



БИБЛИОТЕЧКА УЧИТЕЛЯ

КАРТОЧКИ ПО



10-11
классы

тригонометрии

Макеева А. В.

КАРТОЧКИ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

*Дидактический материал
для учителей*

10-11 классы

Саратов
ОАО «Издательство «Лицей»
2002

УДК 372.8
ББК 74.262.21
М156

Рецензент: старший преподаватель кафедры математики
и методики преподавания педагогического
института СГУ *Т. В. Кастаева*.

Макеева А. В.

М156 Карточки по тригонометрии. 10—11 классы: Дидактический материал для учителей. — Саратов: «Лицей», 2002. — 128 с. — («Библиотечка учителя»).

ISBN 5-8053-0156-3

Учебное пособие предназначено для организации самостоятельной работы с учащимися 10—11 классов по курсу тригонометрии. Этот набор карточек, сгруппированных по темам, рассчитан на индивидуальную работу ученика. Пособие предназначено для учителей математики.

УДК 372.8
ББК 74.262.21

ISBN 5-8053-0156-3

© Издательство «Лицей», 2002

Тригонометрические функции произвольного угла

В а р и а н т № 1

1. Определить знаки тригонометрических функций:

а) $\sin(\pi + \alpha)$;

б) $\cos(1,5\pi + \alpha)$;

в) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Сравнить по величине $\sin 100^\circ$ и $\sin 130^\circ$.

3. Вычислить:
$$\frac{\left(\sin \frac{\pi}{4} + \cos 1,5\pi\right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} - \operatorname{ctg} 0,5\pi}$$
.

4. Найти в градусах: $\frac{2}{3}\pi$.

В а р и а н т № 2

1. Сравнить с нулем значение выражения $\cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$, если

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

2. Определить знак разности: $\cos 200^\circ - \cos 210^\circ$.

3. Вычислить:
$$\frac{(\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \sin 2\beta) \cdot 2\cos \alpha}{\cos 3\alpha + \sin 9\beta}$$
, при $\alpha = 60^\circ$ и $\beta = 30^\circ$.

4. Найти в радианах угол 20° .

В а р и а н т № 3

1. Определить знак:

а) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$;

б) $\sin(1,5\pi - \alpha)$;

в) $\operatorname{ctg}(\pi + \alpha)$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

2. Сравнить по величине $\cos 300^\circ$ и $\cos 320^\circ$.

3. Вычислить: $\sin\frac{\pi}{2} + \cos 0^\circ - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}$.

4. Выразить в радианах угол в $98^\circ 40'$.

В а р и а н т № 4

1. Найти знак выражения: $\frac{\sin 100^\circ \cdot \cos 300^\circ}{\operatorname{tg} 200^\circ \cdot \operatorname{ctg} 150^\circ}$.

2. Определить знак:

а) $\sin(360^\circ - \alpha)$;

б) $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha)$;

в) $\cos(270^\circ + \alpha)$, если $0 < \alpha < 90^\circ$.

3. Вычислить: $\frac{2 \operatorname{tg}\frac{\pi}{2} - \sin 1,5\pi}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} 2\pi\right) \cdot \cos\frac{\pi}{6}}$.

4. Выразить в градусах 2,2141 радиан.

В а р и а н т № 5

1. Определите знак, если $0^\circ < \alpha < 90^\circ$:

а) $\sin(270^\circ - \alpha)$;

б) $\cos(180^\circ - \alpha)$;

в) $\operatorname{tg}(270^\circ - \alpha)$.

2. Сравнить по величине $\operatorname{tg} 100^\circ$ и $\operatorname{tg} 110^\circ$.

3. Вычислить:
$$\frac{\left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} + \cos \frac{\pi}{6}\right) \cdot 2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{\cos \pi + \sin 1,5\pi}$$

4. Выразить в градусах $\frac{5}{6}\pi$.

В а р и а н т № 6 *

1. Определить знак выражения: $\frac{\operatorname{tg} 150^\circ \cdot \sin 216^\circ}{\cos 320^\circ \cdot \operatorname{ctg} 130^\circ}$.

2. Вычислить: $3\cos(150^\circ + \alpha) - 2\sin(180^\circ + 3\alpha) + 5\operatorname{tg} 6\alpha + 2\sin \alpha$,
при $\alpha = 30^\circ$.

3. Вычислить:
$$\frac{5\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{3\pi}{2}}$$

4. Два угла треугольника содержат 0,9303 радиан и 1,0719 радиан. Сколько градусов содержит третий угол?

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

В а р и а н т № 1

1. Дано: $\sin \alpha = -0,6$; $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$. Вычислить $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

2. Упростить выражения:

а) $1 - \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$; б) $\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$.

3. Доказать тождество: $\frac{1}{\cos \beta} - \cos \beta = \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \beta$.

4*. Существует ли такое значение α , при котором:

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \text{ и } \cos \alpha = \frac{1 - \sqrt{3}}{2} ? \text{ (Ответ поясните.)}$$

В а р и а н т № 2

1. Дано: $\cos \alpha = -\frac{9}{41}$; $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Вычислить $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

2. Упростить выражения:

а) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$; б) $\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} : \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$.

3. Доказать тождество: $\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha = \cos \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$.

4*. Существует ли такое значение α , при котором $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{7}}$

и $\sin \alpha = \frac{1 - \sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$? (Ответ поясните.)

В а р и а н т № 3

1. Дано: $\sin \alpha = \frac{12}{13}$; $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Вычислить $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.
 2. Упростить выражения:
 - а) $\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 1$;
 - б) $(\sin \alpha + \cos \alpha) \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha}\right)$.
 3. Доказать тождество: $\frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha} = 1$.
 - 4*. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 3$.
-

В а р и а н т № 4

1. Дано: $\sin \alpha = -0,3$; $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Найти $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$ и $\operatorname{ctg} \alpha$.
2. Упростить выражения:
 - а) $\frac{1 - \sin^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} : \frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$;
 - б) $\sin^2 \alpha : \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1\right) + \cos^2 \alpha : \left(\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1\right)$.
3. Доказать тождество: $\frac{\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{\sin \alpha}} = \cos \alpha$.
- 4*. Вычислить при данных условиях $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{2 \cos \alpha - \sin \alpha} = 3$.

В а р и а н т № 5

1. Дано: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$. Найти значения $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

2. Упростить:

$$а) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \cdot \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{\operatorname{ctg} \alpha};$$

$$б) \left(\frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 + \left(\frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha} \right)^2 - \sin^2 \alpha.$$

3. Доказать тождество: $\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = 2\operatorname{tg}^2 \alpha$.

4*. Вычислить при данных условиях $\frac{\sin \alpha + 8 \cos \alpha}{5 \sin \alpha - 2 \cos \alpha}$,
если $\operatorname{tg} \alpha = 3$.

В а р и а н т № 6

1. Дано: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти значения $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$.

2. Упростить:

$$а) \sin \alpha \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha);$$

$$б) \frac{2\sin^2 \alpha - 1}{\sin \alpha + \cos \alpha}.$$

3. Доказать тождество: $(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = \cos^2 \alpha$.

4*. Вычислить $\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = m$.

Тригонометрические функции суммы, разности, двойного и половинного аргумента

Тригонометрические функции суммы, разности, двойного и половинного аргумента

В а р и а н т № 1

1. Дано: $\sin \alpha = -\frac{15}{17}$; $\cos \beta = \frac{8}{17}$; $\pi < \alpha < 1,5\pi$; $1,5\pi < \beta < 2\pi$.

Вычислить $\cos(\alpha + \beta)$.

2. Упростить:

а) $8\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{18}\left(\cos^2\frac{\pi}{18}-\sin^2\frac{\pi}{18}\right)\left(\cos^2\frac{\pi}{9}-\sin^2\frac{\pi}{9}\right)-\cos\frac{\pi}{18}$.

б) $\cos 10^\circ + \cos 11^\circ \cos 21^\circ + \cos 69^\circ \cos 79^\circ$.

3. Доказать тождество: $\frac{\sin 2\alpha - 2\sin \alpha}{\cos \alpha - 1} = 2\sin \alpha$.

4. Вычислить $\sin^2 \alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{2}{5}$.

Тригонометрические функции суммы, разности, двойного и половинного аргумента

В а р и а н т № 2

1. Известно, что $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найти $\sin \alpha$ и $\cos 2\alpha$.

2. Упростить: а) $\sin 20^\circ + \sin 13^\circ \sin 57^\circ - \sin 33^\circ \sin 77^\circ$;

б) $1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2\frac{\alpha}{4} + \sin^2\frac{\alpha}{4}$.

3. Доказать тождество: $\frac{\cos 2\alpha - \cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = -1$.

4. Вычислить $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{5}$.

В а р и а н т № 3

1. Дано: $\sin \alpha = \frac{7}{25}$; $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Вычислить $\sin 2\alpha$ и $\cos \frac{\alpha}{2}$.
 2. Упростить:
 - а) $\frac{\sin(\alpha + \beta) - 2 \cos \beta \sin \alpha}{\cos(\alpha + \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta}$;
 - б) $\frac{2 \cos^2 \alpha - 1}{1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha} - \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$.
 3. Доказать тождество: $\frac{2}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \sin 2\alpha$.
 4. Вычислить $\cos^2 \alpha$, если $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$.
-

В а р и а н т № 4

1. Дано: $\cos \alpha = 0,6$; $\cos \beta = -0,28$; $1,5\pi < \alpha < 2\pi$; $\pi < \beta < 1,5\pi$.
Вычислить $\sin(\alpha - \beta)$.
2. Упростить:
 - а) $\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 2 \sin^2 \alpha}$;
 - б) $\sqrt{2} \left(\sin^4 \frac{\pi}{8} - \cos^4 \frac{\pi}{8} \right)$.
3. Доказать тождество: $\frac{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$.
4. Вычислить $\operatorname{tg} \alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

В а р и а н т № 5

1. Дано: $\sin \alpha = -0,28$; $1,5\pi < \alpha < 2\pi$. Вычислить $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.
 2. Упростить:
 - а) $0,5 \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha - 1$;
 - б) $\frac{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}$.
 3. Доказать тождество: $(\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha) \sin 2\alpha = 2 \cos 2\alpha$.
 4. Вычислить $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = 0,3$.
-

В а р и а н т № 6

1. Синусы двух острых углов треугольника соответственно равны $\frac{20}{29}$ и $\frac{3}{5}$. Найти косинус внешнего угла треугольника, не смежного с двумя данными.
2. Упростить:
 - а) $1 - \cos\left(\frac{\alpha}{2} - 3\pi\right) - \cos^2 \frac{\alpha}{4} + \sin^2 \frac{\alpha}{4}$;
 - б) $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.
3. Доказать тождество: $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \cdot \operatorname{ctg} 2\alpha = \operatorname{ctg} 2\alpha$.
4. Вычислить без таблиц $\sin 75^\circ$.

