MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII AL REPUBLICII MOLDOVA

Ион Акири Андрей Брайков Ольга Шпунтенко

# Математика

Учебник для 9-го класса

EDITURA PRUT

Manualul şcolar a fost elaborat în conformitate cu prevederile Curriculumului la disciplină, aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 906 din 17 iulie 2019. Manualul a fost aprobat prin Ordinul ministrului educaţiei şi cercetării nr. 367 din 25 martie 2024 ca urmare a evaluării calităţii metodico-ştiinţifice.

(наименование учебного заведения)

УЧЁТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ УЧЕБНИКА

| Год пользования | Фамилия и имя ученика | Учебный год | Состояние учебника | |
|---|---|---|---|---|
| | | | в начале года | в конце года |
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| 3 | | | | |
| 4 | | | | |
| 5 | | | | |

- Учитель должен проверить правильность написания фамилии и имени ученика.
- Запрещаются записи и любые пометки на страницах учебника.
- Состояние учебника в начале и в конце учебного года оценивается как: *отлично*, *хорошо*, *удовлетворительно* или *плохо*.

Autori: Ion Achiri, doctor, conferenţiar universitar, UPS „Ion Creangă” din Chişinău
Andrei Braicov, doctor, conferenţiar universitar, UPS „Ion Creangă” din Chişinău
Olga Şpuntenco, profesoară, grad didactic superior, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău



Traducere din limba română: Ion Achiri
Redactor: Vitalie Puţuntică
Corector: Olga Efremov
Copertă: Irina Cuzin, Sergiu Stanciu
Machetare computerizată: Valentina Stratu



Editura Prut Internaţional, str. Alba Iulia, nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD-2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; (+373 22) 74 93 18
www.edituraprut.md; e-mail: office@prut.ro

Descrierea CIP a Camerei Naţionale a Cărţii

**Акири, Ион**

Математика: Учебник для 9 класса / Ион Акири, Андрей Брайков, Ольга Шпунтенко; traducere din limba română: Ion Achiri; Ministerul Educaţiei şi Cercetării al Republicii Moldova. – [Chişinău]: Prut Internaţional, 2024 (Rotografika). – 176 p.

Editat din bugetul de stat.

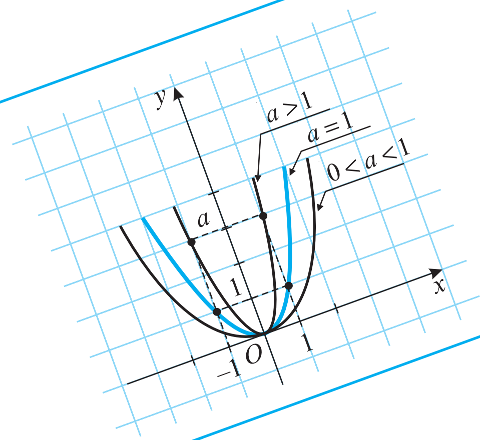
ISBN 978-9975-54-805-2

51(075.3)

A 394

Imprimat la Tipografia Rotografika

# АЛГЕБРА




$$ax^2 + bx + c = 0,$$

$$a \neq 0,\ \ a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

# Глава 1

# Множество действительных чисел. Повторение и дополнения

*«Образование – это свет, который делает жизнь более ясной».*
Пословица

## § 1. Множество действительных чисел

### 1.1. Понятие действительного числа

***Работайте в парах!***

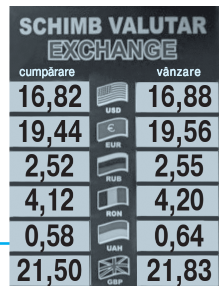
**1** Исследуйте схему и впишите в рамки элемент или подмножество множества $A=\{-5;\ -21;\ -\sqrt{3};\ 0;\ 2;\ 3\frac{1}{4};\ \sqrt{7};\ 5{,}8;\ 9\}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbb{N} \arrow[r, "\text{+ результаты всех вычитаний}"] \arrow[d, "\text{+ результаты всех делений}"] & \mathbb{Z} \arrow[d, "\text{+ результаты всех делений}"] & \mathbb{I} \arrow[d, "\text{+ все рациональные числа}"] \\
\mathbb{Q}_+ \arrow[r, "\text{+ результаты всех вычитаний}"'] & \mathbb{Q} \arrow[r] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

***Образец:***
$\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$\{2;\ 9\}\subset\mathbb{N}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| ____ $\in\mathbb{Z}$ | ____ $\subset\mathbb{Z}$ | ____ $\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ | ____ $\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ |
| ____ $\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ | ____ $\subset\mathbb{Q}$ | ____ $\in\mathbb{Q}_+$ | ____ $\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ |

**2** Впишите в рамки элемент или подмножество множества чисел из таблицы «Обмен валют».




| | | |
|---|---|---|
| ____ $\in\mathbb{R}$ | ____ $\in\mathbb{Q}$ | ____ $\subset\mathbb{Q}\setminus\mathbb{N}$ |
| ____ $\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ | ____ $\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ | ____ $\subset\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ |

***Вспомним***

***Обозначения:*** $\mathbb{N}=\{0;1;2;3;4;\ldots\}$ – множество натуральных чисел.
$\mathbb{N}^*=\{1;2;3;4;\ldots\}$ – множество ненулевых натуральных чисел.
$\mathbb{Z}=\{\ldots;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;4;\ldots\}$ – множество целых чисел.
$\mathbb{Q}=\{x\mid x=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}^*\}$ – множество рациональных чисел.
$\mathbb{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\{x\mid x$ – непериодическое десятичное число с бесконечным числом десятичных знаков$\}$ – множество иррациональных чисел.
$\mathbb{R}=\{x\mid x$ – рациональное число или иррациональное число$\}$ – множество действительных чисел.
Справедливы соотношения: $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R};\ \mathbb{I}\subset\mathbb{R};\ \mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$.
$\mathbb{R}^*$ – множество ненулевых действительных чисел;
$\mathbb{R}^*_+$ – множество положительных действительных чисел;
$\mathbb{R}^*_-$ – множество отрицательных действительных чисел.

• Обратите дробь $\frac{33}{18}$ в десятичное число.

*Решение*:

Применив алгоритм деления, получим: $\frac{33}{18}=1{,}8(3)$.

$1{,}8(3)$ является смешанным периодическим десятичным числом.

**Определения**

- **Простыми периодическими десятичными числами** называются периодические десятичные числа, период которых следует непосредственно после запятой.
- **Смешанными периодическими десятичными числами** называются периодические десятичные числа, период которых не следует непосредственно после запятой.

**Применяем**

• Обратите в дробь десятичное число: а) $0,(26)$; б) $25{,}2(43)$.

*Решение*:

а) Пусть $x=0,(26)$.

Тогда $100x=26,(26)=26+x \Leftrightarrow 100x-x=26 \Leftrightarrow x=\frac{26}{99}$.

*Ответ*: $0,(26)=\frac{26}{99}$.

В общем виде имеем $0,(\overline{a_1a_2...a_n})=\frac{\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{n\text{ цифр}}}$, где $a_1, a_2, ..., a_n$ – цифры.

б) ***I метод***. Пусть $x=25{,}2(43)$.

Тогда $10x=252,(43)=252+0,(43)=252+\frac{43}{99}=\frac{24\,991}{99} \Leftrightarrow x=\frac{24\,991}{990}=25\frac{241}{990}$.

***II метод***. $25{,}2(43)=25+\frac{243-2}{990}=25\frac{241}{990}$.

*Ответ*: $25{,}2(43)=25\frac{241}{990}$.

В общем виде имеем $0,\overline{a_1a_2...a_n(b_1b_2...b_m)}=\frac{\overline{a_1a_2...a_nb_1b_2...b_m}-\overline{a_1a_2...a_n}}{\underbrace{99...9}_{m\text{ цифр}}\underbrace{00...0}_{n\text{ цифр}}}$.

**Запомните!**

Действительное число может быть записано в виде:
а) десятичного числа с конечным числом десятичных знаков;
б) непериодического десятичного числа с бесконечным числом десятичных знаков;
в) периодического десятичного числа с периодом, отличным от 9.

## 1.2. Изображение действительных чисел на числовой оси

• Изобразите на числовой оси число $\sqrt{2}$:
а) используя его десятичные приближения;
б) геометрически (при помощи циркуля и линейки).

*Решение*:

Так как $\sqrt{2}\approx1{,}414$, следует, что $1{,}41<\sqrt{2}<1{,}42$. Получим следующее приближенное изображение числа $\sqrt{2}$ на числовой оси (рис. 1):

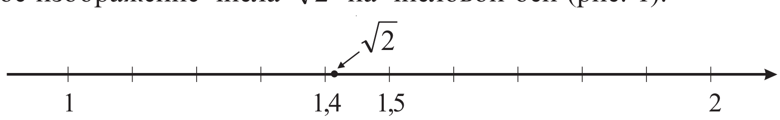



Рис. 1

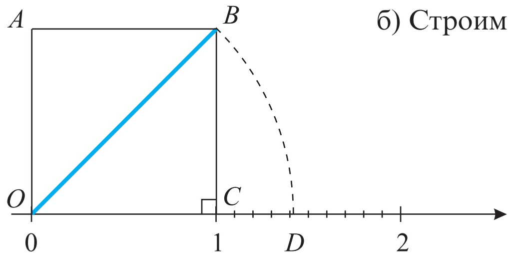
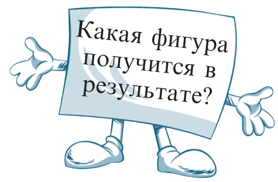


Рис. 2

б) Строим на числовой оси квадрат $OABC$ со стороной $AB = 1$ (рис. 2).

Применив теорему Пифагора к треугольнику $OCB$ ($m(\angle C) = 90°$), получим $OB = \sqrt{2}$. Циркулем откладываем на числовой оси отрезок $OD$ такой, что $OD = OB = \sqrt{2}$. Тогда точка $D$ имеет координату $\sqrt{2}$.




***Задание*** Применив последовательно теорему Пифагора в рисунке 2, определите точки с координатами $\sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}$ и т. д.

Как правило, иррациональные числа изображают на числовой оси, используя их десятичные приближения.

***Запомните!***

> Каждому действительному числу $a$ соответствует на числовой оси одна точка $A$. И наоборот, каждой точке числовой оси соответствует одно действительное число $a$. Поэтому о точках числовой оси говорят как о действительных числах, и наоборот.
> Число $a$ называют ***координатой*** точки $A$ и обозначают $A(a)$.

Используя изображение действительных чисел на числовой оси, можно решить различные задачи. Одной из них является задача на сравнение действительных чисел. (Другой способ сравнения действительных чисел рассмотрен в пункте 2.2.)

Например, если действительные числа $a$ и $b$ являются координатами точек $A$ и $B$ соответственно, и $\overrightarrow{AB}$ имеет то же направление, что и ось, то $a < b$ (рис. 3).

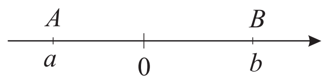


Рис. 3

***Запомните!***

> Из двух действительных чисел, изображенных на числовой оси, бо́льшим является число, расположенное правее другого.

***Применим***

- Сравните числа: а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$.

*Решение*:

а) Так как $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ и $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, а $1{,}4 < 1{,}7$, получим $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

*Ответ*: $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

б) Так как $\sqrt{2} > 0$, а $-\sqrt{2} < 0$, получим $\sqrt{2} > -\sqrt{2}$.

*Ответ*: $-\sqrt{2} < \sqrt{2}$.

***Замечание***

Числа $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ являются противоположными действительными числами, то есть точки $D(\sqrt{2})$ и $D'(-\sqrt{2})$, расположенные на числовой оси, симметричны относительно ее начала. И наоборот, координаты точек $D(\sqrt{2})$ и $D'(-\sqrt{2})$, симметричных относительно начала оси, являются противоположными действительными числами (рис. 4).

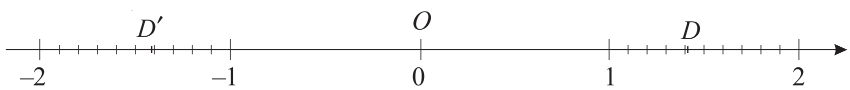


Рис. 4

**Запомните!**

***Противоположными действительными числами*** называются действительные числа, расположенные на числовой оси по обе стороны от ее начала и на одинаковом расстоянии от него.
Действительные числа $a$ и $-a$ являются противоположными.

## 1.3. Модуль действительного числа

**Работайте в парах!**

- Раскройте модуль:

а) $|3-\sqrt{2}|$; б) $|1-\sqrt{3}|$; в) $\{x \in \mathbb{R} \,\|\, |x| \leq 3\}$; d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x| > \frac{1}{3}\right\}$.

*Решение*:

а) $|3-\sqrt{2}| = 3-\sqrt{2}$, так как $3 > \sqrt{2}$;

б) $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$, поскольку $1 < \sqrt{3}$;

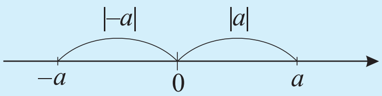
в) $\{x \in \mathbb{R} \,\|\, |x| \leq 3\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \in [-3;\ 3]\}$;

г) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x| > \frac{1}{3}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in \left(-\infty;\ -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3};\ +\infty\right)\right\}$.

**Запомните!**

***Модулем*** или ***абсолютным значением*** действительного числа $a$ называют такое число $|a|$, что:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0; \end{cases} \quad |a| = \max\{-a;\ a\},$$




$|a|$ – расстояние от $a$ до 0 на оси.

***Свойства модуля действительного числа***

1° $|a| \geq 0$ для любого $a \in \mathbb{R}$, и $|a| = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$.

2° $|a| \geq a$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

3° $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ для любых $a, b \in \mathbb{R}$.

4° $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ для любых $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

5° $|a|^2 = |a^2| = |-a|^2 = a^2$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

- Раскройте модуль, используя его свойства, и упростите полученное выражение:

а) $|3-\sqrt{2}| \cdot |3+\sqrt{2}|$;

б) $|1-\sqrt{7}| \cdot (1+\sqrt{7})$;

в) $|x+y| : (x+y)^2$.

*Решение*:

а) $|3-\sqrt{2}| \cdot |3+\sqrt{2}| = |(3-\sqrt{2}) \cdot (3+\sqrt{2})| = |9-2| = 7$;

б) $|1-\sqrt{7}| \cdot (1+\sqrt{7}) = -(1-\sqrt{7}) \cdot (1+\sqrt{7}) = -(1-7) = 6$;

в) $|x+y| : (x+y)^2 = |x+y| \cdot \frac{1}{|x+y|^2} = \frac{1}{|x+y|}$.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Даны множества:

1) $\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; 2) $\mathbb{Q}_+\setminus\mathbb{N}$; 3) $\mathbb{Q}_-\setminus\mathbb{Z}$; 4) $\mathbb{R}_+\setminus\mathbb{N}$;
5) $\mathbb{R}^*_-\setminus\mathbb{Q}$; 6) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}_+$; 7) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{I}$.

а) Найдите элементы множества $\{-1{,}4;\ \sqrt{5};\ 7{,}(2);\ -21\frac{1}{4};\ 0{,}18;\ 2010;\ \sqrt{21}\}$, которые принадлежат каждому из множеств 1) – 7).

б) Найдите кардиналы множеств 1) – 7), полученных при решении задания а).

**2.** Даны числа 12; $\sqrt{16}$; 3,(7); $-38\frac{1}{2}$; 2011; $-\sqrt{13}$; 0; $6\sqrt{5}$; $\pi$. Определите, какие из них являются рациональными, а какие – иррациональными.

**3.** *Работайте в парах!*

1) Обратите в десятичное число дробь:
а) $\frac{7}{8}$; б) $\frac{51}{15}$; в) $\frac{131}{27}$; г) $\frac{210}{198}$.

2) Найдите период каждого из полученных десятичных чисел.

**4.** *Исследуйте!* Даны числа:
а) 0,(3); б) 2,1(6); в) 5,(738);
г) 17,0(18); д) 83,(685); е) 70,13(18).
Какие из заданных чисел являются простыми периодическими десятичными числами, а какие – смешанными периодическими десятичными числами?

**5.** Изобразите на числовой оси точки:
$$A(-7),\ B\left(\frac{1}{2}\right),\ C(-1{,}25),\ D\left(3\frac{1}{4}\right),\ E(7).$$

**6.** Впишите в каждую рамку одно из чисел множества $\left\{\frac{1}{4};\ 0{,}75;\ 0{,}(3);\ 5{,}5\right\}$, чтобы получить истинное высказывание:
$$\frac{3}{4}=\square;\quad \frac{1}{3}=\square;\quad 0{,}25=\square;\quad 5\frac{1}{2}=\square.$$

**7.** *Работайте в парах!* Дедушка говорит внукам: «У меня есть для вас 130 орехов. Разделите их на две части так, чтобы меньшая часть, увеличенная в 4 раза, была бы равна большей части, уменьшенной в 3 раза». Как это сделать?

