

Экзамен

без
проблем

наглядно

доступно

И. В. Третьяк

ГЕОМЕТРИЯ

в схемах
и таблицах

эффективная подготовка к ЕГЭ



Наглядно

Доступно

И. В. Третьяк

ГЕОМЕТРИЯ

В схемах
и таблицах



МОСКВА 2016

УДК 514(03)
ББК 22.151я2
Т66

Третьяк, Ирина Владимировна.

Т66 Геометрия в схемах и таблицах / И.В. Третьяк. — Москва : Эксмо, 2016. — 128 с. — (Наглядно и доступно).

ISBN 978-5-699-85283-3

В издании в сжатой, концентрированной форме приводится основной теоретический материал, охватывающий школьный курс геометрии. Термины, понятия, теоремы и формулы объединены в наглядные логические модули, позволяющие лучше понять и усвоить информацию.

Пособие окажет учащимся существенную помощь в подготовке к единому государственному экзамену по математике.

**УДК 514(03)
ББК 22.151я2**

ISBN 978-5-699-85283-3

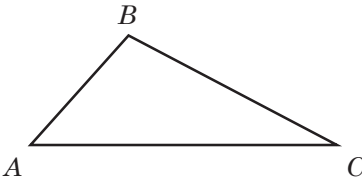
© Третьяк И.В., 2016
© Оформление. ООО «Издательство
«Эксмо», 2016

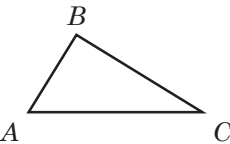
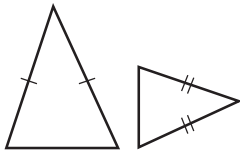
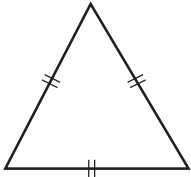
СОДЕРЖАНИЕ

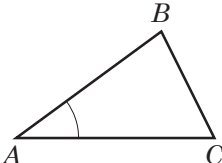
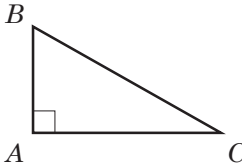
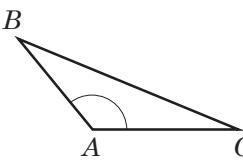
1. Планиметрия	4
Треугольник	4
Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат	18
Трапеция	22
Окружность и круг	25
Многоугольник	33
2. Прямые и плоскости в пространстве	38
Взаимное расположение двух прямых в пространстве.....	38
3. Многогранники	51
Призма	51
Параллелепипед	54
Куб	57
Пирамида	57
Сечения куба, призмы, пирамиды	64
Правильные многогранники	65
4. Тела и поверхности вращения	67
Цилиндр	67
Конус	70
Усечённый конус	72
Шар и сфера	74
5. Измерение геометрических величин	77
Угол. Величина угла, градусная мера угла	77
Дуга	77
Углы в пространстве	78
Длина отрезка, ломаной, окружности.	
Периметр многоугольника	81
Расстояние в пространстве	82
Площади треугольника, четырёхугольника, круга и его частей	88
Комбинации тел.....	99
6. Координаты и векторы	107
Декартовы координаты.....	107
Векторы	118
Операции над векторами	121

1. ПЛАНИМЕТРИЯ

Треугольник

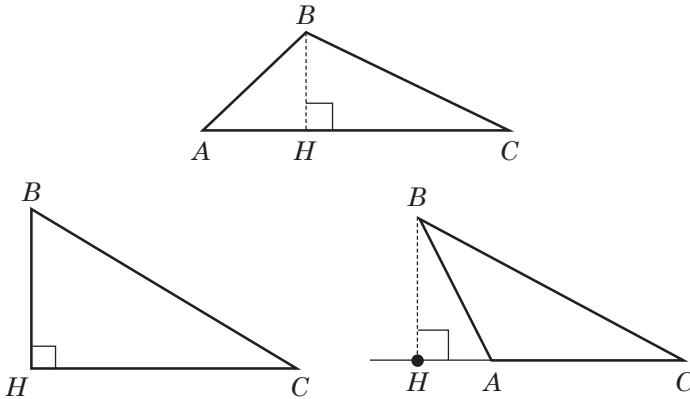
<p>Треугольник — фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой, и трёх отрезков, которые их попарно соединяют</p>	 <p>$\triangle ABC$, A, B, C — вершины; AB, BC, AC — стороны</p>
--	--

<p>В зависимости от соотношения сторон выделяют такие виды треугольников:</p>		
		
<p>разносторонний — все его стороны разные</p>	<p>равнобедренный — равны две стороны</p>	<p>равносторонний (правильный) — все стороны равны</p>

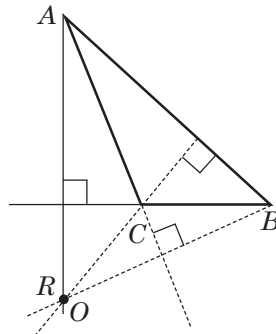
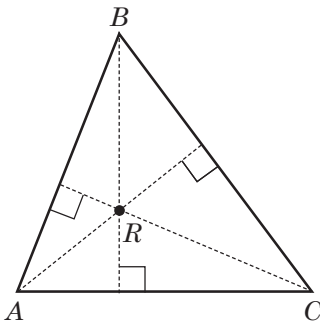
<p>В зависимости от соотношения углов выделяют такие виды треугольников:</p>		
		
<p>остроугольный</p>	<p>прямоугольный</p>	<p>тупоугольный</p>

Высота, медиана, биссектриса,
средняя линия треугольника,
серединый перпендикуляр к сторонам

Высота треугольника — перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону



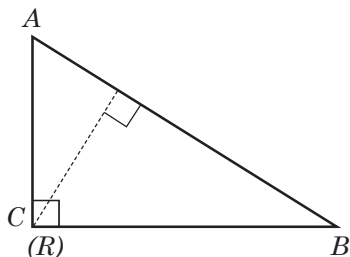
Высоты треугольника пересекаются в одной точке, которая называется **ортоцентром**. Положение ортоцентра R зависит от вида треугольника



остроугольный
внутри области
треугольника

тупоугольный
вне области
треугольника

Окончание таблицы



прямоугольный (R совпадает с C)

Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам. То есть **наибольшая** высота проведена к **наименьшей** стороне, а **наименьшая** высота — к **наибольшей** стороне.

Медиана треугольника — это отрезок, соединяющий вершину с **серединой** противоположной стороны.

Свойство медианы треугольника

Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника.

$$BG:GM = 2:1;$$

$$GC:GN = 2:1;$$

$$AG:GK = 2:1$$

Задача.

а) $GM = 3$ см, BM — ?

Решение.

$GM = 3$ см, тогда $BG = 6$ см;

$BM = 6 + 3 = 9$ (см).

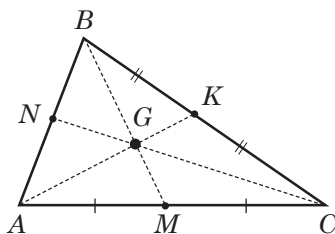
б) $AG = 12$ см, AK — ?

Решение.

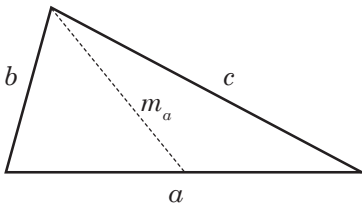
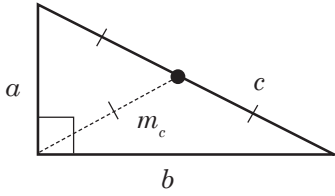
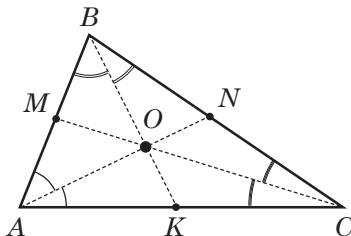
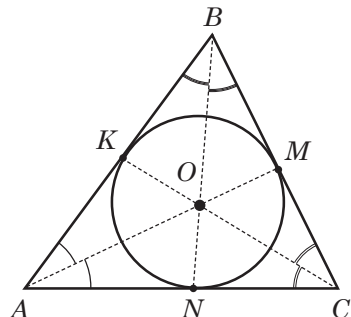
$AG = 12$ см, $GK = 6$ см,

$AK = 12 + 6 = 18$ (см).

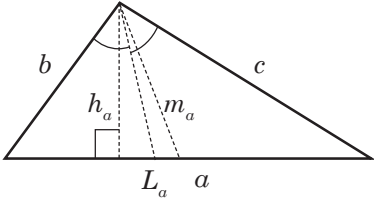
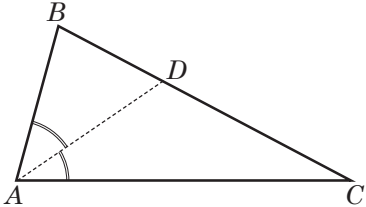
Ответ: а) 9 см; б) 18 см.



Окончание таблицы

<p>Медианы пересекаются в одной точке, она называется центром, или центром масс</p>	
<p>Медиану можно вычислить по формуле:</p> $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$	
<p>$m_c = \frac{1}{2}c$</p> <p>Медиана, проведённая к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна его половине</p>	
<p>Биссектриса угла треугольника — отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны и делящий угол пополам</p>	
<p>Эта точка является центром вписанной в треугольник окружности. Точка O — центр вписанной окружности, AM, CK и BN — биссектрисы</p>	

Окончание таблицы

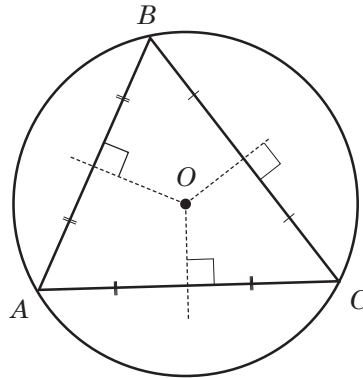
<p>Свойство биссектрисы треугольника</p> <p>Биссектриса угла треугольника делит его противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам</p>	$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC};$ <p>AD — биссектриса</p>
<p>$m_a \geq L_a \geq h_a$,</p> <p>где m — медиана, L — биссектриса, h — высота</p>	
<p>Задача.</p> <p>$BD = 6$ см, $DC = 8$ см, AD — биссектриса; $P_{\triangle ABC} = 35$ см. AB — ? AC — ?</p> <p><i>Решение.</i></p> <p>$AB + AC = P_{\triangle ABC} - BC =$ $= 35 - (6 + 8) = 21$ (см).</p> <p>По свойству биссектрисы:</p> $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4};$ $\left. \begin{array}{l} AB = 3x \\ AC = 4x \end{array} \right\} 21;$ <p>$7x = 21; x = 3;$ $AB = 3 \cdot 3 = 9$ (см); $AC = 4 \cdot 3 = 12$ (см).</p> <p><i>Ответ:</i> 12 см.</p>	

Серединный перпендикуляр

— прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему.

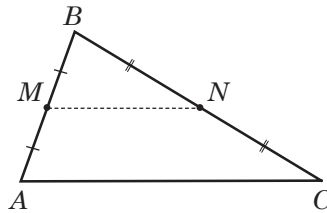
Три серединных перпендикуляра в треугольнике пересекаются в одной точке.

Эта точка — **центр окружности, описанной около данного треугольника**



Средняя линия треугольника — отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне, а её длина равна половине третьей стороны



$$MN \parallel AC \text{ и } MN = \frac{1}{2} AC$$

Задача.

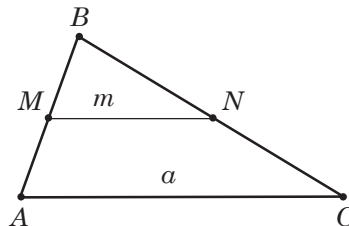
Средняя линия равно-
стороннего треугольника
равна 2,5 см.

Найти: его периметр.

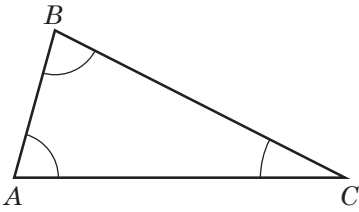
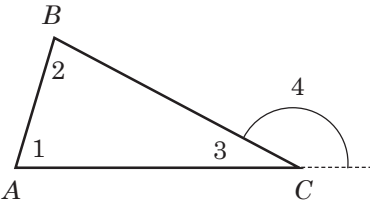
Решение.

По теореме о средней линии
 $m = 0,5a$, тогда
 $a = 2m = 5$ см. $P = 3a = 15$ см.

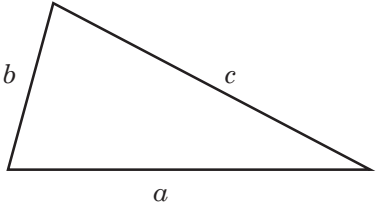
Ответ: 15 см.



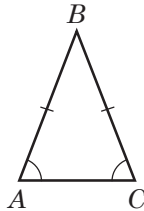
Свойства сторон и углов треугольника

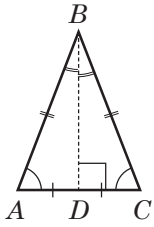
<p>Сумма углов треугольника равна 180°</p> $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$	
Внешний угол треугольника	
<p>Внешний угол треугольника при данной вершине — это угол, смежный с внутренним углом треугольника.</p> <p>$\angle 4$ — внешний (при вершине C)</p>	
Свойства внешнего угла треугольника	
<p>Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним</p>	$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$
<p>Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним</p>	$\angle 4 > \angle 1, \angle 4 > \angle 2$

Неравенство треугольника

$a < b + c$ $a > b - c $	
---------------------------	---

Равнобедренный треугольник

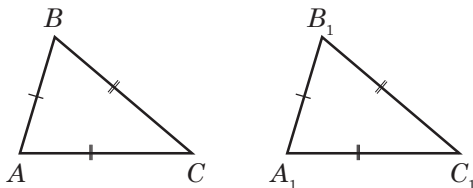
<p>$\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$) AC — основание, AB и BC — боковые стороны</p>	
---	---

	<p>Свойства</p> <p>Если в $\triangle ABC$ $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$ (углы при основании равны)</p>	<p>Признаки</p> <p>Если в $\triangle ABC$ $\angle A = \angle C$, то $AB = BC$ (равнобедренный треугольник)</p>
---	---	---

<p>Если $\triangle ABC$ — равнобедренный и BD — медиана, проведённая к основанию, то BD — высота и биссектриса</p>	<p>Если в треугольнике совпадают:</p> <ul style="list-style-type: none"> а) высота и медиана или б) высота и биссектриса или в) медиана и биссектриса, <p>то треугольник является равнобедренным</p>
---	--

Равенство треугольников

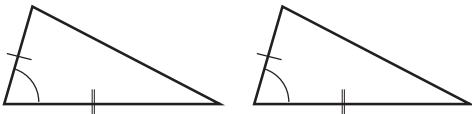
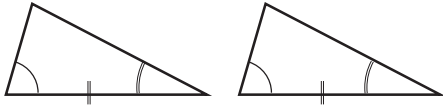
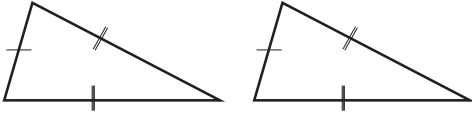
<p>$\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ \Leftrightarrow</p>	<p>$AB = A_1B_1$ $AC = A_1C_1$ $BC = B_1C_1$</p>	<p>$\angle A = \angle A_1$ $\angle B = \angle B_1$ $\angle C = \angle C_1$</p>
--	---	---



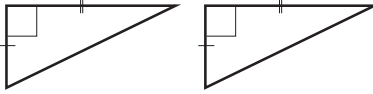
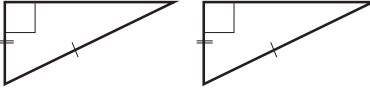

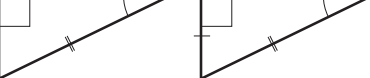
Свойства равных треугольников

1. У равных треугольников равны соответствующие элементы (стороны, углы, медианы, высоты и др.).
2. У равных треугольников против равных сторон лежат равные углы, против равных углов — равные стороны

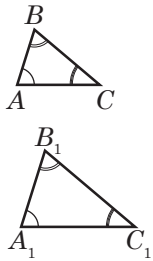
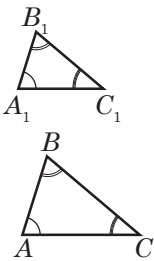
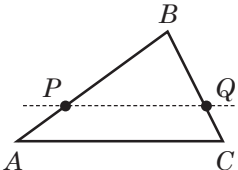
Признаки равенства треугольников

По двум сторонам и углу между ними	
По стороне и двум прилежащим углам	
По трём сторонам	

Признаки равенства прямоугольных треугольников

По двум катетам	По гипотенузе и катету
	
По катету и острому углу	По гипотенузе и острому углу
	

Подобие треугольников

<p>Подобные треугольники — это треугольники, у которых соответствующие углы равны, а соответствующие стороны пропорциональны.</p> $\angle A = \angle A_1; \angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1;$ $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} \Leftrightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$	
<p>Свойства подобных треугольников</p>	
$\frac{P}{P_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = k$	<p>Отношение периметров равно отношению соответственных сторон и равно коэффициенту подобия</p>
$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\frac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = k^2$	<p>Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия</p>
<p>Признаки подобия треугольников</p>	
	<p>Если $\angle A = \angle A_1$ и $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ — по двум равным углам</p> <p>Если $\angle A = \angle A_1$ и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ — по двум пропорциональным сторонам и углу между ними</p> <p>Если $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ — по трём пропорциональным сторонам</p>
	<p>Если $PQ \parallel AC$, то $\triangle PBQ \sim \triangle ABC$.</p> <p>Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному</p>

Задача.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$; $AB : BC : AC = 2 : 6 : 7$. $A_1C_1 - A_1B_1 = 35$ см.

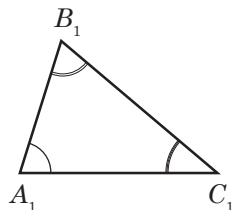
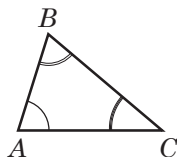
Найти: A_1B_1 ; B_1C_1 и A_1C_1 .

Решение.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow A_1B_1 : B_1C_1 : A_1C_1 = 2 : 6 : 7$;
 $A_1B_1 = 2x$; $B_1C_1 = 6x$; $A_1C_1 = 7x$;

$7x - 2x = 35$; $x = 7$; $A_1B_1 = 14$;
 $B_1C_1 = 42$ и $A_1C_1 = 49$.

Ответ: 14; 42; 49.



Соотношение между элементами прямоугольного треугольника

	$\angle C = 90^\circ$, a, b — катеты, c — гипотенуза, $\angle A = \alpha$		
	$a^2 + b^2 = c^2$ — теорема Пифагора		
$\angle B = 90^\circ - \alpha$; $c > a$; $c > b$			
$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$
$a = c \sin \alpha$	$b = c \cos \alpha$	$a = b \operatorname{tg} \alpha$	$b = a \operatorname{ctg} \alpha$

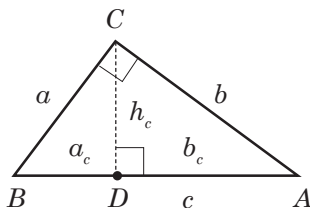
$\triangle ACD \sim \triangle ABC$

$\triangle CBD \sim \triangle ABC$

$\triangle ACD \sim \triangle CBD$

CD — высота,

$CD = c$



$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = c \cdot a_c$$

$$b^2 = c \cdot b_c$$

Задача.

$a_c = 9; b_c = 16; a, b, c, h$ — ?

Решение.

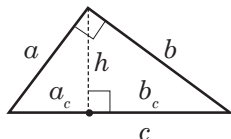
$h^2 = 9 \cdot 16; h = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12;$

$c = 9 + 16 = 25;$

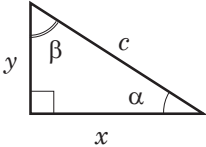
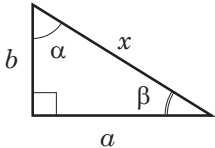
$a^2 = a_c \cdot c; a = \sqrt{9 \cdot 25} = 3 \cdot 5 = 15;$

$b^2 = b_c \cdot c; b = \sqrt{16 \cdot 25} = 4 \cdot 5 = 20.$

Ответ: 15; 20; 25; 12.



Решение прямоугольных треугольников

Дано	Найти	Решение
 <p>c — гипотенуза; α — острый угол</p>	<p>x, y, β</p>	<p>$\beta = 90^\circ - \alpha;$ $x = c \cos \alpha;$ $y = c \sin \alpha$</p>
<p>Пример 1.</p> <p><i>Дано:</i> $c = 2, \alpha = 20^\circ.$</p> <p><i>Найти:</i> $\beta; x; y.$</p> <p><i>Решение.</i></p> <p>$\beta = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ;$ $x = c \cos 20^\circ = 2 \cdot 0,9397 \approx 1,88;$ $y = c \sin 20^\circ = 2 \cdot 0,3420 \approx 0,68.$</p> <p><i>Ответ:</i> $70^\circ; 1,88; 0,68.$</p>		
 <p>a — катет; b — катет</p>	<p>x, α, β</p>	<p>$x = \sqrt{a^2 + b^2};$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$ или $\beta = 90^\circ - \alpha$</p>

Пример 2.

Дано: $a = 11$, $b = 60$.

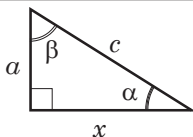
Найти: c , α , β .

Решение: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{11}{60} \approx 0,833$.

По таблице Брадиса $\alpha \approx 10^\circ$; $\beta = 90^\circ - 10^\circ = 80^\circ$;

$$c = \sqrt{11^2 + 60^2} = \sqrt{3721} = 61.$$

Ответ: $c = 61$; $\alpha = 10^\circ$; $\beta = 80^\circ$.



c — гипотенуза;
 a — катет

x , α , β

$$x = \sqrt{c^2 - a^2};$$

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\text{или } \beta = 90^\circ - \alpha$$

Пример 3.

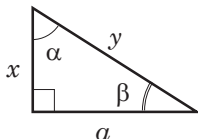
Дано: $a = 84$, $c = 85$.

Найти: x , α , β .

Решение: $x = \sqrt{85^2 - 84^2} = 13$; $\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{84}{85} \approx 0,9882$;

$\alpha \approx 81^\circ$; $\beta = 90^\circ - 81^\circ = 9^\circ$.

Ответ: $x = 13$; $\alpha = 81^\circ$; $\beta = 9^\circ$.



a — катет;
 α — острый угол,
противолежащий a

x , y , β

$$\beta = 90^\circ - \alpha;$$

$$x = a \operatorname{ctg} \alpha;$$

$$y = \frac{a}{\sin \alpha}$$

Пример 4.

Дано: $a = 9$, $\alpha = 68^\circ$.

Найти: β , x , y .

Решение: $\beta = 90^\circ - 68^\circ = 22^\circ$; $y = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{9}{\sin 68^\circ} \approx \frac{9}{0,9277} \approx 9,71$;

$x = a \operatorname{tg} 22^\circ \approx 9 \cdot 0,4040 \approx 3,64$.

Ответ: 22° ; $3,64$; $9,71$.

Соотношения между сторонами и углами в произвольном треугольнике

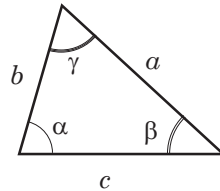
Теорема синусов

Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Теорема косинусов

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma; \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta; \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \end{aligned}$$



R — радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами a, b, c

Задача 1.