**Преобразование алгебраических сумм
тригонометрических функций в произведение.
Обратное преобразование**

В а р и а н т № 1

1. Представить в виде произведения:

а) $\sin \alpha + \cos \alpha$; б) $1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha$;

в) $\sqrt{2} + 2 \cos x$; г) $1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

2. Представить в виде суммы или разности выражений:

$2 \sin 37^\circ \cdot \sin 13^\circ$.

3. Вычислить $\frac{2 \sin x + \cos x}{\operatorname{ctg} x}$, если $\operatorname{tg} x = 2$, x — угол I четверти.

В а р и а н т № 2

1. Представить в виде произведения:

а) $\cos \alpha - \sin \beta$; б) $\sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sqrt{3} - \operatorname{tg} x$; г) $4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha$.

2. Представить в виде суммы или разности выражений:

$2 \sin 4\alpha \cdot \cos 2\alpha$.

3. Вычислить $\frac{4 \sin x + 2 \cos x}{\operatorname{tg} x}$, если $\operatorname{ctg} x = 3$, x — угол I четверти.

В а р и а н т № 3

1. Представить в виде произведения:

а) $\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta$; б) $\frac{1}{2} + \sin \alpha$; в) $3 - 4 \sin^2 \alpha$.

2. Вычислить без таблиц:

$$\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ.$$

3. Вычислить $\frac{\operatorname{tg} x}{2 \sin x - 3 \cos x}$, если $\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$, x — угол I четверти.

4. Представить $\cos^2 x \cos 3x$ в виде суммы тригонометрических функций.

В а р и а н т № 4

1. Представить в виде произведения:

а) $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta$; б) $\frac{1 + 2 \sin \alpha - \cos 2\alpha}{1 - 2 \sin \alpha - \cos 2\alpha}$;

в) $\frac{\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

2. Вычислить без таблиц:

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ.$$

3. Вычислить $(\sin x - 3 \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x$, если $\operatorname{tg} x = \frac{12}{5}$, x — угол I четверти.

4. Преобразовать в сумму: $4 \cos^2 x \sin x$.

В а р и а н т № 5

1. Представить в виде произведения:

а) $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$; б) $\frac{1 + 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha}{1 - 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha}$;

в) $\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \beta} - 1$.

2. Вычислить без таблиц: $2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \cos 50^\circ$.3. Вычислить $(\sin x - 3 \cos x) \operatorname{ctg} x$, если $\operatorname{ctg} x = \frac{12}{5}$, x — угол I четверти.

4. Вычислить без таблиц:

$$\sin^4\left(\frac{\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{5\pi}{16}\right) + \sin^4\left(\frac{7\pi}{16}\right).$$

В а р и а н т № 6

1. Представить в виде произведения:

а) $\sin 24^\circ + \sin 26^\circ$; б) $\sqrt{3} + 2 \cos \alpha$;

в) $\frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha - \sin \beta + \sin(\alpha + \beta)}$.

2. а) Вычислить:

$$\operatorname{tg} 5^\circ \operatorname{tg} 15^\circ \operatorname{tg} 25^\circ \operatorname{tg} 35^\circ \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 75^\circ \operatorname{tg} 85^\circ.$$

б) Вычислить без таблиц: $\frac{1}{\sin 10^\circ} - 4 \cos 20^\circ$.

3. Доказать тождество:

$$\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}.$$

Тригонометрические функции и их графики

В а р и а н т № 1

1. Найти область определения функции $y = \frac{\operatorname{tg} 3x}{\cos x}$.
2. Указать наибольшее и наименьшее значения функции:

$$y = 1 - \sin \frac{x}{2}.$$

3. Найти наименьший положительный период функции:

$$y = \sin \left(3x + \frac{\pi}{2} \right).$$

4. Построить график функции $y = 3 \cos \frac{x}{2}$ на периоде и указать промежутки монотонности функции.
-

В а р и а н т № 2

1. Найти область определения функции $y = \sin x + 1$.
2. Найти множество значений функции $y = \operatorname{tg} x - 1$.
3. Найти наименьший положительный период функции:

$$y = -\cos \frac{x}{4}.$$

4. Построить график функции $y = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 1$ на периоде.

В а р и а н т № 3

1. Найти область определения функции $y = \frac{\sin x}{x}$.
 2. Найти область значений функции $y = 2 + \cos x$.
 3. Найти наименьший положительный период функции:
 $y = \operatorname{ctg} 3x - 1$.
 4. Построить график функции $y = |\sin x|$ на периоде.
-

В а р и а н т № 4

1. Найти область определения функции $y = \frac{1}{\sin x}$.
 2. Найти множество значений функции $y = 4 - \cos x$.
 3. Найти наименьший положительный период функции:
 $y = \sin 4x + 3$.
 4. Построить график функции $y = \sin|x|$, если $x \in [-2\pi; 2\pi]$.
-

В а р и а н т № 5

1. Найти область определения функции $y = \frac{\sin x}{2}$.
2. Найти область значений функции $y = 2\cos x + 5$.
3. Найти наименьший положительный период функции:
 $y = \left(\sin \frac{x}{4} + \cos \frac{x}{4} \right)^2$.
4. Построить график функции $y = 3|\cos 4x| + 1$.

Обратные тригонометрические функции

В а р и а н т № 1

1. Определить числовые значения следующих выражений:
 - а) $\arccos(\sin 135^\circ)$;
 - б) $\sin(2 \operatorname{arctg} 5)$.
 2. Определить знак разности: $\arcsin 0,75 - \arcsin 1$.
 3. Вычислить: $\arcsin 0 + \arccos 0 + \operatorname{arctg} 0$.
 - 4*. Решить уравнение: $6 \arcsin(x^2 - 6x + 8,5) = \pi$.
 - 5*. Вычислить:
 - а) $\cos(\pi + 2 \arcsin 0,8)$;
 - б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3}\right)$.
-

В а р и а н т № 2

1. Определить числовые значения выражений:
 - а) $\cos\left(\arcsin \frac{3}{5}\right)$;
 - б) $\sin\left(\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
2. Определить знак разности: $\arccos 0,6 - \arccos 0,7$.
3. Вычислить: $\arccos \frac{1}{2} + \arcsin \frac{1}{2} - \operatorname{arctg} 1$.
- 4*. Решить уравнение: $\arcsin(2x - 3) = \frac{\pi}{2}$.
- 5*. Вычислить: а) $\arccos(\sin 2)$; б) $\cos(\pi - \operatorname{arctg} 2)$.

В а р и а н т № 3

1. Определить числовые значения:

а) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\right)$.

2. Определить знак разности: $\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 3$.

3. Вычислить: $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

4*. Решить уравнение: $\arcsin(x+1) = \frac{\pi}{6}$.

5*. Вычислить:

а) $\arccos(\sin 0,5)$; б) $\operatorname{tg}(\pi - \arcsin 0,6)$.

В а р и а н т № 4

1. Определить числовые значения выражений:

а) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}\right)$;

б) $\sin\left(2\arccos\frac{3}{5}\right)$.

2. Определить знак разности: $\arccos 1 - \arccos \frac{1}{2}$.

3. Вычислить: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4*. Решить уравнение: $\arccos(x^2 - 2) = \pi$.

5*. Вычислить:

а) $\cos(2 \operatorname{arctg} 5)$; б) $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

В а р и а н т № 5

1. Определить числовые значения выражений:

$$а) \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right); \quad б) \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

2. Определить знак разности: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Вычислить: $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$.

4*. Решить уравнение: $\arccos(x^2 - 5x + 7) = 0$.

5*. Вычислить: а) $\arccos 1 + 2\arccos\frac{1}{2}$; б) $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

В а р и а н т № 6

1. Определить числовые значения выражений:

$$а) \operatorname{tg}(\arcsin 1); \quad б) \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 2 - \arccos\frac{12}{13}\right).$$

2. Определить знак разности: $\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

3. Вычислить: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4*. Решить уравнение: $\operatorname{arctg}(x^2 - 4x + 3 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

5*. а) Вычислить: $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{5}\right)\right)$.

б) Проверить справедливость равенства: $2\arcsin\frac{2}{7} = \arccos\frac{41}{49}$.

Тригонометрические уравнения.

Уравнения вида:

$$\sin x = a; \quad \cos x = a; \quad \operatorname{tg} x = a; \quad \operatorname{ctg} x = a$$

В а р и а н т № 1

1. $\sin \frac{2}{3}x = \frac{1}{2}$.

2. $\cos(2 - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{x^2} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

4. $\operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3}$.

В а р и а н т № 2

1. $\sin \frac{3\pi}{\sqrt{x}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. $\cos 3x = \sqrt{|1|}$.

3. $\operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}$.

4. $\operatorname{ctg}(3 - 4x) = 0$.

В а р и а н т № 3

1. $\sin(3-2x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\cos \pi \sqrt{x} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$.

4. $\operatorname{ctg}(x-\pi) = -1$.

В а р и а н т № 4

1. $\sin 2x = \frac{\pi}{4}$.

2. $\cos \frac{5}{6}x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. $\operatorname{tg} \sqrt{\frac{\pi}{x}} = -1$.

4. $\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$.

В а р и а н т № 5 *

1. $\sin \sqrt{\frac{\pi}{x}} = 0$.

2. $\cos(2x-1) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{x} = 7$.

4. $\operatorname{ctg}\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) = -1$.

В а р и а н т № 6

1. $\sin x = \sqrt{1,01}$.

2. $\cos(3x - 2) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. $\operatorname{tg} \frac{2}{3x} = -1$.