### Формируем способности и применяем

**8.** *Работайте в группах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение и определите, какими числами (рациональными или иррациональными) являются его решения.
а) $3\sqrt{2}x+7=0$; б) $16x-3(x+1)=5x$;
в) $2{,}5(x-4)-6x=3-x$; г) $x^2-3x-10=0$;
д) $2x^2+7x-8=0$; е) $-x^2+10x+2=0$.

**9.** Обратите в дробь десятичное число:
а) 0,(18); б) 3,(2); в) 6,1(8);
г) 5,12(18); д) 25,1(378).

**10.** *Исследуйте!* Используя числовую ось, впишите в рамки один из знаков <, >, =:
а) $1+\sqrt{7}\ \square\ 2\sqrt{3}$; б) $-\sqrt{36}\ \square\ -6{,}123...$;
в) $3{,}78\ \square\ \sqrt{11}$; г) $-\frac{1}{3}\ \square\ -0{,}(3)$.

**11.** Раскройте модуль:
а) $|1-\sqrt{6}|$; б) $|-\sqrt{3}-\sqrt{2}|$;
в) $|8-\sqrt{49}|$; г) $|(3-\sqrt{2})^2|$.

**12.** *Работайте в группах!* Раскройте модуль:
а) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\le 7\}$; б) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\le 0\}$;
в) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|>0\}$; г) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\ge\sqrt{5}\}$.

**13.** Изобразите на числовой оси множества, полученные в задании **12** после раскрытия модуля.

**14.** *Исследуйте!* Имеются два сосуда емкостью 5 л и 7 л. Как получить 4 л воды, используя лишь эти два сосуда?

**15.** *Работайте в парах!* Полученный после сушки винограда изюм составляет 32% от исходной массы. Сколько винограда нужно взять, чтобы получилось 8 кг изюма?

**16.** (*EG, 2018). Из 3 литров молока получается 600 граммов творога. Сколько килограммов творога получится из 5 литров молока?

*EG, 2018 – выпускной экзамен гимназии 2018 года.

### Развиваем способности и творим

17. *Исследуйте!* Определите, является ли рациональным число:
а) $\sqrt{8}$; б) 7,2(15); в) $1-\sqrt{5}$;
г) $\sqrt{225}$; д) $\sqrt{13}$; е) $\sqrt{125}$.

18. Используя циркуль и линейку, постройте на числовой оси точку, координатой которой является иррациональное число:
а) $\sqrt{13}$; б) $\sqrt{17}$; в) $-\sqrt{17}$; г) $-\sqrt{11}$.

19. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $|3x-7|=8$; б) $|2x^2+17x+658|=-2\sqrt{19}$;
в) $|x|\cdot|x-3|=4$; г) $|2x(x-0,5)|=3$.

20. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
а) $|3x-1|=|1-x|$; б) $|2+x|=|5x-3|$;
в) $2|x|=|x-3|+2$; г) $|2x-1|=|x+5|-2$.

# § 2. Действия над действительными числами

## 2.1. Свойства действий над действительными числами

*Вспомним*

***Свойства сложения и умножения действительных чисел***

1° ***Ассоциативность***:
$a+(b+c)=(a+b)+c$ для любых $a, b, c\in\mathbb{R}$. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ для любых $a, b, c\in\mathbb{R}$.

2° ***Коммутативность***:
$a+b=b+a$ для любых $a, b\in\mathbb{R}$. $a\cdot b=b\cdot a$ для любых $a, b\in\mathbb{R}$.

3° 0 ***является нейтральным элементом при сложении***:
$a+0=0+a=0$ для любого $a\in\mathbb{R}$.
1 ***является нейтральным элементом при умножении***:
$1\cdot a=a\cdot 1=a$ для любого $a\in\mathbb{R}$.

4° Для любого действительного числа $a$ существует ***противоположное*** ему число $-a$ такое, что $a+(-a)=0$.
Для любого ненулевого действительного числа $a$ существует ***обратное*** ему число $\frac{1}{a}$ такое, что $a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$.

5° —
$a\cdot 0=0\cdot a=0$ для любого $a\in\mathbb{R}$.

6° ***Дистрибутивность умножения относительно сложения (вычитания)***:
$$a\cdot(b\pm c)=a\cdot b\pm a\cdot c \text{ для любых } a, b, c\in\mathbb{R}.$$

*Замечания*

1. $a-b=a+(-b)$ для любых $a, b\in\mathbb{R}$.
2. $a:b=a\cdot\frac{1}{b}$ для любых $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$.

*Запомните!*

**Порядок выполнения действий и использование скобок на множестве $\mathbb{R}$**

I. В выражении без скобок, содержащем различные действия, вначале выполняем (в порядке их записи) действия извлечения квадратного корня и возведения в степень, затем действия умножения и деления, и, наконец, действия сложения и вычитания.

II. В выражении со скобками вначале выполняем действия в скобках, соблюдая при этом общепринятый порядок выполнения действий.

## 2.2. Сравнение действительных чисел

- Сравните числа:

а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$; б) $\sqrt{2}$ и 1,3; в) $4-\sqrt{5}$ и $-3$.

*Решение*:

а) $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$ → так как $\frac{2}{3}=0,(6)$, $\frac{3}{4}=0,75$ и $0,(6)<0,75$;

б) $\sqrt{2}>1,3$ → поскольку $\sqrt{2}\approx 1,4$ и $1,4>1,3$;

в) $4-\sqrt{5}>-3$ → так как $\sqrt{5}\approx 2,2$; значит $4-\sqrt{5}>0$, а $-3<0$.

***Внимание!***

Любые два действительных числа можно сравнивать, то есть для любых $a, b\in\mathbb{R}$ справедливо $a<b$ или $a=b$.
При $a=b$ или $a<b$ $(a>b)$ записывают $a\le b$ $(a\ge b)$.

***Применяем***

- Запишите в порядке возрастания числа: $\sqrt{7}$, 5, $2\sqrt{2}$, $-3$.

*Решение*:

Имеем $\sqrt{7}\approx 2,6$, $2\sqrt{2}\approx 2,8$.

Значит, $2\sqrt{2}>\sqrt{7}$.

Так как $-3<\sqrt{7}<2\sqrt{2}<5$, получим искомое упорядочивание: $-3$, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{2}$, 5.

***Запомните!***

Связь между отношением порядка $\le$ и действиями сложения и умножения на множестве $\mathbb{R}$ выражается следующими ***свойствами***:

1° Если $a\le b$ и $c\in\mathbb{R}$, то $a+c\le b+c$ для любых $a, b, c\in\mathbb{R}$.

2° Если $a\le b$ и $c\le d$, то $a+c\le b+d$ для любых $a, b, c, d\in\mathbb{R}$.

3° Если $a\le b$ и $c>0$, то $ac\le bc$ для любых $a, b, c\in\mathbb{R}$.

4° Если $a\le b$ и $c<0$, то $ac\ge bc$ для любых $a, b, c\in\mathbb{R}$.

5° Если $a\le b$, $c\le d$ и $a, b, c, d\in\mathbb{R}_+^*$, то $ac\le bd$ и $\frac{a}{d}\le\frac{b}{c}$.

***Замечание***

Аналогичные свойства можно получить, если заменить знак $\le$ на любой из знаков $<$, $\ge$, $>$.

***Запомните!***

Действительные числа можно сравнивать, используя их десятичные приближения или их изображения на числовой оси.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** ***Работайте в парах!*** Упростите выражение:

а) $3\sqrt{2}(2+\sqrt{2})-5(3{,}5-\sqrt{6})+11:(7-1{,}5)$;

б) $\frac{2}{5}\cdot 0{,}25+78:4-8\sqrt{5}:\sqrt{5}-3\cdot 7\sqrt{2}$.

**2.** Вычислите, используя калькулятор, с точностью до 0,001:

а) $\sqrt{7}$; б) $\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{2}$; г) $3\sqrt{5}$.

**3.** Сравните числа:

а) $\frac{5}{7}$ и $\frac{3}{4}$; б) $\sqrt{7}$ и 2,65;

в) $3-\sqrt{2}$ и 1,7; г) $1+\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{2}$.

**4.** Запишите в порядке возрастания числа:

$3\sqrt{2}$; $-3,(56)$; $2\sqrt{3}$; $1+\sqrt{2}$; $2,(15)$; $-2\frac{1}{5}$; $2-\sqrt{5}$.

**5.** ***Исследуйте!*** Сырые овощи (100 г) содержат 27 мг аскорбиновой кислоты (витамин C). Те же овощи в вареном виде содержат лишь 18 мг аскорбиновой кислоты. Вычислите, каковы потери витамина C при варке овощей (в процентах).

**6.** Для изготовления 6 порций шоколадного торта используются следующие ингредиенты: 250 г сливочного масла, 200 г сахара, 300 г шоколада, 6 яиц и 3 ложки муки. Какое количество каждого ингредиента нужно, чтобы получился торт на 4 порции?

**7.** а) Перечертите и заполните таблицу:

| $a$ | $b$ | $c$ | $a\cdot b$ | $b\cdot a$ | $a\cdot(b\cdot c)$ | $(a\cdot b)\cdot c$ | $a\cdot 1$ | $\frac{1}{b}$ | $\frac{1}{c}\cdot c$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | –4 | 2 | | | | | | | |
| $\frac{1}{3}$ | 6 | –7 | | | | | | | |
| $\sqrt{2}$ | $-\sqrt{2}$ | $5\sqrt{3}$ | | | | | | | |
| 0,3 | $\frac{\pi}{3}$ | $-\pi$ | | | | | | | |

б) Определите свойства умножения, использованные при заполнении таблицы.

**8.** а) Перечертите и заполните таблицу:

| $x$ | $y$ | $z$ | $x+y$ | $y+x$ | $x\cdot(y-z)$ | $xy-xz$ | $x^{-2}\cdot y^{-2}\cdot z^{-2}$ | $(xyz)^{-2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}$ | $\sqrt{2}$ | $\sqrt{6}$ | | | | | | |
| 10 | –0,25 | $\frac{1}{4}$ | | | | | | |
| $\sqrt{8}$ | $-\sqrt{5}$ | $\sqrt{10}$ | | | | | | |
| 2,5 | –9 | $\sqrt{3}$ | | | | | | |

б) Определите свойства действий над действительными числами, использованные при заполнении таблицы.


**9.** На флаконе с микстурой написано: 40 ± 3 мл. Что можно сказать о количестве лекарства во флаконе?

**10.** Запишите в виде суммы, разности, произведения и частного двух действительных чисел, отличных от 0 и 1, числовое выражение:

а) $3\sqrt{7}$; б) $8+\sqrt{5}$; в) $-2\sqrt{3}$; г) $-7{,}5$; д) $18$; е) $\sqrt{6}-\sqrt{11}$.

## ■ ■ Формируем способности и применяем


**11.** Сколько раз следует прибавить наибольшее двузначное число к наибольшему однозначному числу, чтобы получить наибольшее трехзначное число?

**12.** Сумма, произведение и частное каких действительных чисел равны между собой?

**13.** Дополните числовую последовательность: 12; 18; 27; 40,5; ▢; ▢.

**14.** Стоимость взрослого билета для путешествия на корабле равна 8,25 €, а стоимость детского билета – 2,75 €. Используя данные с фотографии, вычислите, сколько леев было заплачено за путешествие, если по обменному курсу 1 € = 19,4 лея.

**15.** Выполните действия:

а) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$; б) $(2\sqrt{7}+1)^2$; в) $(3-\sqrt{7})^2$; г) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})^2$.

**16.** Выполните действия:

а) $(2-\sqrt{3})^3$; б) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3$; в) $(3\sqrt{5}+1)^3$; г) $(2+\sqrt{3})^3$.

**17.** Вычислите, используя калькулятор, с точностью до 0,002:

а) $3\sqrt{7}+2\sqrt{5}$; б) $7\sqrt{2}-9\sqrt{3}$; в) $-3\sqrt{2}-5$; г) $3(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

**18.**  ***Исследуйте!*** Найдите закономерность и впишите пропущенное числовое выражение:

| | | |
|---|---|---|
| $\sqrt{3}-2\sqrt{2}$ | 2 | $11-4\sqrt{6}$ |
| $1+\sqrt{5}$ | 3 | ? |

**19.** Цена телевизора повысилась на 20%, а затем, через месяц, еще на 20%. На сколько процентов возросла изначальная цена телевизора?

**20.**  ***Работайте в парах!*** При списывании упражнения $20:5\cdot 2+6^2$ ученик забыл поставить скобки. Восстановите скобки, если известно, что результатом упражнения должно быть число: а) 38; б) 196; в) 152.

## ■ ■ ■ Развиваем способности и творим

**21.** Упростите выражение:

а) $\sqrt{(2-3\sqrt{3})^2}+2|3-\sqrt{13}|-7{,}5(4-\sqrt{8})^2+6{,}4:(5-1{,}8)$;

б) $|7-2\sqrt{3}|+|1-3\sqrt{3}|^2-6(\sqrt{3}+8)-\sqrt{(2-7\sqrt{3})^2}$.

**22.** Выполните действия:

а) $(a-b+c)^2$; б) $(a-b-c)^2$; в) $(a+b+c)^2$.

**23.** Вычислите:

а) $7,(15)+2,(18)-5,(23)+11,(20)$; б) $-5{,}2(7)+6{,}1(3)-3{,}5(3)+2,(2)$.

**24.** Запишите число 34 000 в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

# § 3. Степени и корни

## 3.1. Квадратный корень из неотрицательного действительного числа и его свойства. Повторение и дополнения

*Вспомним*

- Вычислите: а) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$.

*Решение*:

а) $\sqrt{6\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ → так как $\frac{5}{2}\geq 0$ и $\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$;

б) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-2\cdot 3\cdot\sqrt{7}+3^2}=\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}=$

$=|\sqrt{7}-3|=3-\sqrt{7}$ → поскольку $(3-\sqrt{7})\geq 0$ и $(3-\sqrt{7})^2=16-6\sqrt{7}$.

**Определение**

**Квадратным корнем**, или **корнем второй степени из неотрицательного действительного числа** $a$, называется неотрицательное действительное число $b$, квадрат которого равен $a$.

Квадратный корень из неотрицательного действительного числа $a$ обозначается $\sqrt{a}$.

*Запомните!*

***Свойства квадратного корня***

1° Если $a$ – действительное число, то $\sqrt{a^2}=|a|$.

2° Если $a$ и $b$ – неотрицательные действительные числа, то $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

3° Если $a$ – неотрицательное действительное число, а $b$ – положительное действительное число, то $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

4° Если $a$ – действительное, а $b$ – неотрицательное число, то $\sqrt{a^2b}=|a|\cdot\sqrt{b}$.

*Применяем*

- Вычислите $\frac{\sqrt{3,6}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}}$.

*Решение*:

$\frac{\sqrt{3,6}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{3,6}{3}}\cdot\sqrt{\frac{48}{10}}=$ → применяем свойство 3°

$=\sqrt{\frac{3,6\cdot 48}{10\cdot 3}}=\sqrt{0,36}\cdot\sqrt{16}=$ → применяем свойство 2°

$=0,6\cdot 4=2,4.$

- Заполните рамки. Упростите выражение $\frac{3b^2}{5a}\cdot\sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}}$, если $a<0$, $b>0$.

*Решение*:

$\frac{3b^2}{5a}\cdot\sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}}=\frac{3b^2}{5a}\cdot\frac{\sqrt{50a^2}}{\sqrt{81b^2}}=$ → применяем свойство $\boxed{\phantom{0}}$

$=\frac{3b^2\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{a^2}}{5a\cdot\sqrt{81}\cdot\sqrt{b^2}}=$ → применяем свойство $\boxed{\phantom{0}}$

$=\frac{3b^2\cdot 5\sqrt{2}\cdot|a|}{5a\cdot 9\cdot|b|}=$ → применяем свойство $\boxed{\phantom{0}}$

$=\frac{b^2\cdot(-a)\cdot\sqrt{2}}{a\cdot 3b}=-\frac{b\sqrt{2}}{3}$ → поскольку $a<0$, $b>0$.

*Исследуем*

- Избавьтесь от иррациональности в знаменателе отношения:
а) $\frac{14}{3\sqrt{7}}$; б) $\frac{3}{4-\sqrt{10}}$.

*Решение*:

а) $\frac{14}{3\sqrt{7}}=\frac{14\cdot\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=$ → умножаем числитель и знаменатель на $\sqrt{7}$

$=\frac{14\sqrt{7}}{3\cdot 7}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$;

б) $\frac{3}{4-\sqrt{10}}=\frac{3(4+\sqrt{10})}{(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})}=$ → умножаем числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю: $4+\sqrt{10}$

$=\frac{3(4+\sqrt{10})}{16-10}=\frac{3(4+\sqrt{10})}{6}=\frac{4+\sqrt{10}}{2}$.

**Определение** Выражения $a+\sqrt{b}$ и $a-\sqrt{b}$, $a, b\in\mathbb{R}$, $b>0$, называются **сопряженными**.

*Запомните!* ***Избавлением от иррациональности в знаменателе отношения*** называется преобразование, приводящее знаменатель этого отношения к рациональному виду.

