; 12); в) (11; 60); г) (35; 12). **9.** а) 5; б) 13; в) 61; г) 37. **10.** а) 13; б) 17; в) 25; г) 41. **11.** а) $A(-2;9)$, $B(1;8)$, $C(-3;8)$; б) $A(1;17)$, $B(6;3)$, $C(4;7)$; в) $A(-2;4)$, $B(1;15)$, $C(-11;13)$. **12.** а) Существует; б) не существует; в) существует. **13.** а) $C(-2;4)$; б) $C(2;-2)$; в) $C(4;-4)$. **14.** а) $m=5$, $n=3$; б) $m=-3$, $n=-2$; в) $m=2$, $n=11$. **15.** а) $(8;8\sqrt3)$; б) $(8\sqrt3;8)$; в) $(8\sqrt2;8\sqrt2)$. **16.** а) $x_1=x+a$, $y_1=y-2$, где $a\in\mathbb{R}$; б) $x_1=x-6$, $y_1=y+a$, где $a\in\mathbb{R}$. **17.** а) $D(3;4)$; б) $D(9;7)$; в) $D(-15;-7)$. **18.** *Указание*. Докажите, что $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$.

§2. **1.** а) $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DA}$, $\vec0$. **2.** а) $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AO}$; б) $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{OD}$; в) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$. **3.** а) $(-2{,}2;-6+\sqrt5)$; б) $(3{,}8;-6-\sqrt5)$; в) $(-6;2\sqrt5)$; г) $(0{,}4;-3)$; д) $(-10{,}6;3\sqrt5+12)$. **4.** а) $\left(12\frac{2}{3};7\right)$; б) $\left(11\frac{1}{3};25\right)$; в) (3; 4); г) (2; –27); д) (28; –22). **5.** а) $\sqrt{34}$; б) $\sqrt{41}$; в) $\sqrt{117}$; г) $7\sqrt5$. **9.** а) 5; б) 4; в) 9; г) 0. **10.** а) –3; б) 24; в) –9; г) –3. **11.** а) $\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{DA}$. **12.** $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$. **13.** а) (8; –1); б) (–5; –2); в) (–4; 5); г) (7; 18). **14.** а) Да; б) нет; в) да; г) да. **15.** 9. **16.** *Указание*. Докажите, что направления векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярные. **23.** а) $\vec x(1;2)$, $\vec y(-3;4)$; б) $\vec x(2;3)$, $\vec y(5;-4)$; в) $\vec x(0;-1)$, $\vec y(6;-2)$. **25.** $2AB^2+2AD^2=AC^2+BD^2$.

Упражнения и задачи на повторение

4. а) 5; б) 6; в) 5; г) $2\sqrt5$. **6.** $D(3;1)$. **7.** а) $\sqrt2$; б) 26; в) 15; г) 82. **9.** а) $A_1(4;2)$; б) $B_1(3;7)$; в) $C_1(-1;5)$; г) $D_1(4;-4)$. **15.** а) 24; б) 7,5; в) 12; г) 6. **19.** а) $\frac{2}{3}$; б) 0; в) 7,5. **20.** б) 12. **21.** $C(2;0)$. **22.** а) Равнобедренный; б) равносторонний. **23.** а) Прямоугольник; б) параллелограмм.

Содержание

Алгебра

Геометрия