4. $\operatorname{ctg} 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

В а р и а н т № 7

1. $\sin x = \frac{\pi}{3}$.

2. $\cos \frac{2\pi x}{3} = 0$.

3. $\operatorname{tg}(2 - 3x) = 0$.

4. $\operatorname{ctg} \frac{3}{2}x = 5$.

Уравнения, приводимые к алгебраическим

Уравнения, приводимые
к алгебраическим

В а р и а н т № 1

1. $2 \sin^2 x - 7 \cos x - 5 = 0$.
 2. $\cos 2x + 3 \sin x = 2$.
 3. $2 \cos^2 3x + \sin 3x - 1 = 0$.
 4. $\operatorname{ctg} x - \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = \sqrt{3}$.
 5. $\sqrt{3 + 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 + 3 \operatorname{tg} x}{2}$.
-

Уравнения, приводимые
к алгебраическим

В а р и а н т № 2

1. $\sin^2 2x + 2 \sin x - 3 = 0$.
 2. $\sqrt{2} \sin^2 x + \cos x = 0$.
 3. $\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4$.
 4. $1 - \cos(\pi - x) + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) = 0$.
 5. $(\sin 3x + \cos 3x)^2 = 1 + \cos 2x$.
-

Уравнения, приводимые
к алгебраическим

В а р и а н т № 3

1. $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0$.
2. $2 \operatorname{tg}^4 3x - 3 \operatorname{tg}^2 3x + 1 = 0$.
3. $\cos 2x + \cos x = 0$.
4. $\frac{1}{1 + \cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{16}{11}$.
5. $\operatorname{tg}^2 x - 2 \sin^2 x = 0$ на $\left(-\frac{3}{4}\pi; 2\pi\right)$.

В а р и а н т № 4

1. $2 \cos^2 x + 5 \sin x - 4 = 0.$
 2. $\cos^4 2x + 6 \cos^2 2x = 1 \frac{9}{16}.$
 3. $2 \operatorname{tg} x - 2 \operatorname{ctg} x = 3.$
 4. $\cos 2x + \sin^2 x + \sin x = 0,25.$
 5. $29 - 36 \sin^2(x - 2) - 36 \cos(x - 2) = 0.$
-

В а р и а н т № 5

1. $2 \cos^2 x + 2\sqrt{2} \sin x - 3 = 0.$
 2. $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 3.$
 3. $2 \cos^2(x + 30^\circ) - 3 \sin(60 - x) + 1 = 0.$
 4. $2 \cos 2x - 4 \cos x = 1.$
 5. $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2.$
 6. $4^{3+2\cos 2x} - 7 \cdot 4^{1+\cos 2x} - 4^{\frac{1}{2}} = 0.$
-

В а р и а н т № 6

1. $\cos 2x - 5 \sin x - 3 = 0.$
2. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2.$
3. $\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$
4. $3 \sin^2 2x + \sin 2x = (\sin x - \cos x)^2.$
5. $1 + \cos x = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}.$
6. $2 \cdot (x - 6) \cos x = x - 6.$

В а р и а н т № 7

1. $3 + 2 \sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$

2. $\frac{12}{\cos^2 x} - 25 \operatorname{tg} x = 0.$

3. $2 \sin^2 x + 5 \sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = 2.$

4. $\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} 1 - 3 \cos x + \cos 2x = \frac{\cos(\pi - x)}{\operatorname{ctg} 2x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}.$

5. $\cos \frac{3\pi + x}{3} \cdot \cos \frac{9\pi + 2x}{6} = -\frac{5}{48} \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} 1,5).$

Уравнения, решаемые
разложением на множители

В а р и а н т № 1

1. $\sin^2 x - \sin x = 0.$

2. $\cos^2 x + \sin x \cdot \cos x = 1.$

3. $5 \sin x + 3 \sin 2x = 0.$

4. $\cos 5x + \cos x = 0.$

5. $2 \operatorname{tg}^3 x - 2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{tg} x - 3 = 0.$

В а р и а н т № 2

1. $\operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x = 0$.
 2. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$.
 3. $\sin 7x - \sin x = 0$.
 4. $\cos^2 \frac{x}{3} + 2 \sin^3 \frac{x}{3} = 1$.
 5. $2 \sin^3 x - \cos^2 2x - \sin x = 0$.
-

В а р и а н т № 3

1. $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 0$.
 2. $(1 + \cos 4x) \sin 2x = \cos^2 2x$.
 3. $7 \cos x - 4 \sin 2x = 0$.
 4. $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 4 \cos 2x$.
 5. $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} = (\sin x + \cos x)^2$.
-

В а р и а н т № 4

1. $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$.
2. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x - \sin x)$.
3. $\operatorname{ctg} 2x(\sin x - 1) = 0$.
4. $\cos x + \sin x = \cos 2x$.
5. $2 \operatorname{ctg}^2 x \cos^2 x + 4 \cos^2 x - \operatorname{ctg}^2 x - 2 = 0$.

В а р и а н т № 5Уравнения, решаемые
разложением на множители

1. $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$.

2. $\sin x + \cos x = 1 + \sin 2x$.

3. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1) \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$.

4. $\frac{\cos x}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} = 0$.

5. $\sin^4 x - 3 \sin^3 x + 3 \sin x - 1 = 0$.

В а р и а н т № 6Уравнения, решаемые
разложением на множители

1. $1 - \cos 2x = \sqrt{3} \sin x$.

2. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 3 \operatorname{ctg} \frac{2\pi - x}{4}$.

3. $1 - \cos(\pi + x) - \sin \frac{3\pi + x}{2} = 0$.

4. $\sin x \operatorname{tg} x + 1 = \sin x + \operatorname{tg} x$.

5. $2 \cos \frac{x}{6} - 1 = \cos \frac{x}{3}$.

В а р и а н т № 7

Уравнения, решаемые
разложением на множители

1. $\sin^3 x - \cos^3 x = \sin x - \cos x$.

2. $\cos 2x = \sqrt{2}(\cos x + \sin x)$.

3. $\frac{\operatorname{ctg} x + 1}{\operatorname{ctg} x - 1} = (\sin x + \cos x)^2$.

4. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$.

5. $4 \sin^2 x (1 + \cos 2x) = 1 - \cos 2x$. Найдите решения уравнения, удовлетворяющие неравенству $x^2 < 4$.

Однородные уравнения

В а р и а н т № 1

Однородные уравнения

1. $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.

2. $4 \sin^2 x + 2 \sin x \cos x = 3$.

3. $\sin x - \cos x - 4 \cos^2 x \sin x = 4 \sin^3 x$.

4. $3 \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$.

5. $(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \sin 2x) = 1$.

В а р и а н т № 2

- $\sin 2x + \cos 2x = 0.$
 - $3 \cos^2 x - 5 \sin^2 x - \sin 2x = 0.$
 - $\frac{1}{\cos x} = 4 \sin x + 6 \cos x.$
 - $2 \sin 4x - 3 \sin^2 2x = 1.$
 - $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos 2x}.$
-

В а р и а н т № 3

- $5 \sin 3x - 2 \cos 3x = 0.$
 - $\sin^2 x + 0,5 \sin 2x - 2 \cos^2 x = 0.$
 - $\sin x + \cos x = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}.$
 - $\sin^2 x - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin x \cos x = \frac{1}{2}.$
 - $\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3.$
-

В а р и а н т № 4

- $5 \cos 2x - 3 \sin 2x = 0.$
- $\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 0.$
- $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2.$
- $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x.$
- $2 \sin^2 x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = 4 \arccos 1.$

В а р и а н т № 5

- $\sin(x + 30^\circ) + \cos(x + 30^\circ) = 0.$
- $3 \sin^2 2x - 0,5 \sin 4x - 4 \cos^2 2x = 0.$
- $2 \sin^2 x + \cos^2 x + 3 \sin x \cos x = 3.$
- $\sin^2 x + \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \cos 2x = 1.$
- $\sin x + \cos x - 1 - \operatorname{ctg} \frac{x}{2} (\cos x - 1).$

В а р и а н т № 6

- $2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0.$
- $\sin^6 x + \sin^4 x \cos^2 x = \sin^3 x \cos^3 x + \sin x \cos^5 x.$
- $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 2.$
- $\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 13.$
- $\sin^2(x + \pi) + 3 \cos^2\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = 1, \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}.$

В а р и а н т № 7

- $\cos^3 x \sin x + \cos^2 x \sin^2 x - 3 \cos x \sin^3 x - 3 \sin^4 x = 0.$
- $8 \sin^2 \frac{x}{2} + 3 \sin x - 4 = 0.$
- $\sqrt{3} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0.$
- $13 \sin^2 x + 84 \sin 2x - 13 \cos^2 x + 1 = \frac{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ}{\cos 54^\circ}.$
- $\sqrt{1 - \cos 2x} = \sqrt{2} \cos x.$

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций

Уравнения, решаемые
с помощью формул сложения
тригонометрических функций

В а р и а н т № 1

1. $\sin x + \sin 3x = 4 \cos^3 x$.
 2. $\cos 2x + \cos x = 0$.
 3. $\sin 3x + \sin 4x = 2 \sin 3,5x$.
 4. $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 5x - \cos 9x = 0$.
 5. $\cos 3x - 2 \cos 2x + \cos x = 0$.
-

Уравнения, решаемые
с помощью формул сложения
тригонометрических функций

В а р и а н т № 2

1. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} 3x = 0$.
 2. $\cos 2x + \sin x = 0$.
 3. $\sin x + 2 \cos x + \sin 3x = 0$.
 4. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin 3x$.
 5. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$.
-

Уравнения, решаемые
с помощью формул сложения
тригонометрических функций

В а р и а н т № 3

1. $\sin(15^\circ + x) + \sin(45^\circ - x) = 1$.
2. $\cos 2x - \cos x = 0$.
3. $\cos x + \sin x - \cos 3x = 0$.
4. $\sin 2x - \sin 3x + \sin 8x = \cos\left(\frac{3}{2}\pi + 7x\right)$.
5. $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$.