- Пусть $E$ – некоторое выражение. Чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе, нужно умножить числитель и знаменатель отношения вида:

1. $\frac{E}{a\sqrt{b}}$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}_+^*$, на $\sqrt{b}$;
2. $\frac{E}{a\pm\sqrt{b}}$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}_+^*$, на выражение, сопряженное знаменателю заданного отношения.

## 3.2. Степень с целым показателем. Свойства

- Вычислите: а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; б) $(1{,}2)^0$; в) $5^{-3}$.

*Решение*:

а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4=\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{16}{81}$; → $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}}$

б) $(1{,}2)^0=1$; → $a^0=1,\ a\in\mathbb{R}^*$

в) $5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$. → $a^{-n}=\frac{1}{a^n},\ a\in\mathbb{R}^*,\ n\in\mathbb{Z}^*$

**Определение степени с целым показателем**

Для $a\in\mathbb{R}^*$ и $n\in\mathbb{N}^*$, $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}}$.

$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$, $a\in\mathbb{R}^*$, $n\in\mathbb{Z}^*$. $a^0=1$, $a\in\mathbb{R}^*$.

Для $a=0$ и $n\in\mathbb{N}^*$, $0^n=0$.

*Замечание* Выражение $0^0$ не имеет смысла.

*Запомните!*

***Свойства степени с целым показателем***

Для $a, b \in \mathbb{R}^*$, $k, m \in \mathbb{Z}$:

1° $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;  2° $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;  3° $(ab)^n = a^n \cdot b^n$;

4° $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$;  5° $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

*Применяем*

- Вычислите $\frac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4}$.

*Решение*:

$$\frac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4} = 3^{-3+2-4} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}.$$


- Упростите выражение $\left(\frac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2a^2}{5b^3}\right)^3$.

*Решение*:

$$\left(\frac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2a^2}{5b^3}\right)^3 = \frac{2^{-2} \cdot a^{-4}}{5^{-2} \cdot b^{-10}} \cdot \frac{2^3 \cdot a^6}{5^3 \cdot b^9} = \frac{2^{-2+3} \cdot a^{-4+6}}{5^{-2+3} \cdot b^{-10+9}} = \frac{2a^2}{5b^{-1}} = \frac{2a^2 b}{5}.$$

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Вычислите:

а) $\sqrt{10 \cdot 40}$;  б) $\sqrt{\frac{2}{32}}$;  в) $\sqrt{0{,}16 \cdot 25 \cdot 1{,}69}$;

г) $\sqrt{3\frac{1}{16}}$;  д) $\sqrt{3^4}$;  е) $\sqrt{\frac{2^6}{5^4}}$.

**2.** *Исследуйте!* Найдите значения действительного числа $a$, при которых верно равенство:

а) $\sqrt{(a-2)^2} = a - 2$;  б) $\sqrt{\frac{a^2}{4}} = -\frac{a}{2}$;

в) $\sqrt{\frac{3}{a^2 + 2a + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{a+1}$.

**3.** *Работайте в парах!* Внесите множитель под знак корня:

а) $\frac{2}{3}\sqrt{27}$;  б) $a\sqrt{3}$, $a < 0$;  в) $(b-1)\sqrt{b}$, $b \geq 1$.

**4.** *Работайте в парах!* Вынесите множитель из-под знака корня:

а) $\sqrt{48}$;  б) $\sqrt{98}$;

в) $\sqrt{5a^4}$;  г) $\sqrt{7(2-a)^2}$, $a < 2$.

**5.** Запишите в виде степени с основанием 10:

1000; 100; 10; 1; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; 0,0001.

**6.** Вычислите: а) $\frac{3^{-4}}{3^{-7}}$;  б) $5^{-11} \cdot 5^9$;

в) $\left(\frac{3}{11}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{11}\right)^{-3}$;  г) $6^2 \cdot 24^{-2}$.

**7.** Выполните действия:

а) $2a^{-3} \cdot 5a^5$;  б) $\frac{7x^{-3}}{28x^{-4}}$;

в) $\left(\frac{1}{2}b^{-3}\right)^{-2}$;  г) $\left(\frac{1}{10}y^2\right)^{-3}$.

### Формируем способности и применяем

**8.** Вычислите:

а) $10\sqrt{1{,}44} + \sqrt{48} - \sqrt{12} - \frac{6}{\sqrt{3}} - 5\sqrt{0{,}16}$;  б) $\frac{1}{\sqrt{7}-2} - \frac{1}{\sqrt{7}+2}$.

**9.** *Работайте в группах!* Избавьтесь от иррациональности в знаменателе отношения.

а) $\frac{7}{3\sqrt{21}}$;  б) $\frac{6}{5\sqrt{10}}$;  в) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$;  г) $\frac{\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$;  д) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$.

**10.** Упростите выражение:

а) $\sqrt{3}(\sqrt{12}-2\sqrt{27})$;

б) $\sqrt{48}-2\sqrt{3}(2-5\sqrt{12})$;

в) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$;

г) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2-\sqrt{120}$.

**11.** Сократите отношение:

а) $\dfrac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{3+\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+a}$;

в) $\dfrac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1}$; г) $\dfrac{2\sqrt{7}-7}{\sqrt{7}}$.

**12.** Вычислите:

а) $\dfrac{6^{-10}}{81^{-2}\cdot 32^{-2}}$; б) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-25}\cdot 25^{-6}\cdot 125^{-4}$;

в) $\dfrac{20^{-4}\cdot 15^{-3}}{30^{-7}}$; г) $\dfrac{(-3)^{-4}\cdot 27^{10}}{81^{9}\cdot 9^{-6}}$;

д) $(10^{-2}-1)(10^{-2}+1)$; е) $\dfrac{(2^3)^5\cdot(2^{-6})^2}{4^2}$.

**13.** *Работайте в парах!* Вычислите:

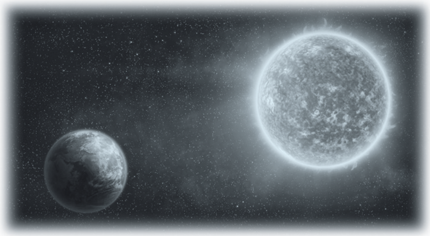
а) $(2{,}5\cdot 10^{-3})\cdot(8{,}4\cdot 10^{4})$;

б) $(4{,}5\cdot 10^{-2}):(1{,}5\cdot 10^{-3})$;

в) $(3{,}6\cdot 10^{5})\cdot[(2{,}4)^{-1}\cdot 10^{-2}]$;

г) $(6{,}4\cdot 10^{-4}):(1{,}6\cdot 10^{-3})$.

**14.** Масса Солнца приблизительно равна $0{,}2\cdot 10^{31}$ кг. Во сколько раз масса Солнца больше массы Земли, если масса Земли приблизительно равна $0{,}5974\cdot 10^{25}$ кг?



**15.** Среднее расстояние от Земли до Солнца равно $0{,}1496\cdot 10^{9}$ км. За сколько времени солнечный луч преодолеет это расстояние, если скорость света равна приблизительно $0{,}3\cdot 10^{9}$ м/с?

**16.** Вычислите площадь квадрата со стороной:

а) $2\sqrt{5}$ см; б) 12 дм; в) $(1+\sqrt{3})$ мм; г) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})$ мм.

**17.** Вычислите площадь прямоугольника со сторонами:

а) $(5-\sqrt{2})$ см и $(5+\sqrt{2})$ см; б) $(\sqrt{7}+1)$ см и $(\sqrt{7}-1)$ см.

## Развиваем способности и творим

**18.** Вычислите:

а) $\sqrt{2{,}5\cdot 10^{5}}$; б) $\sqrt{4{,}9\cdot 10^{-3}}$;

в) $\sqrt{1{,}6\cdot 10^{7}}$; г) $\sqrt{8{,}1\cdot 10^{-5}}$.

**19.** Упростите выражение:

а) $\left(\sqrt{10-\sqrt{19}}+\sqrt{10+\sqrt{19}}\right)^2$;

б) $\left(\sqrt{2\sqrt{5}+4}-\sqrt{2\sqrt{5}-4}\right)^2$.

**20.** *Исследуйте!*

а) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}=3$;

б) $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$;

в) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$;

г) $2\sqrt{7}-1=\sqrt{29-4\sqrt{7}}$.

**21.** Сократите отношение $(n\in\mathbb{N})$:

а) $\dfrac{2^{n+1}\cdot 3^{n-1}}{6^n}$; б) $\dfrac{14^n}{2^{n-2}\cdot 7^{n+2}}$;

в) $\dfrac{12^n}{3^{n-1}\cdot 2^{2n+1}}$; г) $\dfrac{2^{2n+1}\cdot 5^{2n-1}}{100^n}$.

**22.** Упростите выражение:

а) $\sqrt{8-\sqrt{15}}$;

б) $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}$;

в) $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$.

*Указание*. Примените формулы «сложных» радикалов: $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, $a, b, (a^2-b)\in\mathbb{R}_+$.

**23.** *Работайте индивидуально!* **Исследование:** *Степени в различных областях.*

# Упражнения и задачи на повторение

## Закрепляем знания

**1.** Выполните действия:

а) $6,5\cdot(1,2-4,(3))-9,9:3+7,4\cdot5-450$;

б) $(7-\sqrt{2})(5+\sqrt{3})-3\sqrt{6}-4\sqrt{3}+10(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

**2.** *Работайте в парах!*

1) Обратите в десятичное число дробь:

а) $\frac{16}{23}$; б) $\frac{28}{105}$; в) $\frac{65}{302}$; г) $\frac{178}{6\,004}$.

2) Найдите период каждого из полученных десятичных чисел.

**3.** Сравните числа:

а) $\sqrt{7}$ и $\sqrt{10}$; б) $\sqrt{63}$ и $\sqrt{54}$;

в) $\sqrt{23}$ и $\sqrt{103}$; г) $\sqrt{17}$ и 4,5;

д) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}\cdot\sqrt{5}$; е) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{12}}$ и $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$.

**4.** Раскройте модуль:

а) $|7,(5)|$; б) $|-3\sqrt{7}|$;

в) $|2-3\sqrt{2}|$; г) $|8-\sqrt{66}|$.

**5.** Запишите в порядке возрастания числа:

а) $7,2(3)$; $\sqrt{7}$; $-3\sqrt{5}$; $7,1$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{25}$.

б) $4\sqrt{3}$; $2\sqrt{10}$; $5\sqrt{2}$; $7$.

**6.** Используя калькулятор, вычислите с точностью до 0,01:

а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{11}$; в) $\sqrt{29}$; г) $\sqrt{37}$.

**7.** Упростите выражение:

а) $a^8\cdot(a^{-4})^3$, $a\in\mathbb{R}^*$; б) $(c^{-3}\cdot c^8)^{-2}$, $c\in\mathbb{R}^*$;

в) $\left(\frac{m^3}{m^{-5}}\right)^{-2}\cdot m^{-4}$, $m\in\mathbb{R}^*$; г) $\left(\frac{3x^3}{x^{-2}}\right)^{-1}$, $x\in\mathbb{R}^*$.

**8.** *Работайте в парах!* Из двузначного числа, умноженного на однозначное число, вычитают однозначное число и получают 1. Найдите эти числа.

**9.** У Алины одна купюра в 50 леев, одна в 10 леев, две по 1 лею и еще 50 банов. После оплаты покупки у нее осталось 20% от первоначальной суммы. Сколько денег потратила Алина?

## Формируем способности и применяем

**10.** *Работайте в парах!* Запишите в виде суммы, разности, произведения и частного двух действительных чисел, отличных от 0 и 1, число:

а) $-2\sqrt{11}$; б) $2-\sqrt{3}$; в) $1+3\sqrt{7}$; г) $7\sqrt{13}$.

**11.** Выполните действия:

а) $(3-2\sqrt{5})^2$; б) $(2+\sqrt{7})^2$;

в) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$; г) $(5+\sqrt{5})^3$.

**12.** Вычислите с точностью до 0,1 решения уравнения:

а) $3x^2-x-1=0$; б) $-x^2+5x-1=0$;

в) $4x^2-x-2=0$; г) $x^2-3x-8=0$.

**13.** Раскройте модуль:

а) $|1-3\sqrt{3}|$; б) $|-7+\sqrt{16}|$;

в) $|-(3-\sqrt{5})|^2$; г) $|2\sqrt{3}-3\sqrt{2}|$.

**14.** *Работайте в группах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|x^2-3x+1|=5$; б) $|2x^2-x+2|=2$;

в) $|4x^2-7|=9$; г) $|x-2x^2|=3$.

**15.** Сравните:

а) $5-2\sqrt{3}$ $\square$ $2+\sqrt{2}$; б) $6+\sqrt{7}$ $\square$ $4\sqrt{7}$.

**16.** Изобразите на числовой оси множество:

а) $A=\{x\in\mathbb{R}\,\|\,|x|\le\sqrt{5}\}$;

б) $B=\{x\in\mathbb{R}\,\|\,|x+1|<\sqrt{3}\}$;

в) $C=\{x\in\mathbb{R}\,\|\,|x-3|\ge1,5\}$.

**17.** Обратите в дробь десятичное число:

а) 6,(7); б) 15,(25); в) 3,2(17); г) 0,123(7).

**18.** *Работайте в парах!* Упростите выражение:

а) $\sqrt{16x^2}$, если $x<0$;

б) $\sqrt{0,81a^2b^2}$, если $a>0$, $b<0$;

в) $\sqrt{24m^3n^2}$, если $n>0$;

г) $\sqrt{8x^4y^6}$, если $y<0$.

**19.** Вычислите:

а) $\frac{6,6\cdot10^5}{1,1\cdot10^{-7}}$; б) $\frac{5,6\cdot10^{-2}}{7\cdot10^{-3}}$; в) $\frac{1,9\cdot10^{-5}}{3,8\cdot10^{-4}}$.

**20.** *Исследуйте!* Из квадратного листа жести вырезали полосу шириной 25 см. Найдите исходные размеры листа, если известно, что площадь оставшейся части равна 4 400 см².

**21.** Отец говорит сыну: «Десять лет назад я был в 10 раз старше тебя, а через 22 года я буду в два раза старше тебя». Сколько сейчас лет отцу и сколько сыну?

**22.** Вычислите значение выражения:

а) (EG, 2015) $\dfrac{2^{23}}{4^3 \cdot 8^5}$; б) (EG, 2017) $\dfrac{2^3 \cdot 4^{-2}}{8^{-1}}$; в) (EG, 2019) $\dfrac{6^4 \cdot 2^{-2}}{2^2 \cdot 3^3}$;

г) (EG, 2021) $\dfrac{4^8 + 25^0 - 1}{8^4}$; д) (EG, 2023) $\dfrac{9^{-3} \cdot 27}{3^{-4}}$.

**23.** ***Исследуйте!*** Кирпич весит 1,5 кг и еще половину своей массы. Сколько весит кирпич?

**24.** Арбуз весит 3,5 кг и еще половину своей массы. Сколько весит арбуз?

**Готфрид Вильгельм Лейбниц** (1646–1716), немецкий математик

**25.** «Гармонический треугольник» Лейбница строится следующим образом:

1) Боковые стороны содержат числа, обратные ненулевым натуральным числам $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

2) Каждое число строки равно сумме двух его нижестоящих «соседей». Например: $\frac{1}{6} = \frac{1}{12} + x$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \frac{1}{1} & & & \\
 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & \\
\frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & x & & \frac{1}{4} \\
\cdot & & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

а) Заполните треугольник до строки, которая начинается с $\frac{1}{10}$.

б) Исследуйте и найдите интересные свойства «гармонического треугольника» Лейбница. Используйте интернет!

**26.** Вычислите:

а) (EG, 2016) $\dfrac{2}{\sqrt{7}-3} + \sqrt{7} + 4$; б) (EG, 2022) $\dfrac{2\sqrt{3}+9}{\sqrt{3}} - \sqrt{27}$; в) (EG, 2018) $\sqrt{75} - \sqrt{12} - \dfrac{9}{\sqrt{3}}$.

## Развиваем способности и творим

**27.** Изобразите геометрически на числовой оси точки: $A(\sqrt{5}+1)$, $B(2+\sqrt{3})$, $C(\sqrt{3}-\sqrt{2})$, $D(\sqrt{7}-4)$.

**28.** Выполните действия:

а) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$; б) $(2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$.

**29.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|x|(|x|-3) = 5$;

б) $x^2 - |x| - 2 = 0$;

в) $\sqrt{(3-x)^2} = 3 - |3-x|^2$;

г) $(|x|-3)(|x|+5) - 1 = 0$;

д) $\sqrt{(x+4)^2} = 5 - |4+x|^2$.

**30.** Упростите выражение:

а) $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} + y^{-1})$, $x, y \in \mathbb{R}^*$;

б) $(a+b)^{-2} \cdot (a^{-2} - b^{-2})$, $a, b \in \mathbb{R}^*$.

**31.** Чему равна:

а) разность $|a| - a$, $a \in \mathbb{R}$;

б) сумма $|a| + a$, $a \in \mathbb{R}$?