Дано: $\triangle ABC$,

$$\angle A = \angle C = 67^\circ 30', \quad AC = 10\sqrt{2}.$$

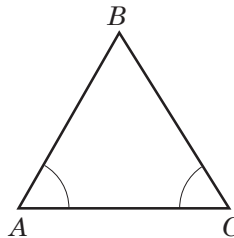
Найти: R .

Решение.

$$\angle B = 180^\circ - (67^\circ 30' + 67^\circ 30') = 45^\circ;$$

$$R = \frac{AC}{2 \sin \angle B} = \frac{10\sqrt{2}}{2 \cdot \sin 45^\circ} = \frac{10\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 10.$$

Ответ: 10.



Задача 2.

Дано: $a = 8, c = 13, \gamma = 120^\circ$.

Найти: b .

Решение.

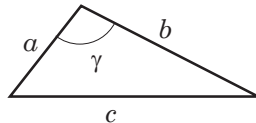
Пусть $b = x$, по теореме косинусов:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos 120^\circ; \quad \cos 120^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 13^2;$$

$$x^2 + 8x - 105 = 0; \quad x = b = 15.$$

Ответ: 15.



Следствия из теоремы косинусов

1. Косинус угла можно вычислить по формуле:

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Определение вида треугольника по теореме косинусов:

если $a^2 + b^2 < c^2$, γ — тупой угол, треугольник тупоугольный; если $a^2 + b^2 > c^2$, γ — острый угол, треугольник остроугольный;

если $a^2 + b^2 = c^2$, $\gamma = 90^\circ$, то треугольник прямоугольный.

3. Если a , b и c — стороны треугольника, то медиана, проведённая к стороне a , равна:

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2(c^2 + b^2) - a^2}$$

Задача 3.

Дано: $a = 5$, $b = 5\sqrt{3}$; $c = 10$.

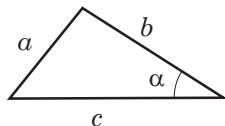
Найти: α .

Решение.

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{10^2 + (5\sqrt{3})^2 - 5^2}{2 \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

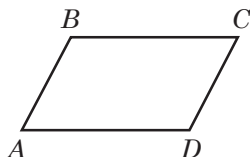
$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}; \alpha = 30^\circ.$$

Ответ: 30° .



Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

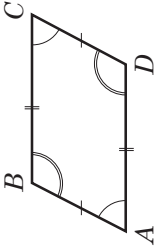
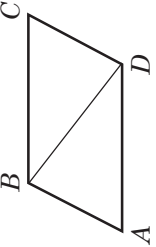
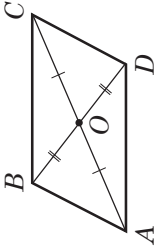
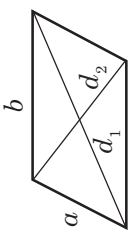
Параллелограмм



Параллелограмм — четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

$AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD \Leftrightarrow ABCD$ — параллелограмм

Окончание таблицы

	Свойства	Признаки
	<p>Если $ABCD$ — параллелограмм, то $AB = CD$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$</p>	<p>Если $ABCD$ — четырёхугольник и $BC \parallel AD$; $BC = AD$, то $ABCD$ — параллелограмм. Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AB = DC$ и $AD = BC$, то $ABCD$ — параллелограмм</p>
	<p>Если $ABCD$ — параллелограмм, BD — диагональ, то $\triangle ABD = \triangle CDB$</p> <p>Если $ABCD$ — параллелограмм, то $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (сумма соседних углов равна 180°)</p>	<p>—</p>
	<p>Если $ABCD$ — параллелограмм, AC и BD — диагонали, то $AO = OC$; $BO = OD$</p>	<p>Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AO = OC$; $BO = OD$, то $ABCD$ — параллелограмм</p>
	<p>Сумма квадратов диагоналей равна удвоенной сумме квадратов его смежных сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$</p>	<p>Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон: $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$</p>

Задача.

Дано: $a = 7$, $b = 11$, $d_1 : d_2 = 7 : 6$.

Найти: d_1 и d_2 .

Решение.

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2;$$

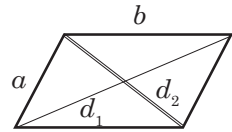
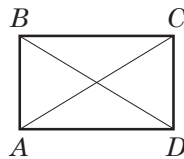
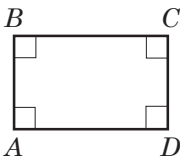
$$d_1 : d_2 = 7 : 6; d_1 = 7x; d_2 = 6x;$$

$$(6x)^2 + (7x)^2 = 2 \cdot 7^2 + 2 \cdot 11^2; 85x^2 = 340;$$

$$x = 2; d_1 = 6 \cdot 2 = 12; d_2 = 7 \cdot 2 = 14.$$

$$d_1 = 12; d_2 = 14.$$

Ответ: 12; 14.

**Прямоугольник**

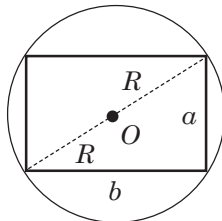
Прямоугольник — параллелограмм, у которого все углы прямые

Свойства

1. Все свойства параллелограмма.
2. Если $ABCD$ — прямоугольник, то $AC = BD$ (диагонали равны)

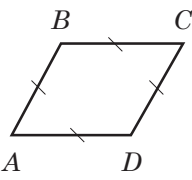
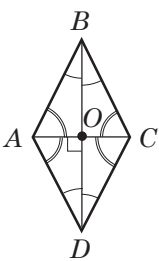
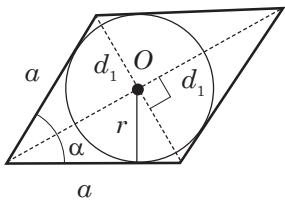
Признаки

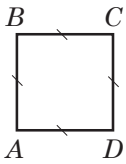
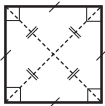
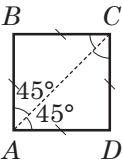
1. Если $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90^\circ$, то $ABCD$ — прямоугольник.
2. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то $ABCD$ — прямоугольник



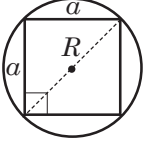
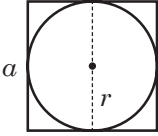
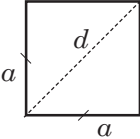
Вокруг любого прямоугольника можно описать окружность:

$$R = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$$

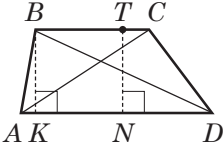
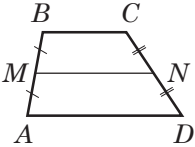
Ромб		
		<p>Ромб — параллелограмм, у которого все стороны равны</p>
Свойства		Признаки
<p>1. Все свойства параллелограмма. 2. Если $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали, то: а) $AC \perp BD$; б) диагонали являются биссектрисами углов</p>		<p>Если $ABCD$ — четырёхугольник и $AB = AD = BC = CD$, то $ABCD$ — ромб</p>
		<p>В любой ромб можно вписать окружность:</p> $r = \frac{h}{2} = \frac{a \sin \alpha}{2} = \frac{d_1 d_2}{4a}$

Квадрат		
		<p>Квадрат — прямоугольник, у которого все стороны равны: $AB = BC = CD = AD$</p> <p>или</p> <p>Квадрат — ромб, у которого все углы прямые: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$</p>
		

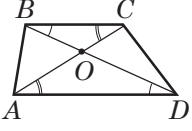
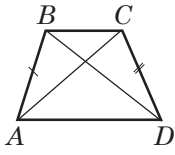
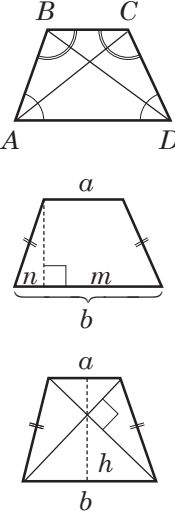
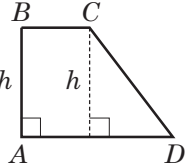
Окончание таблицы

Свойства квадрата	
	<p>Вокруг квадрата можно описать окружность</p> $R = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{d}{2}$
	<p>В квадрат можно вписать окружность</p> $r = \frac{a}{2}$
	<p>Диагональ в $\sqrt{2}$ раз больше стороны, т. е. $d = a\sqrt{2}$ и $a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$</p>

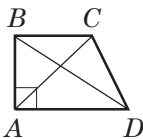
Трапеция

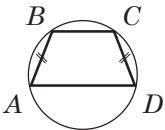
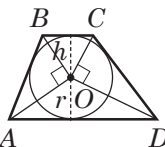
	<p>Трапеция — четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.</p> <p>$AD \parallel BC$, AD и BC — основания; AB и CD — боковые стороны; AC и BD — диагонали; BK и TN — высоты</p>
Средняя линия трапеции	
	<p>Средняя линия трапеции — отрезок, соединяющий середины боковых сторон.</p> <p>MN — средняя линия</p> <p>Свойства: $MN \parallel BC$; $MN \parallel AD$; $MN = \frac{BC + AD}{2}$</p>

Продолжение таблицы

	$\triangle BOC \sim \triangle DOA; \frac{BO}{DO} = \frac{OC}{AO} = \frac{BC}{AD}$
Равнобокая трапеция	
	Равнобокая трапеция — трапеция с равными боковыми сторонами
Свойства	
	<ol style="list-style-type: none"> $\angle A = \angle D; \angle B = \angle C;$ углы при основании равны. $AC = BD;$ диагонали равны. <p>Высота, проведённая из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки m и n длиной $m = \frac{a+b}{2}$ (равен средней линии $n = \frac{b-a}{2}$).</p> <p>Если диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, то высота равна средней линии: $h = \frac{a+b}{2}$.</p>
Прямоугольная трапеция	
	Прямоугольная трапеция — это трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям: $AB \perp AD; AB \perp BC; AB = h$

Окончание таблицы

Свойства		
	<p>Разность квадратов диагоналей равна разности квадратов оснований:</p> $BD^2 - AC^2 = AD^2 - BC^2$	<p>Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов оснований и удвоенного квадрата высоты:</p> $AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2 + 2AB^2$

Трапеция и окружность	
	<p>Если около трапеции описана окружность, эта трапеция равнобокая. Обратно: около равнобокой трапеции можно описать окружность</p>
 <p>$\angle AOB = \angle COD = 90^\circ$ $\triangle AOB$ и $\triangle COD$ — прямоугольные</p>	<p>Если в трапецию вписана окружность, то:</p> <ol style="list-style-type: none"> сумма оснований равна сумме боковых сторон: $AB + CD = BC + AD$; радиус окружности равен половине высоты: $r = \frac{h}{2}$; если соединить центр окружности с вершинами трапеции, треугольники, прилежащие к боковым сторонам, будут прямоугольными

Задача.

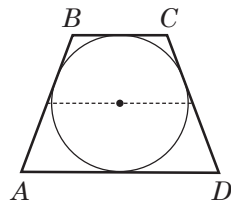
В трапецию вписана окружность,
 $AB = CD = 8$ см.

Найти: среднюю линию трапеции.

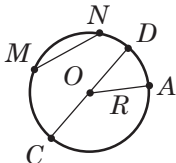

Решение. В трапецию вписана окружность, значит,
 $AB + CD = BC + AD = 8 + 8 = 16$.

Средняя линия составит: $\frac{BC + AD}{2} = \frac{16}{2} = 8$ (см)

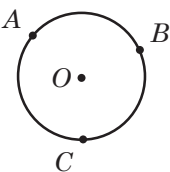
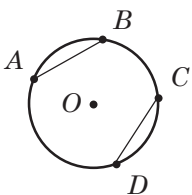
Ответ: 8 см.



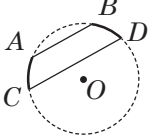
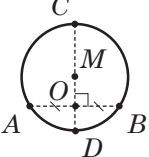
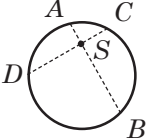
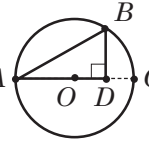
Окружность и круг

	<p>Окружность — множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки (центра окружности) одинаково. O — центр окружности.</p> <p>Радиус окружности — расстояние от центра до точки на окружности. OA, OC, OD — радиусы. Обозначается R или r.</p> <p>Хорда — отрезок, соединяющий две точки на окружности. MN, CD — хорды.</p> <p>Диаметр — хорда, проходящая через центр (обозначается D или d). $D = 2R, CD = 2OA$</p>
	<p>Круг — множество точек плоскости, расстояние до которых от данной точки (центра круга) не превышает данного расстояния (радиуса круга)</p>

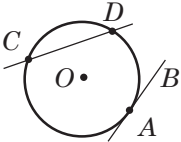
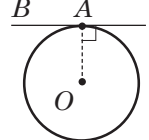
Окружность, хорды и дуги

	<p>Дуга окружности — часть окружности, ограниченная двумя её точками. $\cup AB, \cup BC, \cup AC$</p>
Свойства	
	<p>Равные дуги стягивают равные хорды. Если $\cup AB = \cup CD$, то $AB = CD$.</p> <p>Равные хорды стягивают равные дуги. Если $AB = CD$, то $\cup AB = \cup CD$</p>

Окончание таблицы

	<p>Параллельные хорды отсекают от окружности равные дуги. Если $AB \parallel CD$, то $\cup AC = \cup BD$</p>
	<p>CD — диаметр, AB — хорда. Если $CD \perp AB$, то $AM = MB$; если $AM = MB$, то $CD \perp AB$</p>
	<p>Если хорды AB и CD пересекаются в точке S, то $AS \cdot SB = CS \cdot SD$</p>
	<p>Если AB — хорда, AC — диаметр, $BD \perp AC$, то $AB^2 = AD \cdot AC$; $BD^2 = AD \cdot DC$</p>

Окружность, касательные и секущие

	<p>Касательная — прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку. AB — касательная. Секущая — прямая, имеющая с окружностью две общие точки. CD — секущая</p>
Свойства	
	<p>$OA \perp AB$ Касательная перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания</p>

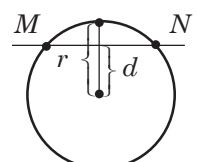
Окончание таблицы

	$AB = AC$ OA — биссектриса $\angle BAC$. Если из одной точки к окружности проведены две касательные, то: а) отрезки касательных равны; б) биссектриса угла между касательными проходит через центр окружности
	Если SB и SC — секущие, то $SA \cdot SB = SD \cdot SC$
	Если SM — касательная, SA — секущая, то $SM^2 = SB \cdot SA$

Взаимное расположение прямой и окружности

d — расстояние от центра окружности до прямой, r — радиус окружности	
	$d > r$ Общих точек нет
	$d = r$ Одна общая точка AB — касательная

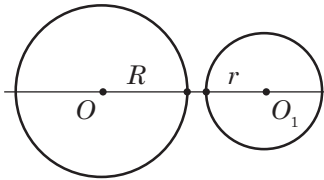
Окончание таблицы

	$d < r$ Две общие точки MN — секущая
---	--

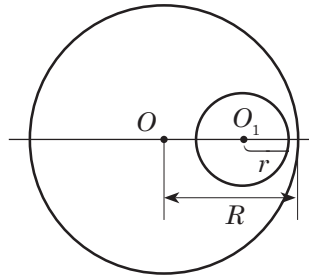
Взаимное расположение двух окружностей

OO_1 — расстояние между центрами, R и r — радиусы окружностей ($R > r$)

Окружности не имеют общих точек

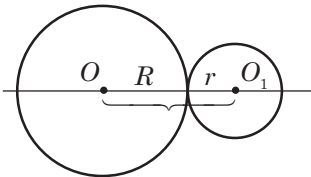


Окружности лежат одна вне другой
 $R + r < OO_1$

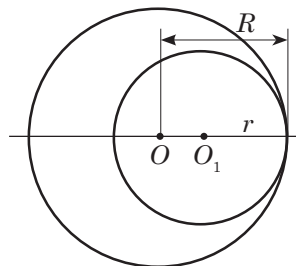


Одна окружность лежит внутри другой
 $OO_1 < R - r$

Окружности касаются (одна общая точка)

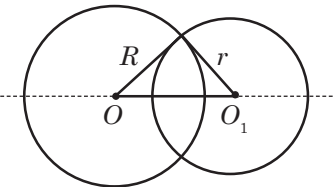
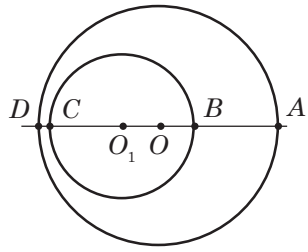


Касаются внешне
 $OO_1 = R + r$

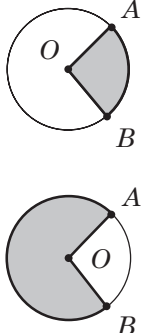
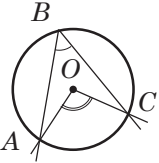


Касаются внутренне
 $OO_1 = R - r$

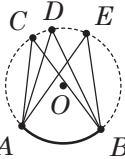
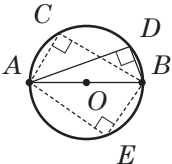
Окончание таблицы

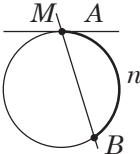
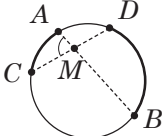
Окружности пересекаются (две общие точки)	
$R - r < OO_1 < R + r$	
	

Углы в окружности

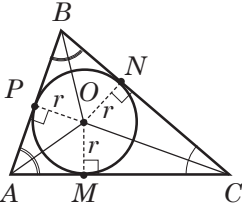
	<p>Центральный угол — плоский угол с вершиной в центре окружности. $\angle AOB$ — центральный угол. $\angle AOB = \cup AB$. Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается</p>
	<p>Вписанный угол — угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают её. $\angle ABC$ — вписанный. Вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается, и половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу:</p> $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$ $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$

Окончание таблицы

	<p>Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.</p> $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$
	<p>Вписанные углы, которые опираются на диаметр, прямые.</p> $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB = 90^\circ$

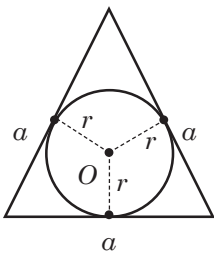
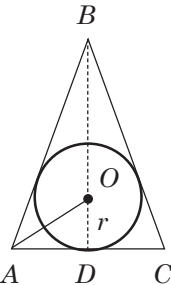
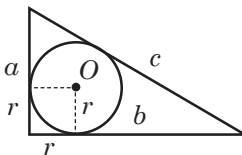
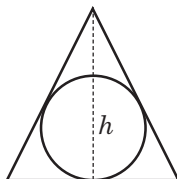
<p>Угол между касательной и секущей</p>  <p>MA — касательная; MB — секущая $\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$</p>	<p>Угол между хордами</p>  <p>AB и CD — хорды $\angle AMC = \frac{1}{2} (\cup AC + \cup BD)$</p>
---	--

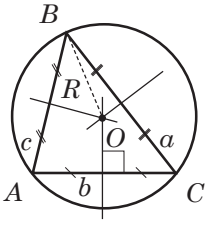

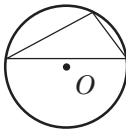

Окружность, вписанная в треугольник,
и окружность, описанная около треугольника

Вписанная окружность	
	<p>Окружность называется вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон. Центр этой окружности — точка пересечения биссектрис углов треугольника.</p> $r = \frac{2S}{a+b+c} \text{ или } r = \frac{S}{p},$

Окончание таблицы

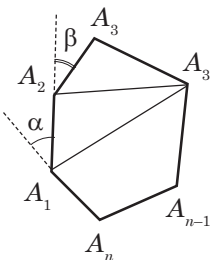
	<p>где $p = \frac{a+b+c}{2}$,</p> <p>S — площадь треугольника, p — полупериметр, a, b, c — длины сторон</p>
--	---

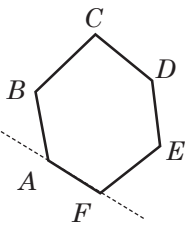
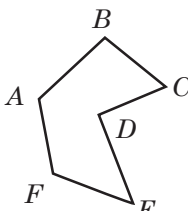
Равно- сторонний треугольник	Равно- бедренный треугольник	Прямо- угольный треугольник
 $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ <p>Точка O — центр вписанной и описанной окружности, точка пересечения биссектрис, медиан, высот</p>	 <p>$AB = BC$ BD — высота, медиана, биссектриса, высота. $OD = r$</p>	 <p>a и b — катеты, c — гипотенуза $r = \frac{a+b-c}{2}$ $a+b = 2R+2r$, R — радиус описанной окружности</p>
<p>Задача.</p> <p>В равностороннем треугольнике высота равна 12 см. Найти радиус вписанной окружности.</p> <p><i>Решение.</i> h — высота, она же и медиана, поэтому $BO : OD = 2 : 1$. $OD = r = 12 : 3 = 4$ (см)</p>		

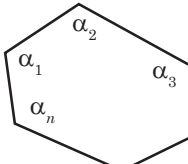
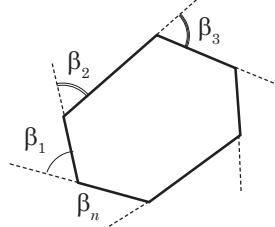
Описанная окружность	
	<p>Окружность называется описанной около треугольника, если она проходит через все его вершины.</p> <p>Центр этой окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.</p> <p>$OA = OB = OC = R$</p>
<p>В произвольном треугольнике: $R = \frac{abc}{4S}$; $R = \frac{a}{2\sin A}$.</p> <p>В равностороннем треугольнике: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.</p> <p>В прямоугольном треугольнике: $R = \frac{c}{2}$,</p> <p>где c — гипотенуза треугольника</p>	
Положение точек описанной окружности в зависимости от вида треугольника	
Остроугольный	
	<p>Центр — во внутренней области треугольника</p>
Тупоугольный	
	<p>Центр — вне области треугольника</p>
Прямоугольный	
	<p>$R = \frac{c}{2} = m_c$</p> <p>Центр — совпадает с серединой гипотенузы</p>

Многоугольник

Сумма углов выпуклого многоугольника

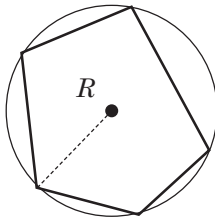
	<p>Многоугольник — простая замкнутая ломаная. Соседние звенья не лежат на одной прямой.</p> <p>$A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$ — вершины; $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ — стороны; A_2A_4, \dots, A_1A_4 — диагонали; $\angle A_1, \angle A_2, \dots, \angle A_n$ — внутренние углы; α, β, \dots — внешние углы многоугольника</p>
---	---

<p>Выпуклый многоугольник лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей сторону</p> 	<p>Невыпуклый многоугольник. Прямая, содержащая сторону многоугольника, делит его плоскость на части.</p> 
--	--

<p>Сумма углов выпуклого n-угольника</p> $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \sum_n = 180^\circ \cdot (n - 2)$	
<p>Сумма внешних углов n-угольника (по одному при вершине)</p> $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n = 360^\circ$	

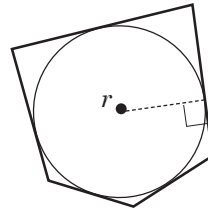
Вписанные и описанные многоугольники

Вписанный многоугольник



Все вершины лежат на окружности

Описанный многоугольник

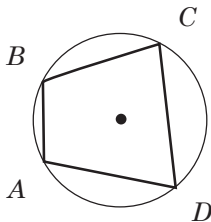


Все стороны — касательные к окружности.