В а р и а н т № 4

1. $\sin 2x + \sin(\pi - 8x) = \sqrt{2} \cos 3x$.
 2. $\cos 2x - \sin x = 0$.
 3. $\sin(15^\circ + x) + \cos(45^\circ + x) + \frac{1}{2} = 0$.
 4. $\sin x - \sin 3x - \sin 5x + \sin 7x = 0$.
 5. $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = 1$.
-

В а р и а н т № 5

1. $0,5(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 3x + \sin^2 3x = 0$.
 2. $\cos 2x + \cos 5x = -2 \cos 3,5x$.
 3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right) - \sin(\pi - 5x) = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 3x)$.
 4. $\operatorname{tg} \frac{21}{5}x + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{17}{5}x\right) = 0$.
 5. $\cos x + \cos 2x = \sin 3x$.
-

В а р и а н т № 6

1. $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.
2. $\sin 3x + \sin 7x = -2 \sin 5x$.
3. $\operatorname{ctg} 15x + \operatorname{ctg} 3x = 0$.
4. $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$.
5. $\sin 3x = 3 \sin x$.

В а р и а н т № 7

- $\sin 8x + \cos 7x = \cos 3x - \sin 2x.$
 - $\operatorname{tg}\left(\frac{2}{3}\pi - x\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 2 \sin 2x.$
 - $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 2.$
 - $\operatorname{tg}(120^\circ + 3x) + \operatorname{tg}(40^\circ + x) = 2 \sin(80^\circ + 2x).$
 - $\sin(3x + 5) - \sin(x + 1) = 2 \sin(x + 2).$
-

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму

В а р и а н т № 1

- $\cos 3x \cos 2x = \sin 3x \sin 2x.$
- $8 \cos x \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right) + 1 = 0.$
- $\cos(x + 70^\circ) \cdot \cos(x + 10^\circ) = \sin 30^\circ.$
- $\cos x \cdot \cos 3x = \cos 5x \cos 7x.$
- $\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x.$

В а р и а н т № 2

- $\cos 2x \cos x = \sin 2x \sin x.$
 - $\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \cdot \operatorname{ctg} 3x + \sin(\pi + 2x) - \sqrt{2} \cos 5x = 0.$
 - $\cos 7x \cdot \cos 3x = \cos 4x.$
 - $\sin(x + 1) \cos 2(x + 1) = \sin 3(x + 1) \cos 4(x + 1).$
 - $\sin 2x \cdot \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \cdot \sin 4x + \cos^2 4x.$
-

В а р и а н т № 3

- $\sin 2x \cos x = \cos 2x \sin x.$
 - $\sin(x + 45^\circ) \sin(x - 15^\circ) = \frac{1}{2}.$
 - $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6}.$
 - $\sin\left(2x + \frac{3\pi}{20}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{20} - x\right) + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{15}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{15}\right) = 0.$
 - $2 \cos(x + 20^\circ) \cos x = \cos 40^\circ.$
-

В а р и а н т № 4

- $\cos 3x \cos 4x = \cos 7x.$
- $2 \sin x \sin 2x + \cos 3x = 0.$
- $2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{3\pi}{20}\right) = \cos \frac{2\pi}{5}.$
- $\cos(x + 70^\circ) \cos(x + 10^\circ) = 0,5.$
- $2 \sin 5x \cos 6x + \sin x = \sin 7x \cos 4x.$

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму

В а р и а н т № 5

1. $\cos(3\alpha + 2x)\cos(3\alpha - 2x) + 0,75 = \cos^2 3\alpha.$
 2. $\cos 2x \cos 3x = \cos 5x.$
 3. $\sin(x + 45^\circ)\cos(x + 15^\circ) = 0,5.$
 4. $\cos x \cos 4x - \cos 5x = 0.$
 5. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = 0,5.$
-

Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму

В а р и а н т № 6

1. $\sin 3x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = \frac{1}{8}.$
2. $16 \sin x \cos 3x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = -1.$
3. $2\sqrt{2} \cos(45^\circ + x)(1 + \sin x) = 1 + \cos 2x.$
4. $\cos 7x - \cos^2 2x = -\sin^2 2x - \cos x.$
5. $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 2 \cos 2x.$

В а р и а н т № 7

1. $\sin x \sin(60^\circ - x) \sin(60^\circ + x) = \frac{1}{8}$.
 2. $\frac{\cos^2 x - \sin^2 2x}{4\cos^2 x} = \sin(x + 30^\circ) \cdot \sin(x - 30^\circ)$.
 3. $\frac{\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x} - 2 \sin(45^\circ + x) \cdot \sin(45^\circ - x) = 0$.
 4. $\sin 2x \cdot \sin x + \cos^2 x = \sin 5x \cdot \sin 4x + \cos^2 4x$.
 5. $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4\cos^2 x}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$.
-

Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

В а р и а н т № 1

1. $2 \sin^2 x + \cos 4x = 0$.
2. $\sin^2 6x + 8 \sin^2 3x = 0$.
3. $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3}{2}x - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$.
4. $4 \sin^2 x + \sin^2 2x = 3$.
5. $\sin^2 5x = \cos^2 2x - 2 \sin^2 2x - 1$.

В а р и а н т № 2

1. $2 \cos^2 2x + \cos 10x - 1 = 0.$
 2. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}.$
 3. $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x.$
 4. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{2}.$
 5. $\sin^4 x + \sin^4\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$
-

В а р и а н т № 3

1. $\sin^4 \frac{x}{2} + \cos^4 \frac{x}{2} = \sin x.$
2. $\cos 2x + 4 \sin^4 x = 8 \cos^6 x.$
3. $6 \sin^2 x + 2 \sin^2 2x = 5.$
4. $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}.$
5. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} \cos x \cos 3x.$

В а р и а н т № 4

- $2 \cos^2 2x + \cos 10x - 1 = 0.$
 - $\cos 4x - 2 \cos^2 x - 22 \sin^2 x + 1 = 0.$
 - $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + 0,25.$
 - $\sin^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{3}{2} x = 1.$
 - $(\cos 5x + \cos 7x)^2 + (\sin x + \sin 7x)^2 = 0.$
-

В а р и а н т № 5

- $\sin^4 \left(\frac{x}{2} \right) + \cos^4 \left(\pi - \frac{x}{2} \right) = \sin x.$
- $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}.$
- $2 + \cos 4x = 5 \cos 2x + 8 \sin^6 x.$
- $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{8} \right) + \cos^4 x = \frac{1}{2} \sin^2 2x.$
- $\sin^4 \frac{2}{3} x + \cos^4 \frac{2}{3} x = a.$

В а р и а н т № 6

- $6 \operatorname{tg}^2 x - 2 \cos^2 x = \cos 2x$. (Указание: $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$.)
 - $\sin^4 x + 5 \cos 2x + 4 = 0$.
 - $2 \sin^2 2x + \sin^2 4x = \frac{5}{4}$.
 - $\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4 \left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$.
 - $8 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = 1 + \frac{1}{\cos x}$.
-

Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$

В а р и а н т № 1

- $5 \sin x - 12 \cos x = 13$.
 - $3 \sin x + 5 \cos x = 4$.
 - $\sin x + \sqrt{3} \cos x = -\sqrt{3}$.
-

В а р и а н т № 2

- $5 \sin x - \cos x = 5$.
- $\sin 4x + \cos 4x = 4$.
- $2 \cos x + 2 \sin x = \sqrt{6}$.

В а р и а н т № 3Уравнения вида
 $a \sin x + b \cos x = c$

1. $\sin x - \sqrt{7} \cos x = \sqrt{7}$.

2. $\cos x - \sin x = 1$.

3. $2 \cos x + \sin x = \sqrt{2}$.

В а р и а н т № 4Уравнения вида
 $a \sin x + b \cos x = c$

1. $\cos 3x - \sqrt{3} \sin 3x = 1$.

2. $\cos x - \sin x = 1,5$.

3. $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \sin 3x$.

В а р и а н т № 5Уравнения вида
 $a \sin x + b \cos x = c$

1. $4 \sin x + 5 \cos x = 6$.

2. $\cos x + \sin x = \sqrt{2}$.

3. $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = -1$.

В а р и а н т № 6Уравнения вида
 $a \sin x + b \cos x = c$

1. $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{2}$.

2. $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = \sqrt{2}$.

3. $\sqrt{3} \sin x - 2 \cos x = 1$.

В а р и а н т № 7

1. $\sqrt{3} \sin x + 2 \cos x = 1$.
 2. $\sin 2x - \cos 2x + 1 = 0$.
 3. $3 \sin x + 4 \cos x = 3$.
-

Уравнения смешанного типа

В а р и а н т № 1

1. $\sin x + \cos x = 2,5 + 5 \sin x \cos x$.
 2. Найти наименьший на интервале $(-\pi; 0)$ корень уравнения $\cos x - \sqrt{3} \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 3x\right)$.
 3. $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3}{2}x - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$.
-

В а р и а н т № 2

1. $\sin x - \cos x + 5 \sin x \cos x = 1$.
2. Найти наибольший на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ корень уравнения $\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right) + \sin x = 2 \cos 3x$.
3. $\frac{2}{3} \cos^2 x + \sin x = 1$.

В а р и а н т № 3

1. Найти наибольший на интервале $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ корень уравнения $\sin x - \sin 3x = \cos\left(5x + \frac{\pi}{2}\right)$.
 2. $3\cos^2 x = 4\sin x \cos x - \sin^2 x$.
 3. $\cos 5x + \cos 7x = \cos(\pi + 6x)$.
-

В а р и а н т № 4

1. Найти наименьший на интервале $\left(-\frac{3\pi}{2}; 0\right)$ корень уравнения $(1 + \cos 2x) \cdot \sin x = \cos^2 x$.
 2. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\cos 2x = 1$.
 3. $2\operatorname{tg} x \cos x + 1 = 2\cos x + \operatorname{tg} x$.
-

В а р и а н т № 5

1. Найти все решения уравнения $\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} = 1 - \sin x$, удовлетворяющие условию $\left|\frac{x}{2} - \frac{\pi}{2}\right| \leq \frac{3\pi}{4}$.
2. $\cos 2x - \sin x + 2 = 0$.
3. $7\sin(x + 2\pi) = 2 + 2\cos^2 x$.