**32.** Докажите, что:

а) произведение трех последовательных натуральных чисел кратно 6;

б) произведение двух последовательных четных чисел кратно 8.

**33.** ***Работайте индивидуально!*** **Проект:** *Действительные числа в повседневной жизни.*

# Итоговый тест

*Время выполнения работы:* 45 минут

## Вариант I

**1.** Пусть множество

$A = \{-5;\ 0;\ 3;\ 2,(3);\ |\pi - 1|;\ 8;\ \sqrt{9};\ \sqrt{7}\}.$

а) Заполните рамку: card $A$ = $\boxed{\quad}$.

б) Найдите: $A \cap \mathbb{N}$; $A \cap \mathbb{Z}$; $A \cap \mathbb{Q}$.

в) Запишите в порядке возрастания элементы множества $A$.

г) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

$$[18 : (-3)^3 - 7^{-2} \cdot 5,(4)] \cdot (x-1) = \sqrt{9} - 2x.$$

**2.** Дано выражение

$E = \sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{4})^2} + \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{4})^2} - 2(\sqrt{5} - 2).$

а) Найдите значение выражения $E$.

б) Найдите число, обратное числу, полученному в пункте а).

**3.** У Алисии одна купюра достоинством в 100 леев, две купюры по 50 леев, одна в 20 леев, три по 10 леев и четыре купюры по 1 лею. После оплаты покупки у Алисии осталось 12% от первоначальной суммы.

а) Впишите в рамку знак > или <, чтобы получить истинное высказывание:

*Начальная сумма* $\boxed{\quad}$ *210 леев.*

б) Вычислите сумму, потраченную Алисией.

в) Определите сумму, которую должна была бы потратить Алисия, чтобы у нее осталось 20% от первоначальной суммы.

## Вариант II

**1.** Пусть множество

$B = \{-\sqrt{3};\ |5 - \pi|;\ 0;\ \sqrt{16};\ 3,(6);\ -\pi;\ 8\}.$

а) Заполните рамку: card $B$ = $\boxed{\quad}$.

б) Найдите: $B \cap \mathbb{N}$; $B \cap \mathbb{Z}$; $B \cap \mathbb{Q}$.

в) Запишите в порядке возрастания элементы множества $B$.

г) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

$$[(-5)^2 : 8,(3) - 6^{-2} \cdot 18] \cdot (x-1) = \sqrt{4} + 3x.$$

**2.** Дано выражение

$E = \sqrt{(\sqrt{4} + \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{2} + \sqrt{5})^2} - 2(\sqrt{5} - 1).$

а) Найдите значение выражения $E$.

б) Найдите число, обратное числу, полученному в пункте а).

**3.** У Амелии одна купюра достоинством в 200 леев, две купюры по 100 леев, одна в 50 леев, четыре по 5 леев и три купюры по 1 лею. После оплаты коммунальных услуг у Амелии осталось 20% от первоначальной суммы.

а) Впишите в рамку знак > или <, чтобы получить истинное высказывание:

*Начальная сумма* $\boxed{\quad}$ *620 леев.*

б) Найдите сумму, потраченную Амелией.

в) Определите сумму, которую должна была бы потратить Амелия на оплату коммунальных услуг, чтобы у нее осталось 15% от первоначальной суммы.

Глава

# 2 Алгебраические отношения

> *«Смысл математики не в том, чтобы усложнять простые вещи, а в том, чтобы делать сложные вещи простыми».*
>
> Станли Гуддер

## § 1. Понятие алгебраического отношения

*Исследуем* **1** Рассмотрите, выберите и дополните:

$\frac{5}{3}$ $\quad -\frac{2}{5}$ $\quad \frac{9{,}5}{6}$ $\quad \frac{0{,}4}{2}$ $\quad \frac{1}{5}$ $\quad -\frac{4}{3}$ $\quad \frac{4{,}2}{7}$ $\quad \frac{2{,}6}{3{,}8}$ $\quad \frac{2}{5}$ $\quad -\frac{0{,}3}{0{,}4}$ $\quad \frac{3}{4}$ $\quad \frac{6}{9{,}5}$

- Следующие отношения не являются дробями: $\frac{9{,}5}{6}, \frac{0{,}4}{2}, \frac{4{,}2}{7}, \frac{2{,}6}{3{,}8}, \square, \square$.
- Числитель отношения $\frac{4{,}2}{7}$ равен $\square$. Знаменатель отношения $-\frac{0{,}3}{0{,}4}$ равен $\square$.
- Значение отношения $\frac{3}{4}$ равно 0,75, а отношения $\frac{0{,}4}{2}$ – $\square$.
- Отношения $\frac{0{,}4}{2}$ и $\frac{\square}{5}$ равны.

**2** Рассмотрите и дополните:

а) Если $\frac{a}{b}=0{,}9$, то $\frac{2a+3b}{3b}=?$

$$\frac{2a+3b}{3b}=\frac{2a}{3b}+\frac{3b}{3b}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a}{b}+\square=\frac{2}{3}\cdot\square+\square=\square.$$

Если $\frac{a}{b}=0{,}9$, то число $\square$ является значением отношения $\frac{2a+3b}{3b}$.

б) Если $a=2,\ b=-1,\ c=3$, то значение выражения $a^2+5b+c$ равно

$2^2+5\cdot\square+\square=\square$.

*Запомните!*

- ***Алгебраические выражения*** составляются из чисел и букв (называемых ***переменными***) с помощью действий сложения, вычитания, умножения, деления, а также возведения в степень и извлечения квадратного корня.
- ***Рациональные алгебраические выражения*** не содержат переменных под знаком корня.

**Определение** Отношение двух рациональных алгебраических выражений называется **алгебраическим отношением** (или **алгебраической дробью**).

Например, выражения $\dfrac{4}{x-2}$, $\dfrac{x+y}{x^2+y}$, $\dfrac{ab}{a-b}$, $\dfrac{t-2}{t+4}$, $\dfrac{z^2t}{z+5t}$ являются алгебраическими отношениями.

**3** Дополните:

а) При $x=1$ и $y=2$ значение алгебраического отношения $\dfrac{2x+y}{3x-y}$ равно $\dfrac{2\cdot 1+2}{3\cdot 1-\square}=\dfrac{4}{\square}=\square$.

б) При $a=0$ значение алгебраического отношения $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ равно $\dfrac{0^2-2}{2-\square}=\dfrac{\square}{\square}=\square$.

Значение алгебраического отношения $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ нельзя вычислить, если $2-a=0$, то есть при $a=\square$.

Значение алгебраического отношения $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ можно найти для любого $a\in\mathbb{R}\setminus\{\square\}$.

**Запомните!**

- ***Областью допустимых значений*** (ОДЗ) на заданном множестве $M$ алгебраического отношения является подмножество множества $M$, на котором знаменатель этого отношения не равен нулю.
- На множестве $\mathbb{R}$ ОДЗ алгебраического отношения $\dfrac{a^2-2}{2-a}$ равно $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Обозначим через $F(x)$ алгебраическое отношение от переменной $x$. Если $a\in$ ОДЗ отношения $F(x)$, то через $F(a)$ обозначают значение отношения $F(x)$ при $x=a$.

**4** Рассмотрите и дополните.

| Значение переменной | Значение алгебраического отношения $\dfrac{1-x}{x+5}$ | Значение алгебраического отношения $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$ |
|---|---|---|
| 1 | $\dfrac{1-1}{1+5}=\dfrac{0}{6}=0$ | $\dfrac{1-1^2}{1^2+5\cdot 1}=0$ |
| $-2$ | $\dfrac{1-(-2)}{\square+5}=\square$ | $\dfrac{-2-(-2)^2}{(-2)^2+5\cdot\square}=\square$ |
| 3 | $\dfrac{1-\square}{3+5}=\square$ | $\dfrac{3-\square^2}{\square^2+5\cdot\square}=-0{,}25$ |

На множестве $\mathbb{R}$ ОДЗ отношения $\dfrac{1-x}{x+5}$ равно $\mathbb{R}\setminus\{\square\}$, а отношения $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$ равно $\mathbb{R}\setminus\{0;\square\}$.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Найдите значение алгебраического выражения $2x^2-3x$ при:

а) $x=0$; б) $x=-2$; в) $x=0{,}5$; г) $x=\dfrac{1}{6}$.

**2.** Найдите значение алгебраического выражения $4ab-b^2+a$ при:

а) $a=b=2$; б) $a=3,\ b=-2$; в) $a=-4,\ b=1{,}5$; г) $a=\dfrac{3}{4},\ b=\dfrac{4}{3}$.

**3.** Запишите в виде алгебраического отношения:

а) $3x:(2x+5)$; б) $(ax^2+bx):(a-b)$; в) $(2x+4):(x-3a)$; г) $12x^5:(7b-x^3)$.

**4.** *Исследуйте!* Выберите алгебраические отношения:

а) $\frac{2x-1}{3x}$, $\frac{0{,}4x^2-\sqrt{x}}{x+1}$, $\frac{3}{ax+2}$, $\frac{5x}{-9y}$, $\frac{7x}{4}$, $\frac{\sqrt{2x-1}}{2x+1}$, $\frac{y^2+5}{y^2-5}$;

б) $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5x+3}}$, $\frac{0{,}99a}{ax+4}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{4}{\sqrt{x}}$, $\frac{\sqrt{y}}{-x^2-9}$.

**5.** Назовите числитель и знаменатель алгебраического отношения:

а) $\frac{0{,}9a^2+1}{2a-\sqrt{3}}$; б) $\frac{8}{-5x-3}$; в) $\frac{\sqrt{7}+x^2}{a^2x+8a}$; г) $\frac{8{,}(7)xy}{-7{,}(4)y^2-x}$.

**6.** Найдите значение алгебраического отношения $\frac{x^2+1}{x+1}$ при:

а) $x=1$; б) $x=0$; в) $x=0{,}5$; г) $x=1\frac{1}{2}$.

**7.** Найдите значение алгебраического отношения $\frac{3x+2y}{2x-y}$ при:

а) $x=y=1$; б) $x=4,\ y=2$; в) $x=\frac{1}{6},\ y=\frac{1}{2}$; г) $x=-0{,}8,\ y=0{,}4$.

**8.** *Работайте в парах!* Найдите область допустимых значений алгебраического отношения:

а) $\frac{3a}{a-4}$; б) $\frac{x^2+2x}{3+x}$; в) $\frac{a+b}{2b+6}$; г) $\frac{a-b^2}{-8+0{,}6a}$; д) $\frac{5ax+3}{2x^2-18}$; е) $\frac{a^2+2ax+1}{0{,}36-a^2}$.

## Формируем способности и применяем

**9.** Найдите значение алгебраического отношения $\frac{0{,}8x+1{,}2y}{x-y}$ при:

а) $x=2y$; б) $y=2x$; в) $\frac{x}{y}=1{,}3$; г) $\frac{y}{x}=-0{,}4$.

**10.** Дано алгебраическое отношение $F(x)=\frac{2x+1}{8-4x}$. Сравните числа:

а) $F(0)$ и $F(1)$; б) $F(-2)$ и $F(-1)$; в) $F(0{,}5)$ и $F(-0{,}5)$; г) $F(10)$ и $F(-10)$.

**11.** Дано алгебраическое отношение $F(x)=\frac{10-x^2}{x}$.

а) Расположите в порядке возрастания числа $F(-3)$, $F(-2)$, $F(-1)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$.

б) Расположите в порядке убывания числа $F(-4)$, $F(4)$, $F(-0{,}5)$, $F(0{,}5)$.

**12.** *Работайте в группах!* При каких целых значениях переменной значение алгебраического отношения будет целым числом?

а) $\frac{7}{x-2}$; б) $\frac{-5}{3-x}$; в) $\frac{9}{2+x}$; г) $\frac{-4}{x+10}$.

**13.** Найдите область допустимых значений алгебраического отношения:

а) $\frac{x^2}{x^2-3}$; б) $\frac{t-1}{t^2+2t+1}$; в) $\frac{a+b^3}{b-\sqrt{2}}$; г) $\frac{xy}{x-y}$.

## Развиваем способности и творим

**14.** Используя свойства отношений, определите, при каких значениях переменной будут равны значения алгебраических отношений:

а) $\frac{8}{3-x}$ и $\frac{4}{2+x}$; б) $\frac{5}{2x-1}$ и $\frac{-10}{x+1}$; в) $\frac{\sqrt{12}}{3-3x}$ и $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{18}-\sqrt{2}x}$; г) $\frac{-\sqrt{5}}{x}$ и $\frac{\sqrt{10}}{x+1}$.

**15.** Равны ли на множестве $\mathbb{R}$ отношения:

а) $\frac{x}{x^2+4}$ и $\frac{x(x^2+1)}{(x^2+4)(x^2+1)}$; б) $\frac{1}{x-1}$ и $\frac{x+1}{x^2-1}$; в) $\frac{1}{x^2}$ и $\frac{x}{x^3}$?

# § 2. Основное свойство алгебраического отношения. Сокращение алгебраических отношений

## 2.1. Основное свойство алгебраического отношения

*Исследуем*

• Рассмотрите и дополните:

$\dfrac{2,4}{1,6} = 2,4:1,6 = \bigcirc$

$\times 2$ ↓ Умножим на 2 числитель и знаменатель

$\dfrac{4,8}{3,2} = 4,8:3,2 = \bigcirc$

$\dfrac{x+3}{x} \longleftarrow$ ОДЗ: $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\times(x-3)$ ↓ Умножим на $x-3$ числитель и знаменатель

$\dfrac{(x+3)(x-3)}{x(x-3)} = \dfrac{\square^2 - 9}{x^2 - \square} \longleftarrow$ ОДЗ: $\mathbb{R} \setminus \{0;\ 3\}$

а) Умножьте числитель и знаменатель алгебраического отношения $\dfrac{x+3}{x}$ на выражение $x+3$.

б) Сравните ОДЗ полученного отношения с ОДЗ отношения $\dfrac{x+3}{x}$.

в) Найдите значение этих двух алгебраических отношений при: $x=1$; $x=-2$; $x=5$. Что вы заметили?

*Запомните!*

**Основное свойство алгебраического отношения**

Умножив числитель и знаменатель отношения на ненулевое рациональное алгебраическое выражение, получим алгебраическое отношение, равное заданному на области допустимых значений обоих алгебраических отношений.

## 2.2. Сокращение алгебраических отношений

*Исследуем*

• Рассмотрите и дополните:

$\dfrac{0,9}{1,5} = 0,9:1,5 = \bigcirc$

$:3$ ↓ Сокращаем на 3

$\dfrac{\square}{0,5} = \square : 0,5 = \bigcirc$

$\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+x} = \dfrac{(x+1)^2}{x(x+1)} \longleftarrow$ DVA: $\mathbb{R} \setminus \{-1;\ 0\}$

$:(x+1)$ ↓ Сокращаем на $x+1$

$\dfrac{\square}{x} \longleftarrow$ DVA: $\mathbb{R} \setminus \{\square\}$

а) Разделите числитель и знаменатель алгебраического отношения $\dfrac{3x^2-x}{x^2-1}$ на выражение $x-1$. (Полагаем, что $x-1 \neq 0$.)

б) Сравните ОДЗ полученного отношения с ОДЗ отношения $\dfrac{3x^2-x}{x^2-1}$.

в) Найдите значение обоих алгебраических отношений при: $x=0$; $x=2$; $x=-3$. Что вы заметили?

*Запомните!*

- ***Сократить алгебраическое отношение*** на ненулевое рациональное алгебраическое выражение – значит, разделить числитель и знаменатель этого отношения на данное выражение.
- Сократив алгебраическое отношение, получим алгебраическое отношение, равное заданному на области допустимых значений обоих алгебраических отношений.
- ОДЗ алгебраического отношения, полученного после сокращения заданного алгебраического отношения, может отличаться от ОДЗ заданного алгебраического отношения.

**Определения**

- Алгебраическое отношение называется **сократимым**, если его можно сократить.
- Алгебраическое отношение называется **несократимым**, если его невозможно сократить.

***Пример*** Алгебраическое отношение $\dfrac{x(x-2)}{x^2-4}$ – сократимое (обоснуйте!), а отношение $\dfrac{x}{x+2}$ – несократимое.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Умножьте числитель и знаменатель дроби:

а) $\dfrac{2}{5}$ на 3; б) $\dfrac{4}{9}$ на 5;

в) $-\dfrac{3}{7}$ на 4; г) $-\dfrac{5}{6}$ на 6.

**2.** Умножьте числитель и знаменатель отношения:

а) $\dfrac{1,8}{3}$ на 2,5; б) $-\dfrac{2,1}{4,4}$ на 3;

в) $-\dfrac{3,5}{6,8}$ на 1,6; г) $\dfrac{0,7}{1,9}$ на 8.

**3.** Умножьте числитель и знаменатель алгебраического отношения:

а) $\dfrac{x}{y}$ на $x$; б) $\dfrac{y}{x-1}$ на $y$;

в) $\dfrac{ab}{2+a}$ на $b$; г) $\dfrac{x-1}{x+1}$ на $x-1$.