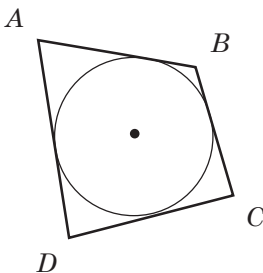
$$S = \frac{P \cdot r}{2},$$

P — периметр, r — радиус окружности

Вписанные и описанные четырёхугольники

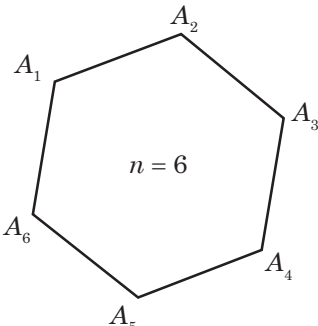
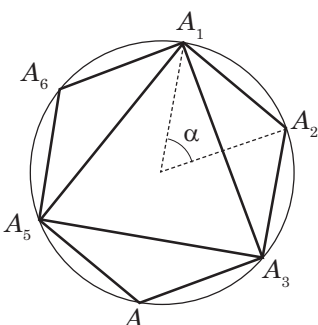
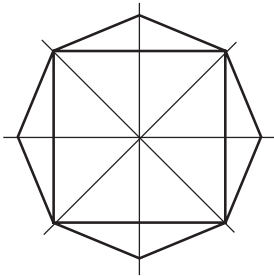


$ABCD$ — вписанный четырёхугольник \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow \angle A + \angle C = 180^\circ$
и $\angle B + \angle D = 180^\circ$



$ABCD$ — описанный четырёхугольник \Leftrightarrow
 $\Leftrightarrow AB + CD = AD + BC$

Правильные многоугольники

 <p style="text-align: center;">$n = 6$</p>	<p>Выпуклый многоугольник называется правильным, если у него все стороны и углы равны.</p> <p>Каждый угол правильного n-угольника равен:</p> $\alpha_n = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$
 <p style="text-align: center;">$n = 6$ и $n = 3$</p>	<p>Внешний угол правильного n-угольника равен</p> $\beta_n = \frac{360^\circ}{n}.$ <p>Периметр правильного n-угольника со стороной a:</p> $P_n = a \cdot n.$ <p>Площадь правильного n-угольника со стороной a:</p> $S_n = \frac{na^2}{4 \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)}$
 <p style="text-align: center;">$n = 4$ и $n = 8$</p>	<p>Площадь правильных</p> <p>а) треугольника</p> $S_3 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$ <p>б) четырёхугольника (квадрата)</p> $S_4 = a^2;$ <p>в) шестиугольника</p> $S_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Вписанные и описанные окружности правильного многоугольника



Вписанная окружность касается всех **сторон** правильного многоугольника.

Описанная окружность проходит через все **вершины** правильного треугольника

R — радиус описанной окружности,
 r — радиус вписанной окружности,
 a — сторона правильного многоугольника,
 S_n — площадь, P_n — периметр

Связь между P_n , R , r , S_n и a

Количество сторон многоугольника	R	r	S
n	$\frac{a}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$	$\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^\circ}{n}$	$\frac{1}{2} P_n r$
3	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a}{2}$	a^2
6	a	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Зависимость стороны a_n
правильного n -угольника от R и r

Количество сторон многоугольника	Зависимость a_n от R и n	Зависимость a_n от r и n
n	$a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$	$a_n = 2r \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n}$
3	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$
4	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6	$a_6 = R$	$a_6 = \frac{2}{3}r\sqrt{3}$

Задача.

В квадрат со стороной a вписана окружность.

Найти:

сторону правильного треугольника, вписанного в эту окружность.

Решение.

Сторона квадрата равна a .

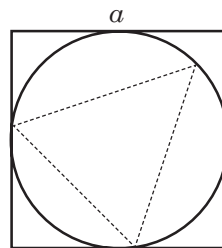
В квадрат вписана окружность,

её радиус $\frac{a}{2}$

В окружность вписан треугольник, его сторона

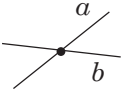
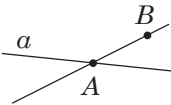
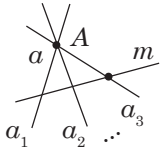
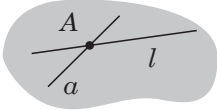
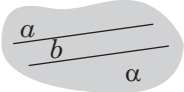
$$a_3 = R\sqrt{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad a_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $a_3 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

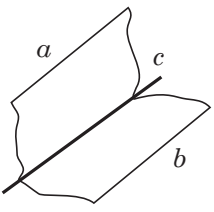
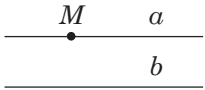
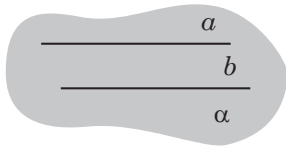
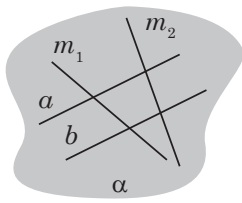


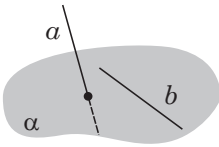
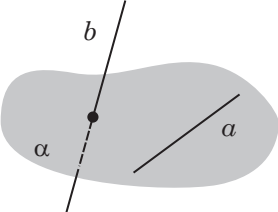
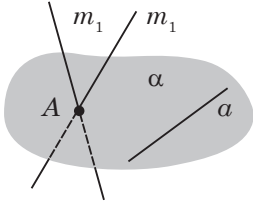
2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

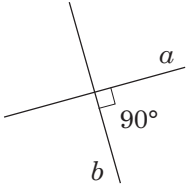
Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Пересекающиеся прямые	
	<p>Пересекающиеся прямые — две прямые, имеющие только одну общую точку</p>
Признаки	Свойства
<p>Если одна точка принадлежит данной прямой, а другая ей не принадлежит, то данная прямая и прямая, проходящая через эти точки, пересекаются</p> 	<p>Через точку вне данной прямой можно провести бесконечно много прямых, пересекающих данную прямую</p> 
	 <p>Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость, и при этом только одну</p>
Параллельные прямые	
 <p>$a \parallel b$</p>	<p>Параллельные прямые — две прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общих точек</p>

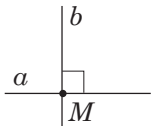
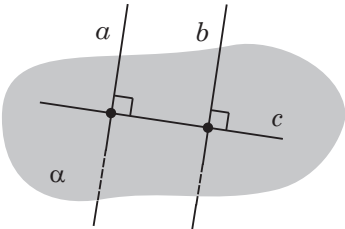
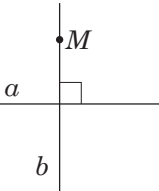
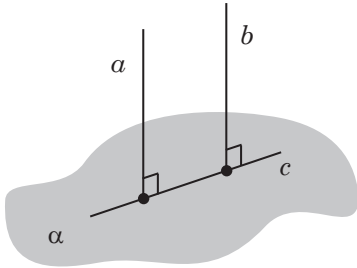
Окончание таблицы

Признаки	Свойства
<p>Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны. Если $a \parallel c$ и $b \parallel c$, то $a \parallel b$</p> 	<p>Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную данной прямой, и при этом только одну</p> 
	<p>Через две параллельные прямые можно провести плоскость, и при этом только одну</p> 
	<p>Все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, лежат с ними в одной плоскости</p>  <p>$a \parallel b$</p> <p>$m_1 \cap a; m_1 \cap b;$ $m_2 \cap a; m_2 \cap b;$ $a, b, m_1, m_2 \subset \alpha$</p>


Скрещивающиеся прямые	
	<p>Скрещивающиеся прямые — две прямые, не лежащие в одной плоскости</p>
Признаки	Свойства
<p>в плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся</p> 	<p>1. Через точку вне данной прямой можно провести бесконечно много скрещивающихся прямых.</p>  <p>2. Для любых двух скрещивающихся прямых в пространстве существует третья прямая, которая является скрещивающейся для каждой из данных двух прямых</p>

Перпендикулярные прямые	
	<p>Перпендикулярные прямые — две прямые, которые пересекаются под углом 90°</p>

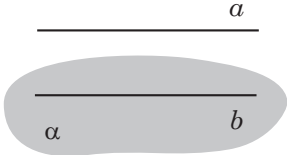
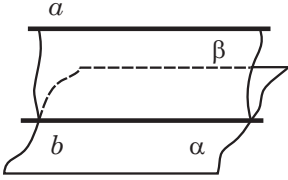
Окончание таблицы


Существование и единственность	Перпендикулярность и параллельность
<p>Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и при этом только одну</p> 	<p>Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны между собой</p>  <p>$a \perp c, b \perp c \Rightarrow a \parallel b$</p>
<p>Через каждую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести перпендикулярную ей прямую, и при этом только одну</p> 	<p>Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой прямой</p>  <p>$a \perp c, a \parallel b \Rightarrow b \perp c$</p>

Параллельность прямой и плоскости

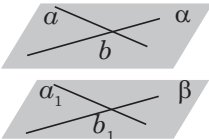
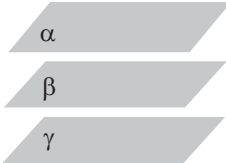
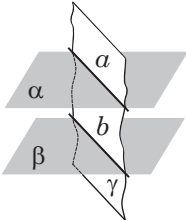
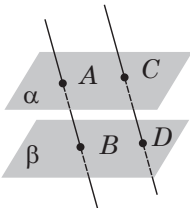
	<p>Прямая и плоскость параллельны, если они не имеют общих точек</p> <p>$a \parallel \alpha$</p>
---	--

Окончание таблицы

Признак	Свойство
 <p>Если $a \parallel b$ и $b \subset \alpha$, то $a \parallel \alpha$.</p> <p>Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-либо прямой в этой плоскости, то она параллельна всей плоскости</p>	 <p>Если $a \parallel b$, β проходит через a, β пересекает α по b, то $a \parallel \alpha$.</p> <p>Если через прямую, параллельную плоскости, провести вторую плоскость, которая пересекает первую, то прямая пересечения плоскостей будет параллельна первой прямой</p>

Параллельность плоскостей	
	<p>Две плоскости называют параллельными, если они не имеют общих точек.</p> <p>$\alpha \parallel \beta$</p>
Признаки	Свойства
<p>Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны</p>	<p>Если две различные плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой</p>

Окончание таблицы

Признаки	Свойства
<p>Прямые обеих плоскостей пересекаются. Если $a \parallel a_1; b \parallel b_1$ ($a \subset \alpha, b \subset \alpha, a_1 \subset \beta, b_1 \subset \beta$), то $\alpha \parallel \beta$.</p> 	<p>Если $\alpha \parallel \beta$ и $\gamma \parallel \beta$, то $\alpha \parallel \gamma$</p> 
	<p>Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.</p> <p>Если $\alpha \parallel \beta$ и плоскость γ пересекает плоскость α по прямой a, плоскость γ пересекает плоскость β по прямой b, то $a \parallel b$</p> 
	<p>Отрезки параллельных прямых, заключённых между параллельными плоскостями, равны.</p> <p>Если $AB \parallel CD$ и $\alpha \parallel \beta$, ($A \in \alpha, C \in \alpha, B \in \beta, D \in \beta$), то $AB = CD$</p> 

Перпендикулярность прямой и плоскости

	<p>Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости.</p> <p>$m \perp \alpha \Leftrightarrow m \perp x$, x — любая прямая плоскости α</p>
--	---

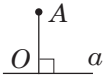
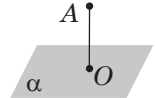
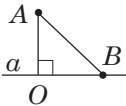
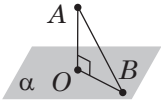
Признак перпендикулярности прямой и плоскости

	<p>Если $a \perp m$ и $b \perp m$ (a и b лежат в плоскости α и пересекаются), то $a \perp \alpha$.</p> <p>Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости</p>
--	--

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

<p>1.</p>	<p>Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и второй прямой.</p> <p>Если $a \parallel b$ и $a \perp \alpha$, то $\alpha \perp b$</p>	<p>Если прямые перпендикулярны одной и той же плоскости, то они параллельны.</p> <p>Если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$, то $a \parallel b$</p>
<p>2.</p>	<p>Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и второй.</p> <p>Если $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$, то $a \perp \beta$</p>	<p>Две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.</p> <p>Если $\alpha \perp a$ и $\beta \perp a$, то $\alpha \parallel \beta$</p>

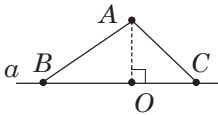
Перпендикуляр и наклонная

На плоскости	В пространстве
 <p>$AO \perp a, O \in a$ AO — перпендикуляр из точки A к прямой a</p>	 <p>$AO \perp \alpha, O \in \alpha$ AO — перпендикуляр из точки A на плоскость α</p>
 <p>AO — расстояние от точки A до прямой a; AB — наклонная</p>	 <p>AO — расстояние от точки A до плоскости α; AB — наклонная</p>
<p>Перпендикуляр короче всякой наклонной. $AO < AB$</p>	

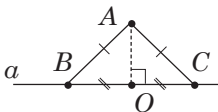
OB — проекция наклонной AB на прямую a



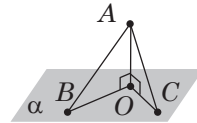
OB — проекция наклонной AB на плоскость α



$$AB > AC \Leftrightarrow BO > OC$$

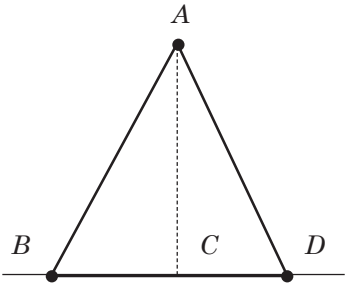
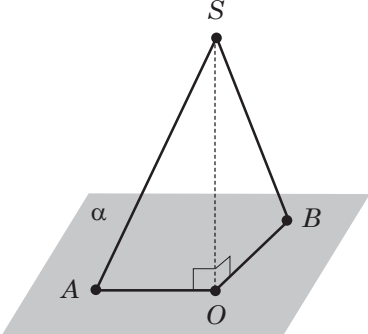


$$AB = AC \Leftrightarrow BO = OC$$

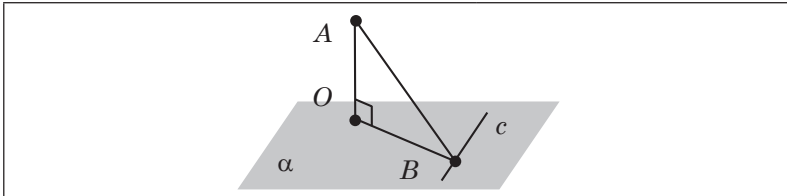


Если из одной точки к одной прямой (плоскости) проведены две наклонные, то:

- равные наклонные имеют равные проекции;
- если проекции наклонных равны, то равны и сами наклонные;
- большая наклонная имеет большую проекцию;
- из двух наклонных больше та, у которой проекция больше

На плоскости	В пространстве
<p>Задача 1.</p>  <p>AC — перпендикуляр, AB и AD — наклонные. $AB = 30$ см, $AD = 26$ см. Проекции наклонных относятся как 5:9.</p> <p><i>Найти:</i> AC.</p> <p><i>Решение.</i> $AB > AD \Leftrightarrow BC > CD$ и $BC = 9x$, $CD = 5x$.</p> <p>По теореме Пифагора: из $\triangle ABC$: $AC^2 = AB^2 - BC^2 =$ $= 30^2 - (9x)^2 = 900 - 81x^2$;</p> <p>из $\triangle ACD$: $AC^2 = AD^2 - DC^2 =$ $= 26^2 - (5x)^2 = 676 - 25x^2$.</p> <p>$900 - 81x^2 = 676 - 25x^2$; $56x^2 = 224$; $x = 2$.</p> <p>$AC = \sqrt{676 - 25 \cdot 2^2} = 24$.</p> <p>$AC = 24$ (см).</p> <p><i>Ответ:</i> 24 см.</p>	<p>Задача 2.</p>  <p>Из точки S на плоскость α проведены наклонные, разность длин которых 6 см. Их проекции — 27 см и 15 см.</p> <p><i>Найти:</i> расстояние от точки до плоскости.</p> <p><i>Решение.</i> $SO \perp \alpha$, $SA > SB \Leftrightarrow AO > OB$, $OA = 27$, $OB = 15$, $BS = x$, $AS = x + 6$.</p> <p>По теореме Пифагора: из $\triangle SOA$: $SO^2 = SA^2 - OA^2 =$ $= (x + 6)^2 - 27^2$;</p> <p>из $\triangle SOB$: $SO^2 = SB^2 - OB^2 =$ $= x^2 - 15^2$.</p> <p>$(x + 6)^2 - 27^2 = x^2 - 15^2$; $x = 39$.</p> <p>$SO = \sqrt{x^2 - 15^2} =$ $= \sqrt{39^2 - 15^2} = 36$.</p> <p>$SO = 36$ (см).</p> <p><i>Ответ:</i> 36 см.</p>

Теорема о трёх перпендикулярах



OB — проекция AB на плоскость α ,
 c — прямая на плоскости α , $OB \perp c \iff AB \perp c$

Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и наклонной.

Обратно: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции прямой

Задача.

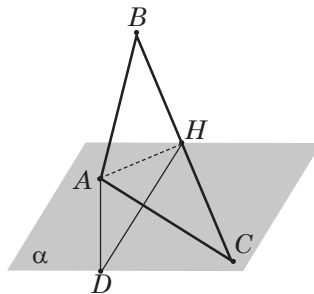
$\triangle ABC$, $AB = AC = 10$ см,
 $BC = 12$ см, $AD \perp (ABC)$, $AD = 6$.

Найти: расстояние от D до BC .

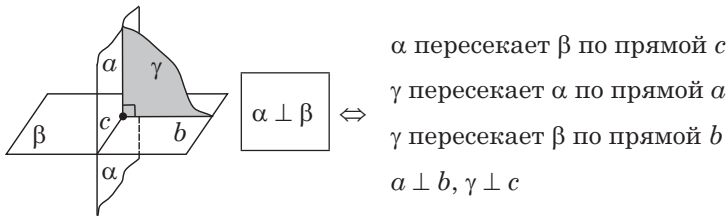
Решение.

1. Проведём $AH \perp BC$.
2. Соединим D и H , по теореме о трёх перпендикулярах $DH \perp BC$, т. к. AH — проекция наклонной DH на плоскость ABC . DH — искомое расстояние.
3. Из $\triangle ACH$: $AH^2 = AC^2 - CH^2$,
 $AH = 8$ (см)
 (AH — высота и медиана треугольника ABC).
4. Из $\triangle ADH$: $DA \perp (ABC)$,
 $DA \perp AH$;
 $DH^2 = AD^2 + AH^2 = 6^2 + 8^2 = 100$;
 $AH = 10$ (см).

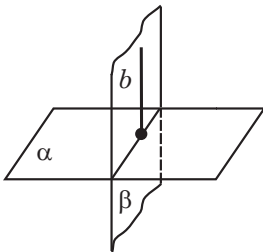
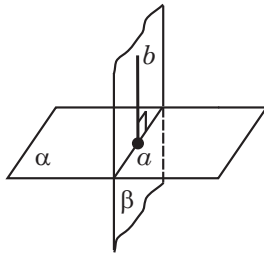
Ответ: 10 см.



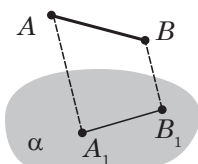
Перпендикулярность плоскостей

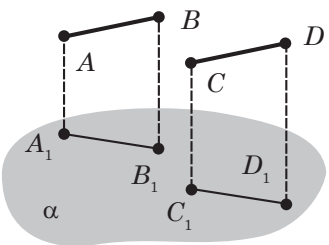
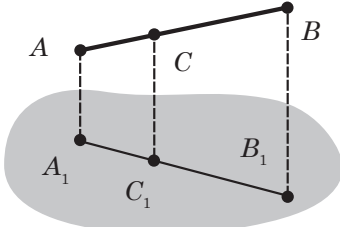


Две пересекающиеся плоскости называют **перпендикулярными**, если третья плоскость, перпендикулярная прямой их пересечения, пересекает эти плоскости по перпендикулярным прямым

Признак перпендикулярности плоскостей	Свойство
<p>Если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны</p>	<p>Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости</p>
<p>Если $b \perp \alpha$ и β проходит через b, то $\beta \perp \alpha$</p> 	<p>Если $\beta \perp \alpha$, β пересекает α по a и $b \perp \alpha$ (b лежит в β), то $b \perp a$</p> 

Параллельное проектирование.
Изображение пространственных фигур
на плоскости

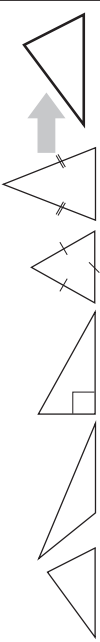
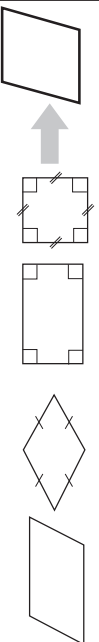
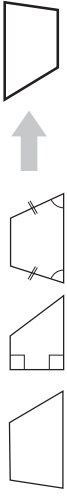

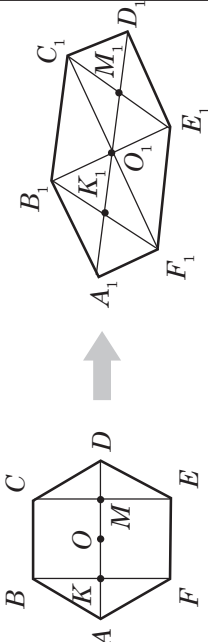
	<p>$AA_1 \parallel BB_1$.</p> <p>Прямая AA_1 пересекает α в точке A_1, т. е. точка A проектируется в точку A_1 на плоскости α.</p> <p>$A \rightarrow A_1; B \rightarrow B_1; AB \rightarrow A_1B_1$</p> <p>Отрезок проектируется в отрезок $AB \rightarrow A_1B_1$</p>
---	---

<p>При параллельном проектировании параллельность отрезков сохраняется.</p> <p>Если $AB \parallel CD$ ($AB \rightarrow A_1B_1; CD \rightarrow C_1D_1$), то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$</p> 	<p>При параллельном проектировании отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется.</p> $\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}$ 
--	--

Следствие

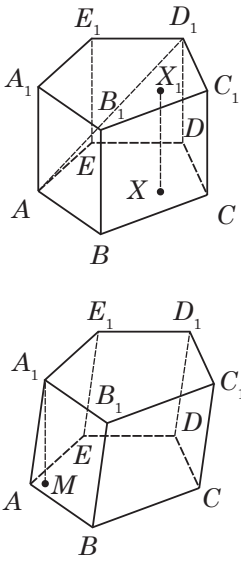
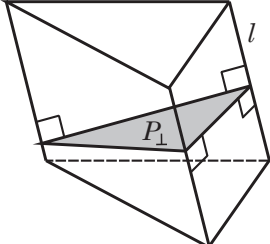
Если C — середина AB , $AB \rightarrow A_1C_1; C \rightarrow C_1$,
то C_1 — середина A_1B_1 .
Середина отрезка проектируется в середину отрезка

Параллельные проекции некоторых плоских фигур (плоскость фигура не параллельна направлению проектирования)

<p>Треугольник Проекция — треугольник любой формы</p>	
<p>Параллелограмм и его виды Проекция — параллелограмм любой формы</p>	
<p>Трапеция Проекция — трапеция любой формы</p>	
<p>Окружность Проекция — эллипс (центр окружности на изображении — точка пересечения сопряжённых диаметров)</p>	
<p>Правильный шестиугольник Проекция — шестиугольник, две вершины — концы диаметра эллипса, а другие четыре — концы хорд, проведённых параллельно сопряжённому диаметру и делящих диаметр в отношении 1 : 2 : 1</p>	

3. МНОГОГРАННИКИ

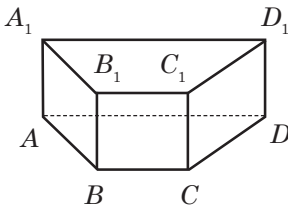
Призма

	<p>Призма — многогранник, состоящий из плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.</p> <p>$ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — основания призмы;</p> <p>AA_1, BB_1, CC_1, \dots — боковые ребра;</p> <p>$ABB_1A_1, BB_1C_1C, \dots$ — боковые грани;</p> <p>AD_1 — диагональ призмы (отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани; $A_1M \perp (ABC)$, $A_1M = H$ — высота)</p>
<p style="text-align: center;">Свойства</p>	<p style="text-align: center;">Формулы</p>
<ol style="list-style-type: none"> 1. Основания призмы равны. 2. Основания призмы лежат в параллельных плоскостях. 3. Боковые ребра параллельны и равны. 4. Боковые грани — параллелограммы 	 <p>Боковая поверхность — сумма площадей боковых граней или</p> $S_{\text{бок}} = P_{\perp} \cdot l,$

Окончание таблицы

	где l — длина бокового ребра; P_{\perp} — сечение плоскостью, перпендикулярной к её боковым граням
	<p>Полная поверхность — сумма боковой поверхности и площадей оснований:</p> $S = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$ <p>Объём призмы</p> $V = S_{\text{осн}} \cdot H_{\text{призмы}}$

Прямая призма



Призма называется **прямой**, если её боковые ребра перпендикулярны основаниям.
 $AA_1 \perp (ABC)$, $BB_1 \perp (ABC)$, ...