В а р и а н т № 6

1. Найти все решения уравнения:

$$\cos^4 x - 3\cos 3x = 3\cos x - \cos^3 x \cos 3x,$$

лежащие на промежутке $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

- 2.
- $\cos 3x \operatorname{tg} 5x = \sin 7x$
- .

- 3.
- $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$
- .

В а р и а н т № 7

- 1.
- $\sin 2x - 4\sin x - 4\cos x + 4 = 0$
- . Указание: обозначить

$$y = \sin x + \cos x, \text{ тогда } y^2 = (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x.$$

2. Найти все решения уравнения :

$$\frac{1}{2}(\cos 5x + \cos 7x) - \cos^2 2x + \sin^2 3x = 0,$$

удовлетворяющие условию $|x| < 2$.

- 3.
- $\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x \sin 3x$
- .

В а р и а н т № 8

Решить уравнения:

- 1.
- $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}$
- .

- 2.
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \operatorname{tg} x - 2 = 0$
- .

- 3.
- $3^{\cos 2x} \cdot (4 \cdot 3^{\sin^2 x} - 9) = 1$
- . Указание: обозначить
- $3^{\cos^2 x} = y$
- .

**Решение простейших
тригонометрических неравенств**

Решение простейших
тригонометрических неравенств

В а р и а н т № 1

1. $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
 2. $2 \cos x - \sqrt{2} \leq 0$.
 3. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} \leq 0$.
-

Решение простейших
тригонометрических неравенств

В а р и а н т № 2

1. $\sin 2x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
 2. $3 \operatorname{ctg} x + 1 \geq 0$.
 3. $2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < 3$.
-

Решение простейших
тригонометрических неравенств

В а р и а н т № 3

1. $|\cos x| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\frac{1}{2}\left(\cos 3x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\sin 2x \leq \frac{1}{3}$.

В а р и а н т № 4

1. $\sin x > \frac{1}{2}$.
2. $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > 1$.
3. $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1$.

В а р и а н т № 5

1. $\sin 2x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Найти область определения функции $y = \sqrt{4\cos^2 x - 3}$.
3. $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$.

В а р и а н т № 6

1. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{1}{2}$.
2. Найти область определения функции $y = \sqrt{3 - 4\sin^2 x}$.
3. $\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 < \sin x$.

В а р и а н т № 7

1. $\sin x > \cos^2 x$.
 2. $\cos \frac{x}{3} > 0$.
 3. Найти область определения функции $y = \sqrt{1 - 2\cos^2 x}$.
-

В а р и а н т № 8

1. $2\cos^2 x > \frac{3}{2}$.
 2. $\sin x \geq \cos 2x$.
 3. Упростить выражение:
 $\sqrt{1 + 2\sin\alpha \cos\alpha}$, если $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.
-

В а р и а н т № 9

1. $2\operatorname{tg} 2x \leq 3\operatorname{tg} x$.
2. $\sin x + \sin 3x \geq 0$.
3. При каких значениях x на отрезке от 0 до 2π имеет смысл выражение $\sqrt{\frac{1}{2} - \sin x}$?

Решение систем тригонометрических уравнений

Решение систем
тригонометр. уравнений

В а р и а н т № 1

$$1. \begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение систем
тригонометр. уравнений

В а р и а н т № 2

$$1. \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \sin x - \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Решение систем
тригонометр. уравнений

В а р и а н т № 3

$$1. \begin{cases} \cos x + \cos y = \cos \frac{\pi}{8}, \\ x + y = \frac{\pi}{4}. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + y = \frac{4}{3}\pi, \\ \sin x \cdot \sin y = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Решение систем
тригонометр. уравнений

В а р и а н т № 4

$$1. \begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + y = \frac{5}{12}\pi, \\ \cos x \cos y = \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{cases}$$

ОТВЕТЫ

Тригонометрические функции произвольного угла

В а р и а н т № 1

1. а) «-»; б) «+»; в) «-».
2. $\sin 100^\circ > \sin 130^\circ$. 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 4. 120° .

В а р и а н т № 2

1. > 0 . 2. «-». 3. $\frac{2 + (\sqrt{3})^2}{-4\sqrt{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{12}$. 4. $\frac{\pi}{9}$.

В а р и а н т № 3

1. а) «-»; б) «-»; в) «+». 2. $\cos 300^\circ < \cos 320^\circ$. 3. -3.

В а р и а н т № 4

1. «-». 2. а) «-»; б) «-»; в) «+». 3. 6. 4. $\approx 127^\circ$.

В а р и а н т № 5

1. а) «-»; б) «-»; в) «+».
2. $\operatorname{tg} 100^\circ < \operatorname{tg} 110^\circ$. 3. $-\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 4. 150° .

В а р и а н т № 6 *

1. «-». 2. 0. 3. $\frac{5\sqrt{3}}{2} - 1$. 4. $\approx 1,1378$ рад $\approx 65^\circ$.

**Соотношения между тригонометрическими
функциями одного и того же аргумента.
Основные тригонометрические формулы**

В а р и а н т № 1

1. $\cos \alpha = -0,8$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$.

2. а) $2\cos^2 \alpha$; б) 1. 4*. Нет.

В а р и а н т № 2

1. $\sin \alpha = \frac{40}{41}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{40}{9}$; $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{9}{40}$.

2. а) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$; б) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$. 4*. Нет.

В а р и а н т № 3

1. $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$; $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{12}$.

2. а) $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$; б) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. 4*. $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$.

В а р и а н т № 4

1. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{91}}{10}$; $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{\sqrt{91}}$; $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{91}}{3}$.

2. а) 1; б) 1. 4*. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{4}$.

В а р и а н т № 5

$$1. \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}; \quad \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$2. \text{ а) } -\operatorname{tg}^3 \alpha; \quad \text{ б) } \cos^2 \alpha. \quad 4^* \cdot \frac{11}{13}.$$

В а р и а н т № 6

$$1. \cos \alpha = \frac{-4}{5}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{-3}{4}. \quad 2. \text{ а) } 1; \quad \text{ б) } \sin \alpha - \cos \alpha. \quad 4. m^2 - 2.$$

Тригонометрические функции суммы, разности, двойного и половинного аргумента**В а р и а н т № 1**

$$1. -1. \quad 2. \text{ а) } 0; \quad \text{ б) } 2 \cos 10^\circ. \quad 4. \frac{3}{10}.$$

В а р и а н т № 2

$$1. \sin \alpha = \frac{12}{13}, \quad \cos 2\alpha = -\frac{119}{169}. \quad 2. \text{ а) } 1; \quad \text{ б) } 0. \quad 4. \frac{12}{13}.$$

В а р и а н т № 3

$$1. \sin 2\alpha = -\frac{336}{625}; \quad \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$$2. \text{ а) } \operatorname{ctg}(\beta - \alpha); \quad \text{ б) } \operatorname{tg} 2\alpha. \quad 4. \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}.$$

В а р и а н т № 4

1. 0,8. 2. а) $\frac{1}{2} \operatorname{tg} 2\alpha$; б) -1 . 4. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{2}$.

В а р и а н т № 5

1. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{7}$. 2. а) $0,5 \cos \alpha - 1$; б) $\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$. 4. $\frac{7}{20}$.

В а р и а н т № 6

1. $\frac{24}{145}$. 2. а) 1; б) $-\cos 2\alpha$. 4. $\frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)$.

Преобразование алгебраических сумм тригонометрических функций в произведение. Обратное преобразование

В а р и а н т № 1

1. $\sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right)$. 2. $4 \cos \alpha \cdot \cos \left(30^\circ + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$.

3. $4 \cos \left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} \right)$. 4. $\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$.

5. $\cos 24^\circ - \cos 50^\circ$. 6. $\frac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$.

В а р и а н т № 2

1. $2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right)$. 2. $2 \sin 50^\circ \cos 10^\circ$.

3. $\frac{2 \sin(60^\circ - x)}{\cos x}$. 4. $4 \sin^4 \frac{\alpha}{2}$. 5. $\sin 6\alpha + \sin 2\alpha$. 6. $\frac{30}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{10}$.

В а р и а н т № 3

1. $-2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$. 2. $2 \sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

3. $4 \sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)$ или $4 \cos(30^\circ + \alpha) \cos(30^\circ - \alpha)$.

4. а) $\frac{1}{8}$; б) $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$. 5. $-\frac{5}{8}$.

6. $\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 5x$.

Указание: заменить $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

В а р и а н т № 4

1. $2 \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$. 2. $\frac{\sin \alpha + 1}{\sin \alpha - 1} = \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

3. $\frac{2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. 4. $\frac{3}{16}$. 5. $-\frac{15}{156}$. 6. $\frac{2\sqrt{3} \sin(2x - 30^\circ)}{\sin 2x}$.

В а р и а н т № 5

1. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 2. $\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha - 1} = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$. 3. $\frac{\cos(\alpha - \beta) \cos(\alpha + \beta)}{\sin^2 \beta}$.

4. $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sin 50^\circ$. 5. $-\frac{132}{325}$. 6. $\frac{3}{2}$. Указание: воспользоваться формулами понижения степени и формулой $(a - b)^2$.

В а р и а н т № 6

1. $2 \sin 25^\circ \cos 1^\circ$. 2. $4 \cos\left(30^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(30^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$. 3. $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$.

4. а) 1; б) 2. Указание: умножить и разделить левую часть тождества на $\sin \frac{\pi}{7}$ и воспользоваться формулами произведения тригонометрических функций.

Тригонометрические функции и их графики

В а р и а н т № 1

1. Все x , кроме $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

2. $0 \leq 1 - \sin x \leq 2$. 3. $\frac{2}{3}\pi$.

4. Функция убывает, если $x \in (0 + 4\pi k; 2\pi + 4\pi k, k \in Z)$; функция возрастает, если $x \in (2\pi + 4\pi k; 4\pi + 4\pi k, k \in Z)$.

В а р и а н т № 2

1. $D(f) = R$. 2. $E(f) = R$. 3. 8π . 4. $T = 2\pi$.

В а р и а н т № 3

1. $D(f) = R$, кроме $x = 0$. 2. $E(f) = [1; 3]$. 3. $T = \frac{\pi}{3}$. 4. $T = 2\pi$.