**4.** Сократите дробь:

а) $\dfrac{24}{36}$; б) $\dfrac{96}{216}$; в) $\dfrac{81}{189}$; г) $\dfrac{180}{216}$.

**5.** Сократите отношение:

а) $\dfrac{2,8}{3,6}$ на 4; б) $\dfrac{3,25}{5,5}$ на 2,5;

в) $\dfrac{-10,08}{11,34}$ на 1,8; г) $\dfrac{15,68}{25,56}$ на 3,2.

**6.** ***Работайте в парах!*** Сократите алгебраическое отношение:

а) $\dfrac{5x^3y}{10xy^2}$ на $5xy$; б) $\dfrac{-3x^5y^6}{9x^3y^8}$ на $3x^3y^6$;

в) $\dfrac{2x^3-x^2y}{4x^2-y^2}$ на $2x-y$; г) $\dfrac{9x^2+12xy+4y^2}{21xy+14y^2}$ на $2y+3x$.

### Формируем способности и применяем

**7.** Восстановите последовательность равных отношений:

а) $\dfrac{3}{4}=\dfrac{\square}{12}=\dfrac{0,3}{\square}=\dfrac{\square}{11,2}=\dfrac{-16,8}{\square}$; б) $\dfrac{5}{8}=\dfrac{11}{\square}=\dfrac{\square}{12,8}=\dfrac{-32}{\square}=\dfrac{\square}{-28}$.

**8.** Восстановите последовательность равных отношений:

а) $\dfrac{x-1}{xy}=\dfrac{\square}{x^2y}=\dfrac{xy-y}{\square}=\dfrac{\square}{0,5x^3y+xy}$; б) $\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{x^2-y^2}{\square}=\dfrac{\square}{7y-7x}=\dfrac{3y^2-3x^2}{\square}$.

**9.** ***Работайте в группах!*** Определите, при каких значениях переменной будут равны значения алгебраических отношений:

а) $\dfrac{x+1}{x-1}$ и $\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$; б) $\dfrac{2+x}{4-x^2}$ и $\dfrac{-1}{x-2}$; в) $\dfrac{2x+3}{2x-3}$ и $\dfrac{-4x^2-12x-9}{9-4x^2}$; г) $\dfrac{x}{x-1}$ и $\dfrac{x^3+x}{x^3-x^2+x-1}$.

**10.** Сократите алгебраическое отношение до несократимого:

а) $\dfrac{3(x+2)}{x^2+4x+4}$; б) $\dfrac{4a^2-4b^2}{2(b+a)^2}$; в) $\dfrac{y^2-x^2}{x^2-yx}$; г) $\dfrac{4x^2-4bx+b^2}{0,25b^2-x^2}$.

### Развиваем способности и творим

**11.** Известно, что $\dfrac{x+y}{y}=10$. Найдите $\dfrac{x^2-y^2}{y^2}$.

### Занимательная математика

**12.** Найдите первую цифру наименьшего натурального числа, сумма цифр которого равна 2007.

# § 3. Арифметические действия над алгебраическими отношениями. Возведение алгебраического отношения в степень с натуральным показателем

## 3.1. Сложение и вычитание алгебраических отношений

*Исследуем* • Рассмотрите и дополните:

$$\frac{3}{14} + {}^{2)}\frac{4}{7} = \frac{3+4\cdot\square}{14} = \frac{\square}{14}.$$

$$ {}^{2)}\frac{2}{9} - {}^{3)}\frac{5}{6} = \frac{2\cdot 2-5\cdot 3}{18} = -\frac{\square}{18}.$$

$$3-\frac{8}{9} = {}^{\square)}\frac{3}{1}-\frac{8}{9} =$$

$$= \frac{3\cdot 9-8}{\square} = \frac{\square}{9} = \square\frac{\square}{9}.$$

$$\frac{a}{2b^2}+\frac{b-a}{2b^2}=\frac{a+b-a}{2b^2}=\frac{\square}{\square}.$$

$$ {}^{x)}\frac{x-1}{3x} + {}^{3)}\frac{2}{x^2} = \frac{x(x-1)+2\cdot\square}{3x^2} = \frac{\square}{3x^2}.$$

$$ {}^{y-1)}\frac{y-1}{y+1} - {}^{y+1)}\frac{y+1}{y-1} = \frac{(y-1)^2-(y+1)^2}{(y+1)(y-1)} =$$

$$= \frac{y^2-2y+1-(y^2+\square+1)}{\square^2-1} = \frac{\square}{\square^2-1}.$$

**Правила сложения и вычитания алгебраических отношений**

1. **Сумма двух алгебраических отношений с одинаковым знаменателем** является алгебраическим отношением, числитель которого равен сумме числителей, а знаменатель совпадает со знаменателями данных отношений.
2. Чтобы **сложить два алгебраических отношения с разными знаменателями,** нужно привести их к общему знаменателю, после чего применить правило 1.
3. Чтобы **вычесть два алгебраических отношения**, нужно к уменьшаемому прибавить противоположное вычитаемое.

*Запомните!* Сложение алгебраических отношений обладает теми же свойствами, что и сложение действительных чисел (ассоциативность, коммутативность и т. д.).

## 3.2. Умножение и деление алгебраических отношений

*Исследуем* • Рассмотрите и дополните:

$$\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{11}=\frac{5\cdot 2}{7\cdot 11}=\frac{\square}{\square}.$$

$$-\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{12} = -\frac{3\cdot 5}{8\cdot 12}^{(3} = -\frac{5}{8\cdot\square} = -\frac{\square}{\square}.$$

$$\frac{21}{16}:\frac{7}{8}=\frac{21}{16}\cdot\frac{\square}{7}=$$

$$=\frac{21\cdot\square}{16\cdot 7}^{(7\cdot 8} = \frac{3\cdot\square}{\square\cdot 1}=\frac{\square}{\square}.$$

$$1\frac{2}{3}:\frac{5}{6}=\frac{5}{3}:\frac{5}{6}=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\frac{\square}{\square}=\frac{\square\cdot\square}{3\cdot\square}^{(\square\cdot\square}=\square.$$

$$\frac{2y-1}{y+3}\cdot\frac{(y+3)^2}{2y}=\frac{(y+3)^2(2y-1)}{(y+3)\cdot 2y}^{(y+3}=$$

$$=\frac{\square(y+3)}{2y}=\frac{2y^2+\square y-3}{2y}.$$

$$\frac{a^2-ab}{b}\cdot\frac{b^2}{a}=\frac{(a^2-ab)\cdot b^2}{ba}^{(b}=$$

$$\frac{(a^2-ab)\cdot\square}{a}=\frac{\square(a-b)\square}{a}^{(a}=(a-b)\square.$$

$$\frac{x^2-y^2}{3x^2y^2}:\frac{x+y}{xy}=\frac{x^2-y^2}{3x^2y^2}\cdot\frac{\square}{x+y}=$$

$$=\frac{(x+y)(\square)\cdot\square}{3(\square)^2\cdot(x+y)}^{(\square\cdot(x+y)}=\frac{\square}{3\,\square}.$$

Рассмотрите и дополните:

- Обратным для отношения $\frac{3}{7}$ является отношение $\frac{7}{3}$.
- Обратным для отношения $4\frac{1}{5}$ является отношение $\frac{5}{\square}$.
- Обратным для отношения $\frac{x-1}{x}$ является отношение $\frac{x}{x-1}$.
- Обратным для отношения $\frac{8}{x^2-y}$ является отношение $\frac{\square}{\square}$.

| Правила умножения и деления алгебраических отношений |
|---|
| 1. Чтобы **умножить два алгебраических отношения**, нужно перемножить их числители и знаменатели и первое произведение записать в числителе отношения, а второе – в знаменателе.<br>2. Чтобы **разделить одно алгебраическое отношение на другое**, нужно делимое умножить на отношение, обратное делителю.<br>3. Если полученное алгебраическое отношение сократимо, то его сокращают до несократимого отношения. |

*Запомните!* Умножение алгебраических отношений обладает теми же свойствами, что и умножение действительных чисел (ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность умножения относительно сложения).

## 3.3. Возведение алгебраического отношения в степень с натуральным показателем

*Исследуем* • Рассмотрите и дополните:

$$\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{3^2}{8^2}=\frac{\square}{64}$$

$$\left(\frac{5^2\cdot 2^3}{0{,}1}\right)^2=\frac{5^{2\cdot\square}\cdot 2^{3\cdot 2}}{0{,}1^{\square}}=$$

$$=\frac{5^{\square}\cdot 2^{\square}}{\square}=\square$$

$$\left(\frac{x^3y}{x-1}\right)^2=\frac{x^{3\cdot\square}\cdot y^{\square}}{(x-1)^2}$$

$$\frac{a^2}{2b^3}\cdot\frac{a^3}{b^4}=\frac{a^2\cdot a^3}{2b^3\cdot b^4}=\frac{a^{\square}}{2b^{\square}}$$

$$\left(\frac{2x^3-5y+1}{3x-8y^2}\right)^0=\square$$

| Правило возведения алгебраического отношения в степень с натуральным показателем |
|---|
| Чтобы **возвести алгебраическое отношение в степень с натуральным показателем**, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель отношения. |

*Запомните!* В вычислениях со степенями алгебраических отношений применяют те же свойства, что и в вычислениях со степенями действительных чисел.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Вычислите: а) $\frac{7}{12}+\frac{5}{12}$; б) $\frac{21}{14}-\frac{9}{14}$; в) $\frac{29}{47}+\left(-\frac{31}{47}\right)$; г) $-\frac{25}{39}-\left(-\frac{18}{39}\right)$.

**2.** Вычислите:

а) $\frac{5}{8}+\frac{3}{4}$; б) $-\frac{11}{12}+\frac{11}{20}$; в) $\frac{8}{9}-\frac{8}{15}$; г) $\frac{7}{16}-\left(-\frac{11}{12}\right)$; д) $-\frac{14}{21}+\left(-\frac{15}{28}\right)$.

**3.** Выполните действие:

а) $\frac{3}{xy}+\frac{10}{xy}$; б) $\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a-b}$; в) $\frac{12x}{x^2+1}-\frac{8x}{x^2+1}$; г) $\frac{4y^3}{x-y^2}+\frac{3xy+y^3}{y^2-x}$.

**4.** Выполните действие:

а) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$; б) $\frac{6}{xy}+\frac{2}{x}$; в) $\frac{x^2+a^2}{x^2-a^2}-\frac{x-a}{x+a}$; г) $\frac{5}{2x^3+2x}-\frac{1}{2x}$.

**5.** Вычислите:

а) $\frac{12}{17}\cdot\frac{3}{5}$; б) $\frac{9}{10}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$; в) $-\frac{15}{22}\cdot\frac{2}{5}$; г) $-\frac{8}{27}\cdot\left(-\frac{9}{16}\right)$.

**6.** Выполните действие:

а) $\frac{x}{y}\cdot\frac{3x}{y^2}$; б) $\frac{5x^2y}{y-1}\cdot\frac{2xy}{y+1}$; в) $\frac{4(x+1)}{x-2}\cdot\frac{x-1}{x-2}$; г) $\frac{8y}{7xy+7x}\cdot\frac{y+1}{y}$.

**7.** Вычислите:

а) $\frac{33}{40}:\frac{3}{10}$; б) $-\frac{25}{32}:\frac{5}{8}$; в) $\frac{27}{60}:\left(-\frac{9}{15}\right)$; г) $-\frac{84}{287}:\left(-\frac{21}{41}\right)$.

**8.** Найдите отношение, обратное алгебраическому отношению:

а) $\frac{3x}{4y}$; б) $\frac{ax-b}{b+ay}$; в) $\frac{7x-5}{3x^2}$; г) $\frac{4y}{25-x^2}$.

**9.** *Работайте в парах!* Выполните действие:

а) $\frac{ab^2}{xy}:\frac{b}{x}$; б) $-\frac{x^2-1}{x^2+4x+4}:\frac{x+1}{x+2}$; в) $\frac{x^2+2x}{xy+2x}:\left(-\frac{x+2}{2+y}\right)$; г) $\frac{4x-16}{x+3}:\frac{4xy-16y}{8x^2+24x}$.

**10.** Возведите в степень:

а) $\left(\frac{6}{7}\right)^2$; б) $\left(\frac{-3}{5}\right)^3$; в) $\left(\frac{4}{5}\right)^4$; г) $\left(\frac{3^4\cdot5^3}{2^5}\right)^2$.

**11.** Выполните действие:

а) $\left(\frac{xy}{3a}\right)^3$; б) $\left[\frac{x(x+y)}{x-y)}\right]^2$; в) $\left(\frac{x^2a}{y^5b^3}\right)^3$; г) $\left[\frac{2(x-1)}{3a+b}\right]^2$.

### Формируем способности и применяем

**12.** *Работайте в группах!* Выполните действие:

а) $\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}$; б) $\frac{3x+2}{x^2+2x+1}-\frac{4}{x+1}$; в) $\frac{-3(x+a)}{ax+ay}+\frac{3x}{x^2+xy}$.

**13.** Запишите в виде алгебраического отношения: а) $\frac{x-y}{x+y}+1$; б) $x+y-\frac{x^2+y^2}{x+y}$.

**14.** Найдите значение алгебраического отношения $\frac{x^2-xy+y^2}{x^2-y^2+1}$ при:

а) $x=1+\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}-1$; б) $x=\sqrt{5}-2,\ y=\sqrt{5}+2$.

### Развиваем способности и творим

**15.** Докажите, что:

а) $\left(\frac{2a}{a^2-4}-\frac{2}{a-2}+\frac{1}{a+2}\right):\frac{a-6}{4(a+2)}=\frac{4}{a-2}$; б) $\frac{a^2-1}{a^2+1}\cdot\left(\frac{a}{a-1}-\frac{1}{a+1}\right):\frac{a^2+2a+1}{1-a^2}=\frac{1-a}{a+1}$.

**16.** Составьте алгебраическое отношение от переменных $x$ и $y$, значение которого равно:

а) $-\frac{2}{5}$ при $x=y=1$; б) 0,8 при $x=y=-1$;

в) $\sqrt{5}$ при $x=1$ и $y=-1$; г) 0 при $x=2$ и $y=3$.

# § 4. Тождественные преобразования алгебраических выражений

**Вспомним**

- Определите, является ли равенство $(x-1)^2-(x+1)^2-4=x^2-(x+2)^2$ тождеством.

*Решение*:

Преобразуем левую часть равенства:

$$(x-1)^2-(x+1)^2-4=x^2-2x+1-x^2-2x-1-4=-4(x+1).$$

Преобразуем правую часть равенства:

$$x^2-(x+2)^2=x^2-x^2-4x-4=-4(x+1).$$

Получаем $-4(x+1)=-4(x+1)$. То есть равенство является верным при любых $x\in\mathbb{R}$.

Следовательно, равенство является тождеством на множестве $\mathbb{R}$.

- Даны алгебраические отношения $\dfrac{1-x}{x+5}$ и $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$.

а) Найдите ОДЗ этих отношений.

б) Определите, является ли равенство $\dfrac{1-x}{x+5}=\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$ тождеством на ОДЗ этих отношений.

*Решение*:

а) В §1 мы уже определили, что ОДЗ отношений $\dfrac{1-x}{x+5}$ и $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$ является множество $\mathbb{R}\setminus\{-5;\,0\}$.

б) Преобразуем в ОДЗ правую часть равенства: $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}=\dfrac{x(1-x)}{x(x+5)}=\dfrac{1-x}{x+5}$.

Следовательно, отношения $\dfrac{1-x}{x+5}$ и $\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$ равны при любых $x\in\mathbb{R}\setminus\{-5;\,0\}$.

То есть равенство $\dfrac{1-x}{x+5}=\dfrac{x-x^2}{x^2+5x}$ является тождеством на множестве $\mathbb{R}\setminus\{-5;\,0\}$.

**Определения**

- Два алгебраических отношения с одними и теми же переменными называются **равными** на множестве $M$, если:
  – множество $M$ является подмножеством каждого из ОДЗ отношений;
  – их значения равны при любых значениях переменных из множества $M$.
- Если $E_1$ и $E_2$ – алгебраические выражения с одними и теми же переменными, и их значения равны при любых значениях переменных из их общей области допустимых значений этих выражений, то выражения $E_1$ и $E_2$ называются **тождественно равными**, а равенство $E_1=E_2$ называется **тождеством**.
- Преобразование одного выражения в тождественно равное ему выражение называется **тождественным преобразованием**.

**Запомните!**

Доказательство тождеств проводят одним из способов:
1) Применяют тождественные преобразования к левой части равенства. Если в результате получают правую часть, то тождество доказано.
2) Применяют тождественные преобразования к правой части равенства. Если в результате получают левую часть, то тождество доказано.
3) Применяют тождественные преобразования к каждой части равенства. Если получают один и тот же результат, то тождество доказано.
4) Вычитают левую часть равенства из правой части. Если в результате получают ноль, то тождество доказано.