Свойства

1. Высота равна боковому ребру.
2. Боковые грани — прямоугольники

Формулы

Боковая поверхность:

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot H,$$

где $P_{\text{осн}}$ — периметр основания; $H = AA_1$ — высота.

Полная поверхность:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

Объём:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H = S_{\text{осн}} \cdot AA_1$$

Задача.

$ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма,
 $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $BC = 5$ см,
 $AC = 12$ см, $S_{\text{полн}} = 270$ см².

Найти: AA_1 .

Решение.

1. По теореме Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 5^2 + 12^2 = 169;$$

$$AB = 13 \text{ (см)}.$$

$$2. S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}};$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 \text{ (см}^2\text{)};$$

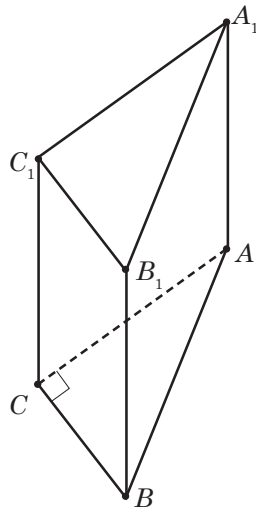
$$S_{\text{бок}} = S_{\text{полн}} - 2S_{\text{осн}} = 270 - 2 \cdot 30 = 210 \text{ (см}^2\text{)};$$

$$S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1;$$

$$AA_1 = \frac{S_{\text{бок}}}{P_{\text{осн}}} = \frac{210}{5 + 12 + 13} = 7.$$

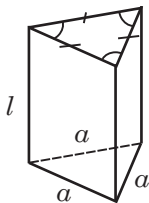
$$AA_1 = 7 \text{ (см)}.$$

Ответ: 7 см.

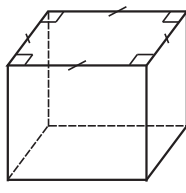


Правильная призма

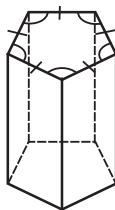
Прямая призма называется **правильной**, если её основа — правильные многоугольники



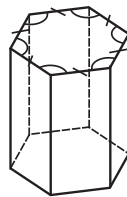
треугольная



четырёх-
угольная



пятиугольная



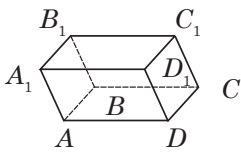
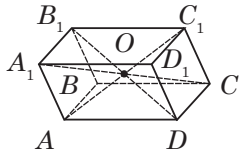
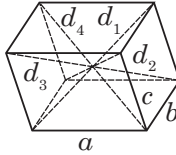
шести-
угольная

Площадь боковой поверхности правильной призмы

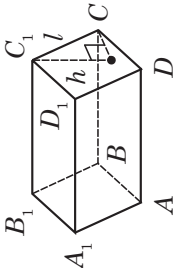
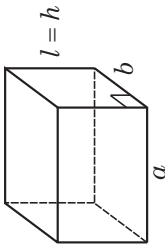
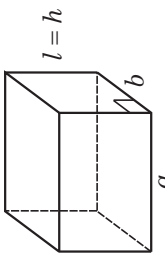
$$S_{\text{бок}} = S_{\text{гр}} \cdot n = aln$$

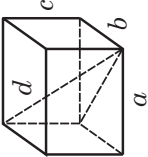
$S_{\text{гр}}$ — площадь грани;
 n — количество граней;
 a — сторона основания;
 l — длина бокового ребра

Параллелепипед

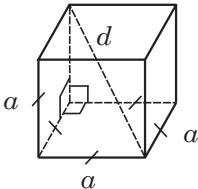
	<p>Параллелепипед — призма, в основании которой лежит параллелограмм</p>
	<p>Свойства:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Все грани — параллелограммы. 2. Противоположные грани параллельны и равны. 3. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. O — середина A_1C, BD_1, AC_1 и B_1D. 4. Точка O — центр симметрии параллелепипеда
	<p>Сумма квадратов всех диагоналей параллелепипеда равна сумме квадратов его рёбер.</p> $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2.$ <p>Существует три вида параллелепипедов.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Прямой — все боковые грани перпендикулярны плоскостям оснований, основания — параллелограммы. 2. Прямоугольный — все боковые грани и основания — прямоугольники. 3. Наклонный — боковые грани не перпендикулярны основаниям, все шесть граней — параллелограммы

Виды параллелепипедов

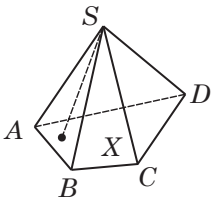
Наклонный	Прямой	Прямоугольный
 <ol style="list-style-type: none"> 1. Боковые ребра не перпендикулярны плоскостям основания. 2. Высота не совпадает с боковым ребром. 3. Все боковые грани — параллелограммы 	 <ol style="list-style-type: none"> 1. Боковые ребра перпендикулярны основаниям. 2. Боковое ребро совпадает с высотой. 3. В основаниях — параллелограммы. 4. Все боковые грани — прямоугольники 	 <ol style="list-style-type: none"> 1. Боковые ребра перпендикулярны основаниям. 2. Боковое ребро совпадает с высотой. 3. Оба основания и боковые грани — прямоугольники
Площадь боковой поверхности параллелепипеда		
$S_{\text{бок}} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B})$	$S_{\text{бок}} = 2(a+b) \cdot l$	$S_{\text{бок}} = 2(a+b) \cdot l$

Наклонный	Прямой	Прямоугольный
Площадь полной поверхности параллелепипеда		
$S_{\text{полн}} = 2(S_{AA_1D_1D} + S_{AA_1B_1B} + S_{ABCD})$	$S_{\text{полн}} = 2(a + b) \cdot l + 2S_{\text{осн}}$	$S_{\text{полн}} = 2(ab + al + bl)$
Объем параллелепипеда		
<p>1. Произведение площади основания $S_{\text{осн}}$ на высоту h; $V = S_{\text{осн}} \cdot h.$</p> <p>2. Произведение площади перпендикулярного сечения S_{\wedge} на длину бокового ребра l; $V = S_{\wedge} \cdot l$</p>	<p>Произведение площади основания $S_{\text{осн}}$ на длину бокового ребра l; $V = S_{\text{осн}} \cdot l$</p>	<p>Произведение трёх измерений прямоугольного параллелепипеда: $V = abl$</p>
	<p>В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трёх его измерений: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$</p>	

Куб

	<p>Куб — прямоугольный параллелепипед, у которого все рёбра равны.</p> <p>Свойство Все боковые грани — квадраты.</p> <p>Формулы</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Диагональ: $d = a\sqrt{3}$. 2. Площадь: $S_{\text{бок}} = 4a^2$; $S_{\text{полн}} = 6a^2$. 3. Объём: $V = a^3$ или $V = \frac{d^3}{3\sqrt{3}}$
---	---

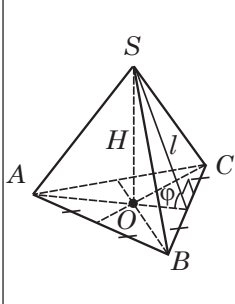
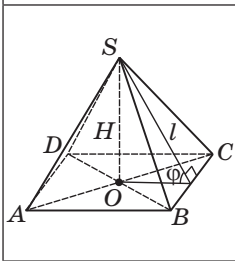
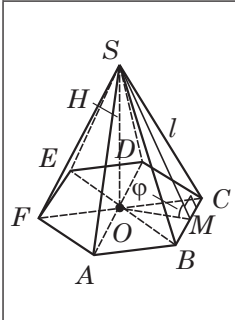
Пирамида

	<p>Пирамидой называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника (основания пирамиды), точки, не лежащей в плоскости основания (вершины пирамиды), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с вершинами основания</p>
<p>$ABCD$ — основание пирамиды; S — вершина пирамиды; SA, SB, SC, SD — боковые рёбра; $\triangle ASB, \triangle BSC, \triangle CSD, \triangle ASD$ — боковые грани</p>	
	<p>Высота пирамиды — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания. SO — высота пирамиды; $SO = H (SO \perp (ABCD))$.</p> $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$ $S_{\text{бок. пир.}} = S_{\triangle ASB} + S_{\triangle BSC} + S_{\triangle CSD} + S_{\triangle ASD}$ $S_{\text{полн. пир.}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$

Правильная пирамида

Пирамида называется **правильной**, если её основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника

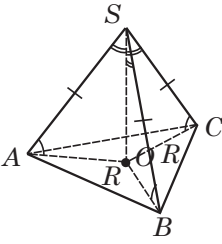
Некоторые виды правильных пирамид

	<p>Треугольная</p> <p>$\triangle ABC$ — правильный;</p> <p>O — точка пересечения медиан (высот и биссектрис), центр вписанной и описанной окружностей</p>
	<p>Четырёхугольная</p> <p>$ABCD$ — квадрат;</p> <p>O — точка пересечения диагоналей</p>
	<p>Шестиугольная</p> <p>$ABCDEF$ — правильный шестиугольник;</p> <p>O — точка пересечения диагоналей AD, BE и FC</p>
<p>SO — высота правильной пирамиды ($SO \perp (ABC)$; O — центр основания).</p> <p>SM — апофема правильной пирамиды (высота боковой грани, $SM \perp BC$)</p>	

Окончание таблицы

Свойства	Формулы
<p>1. Боковые ребра равны, одинаково наклонены к плоскости основания. $SA = SB = SC = \dots$; $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \dots$</p> <p>2. Боковые грани — равные друг другу равнобедренные треугольники. $\triangle ASB = \triangle BSC = \dots$</p> <p>Апофемы равны и наклонены к плоскости основания под одним углом</p>	<p>Площадь боковой поверхности:</p> $S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot SM = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l,$ <p>где l — апофема или</p> $S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \varphi},$ <p>где φ — угол наклона боковой грани к плоскости основания, $\varphi = \angle SMO$.</p> <p>Площадь полной поверхности:</p> $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$ <p>Объём:</p> $V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H,$ <p>$H = SO$, H — высота пирамиды</p>
<p>Задача.</p> <p><i>Найти:</i> площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, если все её ребра равны a.</p> <p><i>Решение.</i></p> $S_{\text{полн.}} = S_{\text{грани}} \cdot 4 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 4 = a^2 \sqrt{3}; S_{\text{полн.}} = a^2 \sqrt{3}.$ <p><i>Ответ:</i> $S_{\text{полн.}} = a^2 \sqrt{3}$.</p>	

Положение высоты в некоторых видах пирамид

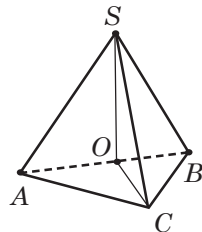
	<p>1. Если в пирамиде:</p> <p>а) все боковые рёбра равны или</p> <p>б) все боковые рёбра составляют одинаковые углы с плоскостью основания или</p> <p>в) боковые рёбра составляют одинаковые углы с высотой пирамиды, то высота проходит через центр окружности, описанной около основания</p>
---	--

Примечание: высота пирамиды может располагаться внутри пирамиды, на боковой грани или вне пирамиды, в зависимости от размещения центра описанной окружности. Около такой пирамиды можно описать конус

Задача.

Основание пирамиды — треугольник со сторонами 3, 4 и 5 см. Все боковые рёбра наклонены к плоскости основания под углом 45° .

Найти: объём пирамиды.



Решение.

1. Все боковые рёбра наклонены под одним углом \Rightarrow т. O — центр окружности, описанной около $\triangle ABC$.

2. $\triangle ABC$ — прямоугольный, т. к. $5^2 = 3^2 + 4^2$.

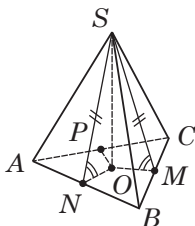
В прямоугольном треугольнике центр описанной окружности — совпадает с серединой гипотенузы.

3. $AC = 4$ см; $BC = 3$ см; $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ (см).

Продолжение таблицы

4. $\triangle SOC$ — равнобедренный прямоугольный треугольник ($\angle SOC = 90^\circ$, $\angle OSC = \angle OCS = 45^\circ$). $SO = OC = AO = OB = = AB : 2 = 5 : 2 = 2,5$ (см); $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 2,5 = 5$ (см³).

Ответ: 5 см³.



2. Если в пирамиде:

а) все **двугранные углы** при основании равны

или

б) все **высоты боковых граней** равны

или

в) высота составляет одинаковые углы с плоскостями боковых граней,

то **высота проходит через центр окружности, вписанной в основание**

В такую пирамиду можно вписать конус.

Площадь боковой поверхности пирамиды, в которой все **двугранные углы при основании равны α** , можно вы-

числять по формуле: $S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$

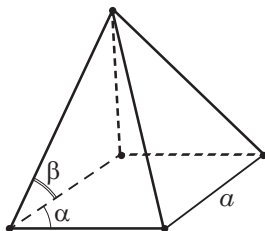
Задача.

Основание пирамиды — ромб со стороной a и острым углом α . Боковые грани наклонены к основанию под углом β .

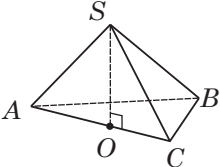
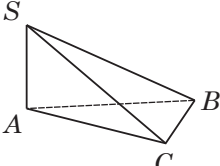
Найти: площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

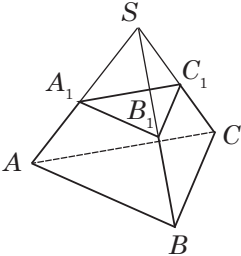
$$S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \beta} = \frac{a^2 \sin \alpha}{\cos \beta}.$$



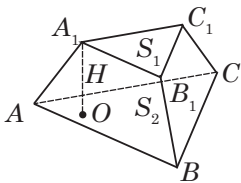
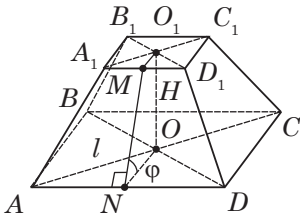
Окончание таблицы

	<p>3. Если одна боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания, то высотой пирамиды является высота этой грани.</p> <p>Если в $SABC$ $(SAC) \perp (ABC)$ и $SO \perp AC$ ($O \in AC$), то SO — высота пирамиды, $SO \perp (ABC)$</p>
	<p>4. Если две смежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания, то высотой пирамиды является их общее боковое ребро.</p> <p>Если $(SAB) \perp (ABC)$ и $(SAC) \perp (ABC)$, то SA — высота пирамиды ($SA \perp (ABC)$)</p>

Усечённая пирамида

	<p>Образование усечённой пирамиды</p> <p>Если задана пирамида $SABC$ и проведена плоскость $A_1B_1C_1$, параллельная основанию пирамиды ($(A_1B_1C_1) \parallel (ABC)$), то эта плоскость отсекает от заданной пирамиды пирамиду $SA_1B_1C_1$, подобную данной. (С коэффициентом подобия $k = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB}$)</p>
<p>Другая часть заданной пирамиды — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — называется усечённой пирамидой. Грани ABC и $A_1B_1C_1$ — основания ($(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$). Трапеции ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1 — боковые грани</p>	

Окончание таблицы

	<p>Высотой усечённой пирамиды называется расстояние между плоскостями её оснований.</p> <p>$A_1O \perp (ABC)$; $A_1O = H$ — высота.</p> $V_{\text{усеч. пир.}} = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}),$ <p>где S_1, S_2 — площади оснований</p>
	<p>Площадь поверхности усечённой пирамиды равна сумме площадей оснований и боковой поверхности:</p> $S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок.}}$ <p>Правильная усечённая пирамида — усечённая пирамида, являющаяся частью правильной пирамиды.</p> <p>Апофема — высота боковой грани.</p> <p>$MN \perp AD$ и $MN \perp A_1D_1$; MN — апофема</p>

<p align="center">Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды</p>	
$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot l,$ <p>P_1 и P_2 — периметры оснований; l — апофема</p>	$S_{\text{бок}} = \frac{S_1 - S_2}{\cos \varphi},$ <p>S_1 и S_2 — площади оснований; φ — угол наклона боковой грани к большому основанию</p>

Сечения куба, призмы, пирамиды

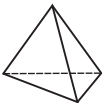

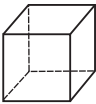

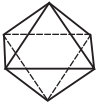

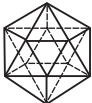

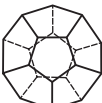

	<p>Секущая плоскость геометрического тела — это любая плоскость, по обе стороны от которой — точки данного тела.</p> <p>Сечение геометрического тела — фигура, составленная общими точками секущей плоскости и данного тела</p>
<p>Методы построения сечений:</p> <p>а) метод следов; б) метод внутреннего проектирования; в) метод переноса секущей плоскости</p>	<p>Секущая плоскость может быть задана:</p> <p>а) тремя точками, не лежащими на одной прямой; б) прямой и точкой, не лежащей на ней; в) двумя пересекающимися прямыми</p>

Метод следов

1. В плоскости нижнего основания (иногда в некоторой другой) построить **следы** (линии и точки пересечения секущей плоскости).
2. С помощью этих следов выполнить построение точек пересечения секущей плоскости с **ребром** многогранника и линией пересечения секущей плоскости с **гранями** многогранника

Правильные многогранники

Правильный выпуклый многогранник — выпуклый многогранник, грани которого являются правильными многоугольниками с одинаковым количеством сторон и к каждой вершине сходится одинаковое количество рёбер

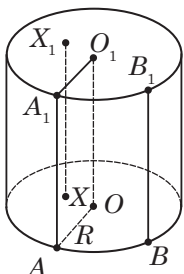
№	Многогранник	Много- угольник	Число гран- ней	Число вер- шин	Число рёбер
1	Правильный тетраэдр (четырёхгранник) 		4	4	6
2	Гексаэдр (шестигранник), куб 		6	8	12
3	Октаэдр (восьмигранник) 		8	6	12
4	Икосаэдр (двадцатигранник) 		20	12	30
5	Додекаэдр (двенадцатигранник) 		12	20	30

Площадь поверхности, объём, радиусы вписанной и описанной сфер

Тип многогранника	Площадь поверхности	Объём	Радиус описанной сферы	Радиус вписанной сферы
Правильный тетраэдр	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$	$\frac{3}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{4}$	$\frac{1}{4}H = \frac{a\sqrt{6}}{12}$
Правильный октаэдр	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	$\frac{a\sqrt{6}}{6}$
Правильный икосаэдр	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$	$\frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$	$\frac{a\sqrt{3(3+\sqrt{5})}}{12}$
Правильный гексаэдр	$4a^2$	a^3	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$\frac{a}{2}$
Правильный додекаэдр	$3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$	$\frac{a\sqrt{3(1+\sqrt{5})}}{4}$	$\frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$

4. ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Цилиндр



Цилиндр (круговой цилиндр) — тело, состоящее из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки окружностей, лежащих в основаниях этих цилиндров.

Основания цилиндра — круги.

Образующие — отрезки, соединяющие точки окружностей.