В а р и а н т № 4

1. $D(f) = R$, $\sin x \neq 0$, т. е. $x \neq \pi k$. 2. $E(f) = [3; 5]$. 3. $T = \frac{\pi}{2}$.

В а р и а н т № 5

1. $D(f) = R$. 2. $E(f) = [3; 7]$. 3. $T = 4\pi$. 4. $T = \frac{\pi}{2}$.

Обратные тригонометрические функции

В а р и а н т № 1

1. а) 45° ; б) $\frac{5}{13}$. 2. «-». 3. 1. 4*. 2; 4. 5*. а) 0,28; б) $-\frac{\pi}{6}$.

В а р и а н т № 2

1. а) $\frac{4}{5}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2. «+». 3. $\frac{\pi}{4}$. 4*. 2. 5*. а) $2 - \frac{\pi}{2}$; б) $-\frac{\sqrt{5}}{5}$.

В а р и а н т № 3

1. а) $-\frac{\pi}{3}$; б) $\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$. 2. «-». 3. $\frac{\pi}{12}$. 4*. $-\frac{1}{2}$.

- 5*. а) $0,5\pi - 0,5$; б) $-\frac{3}{4}$.

В а р и а н т № 4

1. а) $-\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{24}{25}$. 2. «-». 3. $+\frac{\pi}{12}$.

- 4*. $x = \pm 1$. 5*. а) $\frac{12}{13}$; б) $\frac{7}{12}\pi$.

В а р и а н т № 5

1. а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $-\sqrt{3}$. 2. «-». 3. $\frac{\pi}{6}$. 4*. 2; 3. 5*. а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

В а р и а н т № 6

1. а) Не существует; б) $\frac{19}{22}$. 2. «-». 3. $\frac{\pi}{3}$. 4. 1 и 3.
5. а) $\frac{3\pi}{10}$; б) воспользоваться формулами приведения.

Тригонометрические уравнения.

Уравнения вида: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$

В а р и а н т № 1

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\pi n$, $n \in Z$. 2. $x = \frac{2}{3} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n$, $n \in Z$.
3. $x = \pm \sqrt{\frac{6}{6n-1}}$, $n \in Z$. 4. $x = \frac{\pi}{18}(1+6n)$, $n \in Z$.

В а р и а н т № 2

1. $x = \frac{81}{(3n+(-1)^{n+1})^2}$, $n \in Z$. 2. Нет решения.
3. $x = \frac{\pi}{6}(3n+1)$, $n \in Z$. 4. $x = \frac{\pi}{8}(1+2n) + \frac{3}{4}$, $n \in Z$.

В а р и а н т № 3

1. $x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k + \frac{3}{2}$, $k \in Z$.

$$2. x = \left(\frac{5}{6} + 2n\right)^2; \left(-\frac{5}{6} + 2k\right)^2; n, k \in N.$$

$$3. x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, k \in Z. \quad 4. x = \frac{\pi}{4}(4n+3), n \in Z.$$

В а р и а н т № 4

$$1. x = (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z.$$

$$2. x = \pm \frac{\pi}{5} + \frac{12}{5} \pi n, n \in Z. \quad 3. x = \frac{16}{\pi(4n-1)^2}, n \in N.$$

$$4. x = \frac{\pi}{6}(6n+1), n \in Z.$$

В а р и а н т № 5 *

$$1. x = \frac{1}{k^2\pi}, k \in N. \quad 2. x = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{8} \pi + \pi n, n \in Z.$$

$$3. x = \frac{\pi}{\operatorname{arctg} 7 + \pi k}, k \in Z. \quad 4. x = \frac{\pi}{12}(12n+11), n \in Z.$$

В а р и а н т № 6

$$1. \text{ Нет решения. } \quad 2. x = \frac{2}{3} \pm \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3} \pi n, n \in Z.$$

$$3. x = \frac{8}{(4n-1)3\pi}, n \in Z. \quad 4. x = \frac{\pi}{9}(3n+2), n \in Z.$$

В а р и а н т № 7

$$1. \text{ Нет решения. } \quad 2. x = \frac{3}{4}(2n+1), n \in Z.$$

$$3. x = \frac{\pi}{3}n + \frac{2}{3}, n \in Z.$$

$$4. x = \frac{2}{3} \operatorname{arccctg} 5 + \frac{2}{3} \pi n, n \in Z.$$

Уравнения, приводимые к алгебраическим

В а р и а н т № 1

$$1. x = \pm \frac{2}{3} \pi + 2\pi k, k \in Z.$$

$$2. x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; n, k \in Z.$$

$$3. x = (4k+1) \frac{\pi}{6}; x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}; k, n \in Z.$$

$$4. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; x = \frac{\pi}{6} + \pi k; n, k \in Z.$$

$$5. x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z. \text{ Указание: } \operatorname{tg} x \geq -\frac{1}{3}.$$

В а р и а н т № 2

$$1. x = \frac{\pi}{2}(4k+1), k \in Z. \quad 2. x = \pm \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in Z.$$

$$3. x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in Z. \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$4. x = \pi(2k+1) \text{ и } x = \frac{4\pi}{3}(3k \pm 1).$$

$$5. x = (4n+1) \frac{\pi}{16}; x = (4k+1) \frac{\pi}{8}; n, k \in Z.$$

В а р и а н т № 3

1. $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}, n \in Z.$

2. $x = \pm \frac{1}{3} \arctg \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z; x = \frac{\pi}{12}(4k \pm 1), k \in Z.$

3. $x = \pi k; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; k, n \in Z.$ 4. Нет решения.

5. $x = \pi n$ при $n = 0; 1; x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$ при $k = 0; -1; 1; 2; 3.$

В а р и а н т № 4

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$ 2. $x = \frac{\pi}{6}(3k \pm 1), k \in Z.$

3. $x = -\arctg \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$ или $x = \arctg 2 + \pi n, n \in Z.$

4. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

5. $x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{1}{6} \right) + 2\pi n + 2, n \in Z.$

В а р и а н т № 5

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{4}(4n-1), n \in Z; x = \arctg 3 + \pi k, k \in Z.$

3. $x = 30^\circ(12k \pm 1); x = 90^\circ(4k-1).$

4. $x = \frac{2}{3}(3n \pm 1)\pi, n \in Z.$

$$5. x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

Указание: $\cos x \neq -1$, поэтому $\frac{1}{\sin x} = 2$ и т.д.

$$6. x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$$

В а р и а н т № 6

$$1. x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

$$2. x = \frac{\pi}{4}(4n+1), n \in Z.$$

$$3. x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in Z.$$

$$4. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n; x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{3} + \frac{\pi k}{2}; n, k \in Z.$$

$$5. x = \pi(2n+1); x = \frac{\pi}{2}(4k+1); n, k \in Z.$$

$$6. x = 6; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$$

В а р и а н т № 7

$$1. x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z. \text{ Указание: } 3 + 2\sin 2x = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x};$$

$$3 + 2\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}; \sin 2x \neq 0; 2x \neq k\pi; x = \frac{k\pi}{2}, k \in Z \text{ и т.д.}$$

$$2. x = (-1)^n \frac{1}{2} \arcsin \frac{24}{25} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z.$$

$$\text{Указание: } \cos x \neq 0; x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1).$$

$$3. x = \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z. \quad 4. x = \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z.$$

$$5. x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}n, n \in Z.$$

Уравнения, решаемые разложением на множители

В а р и а н т № 1

$$1. x = k\pi, k \in Z; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$$

$$2. x = k\pi, k \in Z; x = 2\pi n, n \in Z. \quad \frac{\pi}{4} + \pi Z;$$

$$3. x = k\pi, k \in Z; x = \pm \left(\pi - \arccos \frac{5}{6} \right) + 2\pi k, k \in Z.$$

$$4. x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k, k \in Z; x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z.$$

$$5. x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

В а р и а н т № 2

$$1. x = \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z; x = \operatorname{arctg} 4 + k\pi, k \in Z.$$

$$2. x = \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in Z; x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

$$3. x = \frac{\pi k}{3}, k \in Z; x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}n, n \in Z.$$

$$4. x = 3\pi k, k \in Z; x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + 3\pi n, n \in Z.$$

$$5. x = \frac{\pi}{4}(2n+1), n \in Z; x = \frac{\pi}{2}(4k-1), k \in Z;$$

$x = (-1)^m \frac{\pi}{6} + m\pi, m \in Z$. Указание: $2 \sin^3 x = \sin x \cdot 2 \sin^2 x$ и $2 \sin^2 x = (1 - \cos 2x)$ и далее разложить на множители.

В а р и а н т № 3

1. $x = \pi k, k \in Z$; $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in Z$.
2. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in Z$; $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}n, n \in Z$.
3. $x = \frac{\pi}{2}\pi k, k \in Z$; $x = (-1)^{n+1} \operatorname{arcsin} \frac{7}{8} + \pi n, n \in Z$.
4. $\frac{\pi}{4}(2k+1), k \in Z$. 5. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$; $x = \pi k, k \in Z$.

В а р и а н т № 4

1. $x = k\pi$; $x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, k, n \in Z$.
2. $\frac{\pi}{4}(4n+1), n \in Z$; $x = \frac{\pi}{4}(8k+1), k \in Z$.
3. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$; $x \neq \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.
4. $x = \frac{\pi}{4}(4n-1), n \in Z$; $x = 2\pi k, k \in Z$; $x = -\frac{\pi}{2} + m\pi, m \in Z$.
5. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1), n \in Z$.

В а р и а н т № 5

1. $x = 2\pi k, k \in Z$; $x = \pi + 4\pi n, n \in Z$.
2. $x = \frac{\pi}{4}(4k-1), k \in Z$; $x = \pm \frac{\pi}{4} + (8n+1)\frac{\pi}{4}, n \in Z$.

3. $x = k\pi, k \in Z; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; x \neq \pm\pi.$

5. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z; x = (-1)^n \arcsin \frac{3-\sqrt{5}}{2} + \pi n, n \in Z.$

Указание: $3\sin x \cdot (1 - \sin^2 x) - (1 - \sin^4 x) = 0$ и т. д.