# Упражнения и задачи

## Закрепляем знания

**1.** Дано выражение $\left(2-\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{x^2-1}{5x+5}$. Укажите букву, соответствующую выражению, тождественно равному заданному выражению.

**A.** $\frac{5}{2x-3}$; **B.** $\frac{2x-3}{5}$; **C.** $\frac{2x+3}{5}$; **D.** $\frac{5}{2x+3}$.

**2.** Выполните на ОДЗ тождественные преобразования и упростите выражение:

а) $\frac{x}{x-3}:\frac{1}{x^2-9}$; б) $\left(\frac{t}{n}-\frac{n}{t}\right)\cdot\frac{2nt}{t^2-n^2}$; в) $\frac{m+1}{m}\cdot\frac{m^2}{(m+1)^2}$.

**3.** ***Исследуйте!*** *Истинно* или *ложно*?

а) Равенство $(x-y)^2=(y-x)^2$ является тождеством.

б) Равенство $\frac{1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ является тождеством.

в) $1-\frac{x}{x+y}=\frac{2y}{x+y}$, при $x\neq -y$.

**4.** ***Работайте в парах!*** Выполните на ОДЗ тождественные преобразования:

а) $\frac{2}{x}-\frac{3}{x-1}$; б) $1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$; в) $\left(\frac{x}{x+1}-\frac{2}{x+1}\right)\cdot\frac{x+1}{(x-2)^2}$.

**5.** Дано равенство $\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{(x+1)^2}$.

а) Определите, является ли оно тождеством на ОДЗ.

б) При каких значениях $x$ равенство верно?

## Формируем способности и применяем

**6.** Определите, являются ли тождественно равными выражения $\frac{3m}{m-4}-\frac{m+2}{2m+8}\cdot\frac{m^2-16}{m+2}$ и $\frac{3m}{2(m-4)}$.

**7.** Выполните на ОДЗ тождественные преобразования и упростите выражение.

а) $\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2+x+1}\right):\left(1+\frac{1}{x^3-1}\right)$; б) $\frac{a^3-b^3}{2a^2b^2}\cdot\frac{8ab}{a^2+ab+b^2}-\frac{a-b}{ab}$.

**8.** Докажите тождество:

а) $(t-1)(t+1)(t^2+1)(t^4+1)=t^8-1$; б) $\left(\frac{a}{a+3}+\frac{a}{a-3}+\frac{a^2}{9-a^2}\right):\frac{a-5}{a^2-9}=\frac{a^2}{a-5}$.

**9.** Упростите выражение:

а) $\frac{4t^2-8t+3}{4t^2-1}$; б) $\frac{a^2+3a}{a^2-3a-18}$; в) $\frac{9a^2+6ab+b^2}{9a^2-b^2}$; г) $\left(\frac{t+2}{3t}-\frac{2}{t-2}-\frac{t-14}{3t^2-6t}\right):\frac{t+2}{6t}\cdot\frac{1}{t-5}$.

## Развиваем способности и творим

**10.** Дано выражение: 1) $\frac{5}{x^2+16}-\frac{x^3}{16-4|x|}$; 2) $\frac{3}{x^2-25}+\frac{x}{20+4|x|}$.

а) Найдите ОДЗ выражения.

б) Упростите на ОДЗ заданное выражение.

**11.** Решите на ОДЗ уравнение $\frac{2|x|+1}{x^2+|x|+1}-\frac{4(x^2+|x|+1)}{1+2|x|}+3=0$.

**12.** Дано выражение $E(x)=\frac{x^2+3x-5}{x+4}$.

а) Запишите это выражение в виде $E(x)=ax+b+\frac{c}{x+4}$, где $a, b, c\in\mathbb{R}$.

б) Найдите коэффициенты $a$, $b$, $c$.

## Упражнения и задачи на повторение

### Закрепляем знания

**1.** *Исследуйте!* Выберите алгебраические отношения:

а) $\frac{3x-\sqrt{x}}{2x}$, $\frac{9x+\sqrt{8}}{2x+y}$, $\frac{\sqrt{3}x}{5}$, $\frac{9x^2+bx+c}{a-b}$, $\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$, $\frac{ax+y}{2\sqrt{3}+x^2}$;

б) $\frac{x}{y}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{5-x^2}{\sqrt{y}+x}$, $\frac{\sqrt{20-x^2}}{\sqrt{5}-x}$, $\frac{0{,}7xy}{0{,}2ab}$, $\frac{(1+xy)^2}{(1-xy)^2}$.

**2.** Найдите значение алгебраического отношения $\frac{5-4xy}{x^2+1}$ при:

а) $x=y=0$; б) $x=-1,\ y=1$; в) $x=0,\ y=-1$; г) $x=2,\ y=-1$.

**3.** *Работайте в парах!* Найдите область допустимых значений алгебраического отношения:

а) $\frac{y-1}{-3-0{,}3x}$; б) $\frac{5x-9}{-4x^2+16}$; в) $\frac{x-y}{x^2+x}$; г) $\frac{15y}{2x^3-x^2}$.

**4.** Умножьте числитель и знаменатель алгебраического отношения:

а) $\frac{x+3}{2x-1}$ на $2x+1$; б) $\frac{x+\sqrt{7}}{x-\sqrt{7}}$ на $x+\sqrt{7}$; в) $\frac{x-y}{3x-y}$ на $3x+y$; г) $\frac{4x-y}{y+4x}$ на $y+4x$.

**5.** Сократите алгебраическое отношение:

а) $\frac{3x+9}{x^2+6x+9}$; б) $\frac{a^2-2ab+b^2}{a^2-b^2}$; в) $\frac{a^2-ax}{x^2-a^2}$; г) $\frac{x^2-4}{2x-x^2}$.

**6.** Выполните действия:

а) $\frac{1}{x^2y}+\frac{2}{xy^2}$; б) $\frac{5}{x-2y}-\frac{3}{x+2y}$; в) $\frac{x-1}{2x-6}+\frac{1}{3-x}$; г) $\frac{5}{x^2-16}-\frac{7}{x-4}$.

**7.** Выполните действия:

а) $\frac{(x+1)^3}{(x-2)^4}\cdot\frac{(x-2)^3}{x+1}$; б) $\frac{xy^2}{x+y}\cdot\frac{(x+y)^2}{xy}$; в) $\frac{3ab}{25yx^4}\cdot\frac{15x^2y^2}{18a^2b^3}$; г) $\frac{\sqrt{3}a^2x}{1{,}2yz^2}\cdot\frac{\sqrt{12}y^2}{5a}$.

**8.** Выполните действия:

а) $\frac{3x-6}{3x-1}:\frac{xy-2y}{9x^2-1}$; б) $\frac{2-x}{3x+12}:\frac{x^2-4}{4x+x^2}$; в) $\frac{ab^3}{6-6x}:\frac{x^2-2x+1}{a^3b^3}$; г) $\frac{3ab}{ax+3x}:\frac{6ba^2}{9+6a+a^2}$.

**9.** Упростите:

а) $\frac{ax+ay-bx-by}{xy+x^2}$; б) $\frac{x^2-2x+1}{y-xy+z-zx}$; в) $\frac{y^2+x^2-2xy}{xz-yz+ty-xt}$; г) $\frac{xy-xz-y^2+yz}{x^2-xy}$.

**10.** Раскройте квадратные скобки:

а) $\left[\frac{a(x+1)^2}{b(x-1)}\right]^3$; б) $\left[\frac{x^2(x-1)}{y^3(x+1)^2}\right]^4$; в) $\left[\frac{ab^2x^3}{(a-b^2)^2y^4}\right]^2$; г) $\left[\frac{\sqrt{5}(a^2-x)^2}{\sqrt{3}y^2x}\right]^4$.

**11.** *Работайте в группах!* Запишите в виде алгебраического отношения:

а) $\left(x-\frac{b}{a}\right)^2$; б) $\left(\frac{x}{y}-3\right)^2$; в) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{1}{x-1}$; г) $\frac{2}{2a+3}-\frac{1}{3-2a}$.

### Формируем способности и применяем

**12.** Найдите значение выражения $\left(\frac{t^2+2t-3}{t^2-1}+\frac{t^2+t-2}{t^2-t-6}\right):\frac{t^2-5}{t^2-2t-3}\cdot(2t-4)$ при $t=2+\sqrt{5}$.

**13.** Упростите выражение:

а) $\frac{a^2-4a+4}{a^2+ab^2-2a-2b^2}$; б) $\frac{x^2+2x+2y^2-y^4}{x^2-xy^2+2y^2-4}$;

в) $\left(\frac{x-y}{x^2-xy}-\frac{1}{x^2-y^2}:\frac{x+y}{(y-x)^2}\right):\frac{y^2}{(x+y)^2}$; г) $\left(\frac{a}{a-b}-\frac{ab}{a^2-b^2}\right):\frac{4a^2}{a^2-2ab+b^2}$.

**14.** ***Работайте в группах!*** Упростите выражение и найдите его значение при $x=-1{,}8$ и $y=0{,}6$.

а) $\left(\dfrac{x^2}{x+y}-\dfrac{x^3}{x^2+y^2+2xy}\right):\left(\dfrac{x}{x+y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\right)$;  б) $\dfrac{x+y}{x+2y}:\left(\dfrac{x}{x-2y}+\dfrac{y^2}{x^2-4y^2}\right)$;

в) $\dfrac{x^2}{x^2-2xy}:\left(\dfrac{2xy}{x^2-4y^2}-\dfrac{y}{x+2y}\right)$;  г) $\left(\dfrac{2xy}{x^2-9y^2}-\dfrac{y}{x-3y}\right):\dfrac{y^2}{x^2+3xy}$.

**15.** Упростите выражение:

а) $\dfrac{8x-4x^2-4}{(x^2-1)(1-x)}+\dfrac{(1+x)(x-1)}{1-x}\cdot\dfrac{x}{(x+1)(x^2-2x+1)}+\dfrac{x}{x^2+1-2x}$;  б) $\dfrac{8x^2-24x+18}{9+6x}\cdot\dfrac{4x^2+12x+9}{15-10x}\cdot\dfrac{15x}{4x^2-9}$.

**16.** (EG, 2015) Найдите действительные значения $x$, при которых сумма алгебраических отношений $\dfrac{2}{x-3}$ и $\dfrac{2x}{x+3}$ равна произведению этих отношений.

**17.** (EG, 2019) Найдите значения $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;\,3\}$, при которых сумма алгебраических отношений $\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-9}$ и $\dfrac{4x-5}{x-3}$ равна 1.

## Развиваем способности и творим

**18.** Докажите, что:

а) $\dfrac{x}{x^2-6x+9}:\left(\dfrac{1}{3+x}-\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{3x}{x^2-9}\right)=\dfrac{3+x}{3-x}$;  б) $\left(1+\dfrac{7}{a-3}\right)\cdot\left(\dfrac{a+5}{a^2+a-12}+\dfrac{a}{a+4}-\dfrac{4}{a-3}\right)(3-a)^2=a^2-6a-11$.

**19.** Докажите, что:

а) $(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdot\ldots\cdot(x^{16}+y^{16})=\dfrac{x^{32}-y^{32}}{x-y}$;  б) $\dfrac{x^{2^{10}}-y^{2^{10}}}{x-y}=(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\cdot\ldots\cdot(x^{2^9}+y^{2^9})$.

## Итоговый тест

*Время выполнения работы: 45 минут*

### *Вариант I*

**1.** Дополните:

ОДЗ алгебраического отношения $\dfrac{7x-\sqrt{2}}{-2x-9}$ равно $\mathbb{R}\setminus\{\square\}$.

**2.** а) Запишите в виде несократимого алгебраического отношения:

$$\frac{a^2-4a+4}{b+b^3}:\frac{2-a}{b^2+1}.$$

б) Найдите значение полученного в пункте а) отношения при $a=1-\sqrt{5},\ b=1+\sqrt{5}$.

**3.** Умножьте числитель и знаменатель алгебраического отношения $\dfrac{\sqrt{3}x-4}{\sqrt{3}x+4}$ на $4-\sqrt{3}x$.

**4.** Упростите алгебраическое отношение:

$$\frac{100a^2-9}{100a^2-60a+9}.$$

**5.** Докажите на ОДЗ тождество:

$$\left(\frac{40a}{a^2-25}+\frac{4a}{a+5}-\frac{4a}{15-3a}\right):\frac{4a}{3a-15}=4.$$

### *Вариант II*

**1.** Дополните:

ОДЗ алгебраического отношения $\dfrac{5x+\sqrt{8}}{-3x+7}$ равно $\mathbb{R}\setminus\{\square\}$.

**2.** а) Запишите в виде несократимого алгебраического отношения:

$$\frac{b^2-6b+9}{a-\sqrt{3}}:\frac{3-b}{5a^2-15}.$$

б) Найдите значение полученного в пункте а) отношения при $a=\sqrt{2}-1,\ b=\sqrt{2}+1$.

**3.** Умножьте числитель и знаменатель алгебраического отношения $\dfrac{\sqrt{5}x-1}{1+\sqrt{5}x}$ на $\sqrt{5}x+1$.

**4.** Упростите алгебраическое отношение:

$$\frac{9x^2-4}{18x^2+24x+8}.$$

**5.** Докажите на ОДЗ тождество:

$$\left(\frac{1}{a+2}-\frac{a}{a^2-4}+\frac{2}{5a-10}\right):\frac{a-3}{a^2-4}=0{,}4.$$

Глава

3

# Функции

*«Есть только один способ научиться. Через действие».*

Пауло Коэльо

## § 1. Понятие функции. Повторение и дополнения

### 1.1. Понятие функции. Способы задания функции

Понятие *функция* – одно из наиболее значимых понятий в математике. Функции применяются в различных областях – в экономике, технике, социологии, повседневной жизни, физике, химии, биологии и т. д.


***Вспомним***

• Определите элементы функции:

а) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $\underbrace{f(x) = -3x + 1}$.

$D(e)$ – область определения функции $f$

Область значений функции $f$

Правило (закон) соответствия

$E(f) = \{y \mid y = f(x) = -3x + 1\}$ – множество значений функции $f$

б) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, $\underbrace{f(x) = 8{,}5x - 3}$.

$E(g) =$

**Определение**

Пусть $A$ и $B$ – заданные непустые множества. Говорят, что **функция** определена на множестве $A$ со значениями в множестве $B$, если задано правило (закон), по которому каждому элементу $x$ из $A$ ставится в соответствие единственный элемент $y$ из $B$.

***Запомните!***

Функция, определенная на множестве $A$ со значениями в множестве $B$, обозначается $f: A \to B$ (или $A \xrightarrow{f} B$).

Множество $A$ называется ***областью определения*** функции $f$ и обозначается $D(f)$.

Множество $B$ называется ***областью значений*** функции $f$.

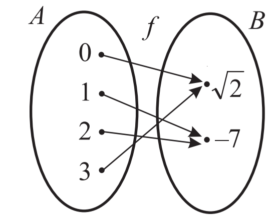
Значение функции $f$ в $x$ обозначается $y = f(x)$; $x$ называется ***независимой переменной*** или ***аргументом*** функции $f$, а $y$ – ***зависимой переменной***.

***Множество значений функции*** $f$ обозначается $E(f) = \{y \mid y = f(x)\}$.

Очевидно, $E(f) \subseteq B$.

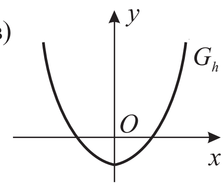
*Работайте в парах!*

- Выявите способ задания каждой из функций: $f$, $g$, $h$, $p$ (рис. 1).

а) 


б)

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = g(x)$ | –6 | –4 | –2 | 0 | 2 | 4 | 6 |

в) 


г) $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = x^2 + 2.$

Рис. 1

**Обобщим**

***Способы задания функции***

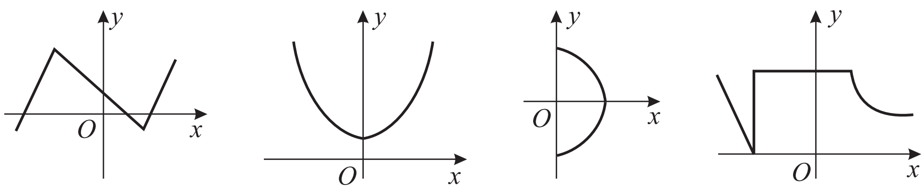
**I. Аналитический способ**: формулами.

**II. Синтетический способ**: в виде диаграммы, таблицы, графика.

*Запомните!* Решение задач на функции начинается с нахождения области определения соответствующей функции.

## 1.2. График функции

- Исследуйте фигуры на рисунке 2 и определите, какие из них являются графиками функций. Обоснуйте.




а) б) в) г)

Рис. 2

**Определение**

**Графиком** функции $f\colon A \to B$ называют множество $G_f = \{(x, y) \mid x \in A$ и $y = f(x)\}$ или изображение этого множества в заданной прямоугольной системе координат.

То есть график функции $f$ – это подмножество декартова произведения $A \times B$ или изображение этого множества в заданной прямоугольной системе координат.