AA_1, BB_1 — образующие

Свойства

1. Основания цилиндра равны и параллельны

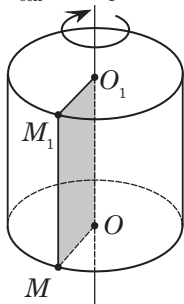
$$AO = O_1A_1 = R \\ (AOB) \parallel (A_1O_1B_1)$$

2. Образующие цилиндра равны и параллельны

$$AA_1 \parallel BB_1; AA_1 = BB_1$$

3. Высота цилиндра равна образующей.

$$H_{\text{осн}} = AA_1 = OO_1$$



При вращении прямоугольника около его стороны как оси образуется цилиндр

Формулы

Площадь основания:

$$S_{\text{осн.}} = \pi R^2$$

Площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$$

Площадь полной поверхности:

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$$

$$S_{\text{полн}} = 2\pi R(H+R)$$

Объём:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H$$

$$V = \pi R^2 H$$

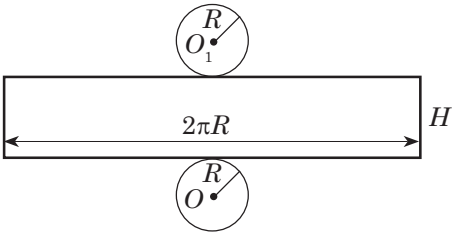
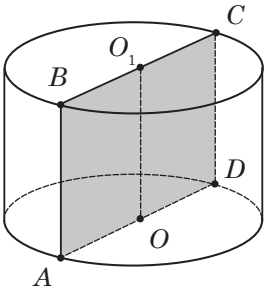
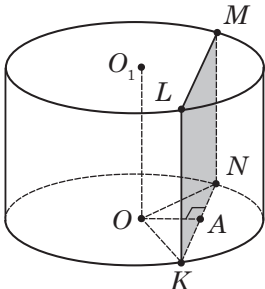
OMM_1O_1 — прямоугольник;

OO_1 — ось цилиндра;

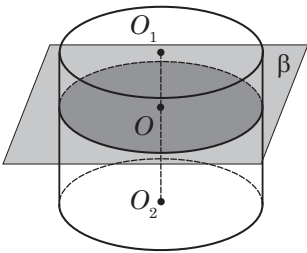
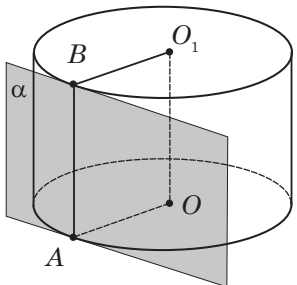
$$R_{\text{цил}} = OM = O_1M_1;$$

$$H_{\text{цил}} = MM_1 = OO_1$$

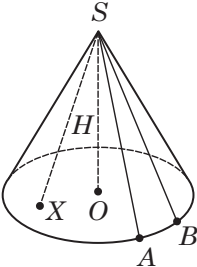
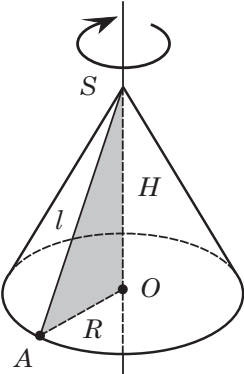
Продолжение таблицы

Развёртка цилиндра	
	
<p>Развёртка цилиндра — прямоугольник со сторонами $2\pi R$ и H (боковая поверхность) и два круга радиусами R (основания цилиндра)</p>	
Сечение цилиндра плоскостями	
Осевое сечение	Сечение плоскостью, параллельной оси
	
<p>$ABCD$ — осевое сечение (сечение, проходящее через ось OO_1)</p> <p>$ABCD$ — прямоугольник</p> <p>$AD = d_{\text{осн}} = 2R$</p> <p>$AB = CD = H_{\text{цил}}$</p> <p>AB и CD — образующие</p>	<p>$(KLMN) \parallel OO_1$</p> <p>$KLMN$ — прямоугольник</p> <p>KL и MN — образующие</p> <p>$KL = H_{\text{цил}}$, KN — хорда.</p> <p>OA — расстояние от основания высоты до хорды NK</p>

Окончание таблицы

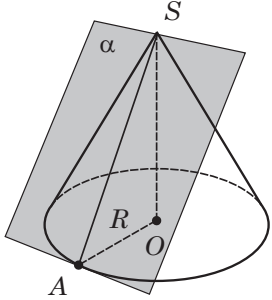
Сечение плоскостью, параллельной основанию	Касательная плоскость
 <p>Плоскость, параллельная основанию, пересекает боковую поверхность цилиндра по окружности, равной окружности основания:</p> $R_{\text{сеч}} = R_{\text{осн}}$	 <p>Касательная плоскость — плоскость, проходящая через образующую и перпендикулярная плоскости осевого сечения, проходящего через эту образующую.</p> <p>α — касательная плоскость, AB — образующая, α проходит через AB:</p> $\alpha \perp (AOO_1B)$
<p>Задача.</p> <p>Площадь основания цилиндра равна Q, площадь осевого сечения равна S.</p> <p><i>Найти:</i> площадь полной поверхности цилиндра.</p> <p><i>Решение.</i></p> <p>$S_{\text{осн}} = Q$; $S_{ABCD} = S$; $S_{\text{полн}} = 2\pi R(H + R)$, но $2RH = S$.</p> <p>$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$, тогда $S_{\text{бок}} = \pi S$;</p> <p>$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2Q = \pi S + 2Q$;</p> <p>$S_{\text{полн}} = \pi S + 2Q$.</p> <p><i>Ответ:</i> $S_{\text{полн}} = \pi S + 2Q$.</p>	

Конус

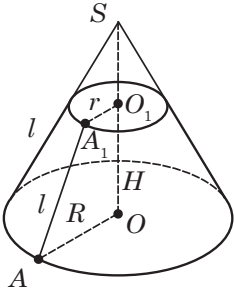
	<p>Конус (круговой конус) — тело, состоящее из круга, точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих заданную точку с точками окружности основания.</p> <p>Основание конуса — круг, т. S — вершина конуса.</p> <p>SA и SB — образующие (отрезки, соединяющие вершину с точками окружности основания)</p>
<p style="text-align: center;">Свойства</p>	<p style="text-align: center;">Формулы</p>
<p>1. Образующие конуса равны: $SA = SB = \dots$</p> <p>2. $H_{\text{кон}} = SO$ $SO \perp$ (AOB)</p>	<p>Площадь основания: $S_{\text{осн}} = \pi R^2$</p> <p>Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = \pi Rl$</p> <p>Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$ $S_{\text{полн}} = \pi R(l + R)$</p> <p>Объём: $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$; $V_{\text{кон}} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H$</p>
	<p>При вращении прямоугольного треугольника около его катета как оси образуется конус.</p> <p>$\triangle AOS$ — прямоугольный.</p> <p>SO — ось симметрии, AS — образующая.</p> <p>$R_{\text{кон}} = AO$; $H_{\text{кон}} = SO$; $AS = l$</p>

Развёртка конуса	
	<p>Развёртка конуса состоит из сектора SAA_1, радиус которого равен образующей конуса, длина дуги — длине окружности основания.</p> <p>$SA = SA_1 = l$; $\cup AA_1 = 2\pi R$.</p> <p>$\angle ASA_1 = \beta$ — угол в развёртке конуса.</p> <p>$\angle ASB = \alpha$ — угол при вершине осевого сечения,</p> <p>$\beta = 2\pi \sin \frac{\alpha}{2}$; $\alpha = 2 \arcsin \frac{\beta}{2\pi}$</p>

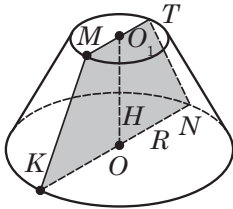
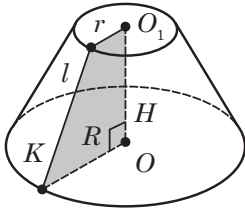
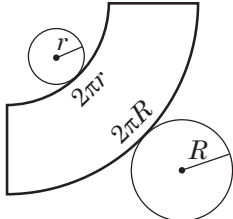
Сечение конуса плоскостями	
Осевое сечение	Сечение, проходящее через вершину
<p>$\triangle SAB$ — осевое сечение (проходит через ось SO)</p> <p>$\triangle SAB$ — равнобедренный</p> <p>$SA = SB = l$ — образующие</p>	<p>$\triangle ASC$ — равнобедренный</p> <p>$AS = SC = l$ — образующие</p> <p>AC — хорда, $OA = OC = R$</p> <p>OD — расстояние от основания высоты до хорды AC</p> <p>$OD^2 = AO^2 - AD^2$</p>

Сечение плоскостью, параллельной основанию	Касательная плоскость
 <p data-bbox="190 618 552 769">Плоскость, параллельная основанию, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.</p> $\frac{r_{\text{сеч}}}{R_{\text{кон}}} = \frac{SO_1}{SO}$	 <p data-bbox="583 646 945 829">Касательная плоскость — это плоскость, проходящая через образующую конуса перпендикулярно осевому сечению, содержащему эту образующую.</p> <p data-bbox="583 850 934 980">α — касательная плоскость; SA — образующая, α проходит через SA; $\alpha \perp (SAO)$</p>

Усечённый конус

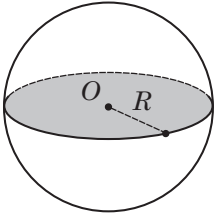
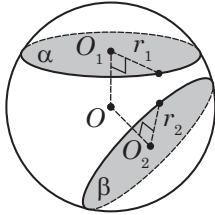
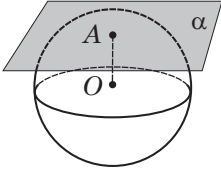
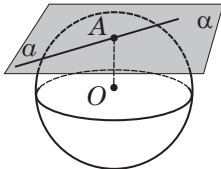
	<p data-bbox="583 1117 940 1268">Усечённый конус — часть конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.</p> <p data-bbox="583 1289 915 1349">Основания — круги с центрами O и O_1.</p> <p data-bbox="583 1365 893 1393">l — образующая, $AA_1 = l$;</p> <p data-bbox="583 1409 945 1463">$OA = R$ и $O_1A_1 = r$ — радиусы оснований</p>
---	---

Окончание таблицы

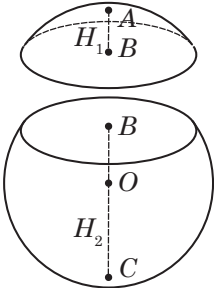
Свойства	Формулы
 <p>Осевое сечение — равнобокая трапеция. $MKNT$ — осевое сечение. $MT \parallel KN$ и $MK = TN$ $MT = 2r$; $KN = 2R$ $OO_1 \perp KN$ $OO_1 = H$</p>	<p>Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = \pi(R+r)l$</p> <p>Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{1\text{осн}} + S_{2\text{осн}}$</p> <p>Объём: $V_{\text{у.к.}} = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$</p> <p>$R$ и r — радиусы нижнего и верхнего оснований; l — образующая.</p>
 <p>При вращении прямоугольной трапеции около оси, проходящей через меньшую боковую сторону, перпендикулярную основаниям, образуется усечённый конус</p>	
Развёртка усечённого конуса	
	<p>Два круга — верхнее и нижнее основания радиусами r и R; часть кольца — боковая поверхность</p>

Шар и сфера

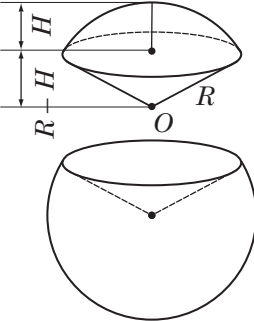
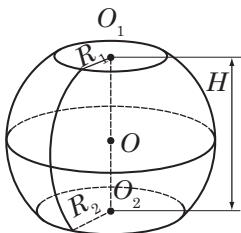
Шар	Сфера
 <p>Шар — тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (R) от данной точки (O).</p> <p>O — центр шара; OB — радиус шара; $OB = R$.</p> <p>Шар получается при вращении полукруга вокруг его диаметра.</p> <p>Объём шара:</p> $V_{\text{ш}} = \frac{4}{3} \pi R^3$	 <p>Сфера — тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии (R) от данной точки (O).</p> <p>O — центр сферы; OA — радиус сферы; $AO = R$.</p> <p>При вращении полуокружности вокруг её диаметра получаем сферу.</p> <p>Площадь поверхности сферы:</p> $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$
Сечение шара плоскостью	
 <p>O — центр шара; O_1 — центр круга сечения; $OO_1 \perp \beta$</p>	<p>Всякое сечение шара плоскостью есть круг.</p> <p>Центр этого круга — основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.</p> <p>Из $\triangle OO_1A$:</p> $R_{\text{сеч}} = \sqrt{R_{\text{шара}}^2 - OO_1^2}$

Большой круг	Сечение двумя плоскостями
 <p>Большой круг — сечение шара, проходящее через центр.</p> $R_{\text{сеч}} = R_{\text{шара}}$	 <p>$OO_1 \perp \alpha$ и $OO_2 \perp \beta$ r_1 и r_2 — радиусы кругов сечения.</p> $OO_1 = OO_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$ $OO_1 < OO_2 \Leftrightarrow r_1 > r_2$ $OO_1 > OO_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2$
 <p>Касательная плоскость к шару — это плоскость, проходящая через точку сферы, перпендикулярная к радиусу, проведённому в эту точку.</p> $OA \perp \alpha$	 <p>Касательная к шару — это прямая, лежащая в касательной плоскости и проходящая через точку касания.</p> $OA \perp \alpha; OA \perp a; a \in \alpha$

Части шара

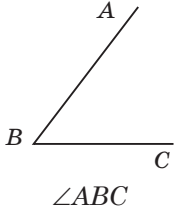
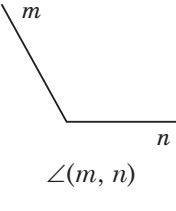
	<p>Шаровой сегмент — часть шара, которую отсекает секущая плоскость.</p> <p>Плоскость делит шар на два сегмента: $AB = H_1$ — высота меньшего сегмента; $BC = H_2$ — высота большего сегмента</p>
---	--

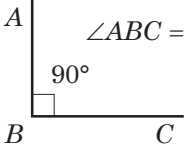
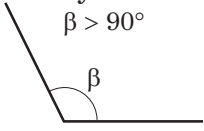
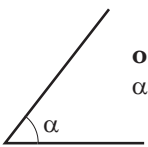
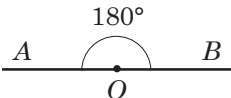
Окончание таблицы

	<p>Основные формулы</p> <p>Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$.</p> <p>Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} = \pi H(4R - H)$</p> <p>Объем: $V_{\text{сегм}} = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3} \right)$</p>
	<p>Шаровой сектор — тело, ограниченное сферической поверхностью шарового сегмента и боковой поверхностью конуса, которое имеет общее основание с сегментом и вершину в центре конуса.</p> <p>Основные формулы</p> <p>Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} = \pi R(2H + \sqrt{H(2R - H)})$</p> <p>Объем: $V_{\text{сек}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H$</p>
<p><i>Примечание:</i> если шаровой сегмент меньше полушара, то для получения шарового сектора его дополняют конусом, а если больше полушара, то конус удаляют</p>	
	<p>Шаровой слой — часть шара между двумя параллельными секущими плоскостями.</p> <p>H — расстояние между секущими плоскостями;</p> <p>R_1 и R_2 — радиусы оснований</p>
<p>Основные формулы</p> <p>Площадь боковой поверхности: $S_{\text{бок}} = 2\pi RH$; R — радиус шара.</p> <p>Площадь полной поверхности: $S_{\text{полн}} = \pi(2RH + R_1^2 + R_2^2)$.</p> <p>Объем: $V = \frac{\pi H}{6} (3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2)$</p>	

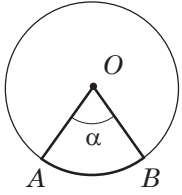
5. ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Угол. Величина угла, градусная мера угла

		<p>Угол — фигура, состоящая из точки (вершины угла) и двух различных лучей, исходящих из этой точки</p>
<p>Углы измеряют в градусах. $1^\circ = \frac{1}{180}$ развёрнутого угла</p>		

Виды углов	
<p>прямой</p>  <p>$\angle ABC = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ рад</p>	<p>тупой</p> <p>$\beta > 90^\circ$</p> 
 <p>острый</p> <p>$\alpha < 90^\circ$</p>	<p>развёрнутый $\angle AOB = 180^\circ$</p> 

Дуга

	<p>Дуга — часть окружности между двумя точками.</p> <p>Градусная мера дуги — градусная мера соответствующего центрального угла.</p> <p>Длина дуги 1°: $l_{1^\circ} = \frac{\pi R}{180^\circ}$.</p> <p>Длина дуги n°: $l_{n^\circ} = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ}$.</p>
---	---

Задача.

а) Найти длину дуги окружности радиуса $R = 5$, если её градусная мера 72° .

Решение.

$$l_{72^\circ} = \frac{\pi \cdot 5 \cdot 72^\circ}{180^\circ} = 2\pi \approx 6,28.$$

б) Найти длину маятника стенных часов, если угол его колебаний 38° , а длина дуги, которую он описывает, равна 48 см.

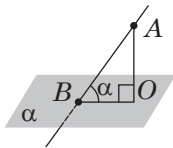
Решение.

$$\alpha = 38^\circ, C_{38^\circ} = 48 \text{ см.}$$

$$l_{n^\circ} = \frac{\pi R n^\circ}{180^\circ} \Rightarrow R = \frac{180^\circ \cdot l_{n^\circ}}{\pi n^\circ};$$

$$R = \frac{180^\circ \cdot 48}{3,14 \cdot 38^\circ} \approx 40,5 \text{ (см).}$$

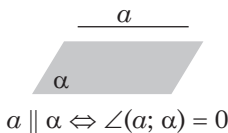
Ответ: а) 6,28; б) 40,5 см.

Углы в пространстве**Угол между прямой и плоскостью**

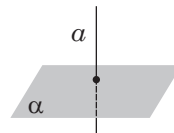
Угол между прямой и пересекающей её плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость.

$\angle ABO$ — угол между прямой AB и плоскостью α ;

BO — проекция AB на α , $AO \perp \alpha$

Особые случаи

$$a \parallel \alpha \Leftrightarrow \angle(a; \alpha) = 0$$



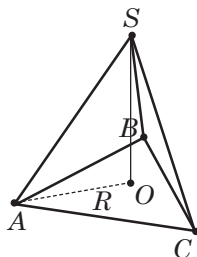
$$a \perp \alpha \Leftrightarrow \angle(a; \alpha) = 90^\circ$$

Задача.

Все рёбра пирамиды $SABC$ равны 3 см.
 SO — высота.

Найти:

угол между прямой AS и плоскостью ABC .



Решение.

По условию $AS = BS = CS \Rightarrow$

т. O — центр описанной окружности: $AO = R$.

$$R = \frac{AB\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}.$$

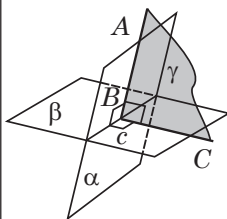
$SO \perp (ABC)$, то AO — проекция AS на (ABC) ,

т. е. $\angle SAO$ — угол между AS и (ABC) .

$$\text{Из } \triangle ASO: \cos \angle SAO = \frac{AO}{AS} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \angle SAO = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Ответ: } \angle SAO = \arccos \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Угол между плоскостями (двугранный угол)



Углом между плоскостями α и β , пересекающимися по прямой c , называется угол между прямыми, по которым третья плоскость γ , перпендикулярная их линии пересечения, пересекает плоскости α и β .

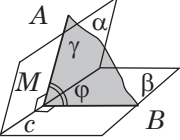
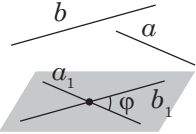
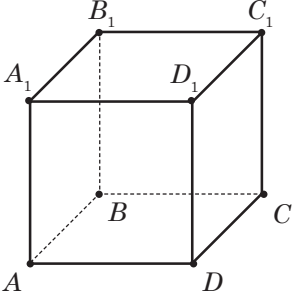
$\angle ABC$ — угол между плоскостями α и β , т. е. $AB \perp c$; $BC \perp c$, $AB \subset \alpha$; $BC \subset \beta$




Угол между параллельными плоскостями равен 0° .

$$\angle(\alpha; \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha \parallel \beta$$

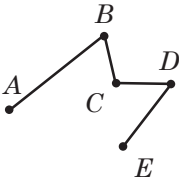
Окончание таблицы

	<p>Двугранный угол — фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой.</p> <p>α и β — грани двугранного угла, c — ребро двугранного угла $AM \perp c$, $BM \perp c$, $AM \subset \alpha$, $MB \subset \beta$. $\angle AMB = \varphi$ — линейный угол двугранного угла</p>
<p>Свойства Плоскость линейного угла перпендикулярна каждой грани двугранного угла. $(AMB) \perp \alpha$ и $(AMB) \perp \beta$</p>	
<p>Угол между скрещивающимися прямыми</p>	
	<p>Угол между скрещивающимися прямыми — это угол между прямыми, которые пересекаются и параллельны данным скрещивающимся.</p> <p>$a \parallel a_1$; $b \parallel b_1$; $\angle(a; b) = \angle(a_1; b_1) = \varphi$ $0^\circ < \varphi < 90^\circ$</p>
<p>Если угол между скрещивающимися прямыми равен 90°, то они называются перпендикулярными</p>	
<p>Задача. $ABCA_1B_1C_1D_1$ — куб. <i>Найти:</i> угол между прямыми AA_1 и DC. <i>Решение.</i> $DD_1 \parallel AA_1$, тогда $\angle D_1DC = 90^\circ$. <i>Ответ:</i> $\angle D_1DC = 90^\circ$ — искомый угол.</p>	

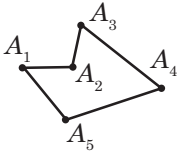
Длина отрезка, ломаной, окружности. Периметр многоугольника

	<p>Отрезок — часть прямой, которая состоит из всех точек этой прямой, лежащих между двумя её точками — концами отрезка</p>
<p>Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые отрезок разбивается любой его точкой: $AB = AK + KB$</p>	

<p>Задача. В каком случае точки M, K и C лежат на одной прямой:</p> <p>а) $MK = 3$ см; $KC = 10$ см; $MC = 8$ см; б) $MK = 12$ см; $KC = 1$ см; $MC = 12$ см; в) $MK = 15$ см; $KC = 5$ см; $MC = 10$ см.</p> <p><i>Ответ:</i> в), поскольку $MK = KC + MC$, т. е. $15 = 5 + 10$ (см).</p>

	<p>Ломаная — геометрическая фигура, состоящая из точек, не лежащих на одной прямой (вершин), соединённых отрезками (звеньями).</p> <p>Длина ломаной равна сумме длин её звеньев</p>
--	---

<p>Задача. <i>Найти:</i> длину ломаной $ABCDEF$, если $AB = 3$ см, $BC = 2,3$ см, $CD = 5,1$ см, $DE = 6,2$ см, $EF = 3,7$ см.</p> <p><i>Решение.</i> $AB + BC + CD + DE + EF = 3 + 2,3 + 5,1 + 6,2 + 3,7 = 20,3$ (см).</p> <p><i>Ответ:</i> 20,3 см.</p>



Многоугольник — простая замкнутая ломаная, соседние звенья которой не лежат на одной прямой.

Многоугольник называется **выпуклым**, если каждая из его диагоналей лежит внутри многоугольника

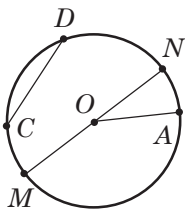
Число диагоналей выпуклого многоугольника:

$$n_d = \frac{n(n-3)}{2},$$

n — число сторон многоугольника.

Периметр многоугольника равен сумме длин его сторон:

$$P_n = A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n$$



Окружность — фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки (центра).

$OA = R$ — радиус;
 $MN = D = 2R$ — диаметр;
 CD — хорда;
 $\cup AN, \cup AM$ — дуги

Длина окружности:

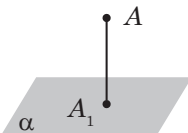
$$C = 2\pi R,$$

где R — радиус; число π — отношение длины окружности к диаметру:

$$\pi = \frac{C}{2R} \approx 3,14$$

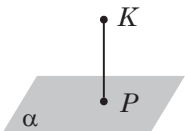
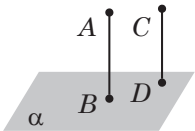
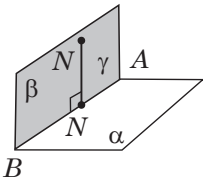
Расстояние в пространстве

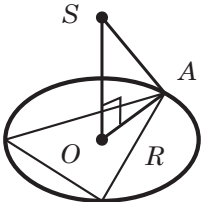
Расстояние от точки до плоскости (r — расстояние)



Расстояние от точки до плоскости — это длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость

Окончание таблицы

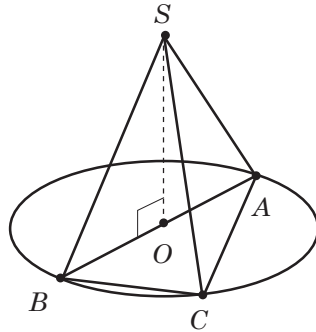
Способы построения	
	<p>Провести $KP \perp \alpha$; $P \in \alpha$. $KP = \rho(K; \alpha)$ где ρ — расстояние от точки до плоскости</p>
	<p>$AB \perp \alpha$ Провести $CD \parallel AB \Rightarrow CD \perp \alpha$. $CD = \rho(C; \alpha)$</p>
	<p>Провести $\beta \perp \alpha$ через точку M (β пересекает α по AB). Провести $MN \perp AB \Rightarrow MN \perp \alpha$ $MN = \rho(N; \alpha)$</p>

Частные случаи нахождения расстояния от точки до плоскости (до прямой)	
	<p>Свойство точки, равноудалённой от всех вершин многоугольника</p> <p>Если точка вне плоскости многоугольника равноудалена от всех его вершин, то основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости многоугольника, является центром окружности, описанной около многоугольника.</p>
<p>SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника; $OA = R$ — радиус описанной окружности; SA — расстояние от точки до вершины многоугольника</p>	

Задача.

Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12. Точка S находится вне плоскости этого треугольника и на расстоянии 10 см от каждой его вершины.

Найти:
расстояние от точки S до плоскости треугольника.



Решение.

Точка S равноудалена от вершин $\triangle ABC \Rightarrow$ точка S проецируется в точку O — центр описанной окружности.

В прямоугольном треугольнике это середина гипотенузы.

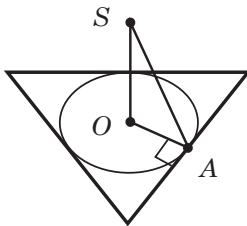
$$AO = OB = 6 \text{ см.}$$

Из $\triangle ASO$ ($\angle AOS = 90^\circ$):

$$SO^2 = AS^2 - AO^2 = 10^2 - 6^2 = 64.$$

$$SO = 8 \text{ (см).}$$

Ответ: 8 см.