В а р и а н т № 6

1. $x = k\pi, k \in Z; x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

2. $x = 4k\pi, k \in Z; x = \pm \frac{2}{3}\pi + 4\pi n, n \in Z.$

3. $x = \pi(2k+1), k \in Z; x = \frac{4}{3}\pi(3n \pm 1), n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$ 5. $x = 12\pi k, k \in Z; x = 3\pi(2n+1), n \in Z.$

В а р и а н т № 7

1. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

2. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; x = 2 \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2}) + 2\pi n, n \in Z.$

3. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

4. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$

5. $x = \pm \frac{\pi}{3}; x = 0.$

Однородные уравнения

В а р и а н т № 1

1. $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + k\pi, k \in Z.$

2. $x = -\operatorname{arctg} 3 + k\pi; \frac{\pi}{4} + \pi n; k, n \in Z.$

3. ~~Нет решений.~~ $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n$

4. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k; x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n; k, n \in Z.$

5. $x = \pi k; x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n; k, n \in Z.$

Указание: $\frac{1}{\cos^2 x} \cdot (1 + \sin 2x) = 1; \cos x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z.$

В а р и а н т № 2

1. $x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

2. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; x = \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi n, n \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; x = -\operatorname{arctg}(-5) + \pi n, n \in Z.$

4. $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{2} n, n \in Z.$ 5. $x = \pm \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in Z.$

В а р и а н т № 3

1. $x = 7^\circ 16' + 60^\circ n, n \in Z.$

$$2. x = \frac{\pi}{4}(4k+1), k \in Z; x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in Z.$$

$$3. x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z.$$

$$4. x = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z; x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z.$$

$$5. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z.$$

В а р и а н т № 4

$$1. x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

$$2. x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1), k \in Z.$$

$$3. x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{4}(4k+1).$$

$$4. x = \frac{\pi}{8}(4k-1), k \in Z.$$

$$5. x = \frac{\pi}{4}(4k+1), k \in Z; x = -\operatorname{arctg} 2 + k\pi, k \in Z.$$

В а р и а н т № 5

$$1. x = -75^\circ + 180^\circ k.$$

$$2. x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{8}(4k_1-1), k_1 \in Z.$$

$$3. x = \frac{\pi}{4}(4k-1), k \in Z; x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k_1, k_1 \in Z.$$

4. $x = \frac{\pi}{4}(4k-1), k \in Z; x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in Z.$

5. $x = 2 \operatorname{arctg} 2 + 2\pi n, n \in Z.$

В а р и а н т № 6

1. $x = \frac{\pi}{4}(4k-1), k \in Z; x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi n, n \in Z.$

2. $x = \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{4}(4n+1), n \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z; x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi n, n \in Z.$

4. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z; x = \operatorname{arctg} \left(\frac{3 \pm \sqrt{6}}{6} \right) + \pi n, n \in Z.$

5. $x = \frac{5}{6}\pi; x = \frac{7}{6}\pi.$

В а р и а н т № 7

1. $x = \pi k; x = \frac{\pi}{4}(4k_1-1); x = \frac{\pi}{6}(6k_2 \pm 1); k, k_1, k_2 \in Z.$

2. $x = 2\pi k + 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2}, k \in Z; x = 2\pi n - 2 \operatorname{arctg} 2, n \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{12}(12k-1), k \in Z.$

4. $x = \operatorname{arctg} 13 + \pi k, k \in Z; x = \pi - \operatorname{arctg} 13 + \pi n, n \in Z.$

5. $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z \left(\cos x \geq 0; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right).$

Уравнения, решаемые с помощью формул
сложения тригонометрических функций

В а р и а н т № 1

1. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z; x = \frac{\pi}{4}(4n+1), n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi k, k \in Z; x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$

3. $x = \frac{2}{7}\pi k, k \in Z; x = 4\pi n, n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z; x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{21} + \frac{\pi n}{7}, n \in Z.$

5. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1), k \in Z; x = 2\pi n, n \in Z.$

В а р и а н т № 2

1. $x = \frac{\pi}{3}k, k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in Z; x = \frac{\pi}{4}(4n-1), n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{4}(8k+1), k \in Z; x = \frac{\pi}{20}(8n+3), n \in Z.$

5. $x = \frac{\pi}{5}k, k \in Z; x = \frac{\pi}{10}(4n+1), n \in Z; x = \frac{\pi}{2}(4m-1), m \in Z.$

В а р и а н т № 3

1. $x = \pm 120^\circ + 15^\circ(24k+1), k \in Z.$
2. $x = \frac{2\pi k}{3}; x = 2\pi k, k \in Z.$
3. $x = \pi k, k \in Z; x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$
4. $x = \frac{\pi}{5}k, k \in Z; x = 2\pi n, n \in Z.$
5. $x = \frac{\pi}{4}k, k \in Z; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

В а р и а н т № 4

1. $x = \frac{\pi}{6}(2k+1), k \in Z; x = (-1)^n \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{5}n, n \in Z.$
2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z.$
3. $x = \pm 120^\circ + 15^\circ(24k+1), k \in Z.$
4. $x = \frac{\pi k}{4}, k \in Z; x = \pi n, n \in Z.$ 5. Нет решения.

В а р и а н т № 5

1. $x = \frac{\pi}{12}(2k+1), k \in Z; x = 2\pi n, n \in Z.$
2. $x = \frac{\pi k}{3}; x = \frac{\pi k}{2}.$

3. $x = \frac{\pi}{12}(12k-1), k \in Z; x = \frac{\pi}{16}(4n+1), n \in Z.$

4. $x = \frac{5}{38}\pi k, k \in Z.$

5. $x = \frac{\pi}{3}(2k+1), k \in Z; x = \frac{\pi}{4}(4n+1); x = \frac{\pi}{2}(4m+1); n, m \in Z.$

В а р и а н т № 6

1. $x = (-1)^k \frac{\pi}{9} + (4k+1) \frac{\pi}{12}, k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi k}{5}, k \in Z; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$

3. $x = 2\pi k, x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$ Указание: раскрыть $\cos(45^\circ + x)$ и выделить общий множитель $(\cos x - 1)$.

4. $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z; x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

5. $x = \pi k, k \in Z.$ Указание: $\sin 3x - \sin x = 2 \sin x.$

В а р и а н т № 7

1. $x = \frac{\pi}{5}k, k \in Z; x = \frac{\pi}{10}(4k+1), k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z; x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

3. $x = \operatorname{arctg} x(2 \pm \sqrt{3}) + \pi k, k \in Z.$

4. $x = -40^\circ + 60k, k \in Z.$

Указание: обозначить $(40^\circ + x) = y$; $\operatorname{tg} 3y + \operatorname{tg} y = 2 \sin 2y$ и т.д.

5. $x = -2 + \pi k, k \in Z$; $x = -1,5 + \pi k, k \in Z$.

**Уравнения, решаемые с помощью формул
сложения углов и разложения произведения
тригонометрических функций в сумму**

В а р и а н т № 1

1. $x = \frac{\pi}{10}(2n+1), n \in Z$.

2. $x = \frac{2}{9}\pi(3n \pm 1), n \in Z$.

3. $x = -10^\circ + 180^\circ k, k \in Z$; $x = -70^\circ + 180^\circ k, k \in Z$.

4. $x = \frac{\pi k}{8}, k \in Z$. 5. $x = \frac{\pi}{2}k$; $x = \frac{\pi}{3}k$; $x = \pi k$; $k \in Z$.

В а р и а н т № 2

1. $x = \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in Z$.

2. $x = \frac{\pi}{10}(2n+1), n \in Z$; $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z$.

3. $x = \frac{\pi k}{7}$; $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in Z$.

4. $x = \frac{\pi k}{2} - 1$; $x = \frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{10} - 1, k \in Z$.

5. $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$; $x = \frac{\pi}{11}(2k+1)$; $x = 2\pi k, k \in Z$.

В а р и а н т № 3

1. $x = \pi k, k \in Z.$

2. $x = 45^\circ + 180^\circ k; x = -75^\circ + 180^\circ k, k \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1), k \in Z.$

4. $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}; x = \frac{29\pi}{90} + \frac{2\pi k}{3}, k \in Z.$

5. $x = -60^\circ + 180^\circ k; x = 40^\circ + 180^\circ k, k \in Z.$

В а р и а н т № 4

1. $x = \frac{\pi}{3}k, k \in Z; x = \frac{\pi}{4}k, k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{2}(2k + 1), k \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{10}(10k - 1), k \in Z.$

4. $x = -10^\circ + 180^\circ k; x = -70^\circ + 180^\circ k, k \in Z.$

5. $x = \frac{\pi}{4}k; x = \frac{\pi}{14}(2k + 1), k \in Z.$

В а р и а н т № 5

1. $x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi k}{3}, k \in Z; x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z.$

$$3. x = (-1)^k \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 30^\circ.$$

$$4. x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z. \quad 5. \text{ Нет решения.}$$

В а р и а н т № 6

$$1. x = (-1)^k \frac{\pi}{54} + \frac{2\pi k}{9}.$$

$$2. x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$$

$$3. x = (-1)^n \arcsin\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (4n-1)\frac{\pi}{4}, n \in Z.$$

$$4. x = \frac{\pi}{8}(2n+1), n \in Z; \quad x = \frac{\pi}{9}(6k \pm 1), k \in Z.$$

$$5. x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; \quad x = \operatorname{arctg}(\sqrt{3} \pm 2) + \pi n, n \in Z.$$

В а р и а н т № 7

$$1. x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + n \frac{\pi}{3}, n \in Z.$$

$$2. x = 30^\circ(6k \pm 1), k \in Z. \quad 3. x = \frac{\pi}{8}(4k+1), k \in Z.$$

$$4. x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1); \quad x = \frac{\pi}{11}(2k+1); \quad x = 2\pi k, k \in Z.$$

5. Нет решения.

**Уравнения, решаемые с помощью
формул понижения степени**

В а р и а н т № 1

1. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1), n \in Z; x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1), k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$ 3. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1), n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z.$ 5. $x = 10\pi t, t \in Z.$

В а р и а н т № 2

1. $x = \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in Z; x = \frac{\pi}{14}(2k+1), k \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{8}(2n+1), n \in Z.$ 3. $x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z; x = \frac{\pi n}{9}, n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1), n \in Z; x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in Z.$ 5. $x = \pi k, k \in Z.$

В а р и а н т № 3

1. $x = (-1)^n \arcsin(\sqrt{3}-1) + \pi n, n \in Z.$

2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$ 3. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1), n \in Z.$

4. $x = \frac{\pi}{16}(2n+1), n \in Z; x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1), k \in Z.$

5. $x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{1 \pm \sqrt{41}}{8}\right) + \pi n, n \in Z.$

В а р и а н т № 4

1. $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$.