*Запомните!* Уравнение $y = f(x)$, решениями которого являются все элементы $(x, y) \in G_f$, называется ***уравнением графика*** функции $f$.

## 1.3. Преобразования графиков функций

*Работайте в парах!*

**1** Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций:

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x,\ f_1\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = x + 1,\ f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_2(x) = x - 3.$

Что вы заметили?

*Решение*:

$f$:

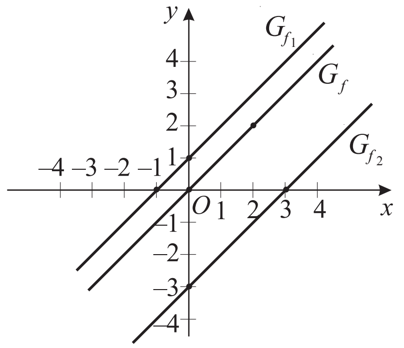
| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 2 |
| $y$ | 0 | 2 |

$f_1$:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | –1 |
| $y$ | 1 | 0 |

$f_2$:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 3 |
| $y$ | –3 | 0 |




**Замечаем**

а) График $G_{f_1}$ получается параллельным переносом графика $G_f$ на одну единицу вверх вдоль оси $Oy$.

б) График $G_{f_2}$ получается параллельным переносом графика $G_f$ на три единицы вниз вдоль оси $Oy$.

**Применяем** **2** Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций: $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = -2(x-1)$ и $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = -2(x+3)$, если задан график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x$. Что вы заметили?

*Решение*:

$f$:

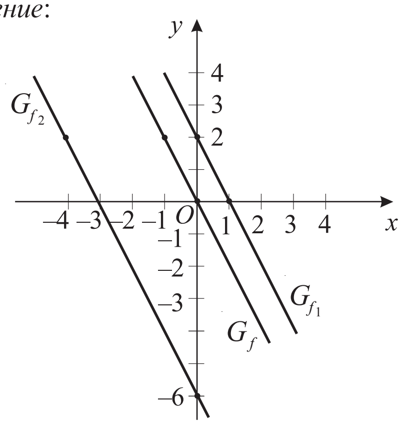
| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | –1 |
| $y$ | 0 | 2 |

$f_1$:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | 1 |
| $y$ | 2 | 0 |

$f_2$:

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 0 | –4 |
| $y$ | –6 | 2 |




**Замечаем**

а) График $G_{f_1}$ получается параллельным переносом графика $G_f$ на одну единицу вправо вдоль оси $Ox$.

б) График $G_{f_2}$ получается параллельным переносом графика $G_f$ на три единицы влево вдоль оси $Ox$.

***Внимание!*** Другие преобразования графиков функций будут изучены в § 3.

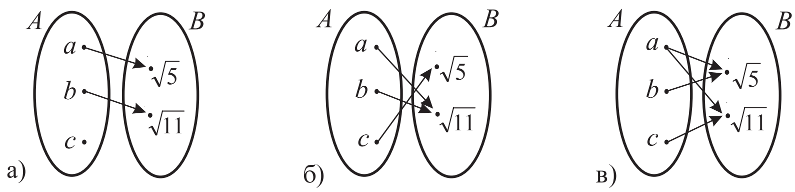
## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Прочтите:

а) $f: \{0; 1; 2; 3\} \to \mathbb{Z}$; б) $g: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$; в) $h: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$; г) $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$.

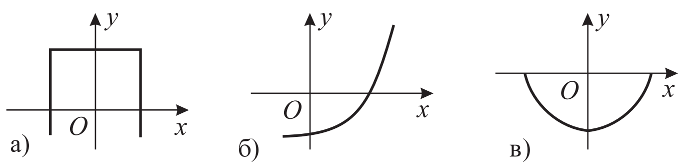
**2.** ***Исследуйте!*** Определите, какая из диаграмм задает функцию.




**3.** Определите элементы функции:

а) $f: \{-1; 0; 2; 3\} \to \{-3; -2; 0; 1\}$, $f(x) = -x$; б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 12$.

**4.** ***Исследуйте!*** Определите, на каком из рисунков кривая не является графиком функции.



## Формируем способности и применяем

**5.** *Работайте в группах!*

Даны множества $A=\{-\sqrt{5}; -3; 0; 2\}$ и $B=\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}\}$.

а) Задайте диаграммами четыре функции, определенные на множестве $A$ со значениями в множестве $B$.

б) Постройте графики функций, полученных в пункте а), составив при этом соответствующие таблицы значений.

**6.** *Исследуйте!* Верно ли задана функция?

а) $f\colon \mathbb{Z}\to\mathbb{N},\ f(x)=2x^2-1;$  б) $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=-\dfrac{5}{x};$

в) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Q},\ f(x)=\dfrac{2}{3}x+4;$  г) $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{Z},\ f(x)=\dfrac{1}{2}x-3.$

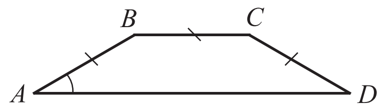
**7.** Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}2x, & \text{если } x\le -1,\\ 5-3x, & \text{если } x>-1.\end{cases}$

Вычислите $f(-\sqrt{2}),\ f(-0{,}1),\ f(0),\ f(2\sqrt{5}).$

**8.** Задайте формулой функцию:

$f\colon \{1; 2; 3; 4; 5\}\to\mathbb{N},\ f(1)=4,\ f(2)=7,\ f(3)=10,\ f(4)=13,\ f(5)=16.$

**9.** Одно из оснований равнобедренной трапеции конгруэнтно боковой стороне, а величина угла при основании равна $30°$. Задайте формулой периметр трапеции в виде функции от ее высоты.




**10.** Найдите область определения функции:

а) $f\colon D(f)\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x+1;$  б) $g\colon D(g)\to\mathbb{R},\ g(x)=\dfrac{1}{x}+5;$

в) $h\colon D(h)\to\mathbb{R},\ h(x)=\sqrt{x}-3;$  г) $f_1\colon D(f_1)\to\mathbb{R},\ f_1(t)=t^2-2t.$

**11.** Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций:

а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+1,\ f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=2x+3,\ f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=2x-2;$

б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-3x,\ f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=-3(x+2),\ f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=-3(x-2);$

в) $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x,\ g_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_1(x)=-x-1{,}5,\ g_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g_2(x)=-x+3;$

г) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{2}x,\ f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_1(x)=\dfrac{1}{2}(x-2),\ f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f_2(x)=\dfrac{1}{2}(x+4).$ Что вы заметили?

**12.** *Работайте в парах!* Приведите примеры функций из различных областей (из физики, химии, экономики, медицины, геометрии, истории и т. д.).

**13.** *Работайте в парах!* Найдите значение функции $f\colon D(f)\to\mathbb{R}$ для заданного значения аргумента:

а) $f(x)=3x^2-2,\ x\in\{-1; 2; \sqrt{3}\};$  б) $f(t)=-4t+1,\ t\in\{-\sqrt{5}; 0; 7\};$  в) $f(z)=\dfrac{1}{z}+z,\ z\in\{-2; 0{,}3; 100\}.$

## Развиваем способности и творим

**14.** Дана функция $f\colon \mathbb{N}\to\mathbb{N}$, где $f(n)$ есть остаток от деления числа $n$ на 5.

а) Вычислите $f(0),\ f(2),\ f(3),\ f(5),\ f(7).$

б) Докажите, что $f(n+5)=f(n)$ для любого $n\in\mathbb{N}.$

**15.** Для $x, y\in\mathbb{R}$ задано соотношение:

а) $3x-y=7;$  б) $x^2+3y^2=8.$

Можно ли выразить $y$ в виде функции от $x$? А $x$ в виде функции от $y$?

**16.** Изобразите график функции $f\colon D(f)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{9-x^2}{x-3}.$

# § 2. Числовые функции. Повторение и дополнения

## 2.1. Свойства числовых функций

### *2.1.1. Монотонность числовых функций*

**Определение**

Функция $f$: $A \to B$ называется **числовой функцией** (или **функцией действительного переменного**), если $A$ и $B$ – подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$.

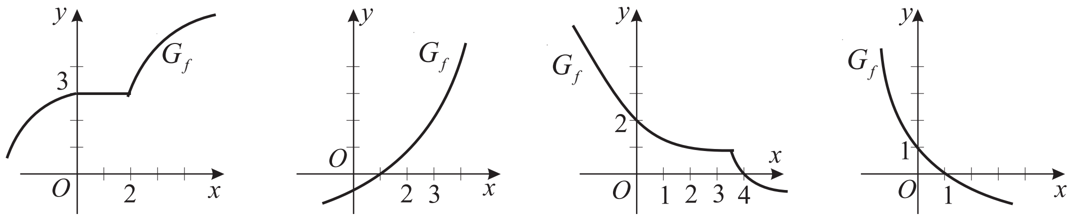
Функции $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 0{,}5x - 1$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$; $h: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -\sqrt{2}x^3$, являются числовыми функциями.

Рассмотрим числовую функцию $f$: $A \to \mathbb{R}$, где $A \subseteq \mathbb{R}$ и $x_1$, $x_2 \in A$.

**Определения**

- Функция $f$ называется **возрастающей (строго возрастающей)** на множестве $A$, если для любых $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$ следует, что $f(x_1) \le f(x_2)$ $((f(x_1) < f(x_2))$.
- Функция $f$ называется **убывающей (строго убывающей)** на множестве $A$, если для любых $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$ следует, что $f(x_1) \ge f(x_2)$ $((f(x_1) > f(x_2))$.
- Функция $f$ называется **монотонной (строго монотонной)** на ее области определения $D(f)$ или некотором промежутке $I \subseteq D(f)$, если она возрастающая или убывающая (строго возрастающая или убывающая) на множестве $D(f)$ или на промежутке $I$ (рис. 3).

***Примеры***




а) возрастающая функция

б) строго возрастающая функция

в) убывающая функция

г) строго убывающая функция

Рис. 3

***Работайте в парах!***

***Применяем***

- Определите промежутки монотонности функции $f$, заданной графическим способом (рис. 4).

*Решение*:

Функция $f$ ______ на $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$ и ______ на $[1, 3]$.

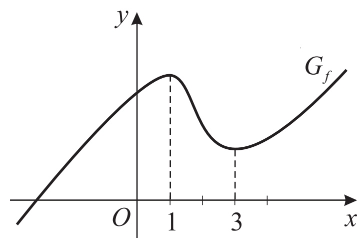



Рис. 4

### *2.1.2. Нули функции*

***Исследуем***

- Найдите нули функции $f$, заданной графически способом (рис. 5).

*Решение*:

Так как график $G_f$ пересекает ось $Ox$ в точке $A(-3, 0)$, то $x_1 = -3$ является нулем функции $f$. Поскольку $B(2, 0)$ – общая точка графика $G_f$ и оси $Ox$, то есть $f(2) = 0$, то $x_2 = 2$ – нуль функции $f$.

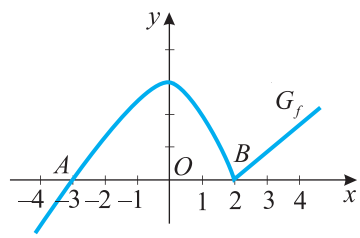



Рис. 5

*Ответ*: Функция $f$ имеет два нуля: ______ и ______.

**Определение**

Действительное число $a$ называется **нулем функции** $f$, если $f(a)=0$.

***Запомните!***

Действительное число $a$ является нулем функции $f$ тогда и только тогда, когда точка $(a, 0)$ принадлежит графику $G_f$.

### *2.1.3. Знак функции*

***Исследуем***

- Исследуйте график $G_f$ функции $f$ (рис. 6) и определите промежутки, на которых:
  а) $f(x)>0$; б) $f(x)\geq 0$; в) $f(x)<0$; г) $f(x)\leq 0$.

*Решение*:

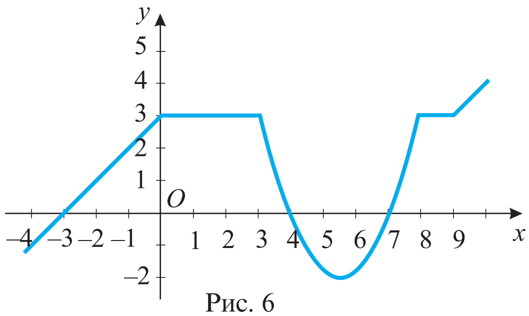



Рис. 6

а) $f(x)>0$, при $x\in(-3; 4)\cup(7; +\infty)$;

б) $f(x)\geq 0$, при $x\in$ ______ $\cup$ ______;

в) $f(x)<0$, при $x\in(-\infty; -3)\cup(4; 7)$;

г) $f(x)\leq 0$, при $x\in$ ______ $\cup$ ______.

## 2.2. Числовая функция вида $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R}$

**Определения**

- Функция вида $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, называется **функцией I степени**.
- Функция вида $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, называется **прямой пропорциональностью**, или **линейной функцией**.
- Действительное число $a$ называется **коэффициентом пропорциональности**.
- Функция вида $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=b$, $b\in\mathbb{R}$, называется **постоянной функцией**.

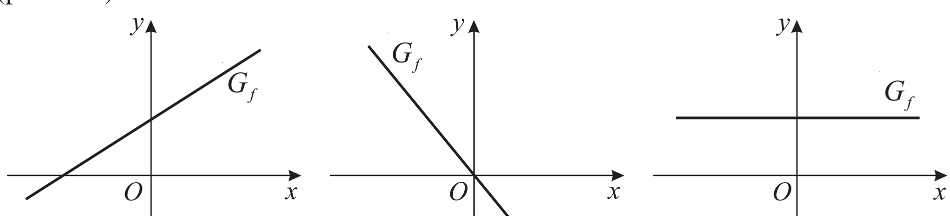
***Замечание***

Прямая пропорциональность между величинами задается функцией вида $f\colon (0; +\infty)\to(0; +\infty)$, $f(x)=ax$, $a\in\mathbb{R}_+^*$.

### *2.2.1. График функции вида* $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R}$

График функции вида $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$, $a, b\in\mathbb{R}$, – это прямая:

- не проходящая через начало координат и не параллельная оси $Ox$, если $a\neq 0$, $b\neq 0$ (рис. 7 а);
- проходящая через начало координат $O(0, 0)$, если $b=0$ (рис. 7 б);
- параллельная оси $Ox$, если $a=0$, $b\neq 0$, или сама ось $Ox$, если $a=0$, $b=0$ (рис. 7 в).




а) б) в)

Рис. 7

*Запомните!*

Число $a$ называется ***угловым коэффициентом*** прямой – графика функции вида $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$.

Для построения прямой – графика функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$, достаточно построить прямую, заданную двумя точками. Как правило, эти точки являются точками пересечения графика $G_f$ с осями $Ox$ и $Oy$.

Для линейной функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax,\ a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, достаточно найти одну точку и построить прямую, проходящую через эту точку и начало координат $O(0, 0)$.

### 2.2.2. *Свойства функции вида* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$

*Работайте в парах!*

- Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x + 2$ (рис. 7).
  1) Исследуйте на монотонность функцию $f$.
  2) Найдите нули функции $f$.
  3) Исследуйте знак функции $f$.

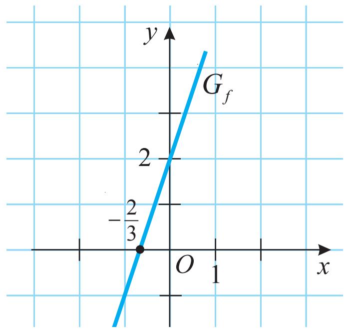



Рис. 8

*Решение*:

Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $x_1 < x_2$.

1) $x_1 < x_2 \Leftrightarrow 3x_1 < 3x_2 \Leftrightarrow 3x_1 + 2 < 3x_2 + 2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Значит, функция $f$ строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$. Отметим, что $a = 3 > 0$.

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{3}$. Следовательно, $x = -\frac{2}{3}$ – нуль функции $f$.

3) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{3}$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{2}{3}$. Итак, функция $f$ принимает отрицательные значения при $x \in \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ и положительные – при $x \in \left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

*Обобщим*

Дана функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R}$.
- Если $a = 0$, функция $f$ постоянна на множестве $\mathbb{R}$.
- Если $a > 0$, функция $f$ строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$.
- Если $a < 0$, функция $f$ строго убывает на множестве $\mathbb{R}$.
- Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, имеет один нуль: $x = -\frac{b}{a}$.
- Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, принимает положительные значения на промежутке, соответствующем множеству решений неравенства $ax + b > 0$, а отрицательные значения – на промежутке, соответствующем множеству решений неравенства $ax + b < 0$.

## 2.3. Числовая функция вида $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{k}{x},\ k \in \mathbb{R}^*$

***Обратной пропорциональностью*** называется зависимость между двумя величинами $x$ и $y$, при которой одновременно с возрастанием (убыванием) в несколько раз величины $x$ во столько же раз убывает (возрастает) величина $y$.

Обратная пропорциональность между величинами $x$ и $y$ задается соотношением $x \cdot y = k$, где $k \in \mathbb{R}_+^*$ и $x \in (0, +\infty)$.