SO — расстояние от точки до плоскости многоугольника;

$AO = r$ — радиус окружности, вписанной в многоугольник

Свойство точки, равноудалённой от сторон многоугольника

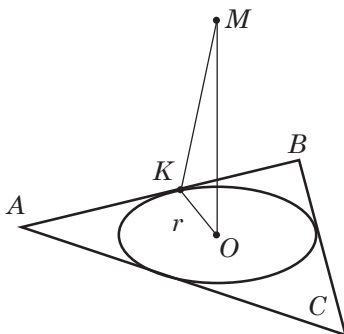
Если точка вне плоскости многоугольника **равноудалена от его сторон**, то основание перпендикуляра, проведённого из этой точки к плоскости многоугольника, является центром **окружности, вписанной** в многоугольник.

SA — расстояние от точки до стороны многоугольника

Задача.

Найти:

расстояние от точки M до плоскости равнобедренного треугольника ABC , если $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см; точка M равноудалена от каждой стороны на $8\frac{2}{3}$ см.



Решение.

Точка M равноудалена от **всех сторон** $\triangle ABC \Rightarrow$ точка M проектируется в точку O — центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

1) Найдём $S_{\triangle ABC}$:

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{13 + 13 + 10}{2} = 18 \text{ (см);}$$

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{18(18 - 13)(18 - 13)(18 - 10)} = 60 \text{ (см}^2\text{)}.$$

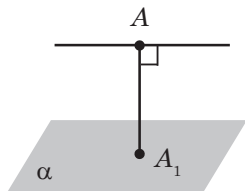
$$2) OK = r = \frac{S_{\triangle ABC}}{p} = \frac{60}{18} = \frac{10}{3} \text{ (см);}$$

3) Из $\triangle MOK$ ($\angle MOK = 90^\circ$):

$$MO^2 = MK^2 - OK^2 = \left(8\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{36 \cdot 16}{9}; MO = 8 \text{ (см)}.$$

Ответ: 8 см.

Расстояние между параллельными прямой и плоскостью

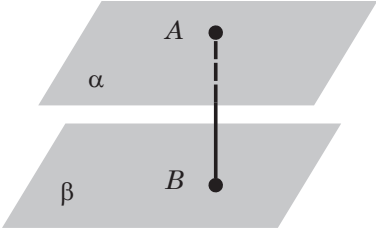
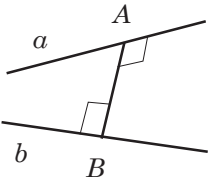
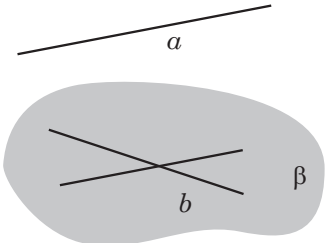


Выбрать на прямой a произвольную точку A и найти расстояние от этой точки до плоскости α .

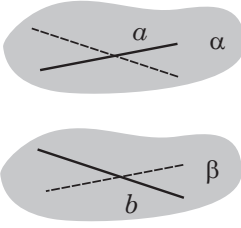
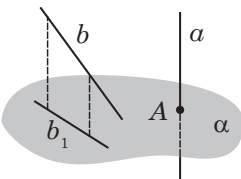
$$a \parallel \alpha, A \in a;$$

$$\rho(a; \alpha) = \rho(A; \alpha) = AA_1$$

Продолжение таблицы

Расстояние между параллельными плоскостями	
	<p>Выбрать в плоскости произвольную точку A и найти расстояние от точки A до плоскости β.</p> <p>$\alpha \parallel \beta, A \in \alpha$</p> <p>$\rho(\alpha; \beta) = \rho(A; \beta) = AB$</p>
Расстояние между скрещивающимися прямыми	
	<p>Расстояние между скрещивающимися прямыми — это длина общего перпендикуляра к этим прямым.</p> <p>$AB \perp a; AB \perp b;$</p> <p>$\rho(a; b) = AB;$</p> <p>прямые a и b скрещиваются</p>
Способы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми	
 <p>$\rho(a; b) = \rho(a; \beta)$</p>	<p>Провести через прямую b плоскость $\beta \parallel a$</p>

Окончание таблицы

 <p>$\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta)$</p>	<p>Провести через a и b параллельные плоскости α и β</p>
 <p>$\rho(a; b) = \rho(A; b_1)$</p>	<p>Провести $\alpha \perp a$, спроектировать a и b на эту плоскость: $a \rightarrow A, b \rightarrow b_1$</p>

Задача.

Через точку O — точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$ проведён перпендикуляр MO к его плоскости. $AD = 2a$.

Найти:

расстояние между прямыми AB и MO .

Решение.

$AB \subset (ABC), MO \cap (AMC) = O; O \notin AB,$

т. е. AB и MO — скрещивающиеся прямые.

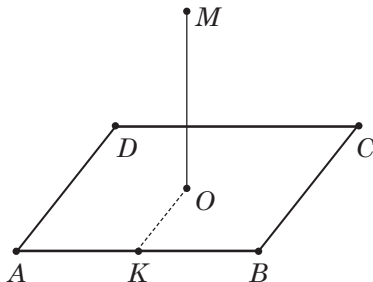
Проведём OK — среднюю линию $\triangle ABD$. Тогда $KO \parallel AD$.

Но $AB \perp AD$, тогда $AB \perp KO; MO \perp (ABC)$, то есть $MO \perp OK$.

То есть KO — общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым AB и MO .

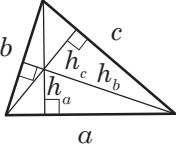
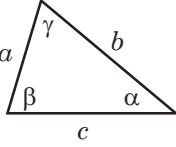
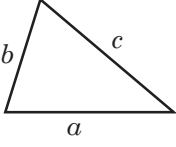
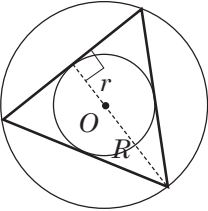
$$KO = \frac{1}{2} AD = a.$$

Ответ: a .

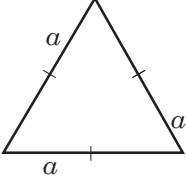
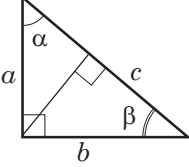


Площади треугольника, четырёхугольника, круга и его частей

Площадь треугольника

	$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
	$S = \frac{1}{2}absin\gamma = \frac{1}{2}bcsin\alpha = \frac{1}{2}acsin\beta$
	<p>Формула Герона:</p> $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$ <p>где $p = \frac{a+b+c}{2}$</p> <p style="text-align: center;">или</p> $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$
	<p>Нахождение площади через радиусы вписанной и описанной окружностей r и R.</p> $S = p \cdot r,$ <p>где $p = \frac{a+b+c}{2}$.</p> $S = \frac{a+b+c}{2}r,$ <p>где r — радиус вписанной окружности;</p> $S = \frac{abc}{4R} \text{ или } S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma,$ <p>где R — радиус описанной окружности</p>

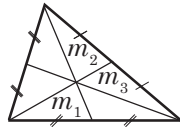
Окончание таблицы

	<p>Площадь равностороннего треугольника:</p> $S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$
	<p>Площадь прямоугольного треугольника:</p> $S = \frac{1}{2} ab \quad S = \frac{1}{2} ch_c$ $S = \frac{1}{2} ac \sin \alpha = \frac{1}{2} bc \sin \beta$ <p>Следствие: $h_c = \frac{ab}{c}$</p>

Дополнительные формулы для площади треугольника

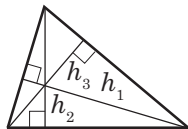
Через медианы треугольника m_1, m_2, m_3 :

$$S = \frac{1}{3} \sqrt{(m_1 + m_2 + m_3)(-m_1 + m_2 + m_3)(m_1 - m_2 + m_3)(m_1 + m_2 - m_3)}$$

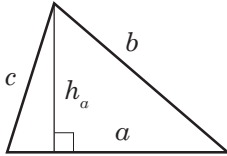


Через высоты треугольника h_1, h_2, h_3 :

$$S = \sqrt{\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) \left(-\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3}\right) \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right)}$$



Нахождение высоты произвольного треугольника методом площадей



Метод площадей заключается в нахождении площади различными способами.

Далее из этого равенства находят различные элементы треугольника, например высоту

$$S = \frac{1}{2} ah_a \text{ или}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{где } p = \frac{a+b+c}{2} \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a}$$

Задача.

Найти:

наибольшую высоту треугольника со сторонами 12, 39 и 45.

Решение.

Наибольшая высота проводится к наименьшей стороне, т. е. в данном случае к стороне 12.

$$a = 12, b = 39, c = 45.$$

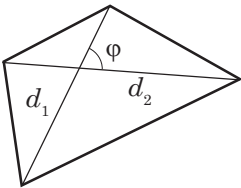
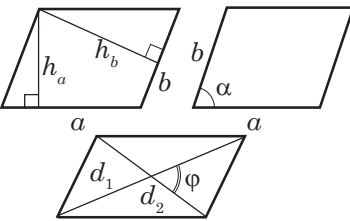
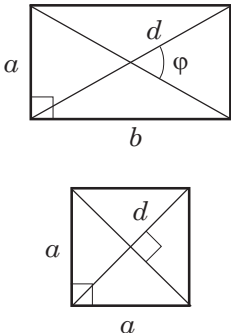
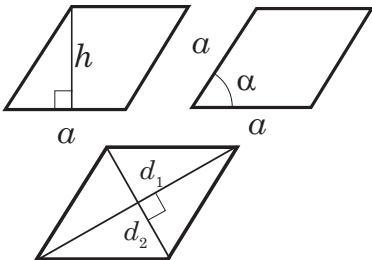
$$p = \frac{12 + 39 + 45}{2} = 48;$$

$$S = \sqrt{48(48-12)(48-39)(48-45)} = 216;$$

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot 216}{12} = 36; h = 36.$$

Ответ: 36.

Площадь четырёхугольника

	<p>Площадь любого выпуклого четырёхугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними:</p> $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \alpha$
	<p>Площадь параллелограмма</p> $S = ah_a = ah_b$ $S = ab \sin \alpha$ $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$
	<p>Площадь прямоугольника и квадрата</p> $S_{\text{пр}} = ab$ $S_{\text{пр}} = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$ $S_{\text{кв}} = a^2$ $S_{\text{кв}} = \frac{d^2}{2}$
	<p>Площадь ромба</p> $S_p = ah$ $S_p = a^2 \sin \alpha$ $S_p = \frac{1}{2} d_1 d_2$

	<p>Площадь трапеции</p> $S_{\text{тр}} = \frac{a+b}{2} \cdot h$ <p>или</p> $S_{\text{тр}} = m \cdot h,$ <p>где $m = \frac{a+b}{2}$ — средняя линия трапеции.</p> $S_{\text{тр}} = CD \cdot MN,$ <p>CD — боковая сторона; MN — перпендикуляр, проведённый из середины другой боковой стороны на CD</p>
<p>В равнобокой трапеции с взаимно перпендикулярными диагоналями площадь равна квадрату высоты:</p> $S_{\text{тр}} = h^2$	

Площадь круга и его частей

	<p>Круг — фигура, состоящая из всех точек плоскости, расстояние от которых до данной точки не больше данного. Точка O — центр круга, данное расстояние R — радиус круга</p>
<p>Площадь круга:</p> $S = \pi R^2 \text{ или } S = \frac{\pi D^2}{4}, \text{ где } D \text{ — диаметр}$	
	<p>Круговой сектор — часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла</p>

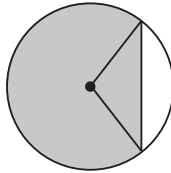
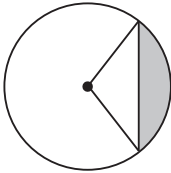
Окончание таблицы

Площадь кругового сектора:

$$S_{\text{сект}} = \frac{\pi R^2 \cdot n^\circ}{360^\circ},$$

где n° — градусная мера соответствующего центрального угла.

$$S_{\text{сект}} = \frac{\alpha R^2}{2},$$

где α — радианная мера соответствующего центрального угла**Круговой сегмент** — общая часть круга и полуплоскости**Площадь сегмента**, не равного полукругу, вычисляется по формуле:

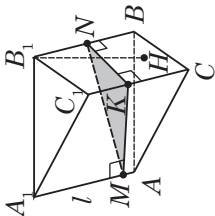
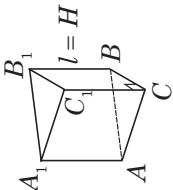
$$S_{\text{сегм}} = \frac{\pi R^2}{360^\circ} \cdot n^\circ \pm S_{\Delta},$$

где n° — градусная мера соответствующего центрального угла; S_{Δ} — площадь треугольника с вершиной в центре круга;«+», если $n^\circ > 180^\circ$; «-», если $n^\circ < 180^\circ$ **Задача.***Найти:*площадь круга, вписанного в квадрат со стороной a .*Решение.*Пусть дан квадрат со стороной a , тогда радиус круга $r = \frac{a}{2}$.

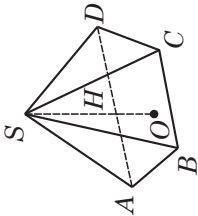
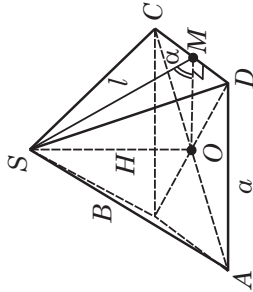
$$S_{\text{кр}} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}; \quad S_{\text{кр}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Ответ: $S_{\text{кр}} = \frac{\pi a^2}{4}$.




Площадь поверхности и объём многогранников

Вид многогранника	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
<p>Наклонная призма</p> 	$S_{\text{бок}} = P_{\wedge} \cdot l$, где P_{\wedge} — периметр перпендикулярного сечения; l — длина бокового ребра или $S_{\text{бок}} = S_{AA_1B_1V} + S_{B_1VCC_1} + \dots$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$	$V_{\text{н.пр.}} = S_{\wedge} \cdot l$ или $V_{\text{н.пр.}} = S_{\text{осн}} \cdot H$
<p>MNK — перпендикулярное сечение; l — боковое ребро; H — высота</p>			
<p>Прямая призма</p> 	$S_{\text{бок}} = P_{\wedge} \cdot H$ или $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot l$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$	$V = S_{\text{осн}} \cdot H$ или $V = S_{\text{осн}} \cdot l$
<p>Длина высоты совпадает с длиной бокового ребра</p>			

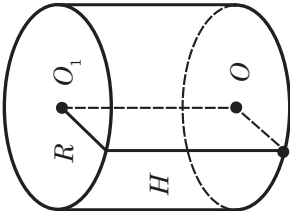
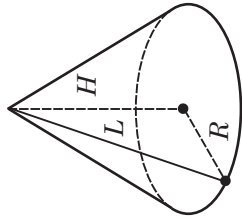
Продолжение таблицы

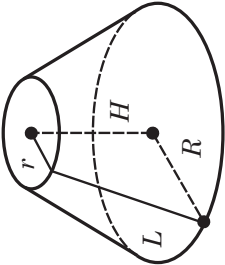
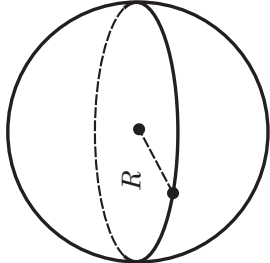
Вид многогранника	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
<p>Пирамида</p> 	$S_{\text{бок}} = S_{ASB} + S_{BSC} + S_{CSD} + \dots$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$
<p>Правильная пирамида</p> 	$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P_{\text{осн}} \cdot l$ <p style="text-align: center;">или</p> $S_{\text{бок}} = \frac{n}{2} a \cdot l$ $S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos \alpha}$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \frac{a \cdot n}{2} + S_{\text{осн}}$	$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$

$S_{\text{осн}}$ — площадь основания; H — высота; l — апофема; a — сторона основания; α — угол наклона боковой грани

Вид многогранника	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
<p>Правильная усечённая пирамида</p> 	$S_{\text{бок}} = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot l$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2}$	$V = \frac{1}{3} H (S_{\text{осн}_1} + \sqrt{S_{\text{осн}_1} \cdot S_{\text{осн}_2}} + S_{\text{осн}_2})$
<p>Прямоугольный параллелепипед</p> 	$S_{\text{бок}} = 2(a+b)c$	$S_{\text{полн}} = 2(ab+bc+ac)$	$V = abc$
<p>Куб</p> 	$S_{\text{бок}} = 4a^2$	$S_{\text{полн}} = 6a^2$	$V = a^3$

Площадь поверхности и объём тел вращения

Вид тела вращения	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
<p data-bbox="256 1263 281 1393">Цилиндр</p> 	$S_{\text{бок}} = 2\pi RH$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$ $S_{\text{полн}} = 2\pi R(H+R)$	$V = \pi R^2 H$
<p data-bbox="616 1282 642 1372">Конус</p> 	$S_{\text{бок}} = \pi RL$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$ $S_{\text{полн}} = \pi R(L+R)$	$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$
R — радиус основания; L — образующая; H — высота; H — высота			

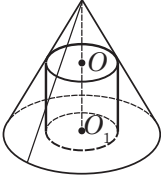
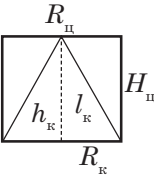
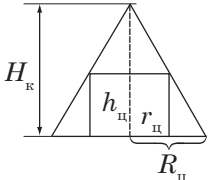
Вид тела вращения	Боковая поверхность	Полная поверхность	Объём
<p data-bbox="295 1203 323 1446">Усечённый конус</p> 	$S_{\text{бок}} = \pi(R+r)L$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}_1} + S_{\text{осн}_2}$	$V = \frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$
<p data-bbox="423 354 478 976">R и r — радиусы большего и меньшего оснований; L — образующая; H — высота</p>			
<p data-bbox="625 1230 653 1417">Шар и сфера</p> 	<p data-bbox="625 773 653 995">Площадь сферы</p> $S_{\text{сф}} = 4\pi R^2$	<p data-bbox="625 302 653 472">Объём шара</p> $V = \frac{4}{3} \pi R^3$	<p data-bbox="781 557 809 773">R — радиус шара</p>

Комбинации тел

Комбинации многогранников

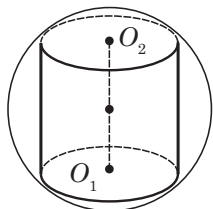
Многогранник называется **вписанным во второй многогранник**, если вершины первого лежат на поверхности (рёбрах, гранях) второго. Второй многогранник называется **описанным около первого**

Комбинации тел вращения

Цилиндр — конус	
	
<p>Конус называется вписанным в цилиндр, если основание конуса совпадает с основанием цилиндра, а вершина конуса лежит на втором основании цилиндра. При этом цилиндр называется описанным около конуса</p>	<p>Цилиндр называется вписанным в конус, если одно основание цилиндра лежит в основании конуса, а окружность второго основания лежит на боковой поверхности конуса. При этом конус называется описанным около цилиндра</p>
	
<p>Осевое сечение, свойства $h_k = H_{\text{ц}}; R_k = R_{\text{ц}}$, h_k и $H_{\text{ц}}$ — высоты конуса и цилиндра; R_k и $R_{\text{ц}}$ — радиусы конуса и цилиндра</p>	<p>Осевое сечение, свойства $\frac{R_{\text{к}}}{r_{\text{ц}}} = \frac{H_{\text{к}}}{H_{\text{к}} - h_{\text{ц}}},$ H_k и $h_{\text{ц}}$ — высоты конуса и цилиндра; R_k и $r_{\text{ц}}$ — радиусы конуса и цилиндра</p>

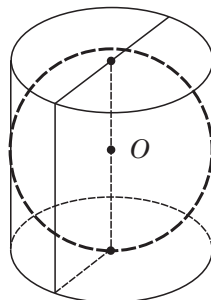
Продолжение таблицы

Шар — цилиндр



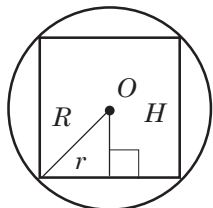
Цилиндр называется **вписанным в шар**, если его основания являются сечениями шара.

При этом **шар описан около** цилиндра



Цилиндр называется **описанным около шара**, если шар касается всех образующих цилиндра и его оснований.

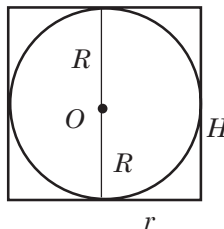
При этом шар **вписан** в цилиндр



Осевое сечение, свойства

1. Центр шара лежит на середине высоты цилиндра.
2. Основания цилиндра — равные параллельные сечения шара.
3. Радиус шара R , радиус цилиндра r и высота цилиндра H связаны соотношением:

$$R^2 = \left(\frac{H}{2}\right)^2 + r^2$$



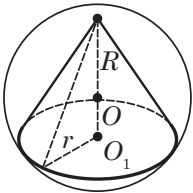
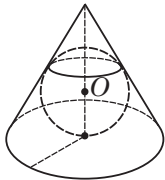
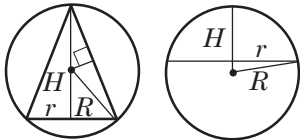
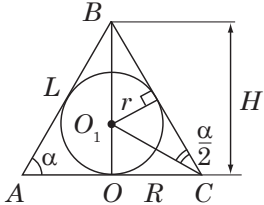
Осевое сечение, свойства

1. Шар можно вписать только в равносторонний цилиндр.

$$2. R = r = \frac{H}{2},$$

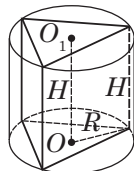
где R — радиус шара,
 H — высота цилиндра,
 r — радиус цилиндра

Окончание таблицы

Шар — конус	
	
<p>Конус называется вписанным в шар, если вершина конуса лежит на поверхности шара, а его основание — сечение шара. Шар при этом описан около конуса</p>	<p>Конус называется описанным около шара, если шар касается всех образующих конуса и его оснований. Шар при этом вписан в конус</p>
	
<p>Осевое сечение, свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Шар можно описать около любого конуса. 2. Центр шара — на оси конуса и является центром окружности, описанной около осевого сечения конуса. 3. Если R — радиус шара, r — радиус основания конуса, H — высота конуса, то $R^2 = (H - R)^2 + r^2$ 	<p>Осевое сечение, свойства</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Шар можно вписать в любой конус. 2. Центр шара — на оси конуса. 3. Если r — радиус шара, R — радиус основания конуса, H — его высота, то $\frac{r}{H - r} = \frac{R}{\sqrt{H^2 + R^2}};$ $r = R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{S_{\triangle ABC}}{R + L},$ L — образующая конуса; α — угол между образующей и плоскостью основания конуса

Комбинации многогранников и тел вращения

Цилиндр — призма

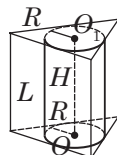


Призма называется **вписанной в цилиндр**, если её основания вписаны в основания цилиндра, а боковые рёбра — образующие цилиндра.

При этом цилиндр **описан около призмы**.

Свойства призмы, вписанной в цилиндр

1. Цилиндр можно описать около прямой призмы, если её основание — многоугольник, около которого можно описать окружность.
2. Ось цилиндра лежит на одной прямой с высотой H призмы.
3. Боковые рёбра призмы являются образующими цилиндра и равны H



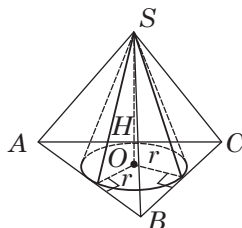
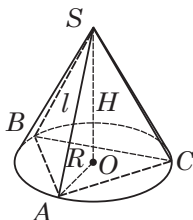
Призма называется **описанной около цилиндра**, если её основания описаны около оснований цилиндра, а боковые грани касаются цилиндра (лежат в касательных плоскостях).