2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$.

3. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

4. $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in Z$.

5. $x = \frac{\pi}{4}(2k+1)$, $k \in Z$; $x = \frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in Z$.

В а р и а н т № 5

1. $x = (-1)^n \arcsin(\sqrt{3}-1) + \pi n$, $n \in Z$.

2. $x = \frac{\pi}{16}(2n+1)$, $n \in Z$; $x = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$, $k \in Z$.

3. $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in Z$. 4. Нет решения.

5. $x = \pm \frac{3}{8} \arccos(4a-3) + \frac{3}{4} \pi n$, $n \in Z$; $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$.

В а р и а н т № 6

1. $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

2. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

3. $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$. 4. Нет решения.

$$5. x = \pm \frac{1}{2} \arccos\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + \pi k, k \in Z;$$

$$x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in Z.$$

Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$

В а р и а н т № 1

1. $x = 2 \operatorname{arctg} 5 + 2\pi k, k \in Z.$

2. $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{2}}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

3. $x = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k, k \in Z.$

В а р и а н т № 2

1. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; x = 2 \operatorname{arctg} 1,5 + 2\pi n, n \in Z.$

2. Нет решения. 3. $x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k - \frac{\pi}{4}, k \in Z.$

В а р и а н т № 3

1. $x = \pi(2n+1), n \in Z; x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{7} + 2\pi k, k \in Z.$

2. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n + \frac{\pi}{4}, n \in Z.$

3. $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2}} + 2\pi k, k \in Z.$

В а р и а н т № 4

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, n \in Z$. 2. Нет решения.

3. $x = \frac{\pi}{4}(8k+1), k \in Z; x = \frac{\pi}{20}(8k+3), k \in Z$.

В а р и а н т № 5

1. $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{4 \pm \sqrt{5}}{11} + 2\pi k, k \in Z$.

2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$.

3. $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} + 2\pi n - \frac{\pi}{2}, n \in Z$.

В а р и а н т № 6

1. $x = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n - \frac{\pi}{6}, n \in Z$.

2. $x = (-1)^n \frac{\pi}{8} + n \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, n \in Z$.

3. $x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{7}}{7} + \pi n + \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3}, n \in Z$.

В а р и а н т № 7

1. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. 2. $x = \pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{4}(4n-1), n \in Z$.

3. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; x = -2 \operatorname{arctg} \frac{1}{7} + 2\pi n, n \in Z$.

Уравнения смешанного типа

В а р и а н т № 1

1. $x = \frac{\pi}{4}(4k-1), k \in Z; x = (-1)^n \arcsin \frac{\sqrt{2}}{5} + (4n-1) \cdot \frac{3}{4}, n \in Z.$

2. $x = -\frac{5}{6}\pi.$ 3. $x = \frac{\pi}{5} + 2\pi k; \frac{\pi}{7} + \frac{2}{7}\pi n; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}; k, n, m \in Z.$

В а р и а н т № 2

1. $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + (4k+1) \frac{\pi}{4}, k \in Z.$ 2. $x = \frac{\pi}{6}.$

3. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z; x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

В а р и а н т № 3

1. $x = \frac{\pi}{3}.$ 2. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; x = \arctg 3 + \pi n, n \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in Z; x = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi n, n \in Z.$

В а р и а н т № 4

1. $x = -\frac{7}{6}\pi.$ 2. $x = \pi + 2\pi k, k \in Z; x = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z.$

3. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z; x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

В а р и а н т № 5

1. $\frac{\pi}{2}; \pi; 2\pi; \frac{5\pi}{2}.$ 2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z.$

$$3. x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

В а р и а н т № 6

$$1. -\frac{3}{4}\pi; -\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}.$$

$$2. x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z; x = \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}, k \in Z.$$

$$3. x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$$

В а р и а н т № 7

$$1. x = 2\pi k, k \in Z; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$$

$$2. \pm \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{11}k, k = 0; \pm 1; \pm 2; \pm 3.$$

$$3. x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z.$$

В а р и а н т № 8

$$1. x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

$$2. x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \pi k.$$

Указание: использовать формулу $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$.

$$3. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$$

**Решение простейших
тригонометрических неравенств**

В а р и а н т № 1

1. $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z.$

2. $\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z.$

3. $\left(-\frac{5\pi}{6} + \pi k; -\frac{\pi}{6} + \pi k\right], k \in Z.$

В а р и а н т № 2

1. $\left[-\frac{3\pi}{8} + \pi k; -\frac{\pi}{8} + \pi k\right], k \in Z.$

2. $\left(\pi n; \operatorname{arccotg}\left(-\frac{1}{3}\right) + \pi n\right], n \in Z.$ 3. $x \in R.$

В а р и а н т № 3

1. $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$ 2. Нет решения.

3. $\left[-\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{1}{3}\right].$

В а р и а н т № 4

1. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5}{6}\pi + 2\pi n, k \in Z.$ 2. Нет решения.

3. $\left[\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right).$

В а р и а н т № 5

$$1. \pi k - \frac{3\pi}{8} \leq x \leq -\frac{\pi}{8} + \pi k, k \in Z.$$

$$2. \left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n \right], n \in Z.$$

$$3. -\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \pi n, n \in Z.$$

В а р и а н т № 6

$$1. -\frac{17}{12}\pi + 2\pi n \leq x \leq -\frac{\pi}{12} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\text{или } \left[-\frac{17}{12}\pi + 2\pi n; -\frac{\pi}{12} + 2\pi n \right].$$

$$2. \left(-\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{\pi}{3} + \pi k \right), k \in Z.$$

$$3. \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \right), k \in Z.$$

В а р и а н т № 7

$$1. \left(\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k; \pi - \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2\pi k \right), k \in Z.$$

$$2. x \in \left(-\frac{3\pi}{2} + 9\pi k; \frac{3\pi}{2} + 9\pi k \right), k \in Z.$$

$$3. \left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}; \frac{3}{8}\pi + k\frac{\pi}{2} \right), k \in Z.$$

В а р и а н т № 8

1. $\left(-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right), n \in Z.$

2. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right].$

3. $-\sin x - \cos x.$

В а р и а н т № 9

1. Указание: выразить $\operatorname{tg} 2x$ через $\operatorname{tg} x$; $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + \pi n, \pi n\right);$

$x \in \left(\frac{\pi}{4} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z.$

2. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n; [2\pi n; \pi + 2\pi n], n \in Z.$

3. $x_1 = \frac{\pi}{6}; x_2 = \frac{5\pi}{6}; x \in \left[-\frac{7\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right], k \in Z.$

Решение систем тригонометрических уравнений

В а р и а н т № 1

1. $x = \pi k + \frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{4}; y = -\pi k + \frac{\pi}{8} \mp \frac{\pi}{4}.$

2. $x = \frac{\pi}{6}(6n \pm 1) + \frac{\pi}{6}; y = (6n \pm 1)\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}, n \in Z.$

В а р и а н т № 2

1. $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + 2\pi n + \frac{\pi}{12};$

$$y = \pm \arccos \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + 2\pi n - \frac{\pi}{12}, n \in Z.$$

$$2. x = \frac{\pi}{3}(3n+1); y = \frac{\pi}{6}(6n+1), n \in Z.$$

В а р и а н т № 3

$$1. x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n + \frac{\pi}{8}; y = \mp \frac{\pi}{3} - 2\pi n + \frac{\pi}{8}, n \in Z.$$

$$2. x = \frac{\pi}{3}(2+3n); y = \frac{\pi}{3}(2-3n), n \in Z.$$

В а р и а н т № 4

$$1. x = \frac{\pi}{6} + \pi n; y = \frac{\pi}{6} - \pi n, n \in Z.$$

$$2. x = \frac{\pi}{4} + \pi k; y = \frac{\pi}{6} - \pi k, k \in Z;$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k; y = -\frac{\pi}{4} - \pi k, k \in Z.$$

Содержание

Тригонометрические функции произвольного угла	3
Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента. Основные тригонометрические формулы	9
Тригонометрические функции суммы, разности, двойного и половинного аргумента	15
Преобразование алгебраических сумм тригонометрических функций в произведение. Обратное преобразование	21
Тригонометрические суммы и их графики	27
Обратные тригонометрические функции	31
Тригонометрические уравнения. Уравнения вида: $\sin x = a$; $\cos x = a$; $\operatorname{tg} x = a$; $\operatorname{ctg} x = a$	37
Уравнения, приводимые к алгебраическим	43
Уравнения, решаемые разложением на множители	47
Однородные уравнения	53
Уравнения, решаемые с помощью формул сложения тригонометрических функций	59
Уравнения, решаемые с помощью формул сложения углов и разложения произведения тригонометрических функций в сумму	63
Уравнения, решаемые с помощью формул понижения степени	69
Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$	75
Уравнения смешанного типа	79
Решение простейших тригонометрических неравенств	85
Решение систем тригонометрических уравнений	91
Ответы	93

Серия «Библиотечка учителя»

Алевтина Владимировна Макеева

**Карточки по тригонометрии
10—11 классы**

Дидактический материал для учителей

Гл. редактор *Э. Г. Донецкая*. Дизайн обложки *И. А. Плосконос*.
Техн. редактор *С. В. Лихобаба*. Комп. верстка *А. А. Палин*. Корректор
О. С. Чумак.

Диапозитивы предоставлены издательством.

Лицензия ИД № 01856 от 25.05.2000. Подписано в печать 22.05.2002.
Формат 60×84 1/16. Гарнитура "Литературная". Бумага тип. № 2.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 7,44. Тираж 8000 экз. Заказ № 1667.

ОАО «Издательство «Лицей»
Тел./факс: (845-2) 27-22-36

Государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красно-
го Знамени полиграфический комбинат Министерства Российской Фе-
дерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых
коммуникаций. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.



ISBN 5-8053-0156-3



9 785805 301569 >