Цилиндр при этом **вписан в призму**.

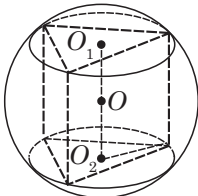
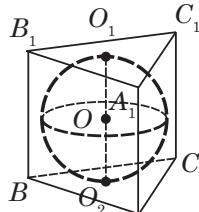
Свойства призмы, описанной около цилиндра

1. Цилиндр можно вписать в прямую призму, если в её основании лежит многоугольник, в который можно вписать окружность.
2. Боковые грани призмы касаются поверхности цилиндра.
3. Боковые рёбра призмы равны образующим цилиндра и высоте цилиндра

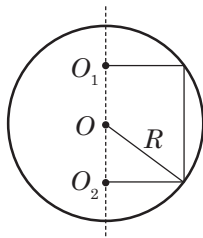
Конус — пирамида



Продолжение таблицы

<p>Пирамида называется вписанной в конус, если её основание вписано в основание конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус описан около пирамиды.</p> <p>Свойства пирамиды, вписанной в конус</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Конус можно описать около пирамиды, если её основание — многоугольник, вокруг которого можно описать окружность. 2. Высота пирамиды равна высоте конуса и проходит через центр описанной около основания окружности. 3. Боковые рёбра пирамиды являются образующими конуса 	<p>Пирамида называется описанной около конуса, если её основание описано около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса. При этом конус вписан в пирамиду.</p> <p>Свойства пирамиды, описанной около конуса</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Конус можно вписать в пирамиду, если её основание — многоугольник, в который можно вписать окружность, высота проходит через центр этой окружности. 2. Радиус основания конуса равен радиусу окружности, вписанной в основание. Высоты конуса и пирамиды совпадают. 3. Высоты боковых граней пирамиды являются образующими конуса
Шар — призма	
 <p>Призма называется вписанной в шар, если все её вершины лежат на поверхности шара. При этом шар описан около призмы</p>	 <p>Призма называется описанной около шара, если все её грани касаются поверхности шара. При этом шар вписан в призму</p>

Продолжение таблицы

**Свойства призмы,
вписанной в шар**

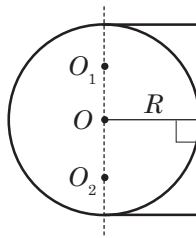
1. Шар можно описать около прямой призмы, если около оснований можно описать окружность. Центр шара лежит на середине высоты призмы, которая соединяет центры этих окружностей.

2. Основания призмы вписаны в равные и параллельные сечения шара.

3. При решении задач целесообразно рассматривать сечение полуплоскостью, которая проходит через центр шара и боковое ребро призмы.

$$4. R^2 = \frac{H^2}{4} + r^2,$$

где R — радиус шара;
 r — радиус окружности, описанной около основания,
 H — высота призмы

**Свойства призмы,
описанной около шара**

1. Шар можно вписать в прямую призму, если в её основании можно вписать окружность, а высота призмы равна диаметрам этих окружностей. Центр шара — на середине высоты призмы, соединяющей центры этих окружностей.

2. При решении задач целесообразно рассматривать сечение полуплоскостью, которая проходит через центр шара перпендикулярно боковой грани призмы.

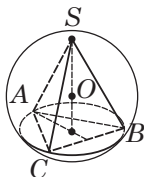
$$3. R = r = \frac{H}{2},$$

где R — радиус шара;
 r — радиус окружности, вписанной в основание;
 H — высота призмы.

4. Чтобы в призму можно было вписать шар, необходимо и достаточно, чтобы в её перпендикулярное сечение можно было вписать окружность и чтобы высота призмы равнялась диаметру этой окружности

Продолжение таблицы

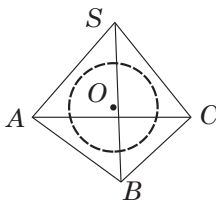
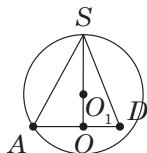
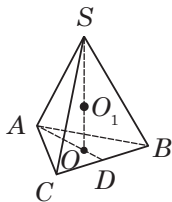
Шар — пирамида



Пирамида называется **вписанной в шар**, если все её вершины лежат на поверхности шара. При этом **шар описан около пирамиды**.

Свойства правильной пирамиды, вписанной в шар

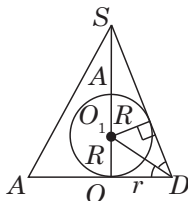
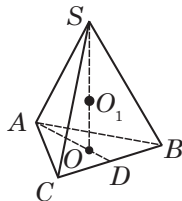
1. Шар можно описать около любой правильной пирамиды.
2. Центр шара лежит на прямой, которая содержит высоту пирамиды.
3. Решая задачи, обычно рассматривают сечения: **в треугольной пирамиде** (в основании — правильный треугольник)



Пирамида называется **описанной около шара**, если все её грани касаются поверхности шара. **Шар** при этом **вписан в пирамиду**.

Свойства пирамиды, описанной около шара

1. Шар можно вписать в любую правильную пирамиду.
2. Центр шара лежит на высоте пирамиды.
3. Решая задачи, обычно рассматривают сечения: **в треугольной пирамиде** (в основании — правильный треугольник)

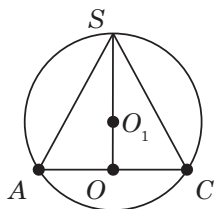
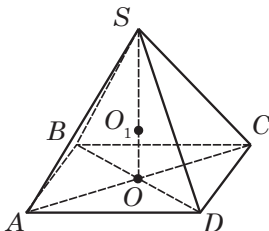


Окончание таблицы

Целесообразно провести сечение через медиану основания и вершину пирамиды;

в четырёхугольной пирамиде

(в основании — квадрат)



Рассматривают сечение, проходящее через одну из диагоналей основания и вершину пирамиды.

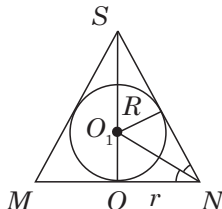
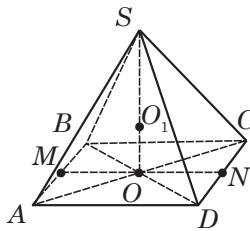
4. Радиус шара R и радиус окружности r , описанной около основания пирамиды, и высота пирамиды H связаны соотношением:

$$R^2 = (H - R)^2 + r^2$$

Целесообразно провести сечение через медиану основания и вершину пирамиды;

в четырёхугольной пирамиде

(в основании — квадрат)



Рассматривают сечение, проходящее через вершину пирамиды и апофемы противоположащих боковых граней.

4. Если R — радиус шара, H — высота пирамиды, r — радиус окружности, вписанной в основание, то

$$\frac{R}{H - R} = \frac{r}{\sqrt{H^2 + r^2}}$$

5. Центр вписанного шара лежит на пересечении высоты пирамиды с биссектрисой угла между апофемой и её проекцией на основание

6. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ

Декартовы координаты

Декартовы координаты на плоскости	Декартовы координаты в пространстве
 <p>O — начало координат; Ox — ось абсцисс; Oy — ось ординат</p>	 <p>O — начало координат; Ox — ось абсцисс; Oy — ось ординат; Oz — ось аппликат</p>

Задача 1.

Найти:

точки, симметричные точке $M(2; 1)$ относительно: а) оси Ox ; б) оси Oy ; в) начала координат.

Ответ:

- а) $M_x(2; -1)$;
- б) $M_y(-2; 1)$;
- в) $M_o(-2; -1)$

Задача 2.

Дана точка $M(1; 2; 3)$.

Найти:

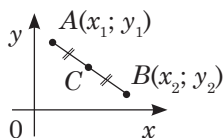
точки, симметричные точке M относительно: а) оси Ox ; б) оси Oy ; в) оси Oz ; г) плоскости xOy ; д) плоскости xOz ; е) плоскости yOz ; ж) начала координат.

Ответ:

- а) $M_x(1; -2; -3)$;
- б) $M_y(-1; 2; -3)$;
- в) $M_z(-1; -2; 3)$;
- г) $M_{xOy}(1; 2; -3)$;
- д) $M_{xOz}(1; -2; 3)$;
- е) $M_{yOz}(-1; 2; 3)$;
- ж) $M_o(-1; -2; -3)$

Координаты середины отрезка

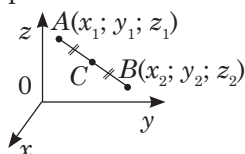
$C(x_C; y_C)$ — середина отрезка AB



$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$C(x_C; y_C; z_C)$ — середина отрезка AB



$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y_C = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

$$z_C = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Задача 1.

Точка C — середина отрезка AB . $A(2; -3)$, $C(0; 1)$

Найти:
координаты точки B .

Решение.

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad \frac{2 + x_B}{2} = 0;$$

$$x_B = -2;$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2}; \quad \frac{-3 + y_B}{2} = 1;$$

$$-3 + y_B = 2; \quad y_B = 5.$$

Ответ: $B(-2; 5)$.

Задача 2.

Концы отрезка AB
 $A(5; -2; -4)$ и $B(5; 3; 6)$.

Найти:
точку, симметричную середине отрезка AB относительно плоскости xOz .

Решение.

$C(x_C; y_C; z_C)$ — середина отрезка AB .

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}; \quad \frac{5 + 5}{2} = 5;$$

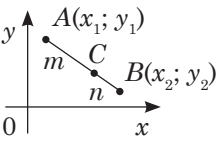
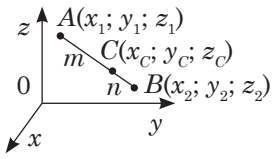
$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2}; \quad \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2};$$

$$z_C = \frac{z_A + z_B}{2}; \quad \frac{-4 + 6}{2} = 1;$$

$C\left(5; \frac{1}{2}; 1\right)$, точка C_1 , симметричная

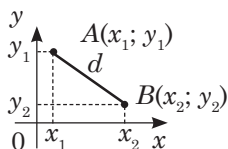
точке C относительно плоскости xOz .

Ответ: $C_1\left(5; -\frac{1}{2}; 1\right)$.

Координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении	
	
<p>Даны точки $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$. Точка $C(x_C; y_C)$ делит отрезок AB в отношении $m : n$, считая от точки A. Тогда координаты точки C:</p> $x_C = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}; y_C = \frac{ny_1 + my_2}{m + n}$	<p>$A(x_1; y_1; z_1)$, $C(x_C; y_C; z_C)$, $B(x_2; y_2; z_2)$. Точка $C(x_C; y_C; z_C)$ делит отрезок AB в отношении $m : n$, считая от точки A.</p> $x_C = \frac{nx_1 + mx_2}{m + n}; y_C = \frac{ny_1 + my_2}{m + n};$ $z_C = \frac{nz_1 + mz_2}{m + n}$
<p>Задача 1.</p> <p>Точка C делит отрезок AB с координатами концов $A(-1; 2)$ и $B(0; -4)$ в отношении $2 : 3$, считая от точки A.</p> <p><i>Найти:</i> координаты точки C.</p> <p><i>Решение.</i></p> $m = 2, n = 3.$ $x_C = \frac{3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0}{2 + 3} = -\frac{3}{5} = -0,6;$ $y_C = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot (-4)}{2 + 3} = \frac{6 - 8}{5} = -\frac{2}{5} = -0,4.$ <p><i>Ответ:</i> $C(-0,6; -0,4)$.</p>	<p>Задача 2.</p> <p>Точка $M(2; 6; 3)$ — середина отрезка, концы которого находятся на оси Ox и в плоскости yOz.</p> <p><i>Найти:</i> координаты концов отрезка.</p> <p><i>Решение.</i></p> <p>Точка, лежащая на оси Ox, имеет координаты $A(x; 0; 0)$, а точка, лежащая в плоскости yOz, имеет координаты $B(0; y; z)$. M — середина отрезка AB, тогда</p> $\frac{x + 0}{2} = 2; x = 4; \frac{0 + y}{2} = 6,$ $y = 12; \frac{0 + z}{2} = 3, z = 6.$ <p><i>Ответ:</i> $A(4; 0; 0); B(0; 12; 6)$.</p>

Формула расстояния между точками

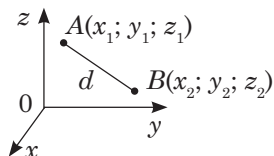
$A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$



Расстояние d между точками A и B :

$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2)$



Расстояние d между точками A и B :

$$d_{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Задача 1.

Вычислить длину медианы BB_1 треугольника ABC с вершинами $A(4; 0)$, $B(2; 0)$, $C(16; 2)$.

Решение.

Координаты точки B_1 :

$$x_{B_1} = \frac{4+16}{2} = 10; y_{B_1} = \frac{0+2}{2} = 1.$$

$$BB_1 = \sqrt{(10-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{65}.$$

Ответ: $BB_1 = \sqrt{65}$.

Задача 2.

На оси аппликат найти точку A_1 , равноудалённую от точек $M(-2; 3; 5)$ и $N(3; -5; -1)$.

Решение.

На оси аппликат точка имеет координаты $A(0; 0; z)$.

$$AM^2 = (-2-0)^2 + (3-0)^2 + (5-z)^2;$$

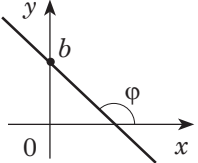
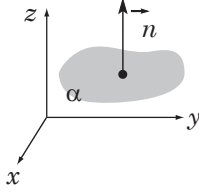
$$AN^2 = (3-0)^2 + (-5-0)^2 + (1+z)^2;$$

но $AM = AN$, то $AM^2 = AN^2$;

$$4 + 9 + (5-z)^2 = 9 + 25 + (1+z)^2;$$

$$z = \frac{3}{8}.$$

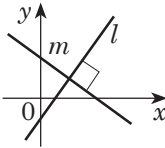
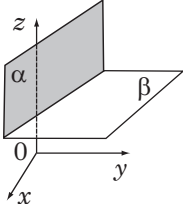
Ответ: $A\left(0; 0; \frac{3}{8}\right)$.

Уравнение прямой на плоскости	Уравнение плоскости в пространстве
<p>В общем виде: $ax + by + c = 0$.</p> <p>С угловым коэффициентом $k = -\frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$</p>  <p>$y = kx + b$ прямая l, где $(0; b)$ — точка пересечения прямой с осью Oy;</p> <p>$k = \operatorname{tg}\varphi$.</p> <p>Угловым коэффициентом прямой:</p> $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ <p>если прямая проходит через точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$</p>	<p>В общем виде: $ax + by + cz + d = 0$</p>  <p>$\vec{n}(a; b; c)$ — нормаль (нормальный вектор) — ненулевой вектор, перпендикулярный плоскости.</p> <p>Если плоскость проходит через точки $M(x_0; y_0; z_0)$ и $\vec{n}(a; b; c)$, $\vec{n} \perp \alpha$, то уравнение плоскости α:</p> $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
<p>Задача.</p> <p>Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1; 2)$ и $B(-2; 1)$.</p> <p><i>Решение.</i></p> $y = kx + b;$ $k = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 2}{-2 - 1} = \frac{1}{3}.$	<p>Задача.</p> <p>Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1; -2; 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}(2; 1; -4)$.</p> <p><i>Решение.</i></p> $2(x + 1) + 1(y + 2) - 4(z - 3) = 0;$

Окончание таблицы

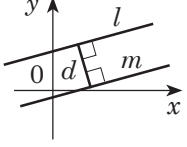
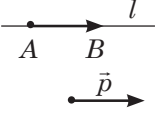
<p>Тогда $y = \frac{1}{3}x + b$.</p> <p>Подставим координаты $A(1; 2)$, тогда $2 = \frac{1}{3} + b$; $b = \frac{5}{3}$.</p> <p>$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$ или</p> <p>$\frac{1}{3}x - y + \frac{5}{3} = 0$.</p> <p><i>Ответ:</i> $x - 3y + 5 = 0$.</p>	<p>$2x + 2 + y + 2 - 4z + 12 = 0$; $2x + y - 4z + 16 = 0$ — уравнение плоскости.</p> <p><i>Ответ:</i> $2x + y - 4z + 16 = 0$.</p>
--	--

Условие параллельности прямых на плоскости	Условие параллельности плоскостей в пространстве
<div data-bbox="274 813 459 971" style="text-align: center;"> </div> <p>1. Если прямые заданы уравнениями: $l: a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $m: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, то $l \parallel m$ при $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$</p> <p>2. Если прямые заданы уравнениями: $l: y = k_1x + b_1$; $m: y = k_2x + b_2$, то $l \parallel m$ при $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$.</p>	<div data-bbox="659 813 871 1013" style="text-align: center;"> </div> <p>Две различные плоскости α_1 и α_2, заданные уравнениями: $\alpha_1: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$; $\alpha_2: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ параллельны тогда и только тогда, если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$.</p> <p>Следствие: если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$, то плоскости совпадают</p>

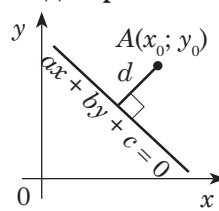
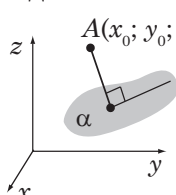
Условие перпендикулярности прямых на плоскости	Условие перпендикулярности плоскостей в пространстве
 <p>1. Если прямые заданы уравнениями $l: a_1x + b_1y + c_1 = 0;$ $m: a_2x + b_2y + c_2 = 0,$ то $l \perp m$ при $a_1b_2 + a_2b_1 = 0.$</p> <p>2. Если прямые заданы уравнениями: $l: y = k_1x + b_1;$ $m: y = k_2x + b_2,$ то $l \perp m$ при $k_1 \cdot k_2 = -1$ или $k_1 = -\frac{1}{k_2}$</p>	 <p>Если плоскости заданы уравнениями $\alpha: a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0;$ $\beta: a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0,$ то они перпендикулярны тогда и только тогда, когда $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$</p>
<p>Задача 1.</p> <p>Составить уравнения прямых, проходящих через т. $M(3; -2)$ и:</p> <p>а) параллельных прямой $y = 3x + 5;$ б) перпендикулярных прямой $y = 3x + 5.$</p> <p><i>Решение.</i></p> <p>а) Если прямые параллельны, то $k_1 = k_2 = 3.$ Уравнение искомой прямой: $y = 3x + b,$ она проходит через точку $M(3; -2).$ $-2 = 3 \cdot 3 + b; b = -11.$ Искомая прямая $y = 3x - 11.$</p>	<p>Задача 2.</p> <p>При каких значениях a и c плоскость $\alpha_1:$ $ax - 3y + cz + 1 = 0$ и плоскость $\alpha_2:$ $2x + y - 4z - 5 = 0$ параллельны.</p> <p><i>Решение.</i></p> <p>Плоскости параллельны, значит, $\frac{a}{2} = \frac{-3}{1} = \frac{c}{-4}; \frac{a}{2} = \frac{-3}{1};$ $a = \frac{-3 \cdot 2}{1} = -6.$</p>

Окончание таблицы

<p>б) Если прямые перпендикулярны, то</p> $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{3},$ <p>искомая прямая</p> $y = -\frac{1}{3}x + b.$ <p>Прямая проходит через точку (3; -2).</p> $-2 = -\frac{1}{3}(-3) + b; b = -1.$ $y = -\frac{1}{3}x - 1.$ <p>Ответ: а) $y = 3x - 11$; б) $y = -\frac{1}{3}x - 1$.</p>	$\frac{-3}{1} = \frac{c}{-4}; c = \frac{-3 \cdot (-4)}{1} = 12.$ <p>Уравнение плоскости α_2 имеет вид:</p> $-6x - 3y + 12z + 1 = 0.$ <p>Ответ:</p> $-6x - 3y + 12z + 1 = 0.$
---	--

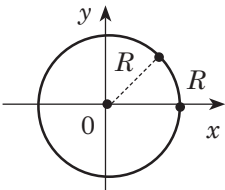
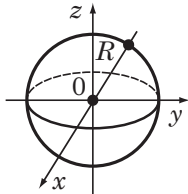
Расстояния и углы между прямыми	Расстояния и углы между прямыми и плоскостями
<p>Расстояние между параллельными прямыми</p> 	<p>Угол между двумя прямыми (пересекающимися или скрещивающимися)</p> 
<p>Если прямые заданы уравнениями</p> $l: ax + by = c_1;$ $m: ax + by = c_2, \text{ то}$ $d = \frac{ c_1 - c_2 }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	<p>Направляющий вектор прямой — вектор, лежащий на прямой или на прямой, ей параллельной.</p> <p>Вычисляется по координатам двух точек прямой $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$;</p> $\vec{p} = \overline{AB}$

Продолжение таблицы

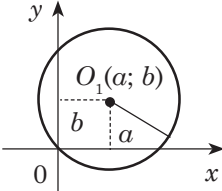
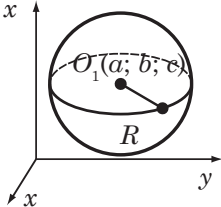
Расстояния и углы между прямыми	Расстояния и углы между прямыми и плоскостями
	<p>Угол между прямыми с направляющими векторами $\vec{p}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{q}(x_2; y_2; z_2)$:</p> $\cos \phi = \frac{ x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 }{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)}}$
<p>Угол между прямыми</p>  <p>Если прямые заданы уравнениями $l: y = k_1 x + b_1;$ $m: y = k_2 x + b_2$ и $k_1 \neq k_2$, то</p> $\operatorname{tg} \phi = \left \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right $	<p>Угол между прямой и плоскостью</p>  <p>Угол между направляющим вектором $\vec{p}(x_1; y_1; z_1)$ и плоскостью $ax + by + cz + d = 0$:</p> $\cos \phi = \frac{ ax_1 + by_1 + cz_1 }{\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}}$
<p>Расстояние от точки до прямой</p>  <p>Расстояние от точки $A(x_0; y_0)$ до прямой $ax + by + c = 0$:</p> $d = \frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	<p>Расстояние от точки до плоскости</p>  <p>Расстояние от точки $A(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $ax + by + cz + d = 0$:</p> $d = \frac{ ax_0 + by_0 + cz_0 + d }{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Окончание таблицы

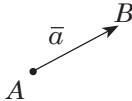
<p>Задача 1. Найти расстояние от точки $A(-6; 8)$ до прямой $4x + 3y - 1 = 0$.</p> <p><i>Решение.</i> Расстояние от точки $A(-6; 8)$ до прямой $4x + 3y - 1 = 0$ равно</p> $d = \frac{ 4 \cdot (-6) + 3 \cdot 8 - 1 }{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 0,2.$ <p><i>Ответ:</i> 0,2.</p>	<p>Задача 2. Найти расстояние между параллельными плоскостями α и β.</p> <p>$\alpha: x + y + z - 1 = 0$ и $\beta: x + y + z - 3 = 0$.</p> <p><i>Решение.</i> Возьмём произвольную точку A, принадлежащую α, т. е. её координаты удовлетворяют уравнению α. $A(x_0; y_0; z_0), A(1; -1; 1)$. Найдём расстояние от A до плоскости β ($a = 1, b = 1, c = 1$):</p> $d = \frac{ 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 - 3 }{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$ <p><i>Ответ:</i> $\frac{2}{\sqrt{3}}$.</p>
--	---

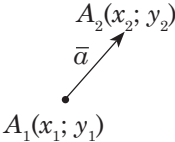
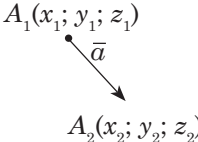
Уравнение окружности	Уравнение сферы
с центром в начале координат	
 <p>$x^2 + y^2 = R^2$ Центр окружности $O(0; 0)$</p>	 <p>$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ Центр окружности $O(0; 0; 0)$</p>
<p>Задача 1. На окружности $x^2 + y^2 = 169$ найти точки, абсцисса которых равна 5.</p>	<p>Задача 2. Записать уравнение сферы с центром в начале координат и с диаметром $D = \sqrt{12}$.</p>

Окончание таблицы

<p><i>Решение.</i> $x^2 + y^2 = 169$ — это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом $R = 13$ ($13^2 = 169$). $x = 5$; $5^2 + y^2 = 169$; $y^2 = 144$; $y = 12$ или $y = -12$. <i>Ответ:</i> (5; 12) и (5; -12).</p>	<p><i>Решение.</i> $D = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2 \cdot \sqrt{3}$; $R = \frac{D}{2} = \sqrt{3}$. Уравнение сферы с центром $O(0; 0; 0)$ и $R = \sqrt{3}$. <i>Ответ:</i> $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.</p>
<p>с центром в произвольной точке</p>	
<div style="text-align: center;">  </div> <p>$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$. Центр $O_1(a; b)$, радиус R</p>	<div style="text-align: center;">  </div> <p>$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$. Центр сферы $O_1(a; b; c)$, радиус R</p>
<p>Задача 1. Составить уравнение окружности с диаметром MN, если $M(1; 7)$ и $N(5; 4)$. <i>Решение.</i> 1. Центр окружности: $x_0 = \frac{1+5}{2} = 3$; $y_0 = \frac{7+4}{2} = 5,5$. 2. Радиус окружности: $R = MO = \sqrt{(1-3)^2 + (7-5,5)^2} = 2,5$. <i>Ответ:</i> $(x-3)^2 + (y-5,5)^2 = 6,25$.</p>	<p>Задача 2. Составить уравнение сферы, если её центр находится в точке $O(-3; 1; 0)$, и она проходит через точку $A(1; -1; 2)$. <i>Решение.</i> Радиус сферы: $R = OA = \sqrt{(-3-1)^2 + (1+1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{24}$. <i>Ответ:</i> $(x+3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 24$.</p>

Векторы

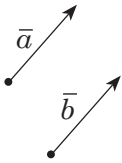
Векторы на плоскости	Векторы в пространстве
	<p>Вектором называется направленный отрезок: $\overline{AB} = \vec{a}$</p> <p>Длина этого отрезка называется длиной (модулем, абсолютной величиной) вектора: $\vec{a} = AB$</p>

Координаты вектора на плоскости	Координаты вектора в пространстве
 <p>$\vec{a}(a_1; a_2)$, где $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$ $\vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$</p>	 <p>$\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, где $a_1 = x_2 - x_1$; $a_2 = y_2 - y_1$; $a_3 = z_2 - z_1$ $\vec{a} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$</p>
<p>Задача 1. $A(-1; 4)$, $B(-4; 0)$. Найти: \overline{AB}.</p> <p><i>Решение.</i> $\overline{AB}(a_1; a_2)$. $a_1 = -4 - (-1) = -3$; $a_2 = 0 - 4 = -4$.</p>	<p>Задача 2. $A(1; -2; 0)$, $B(4; -4; \sqrt{3})$. Найти: \overline{AB}.</p> <p><i>Решение.</i> $\overline{AB}(a_1; a_2; a_3)$. $a_1 = 4 - 1 = 3$; $a_2 = -4 - (-2) = -2$; $a_3 = \sqrt{3} - 0 = \sqrt{3}$. $\overline{AB}(3; -2; \sqrt{3})$.</p>

Окончание таблицы

$\overline{AB}(-3; -4);$ $ \overline{AB} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5.$ Ответ: 5.	$ \overline{AB} = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = 4;$ $ \overline{AB} = 4.$ Ответ: 4.
--	--

Равные векторы

	$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{a} = \bar{b} \\ \text{векторы } \bar{a} \text{ и } \bar{b} \text{ одинаково направлены} \end{cases}$
---	--

В координатах

$\bar{a}(a_1; a_2) = \bar{b}(b_1; b_2) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$	$\bar{a}(a_1; a_2; a_3) = \bar{b}(b_1; b_2; b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$
---	---

Задача 1.

$ABCD$ — параллелограмм.
Указать пару равных векторов из:

- а) \overline{AB} и \overline{CD} ;
 б) \overline{AD} и \overline{BC} ;
 в) \overline{AO} и \overline{CO} .

Ответ:

равны векторы \overline{AD} и \overline{BC} .

Задача 2.

$\overline{A}(x; 2; -3); \overline{B}(-3; y; z).$

При каких значениях x, y и z
 $\overline{AB} = \overline{a}(-4; 0; 1).$

Решение.

Координаты

$\overline{AB} = (-3 - x; y - 2; z + 3);$

$-3 - x = -4, x = 1;$

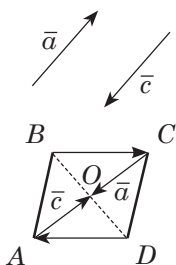
$y - 2 = 0, y = 2;$

$z + 3 = 1, z = -2.$

Ответ:

$x = 1, y = 2, z = -2.$

Противоположные векторы

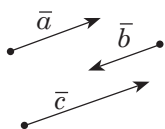


Противоположные векторы — векторы, имеющие одинаковую длину и противоположное направление.

Векторы \overline{AO} и \overline{CO} ; \overline{BC} и \overline{DA} — противоположные.

$$|\vec{a}| = |\vec{c}|; \vec{a} = -\vec{c}$$

Коллинеарные векторы



Ненулевые векторы называют **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Коллинеарные векторы направлены одинаково или противоположно

Условие коллинеарности векторов

$$\begin{aligned} \vec{a} \text{ коллинеарно } \vec{b} \\ \vec{a}(a_1; a_2); \vec{b}(b_1; b_2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \text{ коллинеарно } \vec{b} \\ \vec{a}(a_1; a_2; a_3); \vec{b}(b_1; b_2; b_3) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \end{aligned}$$

Задача 1.

Коллинеарны ли векторы:

а) $\vec{a}(-1; 3)$ и $\vec{b}(3; -9)$;

б) $\vec{m}(1; -4)$ и $\vec{n}\left(\frac{1}{2}; 2\right)$?

Решение.

а) $\frac{-1}{3} = \frac{3}{-9}; -1 \cdot (-9) = 3 \cdot 3.$

Да.

Задача 2.

При каких значениях m и n векторы коллинеарны, если $\vec{a}(-1; 4; -2)$ и $\vec{b}(-3; m; n)$?

Решение.

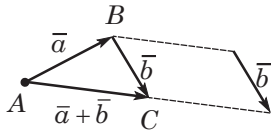
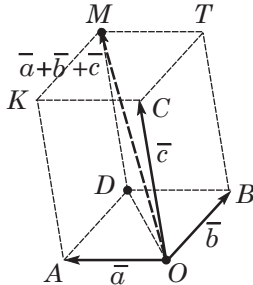
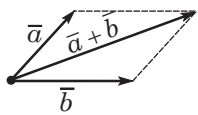
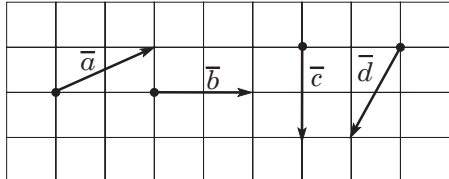
Если векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны, то

$$\frac{-1}{-3} = \frac{4}{m} = \frac{-2}{n}.$$

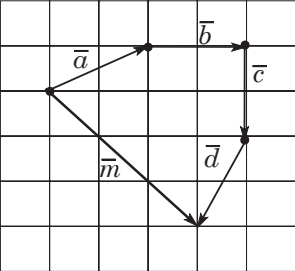
Окончание таблицы

<p>б) $\frac{1}{0,5} \neq \frac{-4}{2}$; $1 \cdot 2 \neq -4 \cdot 0,5$;</p> <p>$2 \neq -2$. Нет.</p> <p>Ответ: а) да; б) нет.</p>	<p>1) $\frac{-1}{-3} = \frac{4}{m}$; $m = 12$;</p> <p>2) $\frac{-1}{-3} = \frac{-2}{n}$; $n = -6$.</p> <p>Ответ: $m = 12$; $n = -6$.</p>
--	--

Операции над векторами

Сумма векторов	
На плоскости	В пространстве
$\vec{a}(a_1; a_2) + \vec{b}(b_1; b_2) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$	$\vec{a}(a_1; a_2; a_3) + \vec{b}(b_1; b_2; b_3) = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$
<p>Правило треугольника</p>  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$	<p>Правило параллелепипеда</p>  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$
<p>Правило параллелограмма</p> 	<p>Найти сумму векторов</p> 

Окончание таблицы

	$\begin{array}{r} \bar{a}(2; 1) \\ + \bar{b}(2; 0) \\ + \bar{c}(0; -2) \\ \hline \bar{d}(-1; -2) \\ \hline \bar{m}(3; -3) \end{array}$
---	--

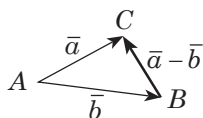
Правило многоугольника

Пусть даны векторы \bar{a} ; \bar{b} ; \bar{c} ; \bar{d} .

- от произвольной точки строим вектор \bar{a} ;
- от конца вектора \bar{a} строим вектор \bar{b} ;
- от конца вектора \bar{b} строим вектор \bar{c} ;
- от конца вектора \bar{c} строим вектор \bar{d} ;
- вектор-сумма \bar{m} — его начало совпадает с началом вектора \bar{a} , конец — с концом вектора \bar{d} .

Разность векторов

$$\begin{aligned} \bar{a}(a_1; a_2) - \bar{b}(b_1; b_2) &= \\ = \bar{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2) \end{aligned}$$

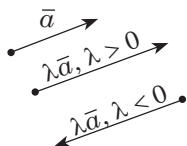


$$\begin{aligned} \bar{a}(a_1; a_2; a_3) - \bar{b}(b_1; b_2; b_3) &= \\ = \bar{c}(a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3) \end{aligned}$$

$$\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$$

Умножение вектора на число

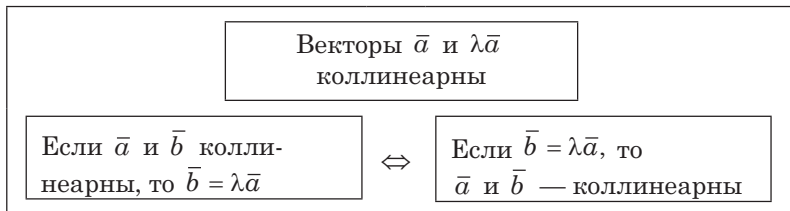
$$\lambda \cdot (\bar{a}_1; \bar{a}_2) = (\lambda \bar{a}_1; \lambda \bar{a}_2)$$



$$\lambda \cdot (a_1; a_2; a_3) = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$$

При $\lambda < 0$ вектор $\lambda \bar{a}$ одинаково направлен с вектором \bar{a} .
При $\lambda < 0$ вектор $\lambda \bar{a}$ противоположно направлен с вектором \bar{a} .

$$|\lambda \bar{a}| = |\lambda| \cdot |\bar{a}|$$



Свойства действий над векторами

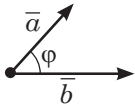
Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} и любых чисел γ и μ :	
1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$; 2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$; 3) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$; 4) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$; 5) $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$; 6) $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$;	7) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$; 8) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$; 9) $ \lambda\vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} $; 10) $\lambda > 0 \Rightarrow \lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$; 11) $\lambda < 0 \Rightarrow \lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$
<p>Задача 1. $\lambda\vec{a} = 5$; $\vec{a}(-3; 4)$. <i>Найти:</i> λ. <i>Решение.</i> $\vec{a}(-3; 4)$, тогда $\lambda\vec{a} = \sqrt{(-3\lambda)^2 + (4\lambda)^2} =$ $= \sqrt{25\lambda^2} = 5\lambda$; $\lambda\vec{a} = 5$, тогда $\lambda = \pm 1$. <i>Ответ:</i> ± 1.</p>	<p>Задача 2. <i>Найти:</i> длину вектора $\vec{a} = -3\vec{AB}$, если $A(3; -2; 0)$, $B(5; 0; -1)$. <i>Решение.</i> $\vec{AB} = (5 - 3; 0 - (-2); -1 - 0)$; $\vec{AB} = (2; 2; -1)$; $\vec{a} = -3\vec{AB} = (-6; -6; 3)$; $\vec{a} = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 3^2} = 9$. <i>Ответ:</i> 9.</p>

Угол между векторами.

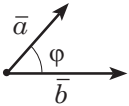
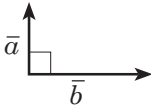
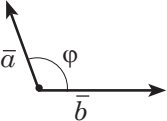
Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение векторов на плоскости	Скалярное произведение векторов в пространстве
$\vec{a}(a_1; a_2)$; $\vec{b}(b_1; b_2)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$	$\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$; $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

Окончание таблицы

	<p>Теорема о скалярном произведении векторов</p> $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} \cos \varphi,$ <p>где φ — угол между векторами</p>
---	--

Следствия из теоремы о скалярном произведении

<p>Численное значение скалярного произведения характеризует величину угла между векторами:</p>	
	$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow 0^\circ \leq \varphi < 90^\circ$ <p>Угол между векторами — острый</p>
	<p>Условие перпендикулярности векторов</p> $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ <p>Угол между векторами 90° (векторы перпендикулярны)</p>
	$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow 90^\circ < \varphi < 180^\circ$ <p>Угол между векторами — тупой</p>
<p>Косинус угла между векторами вычисляется по формуле:</p> $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$	
<p>Задача.</p> <p>Даны точки: $A(0; 1; 1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(2; -2; 2)$ и $D(2; -3; 1)$. Найти: угол между векторами \overline{AB} и \overline{CD}.</p> <p>Решение.</p> $\overline{AB} = \overline{(1-0; 1-1; 2-1)} = \overline{(1; 0; 1)}; \quad \overline{AB} = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2};$ $\overline{CD} = \overline{(2-2; -3+2; 1-2)} = \overline{(0; -1; -1)}; \quad \overline{CD} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2};$	

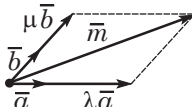
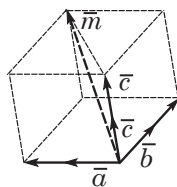
Окончание таблицы

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) = -1;$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{CD}|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = -\frac{1}{2}; \varphi = 120^\circ.$$

Ответ: 120° .

Разложение вектора

На плоскости: по двум неколлинеарным векторам	В пространстве: по трём неколлинеарным векторам
<p>\vec{m} — произвольный вектор плоскости; \vec{a} и \vec{b} — неколлинеарные векторы. Всегда существует разложение:</p> $\vec{m} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b},$ <p>где λ и μ — единственные числа</p> 	<p>\vec{m} — произвольный вектор пространства; \vec{a} и \vec{b} и \vec{c} — некопланарные (т. е. не параллельные одной плоскости) векторы. Всегда существует разложение:</p> $\vec{m} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \nu \vec{c},$ <p>где λ, μ и ν — единственные числа</p> 
<p>Векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ неколлинеарны, если</p> $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$	<p>Условие компланарности векторов</p> <p>Векторы \vec{a}, \vec{b} и \vec{c} — компланарны, если</p> $\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \text{ где } \lambda^2 + \mu^2 \neq 0$
<p>Задача 1.</p> <p>Для векторов $\vec{a}(-1;1)$ и $\vec{b}(1;1)$ найти такое разложение, чтобы $\vec{c}(1;-2)$</p>	<p>Задача 2.</p> <p>Даны три некопланарных вектора $\vec{a}(3;-2;1)$; $\vec{b}(-1;1;-2)$ и $\vec{c}(2;1;-3)$. Найти разложение вектора $\vec{m}(11;-6;5)$ по векторам \vec{a}, \vec{b} и \vec{c}.</p>

Окончание таблицы

<p><i>Решение.</i></p> <p>Векторы \bar{a} и \bar{b} неколлинеарны, т. е. $\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1}$; тогда вектор \bar{c} можно разложить по двум неколлинеарным векторам единственным образом:</p> $\bar{c} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b}; (\overline{1; -2}) =$ $= \lambda(\overline{-1; 1}) + \mu(\overline{1; 1});$ $(\overline{1; -2}) = (\overline{-\lambda; \lambda}) + (\overline{\mu; \mu});$ $(\overline{-\lambda + \mu; \lambda + \mu}) = (\overline{1; -2}).$ <p>Получим систему:</p> $\begin{cases} -\lambda + \mu = 1, \\ \lambda + \mu = -2; \end{cases}$ <p><i>Ответ:</i> $\lambda = -1,5; \mu = -0,5$.</p>	<p><i>Решение.</i></p> <p>Вектор \bar{m} можно представить единственным образом, разложенным по некопланарным векторам:</p> $\bar{m} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{b} + \nu\bar{c};$ $(\overline{11; -6; 5}) = \lambda(\overline{3; -2; 1}) +$ $+ \mu(\overline{-1; 1; -2}) + \nu(\overline{2; 1; -3});$ $(\overline{3\lambda; -2\lambda; \lambda}) + (\overline{-\mu; \mu; -2\mu}) +$ $+ (\overline{2\nu; \nu; -3\nu}) = (\overline{11; -6; 5}).$ <p>Получим систему:</p> $\begin{cases} 3\lambda - \mu + 2\nu = 11; \\ -2\lambda + \mu + \nu = -6; \\ \lambda - 2\mu - 3\nu = 5. \end{cases}$ <p><i>Ответ:</i> $\lambda = 2; \mu = -3; \nu = 1$.</p>
---	---


Векторный метод для решения геометрических задач

Этапы векторного метода:

- 1) сформулировать задачу на языке векторов;
 - 2) преобразовать составленные равенства на основании векторных соотношений;
 - 3) перевести полученные результаты на язык геометрии.
- Рассмотрим примеры использования векторного языка для формулирования некоторых геометрических утверждений

На геометрическом языке	На векторном языке
$a \parallel b$	$\overline{AB} = k\overline{CD}$, где отрезки AB и CD принадлежат соответственно прямым a и b , k — число
Точки A, B и C принадлежат прямой a	Установить справедливость равенства: $\overline{AB} = k\overline{BC}$ или $\overline{AC} = k\overline{BC}$, или $\overline{AC} = k\overline{AB}$

Окончание таблицы

На геометрическом языке	На векторном языке
 <p>$AC:AB = m:n$</p>	$\overline{AC} = \frac{m}{n} \overline{CB} \text{ или } \overline{QC} = \frac{n}{m+n} \overline{QA} + \frac{m}{m+n} \overline{QB}$ <p>для некоторой точки Q</p>
$a \perp b$	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$, где точки A и B принадлежат прямой a , а точки C и D — прямой b
Вычислить длину отрезка	<p>а) выбрать два неколлинеарных вектора, у которых известны длины и угол между ними;</p> <p>б) разложить по ним вектор, длина которого вычисляется;</p> <p>в) найти скалярный квадрат этого вектора: $\vec{a}^2 = \vec{a} ^2$</p>
Вычислить величину угла	<p>а) выбрать два неколлинеарных вектора, для которых известно отношение длин и углы между ними;</p> <p>б) выбрать векторы, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам;</p> <p>в) вычислить $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ \vec{a} \cdot \vec{b} }$</p>
<p>Задача.</p> <p>$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Точка M — середина $B_1 B$, N — середина $A_1 D_1$. Ребро куба равно $2a$. Найти длину MN.</p> <p><i>Решение.</i></p> <p>1. Ввести систему координат. $C(0; 0; 0)$; $C_1 C$ — по оси Oz; CD — по оси Oy; CB — по оси Ox. $M(2a; 0; a)$, $N(a; 2a; 2a)$.</p> <p>2. $\overline{MN}(a - 2a; 2a - 0; 2a - a)$;</p> $\overline{MN} = (-a; 2a; a); \overline{MN} = \sqrt{(-a)^2 + (2a)^2 + a^2} = \sqrt{6}a.$ <p>Ответ: $\sqrt{6}a$.</p>	

Все права защищены. Книга или любая ее часть не может быть скопирована, воспроизведена в электронной или механической форме, в виде фотокопии, записи в память ЭВМ, репродукции или каким-либо иным способом, а также использована в любой информационной системе без получения разрешения от издателя. Копирование, воспроизведение и иное использование книги или ее части без согласия издателя является незаконным и влечет уголовную, административную и гражданскую ответственность.

Справочное издание
анықтамалық баспа

Для старшего школьного возраста
мектеп жасындағы ересек балаларға арналған

НАГЛЯДНО И ДОСТУПНО

Третьяк Ирина Владимировна
ГЕОМЕТРИЯ В СХЕМАХ И ТАБЛИЦАХ
(орыс тілінде)

Ответственный редактор *А. Жилинская*
Ведущий редактор *Т. Судакова*
Художественный редактор *И. Успенский*

ООО «Издательство «Эксмо»
123308, Москва, ул. Зорге, д. 1. Тел. 8 (495) 411-68-86.
Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru

Өндіруші: «ЭКМО» АҚБ Баспасы, 123308, Мәскеу, Ресей, Зорге көшесі, 1 үй.
Тел. 8 (495) 411-68-86.

Home page: www.eksmo.ru E-mail: info@eksmo.ru.

Tayar belgisi: «Эксмо»

Қазақстан Республикасында дистрибьютор және өнім бойынша арыз-талаптарды қабылдаушының
өкілі «РДЦ-Алматы» ЖШС, Алматы қ., Домбровский көш., 3-а, литер Б, офис 1.
Тел.: 8(727) 251 59 89,90,91,92, факс: 8 (727) 251 58 12 вн. 107; E-mail: RDC-Almaty@eksmo.kz

Өнімнің жарамдылық мерзімі шектелмеген.

Сертификация туралы ақпарат сайтта: www.eksmo.ru/certification

Оттывая торговля книгами «Эксмо»:

ООО «ТД «Эксмо», 142700, Московская обл., Ленинский р-н, г. Видное,
Белокаменное ш., д. 1, многоканальный тел. 411-50-74.

E-mail: reception@eksmo-sale.ru

По вопросам приобретения книг «Эксмо» зарубежными оптовыми
покупателями обращаться в отдел зарубежных продаж ТД «Эксмо»
E-mail: international@eksmo-sale.ru

International Sales: International wholesale customers should contact
Foreign Sales Department of Trading House «Eksmo» for their orders.
international@eksmo-sale.ru

Сведения о подтверждении соответствия издания согласно
законодательству РФ о техническом регулировании
можно получить по адресу: <http://eksmo.ru/certification/>

Өндірген мемлекет: Ресей. Сертификация қарастырылған

Подписано в печать 20.02.2016. Произведено 02.03.2016.

Формат 60x90^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 8,0.

Тираж экз. Заказ

ISBN 978-5-699-85283-3



9 785699 852833 >



ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИН
ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИН
ИНТЕРНЕТ-МАГАЗИН

ISBN 978-5-699-85283-3



9 785699 852833 >

ЭФФЕКТИВНАЯ ПОДГОТОВКА

к уроку

к экзамену

Курс геометрии в схемах и таблицах подготовлен в полном соответствии с современными требованиями школьной программы и представляет собой учебное пособие, в котором в сжатой, концентрированной форме даются основные теоретические сведения.

- ✓ Необходимый объем информации по геометрии
- ✓ Структура текстов, удобная для запоминания
- ✓ Основные правила, понятия и теоремы
- ✓ Иллюстративные материалы, таблицы, схемы

Эта книга поможет:

- эффективно подготовиться к единому государственному экзамену;
- быстро повторить школьный курс геометрии;
- сэкономить силы и время.

в схемах и таблицах

ГЕОМЕТРИЯ