**Определение**

Функция $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \frac{k}{x},\ k \in \mathbb{R}^*$, называется **обратной пропорциональностью**.

График обратной пропорциональности – это гипербола, состоящая из двух ветвей:
а) при $k>0$ ее ветви расположены в I и III четвертях (рис. 9);
б) при $k<0$ ее ветви расположены во II и IV четвертях (рис. 10).

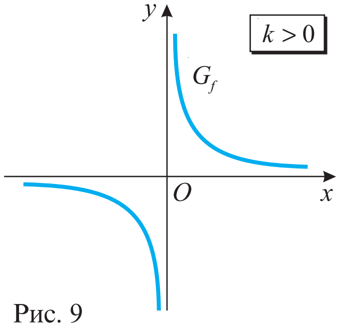



Рис. 9

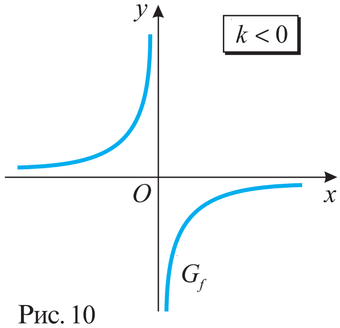



Рис. 10

**Запомните!**

***Свойства функции вида $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x)=\dfrac{k}{x}$, $k\in\mathbb{R}^*$***

1° Функция $f$ не имеет нулей; график $G_f$ не пересекает ни ось $Ox$, ни ось $Oy$.

2° а) При $k>0$ функция $f$ принимает положительные значения, если $x\in(0,+\infty)$, и отрицательные, если $x\in(-\infty,0)$.
б) При $k<0$ функция $f$ принимает положительные значения, если $x\in$ ______, и отрицательные, если $x\in$ ______.

3° а) При $k>0$ функция строго убывает на интервалах $(-\infty,0)$, $(0,+\infty)$.
б) При $k<0$ функция строго возрастает на интервалах ______, ______.

4° При $k>0$ $(k<0)$ замечаем: чем больше отрицательное или положительное значение $x$, тем меньше (больше) соответствующее значение $y$; чем меньше отрицательное значение $x$, тем больше (меньше) соответствующее значение $y$; чем меньше положительное значение $x$, тем больше (меньше) соответствующее значение $y$.

5° Отметим, что $f(-x)=-f(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}^*$.

Действительно, $f(-x)=\dfrac{k}{-x}=-\dfrac{k}{x}=-f(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}^*$.

Из того, что $f(-x)=-f(x)$, следует, что точка $A(x_0,y_0)\in G_f$, тогда и точка $A'(-x_0,-y_0)\in G_f$. Значит, график $G_f$ симметричен относительно начала координат $O(0,0)$ (рисунки 9, 10).

## 2.4. Функция радикал $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$

**Определение** Функция $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$, называется **функцией радикал**.

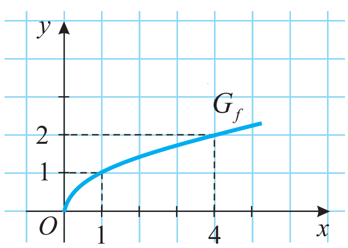



Рис. 11

График функции радикал – это ветвь параболы, расположенная в I четверти (рис. 11).

***Свойства функции радикал***

1° Функция $f$ имеет единственный нуль, $x=0$, так как
$f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0.$
График $G_f$ имеет с осями $Ox$ и $Oy$ единственную общую точку: $O(0,0)$.

2° Функция $f$ принимает только положительные значения при $x\in\mathbb{R}^*_+$.

3° Функция $f$ строго возрастает на множестве $\mathbb{R}_+$.

## 2.5. Функция модуль (дополнительно)

**Определение** Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, называется **функцией модуль** (**абсолютная величина**).

***Исследуем***

• Дана функция модуль $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$.

а) Постройте график $G_f$.

б) Исследуйте свойства функции $f$.

*Решение*:

а) Раскрыв модуль, получим: $f(x) = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \in [0, +\infty), \\ -x, \text{ если } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$

Следовательно, для $x \in [0, +\infty)$ строим график функции $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, а для $x \in (-\infty, 0)$ – график функции $f: (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x$.

Итак, графиком функции $f(x) = |x|$ является прямой угол, вершина которого находится в начале координат. При этом полупрямая $[Oy$ является его биссектрисой (рис. 12).

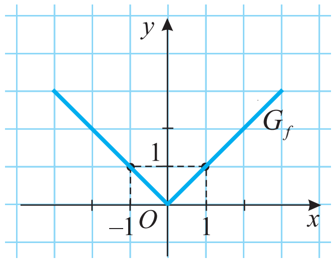



Рис. 12

б) ***Свойства функции модуль***

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Значит, функция $f$ имеет единственный нуль: $x = 0$.

2° Так как $|x| \geq 0$, то для $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ функция $f$ принимает положительные значения.

3° Функция $f$ строго убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и строго возрастает на промежутке $[0, +\infty)$. (Докажите!)

***Применяем*** • Постройте график функции

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -|3 - x|$.

*Решение*:

Раскрыв модуль, получим:

$h(x) = -|3 - x| = \begin{cases} x - 3, \text{ если } x \in (-\infty, 3], \\ 3 - x, \text{ если } x \in (3, +\infty). \end{cases}$

График функции $h$ изображен на рисунке 13.

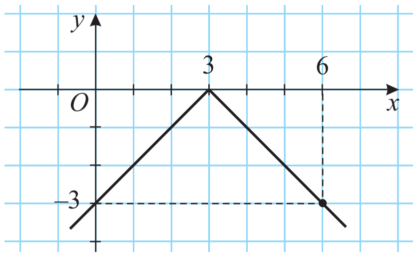



Рис. 13

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Даны точки: (1; 0), (1; 1), (–2; –11), (–2; 10), (–3; 16). Определите, какие из них принадлежат графику функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: а) $f(x) = 4x - 3$;
б) $f(x) = -3x + 4$;
в) $f(x) = -5x + 1$.

**2.** ***Работайте в парах!***

Дана функция: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0{,}5x - 4$;
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 5$.

а) Постройте график функции $f$.
б) Найдите нуль функции $f$.
в) Исследуйте знак функции $f$.
г) Исследуйте на монотонность функцию $f$.

**3.** Дана функция: 1) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -0{,}25x$;
2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 7x$.

а) Постройте график функции $g$.
б) Найдите нуль функции $g$.
в) Исследуйте знак функции $g$.
г) Исследуйте на монотонность функцию $g$.

**4.** Определите без построения графика, возрастает или убывает функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = \sqrt{15}x + 3$; б) $f(x) = -\sqrt{3}x - 5$;
в) $f(x) = -x$; г) $f(x) = 7{,}(8)x$.

**5.** Определите без построения графика, в каких четвертях расположены ветви гиперболы – графика функции $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$:

а) $f(x)=\frac{1}{x}$; б) $f(x)=-\frac{2}{3x}$;

в) $f(x)=-\frac{\sqrt{7}}{x}$; г) $f(x)=-\frac{1+\sqrt{19}}{x}$.

**6.** Дана функция радикал $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in\{4; 7; 9; 25; -36; 0; -49\}$.
Найдите соответствующие значения функции $f$.

**7.** Дополните формулу таким действительным числом, чтобы полученная функция $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=\square\, x-1$; б) $f(x)=-\square\, x+3$;

в) $f(x)=\frac{\square}{x}$; г) $f(x)=-\frac{\square}{x}$

была: 1) строго возрастающей на множестве $D$;
2) строго убывающей на множестве $D$.

**8.** *Исследуйте!* *Истинно* или *ложно*?

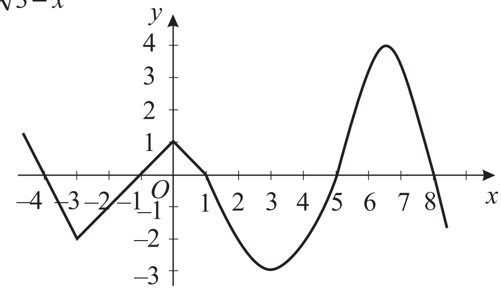
а) Если $f(\sqrt{2})=-3$, то $-3\in D(f)$, а $\sqrt{2}\in E(f)$.

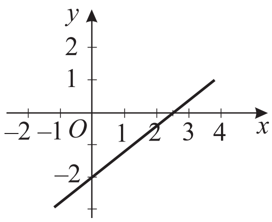
б) Если $D(f)=[-2; \sqrt{5})$, то $f(\sqrt{5})$ не существует.

в) Если $E(f)=(-1; 10)$, то существует значение $x_0$ аргумента такое, что $f(x_0)=5$.

г) Областью определения функции, заданной формулой $f(x)=\frac{\sqrt{x-5}}{\sqrt{3-x}}$, является пустое множество.

**9.** Исследуйте график функции $G_f$, изображенный на рисунке.
Найдите:
а) нули функции $f$;
б) промежутки знакопостоянства функции $f$;
в) интервалы монотонности функции $f$.




**10.** (EG, 2016) На рисунке изображен график функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Используя рисунок, впишите в рамку одно из выражений: *положительное число* или *отрицательное число*.
«Нуль функции $f$ – $\square$».

## Формируем способности и применяем

**11.** Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+b$, при:
а) $b=-1$; б) $b=0$; в) $b=2$.
Что вы заметили?

**12.** *Работайте в группах!* Изобразите в одной прямоугольной системе координат графики функций:
а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x$, и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4x$;
б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$, и
$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=1-2x$.
Что вы заметили?

**13.** Найдите функцию I степени, если известно, что:
а) $f(1)=4$ и $f(0)=-3$;
б) $f(0)=2$ и $f(-2)=5$;
в) $f(\sqrt{2})=2-\sqrt{3}$ и $f(2\sqrt{6})=3\sqrt{3}$;
г) $f(-1)=3$ и $f(2)=-1$.

**14.** Изобразите графически функцию $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$:
а) $f(x)=-\frac{3}{x}$; б) $f(x)=\frac{3}{4x}$;
в) $f(x)=-\frac{1}{2x}$; г) $f(x)=\frac{5}{x}$.
Исследуйте свойства функции $f$.

**15.** Постройте график функции $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=2\sqrt{x}$; б) $f(x)=\sqrt{x}-1$;
в) $f(x)=\sqrt{x}+1$; г) $f(x)=0{,}5\sqrt{x}$.

**16.** *Работайте в парах!* Приведите примеры функциональных зависимостей:
а) из окружающей действительности;
б) из других школьных дисциплин.

**17.** Постройте график функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=\frac{5x-5}{x-1}$; б) $f(x)=\frac{(x+1)\sqrt{x}}{x+1}$;
в) $f(x)=\frac{3\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$.

### Развиваем способности и творим

**18.** Пусть $m$ – действительный параметр и функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = (m-2)x + 4$; б) $f(x) = (m+4)x + m - 6$.
Найдите, при каких значениях $m$ функция $f$:
1) возрастает; 2) убывает.

**19.** *Работайте в парах!* Изобразите графически функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: а) $f(x) = \sqrt{|x|}$;
б) $f(x) = \sqrt{|x-2|}$; в) $f(x) = \begin{cases} -x, \text{ если } x \le 0, \\ \sqrt{x}, \text{ если } 0 < x \le 4, \\ 2, \text{ если } x > 4. \end{cases}$

**20.** Дана функция $f: \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+4}{x-3}$.
Покажите, что существуют числа $A, B \in \mathbb{R}$, при которых $f(x) = A + \frac{B}{x-3}$.

**21.** (EG, 2019) Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 1 - a^2$. Найдите действительные значения $a$, при которых график функции $f$ проходит через начало координат, а функция $f$ строго убывает.

*Задача для чемпионов* **22.** Задайте формулой функцию, зависящую от натурального аргумента, значения которой были бы простыми числами для любого значения аргумента.

**23.** *Работайте индивидуально!* **Проект.** Пронаблюдайте ежедневно, в одно и то же время, на протяжении недели, как меняется температура в вашем городе (селе). Изобразите графически полученные результаты. Задайте формулой функцию, соответствующую каждой части графика.

# § 3. Функция II степени

## 3.1. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

*Исследуем*

- Дан квадрат со стороной $a$ (рис. 14). Определите функцию, задающую зависимость площади квадрата от длины его стороны.

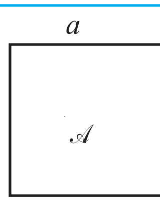



Рис. 14

*Решение*:

Площадь квадрата со стороной $a$ вычисляется по формуле $\mathcal{A} = a^2$. Следовательно, зависимость площади квадрата от длины его стороны задается функцией $g: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $g(x) = x^2$.

Функция $g$ приводит к функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.

- Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
  а) Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
  б) Исследуйте свойства функции $f$.
  *Решение*:

а) Составим таблицу значений функции $f$ для значения нуль и для некоторых отрицательных и положительных значений аргумента $x$:

| $x$ | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^2$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

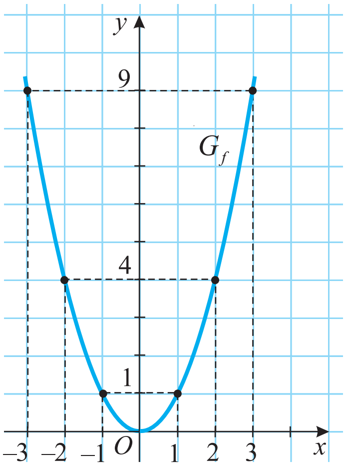



Рис. 15

Изобразим в заданной прямоугольной системе координат $xOy$ точки, координаты которых приведены в таблице. Соединим эти точки непрерывной линией и получим график $G_f$ (рис. 15).

График $G_f$ функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, называется ***параболой***.

Точка $O(0, 0)$ называется ***вершиной параболы***.

В данном случае говорят, что *ветви* этой параболы *направлены вверх*.

**Внимание!** При построении параболы мы учитывали тот факт, что не существует трех различных коллинеарных точек, принадлежащих параболе.

б) ***Свойства функции*** $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \boldsymbol{f(x) = x^2}$

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Следовательно, $x = 0$ – нуль функции $f$. График $G_f$ пересекает оси $Ox$ и $Oy$ в единственной точке: $O(0, 0)$.

2° $f(x) = x^2 \geq 0$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Итак, функция принимает только неотрицательные значения.

3° Функция $f$ строго возрастает на промежутке $[0, +\infty)$ и строго убывает на промежутке $(-\infty, 0]$.

4° Отметим, что $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.
Действительно, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.
Тогда $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (-x, y) \in G_f$, а это означает, что график $G_f$ симметричен относительно оси $Oy$, или что ось ординат является осью симметрии графика (рис. 15).

***Применяем***

• Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$. Найдите значения $x$, при которых функция $f$ принимает значение:
а) 64; б) 0; в) –25.

*Решение*:

а) $f(x) = 64 \Leftrightarrow x^2 = 64$. Итак, $x_1 = -8,\ x_2 = 8$.

б) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$. Следовательно, $x = 0$.

в) $f(x) = -25 \Leftrightarrow x^2 = -25$. Значит, не существует таких действительных значений $x$.

## 3.2. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \boldsymbol{f(x) = ax^2},\ \boldsymbol{a \in \mathbb{R}^*}$

***Исследуем***

• Дан круг радиуса $R$ (рис. 16). Найдите функцию, задающую зависимость площади круга от длины его радиуса.

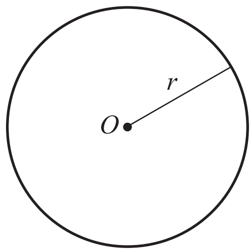



Рис. 16

*Решение*:

Найдем площадь круга, применив формулу $\mathcal{A} = \pi R^2$. Следовательно, зависимость площади круга от его радиуса задается функцией $h: (0, +\infty) \to (0, +\infty),\ h(x) = \pi x^2$.

Функция $h$ приводит к функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$.

• Даны функции:
а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$;
б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -2x^2$.

1) Постройте графики функций $f$ и $g$.
2) Исследуйте свойства функций $f$ и $g$.

*Решение*:

1) Составим таблицы значений функций $f$ и $g$ для значения нуль и для некоторых отрицательных и положительных значений аргумента $x$:

а)

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = 2x^2$ | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 |

б)

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = -2x^2$ | –8 | –2 | 0 | –2 | –8 |

Графики $G_f$ и $G_g$, построенные по точкам, изображены на рисунках 17 и 18. График функции $f$, а также график функции $g$ называется ***параболой***.

Точка $O(0,0)$ называется ***вершиной параболы***.

Говорят, что график функции $f$ – *парабола, ветви которой направлены вверх*, а график функции $g$ – *парабола, ветви которой направлены вниз*.

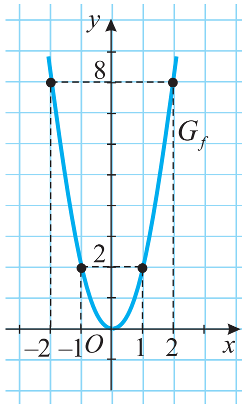




Рис. 17

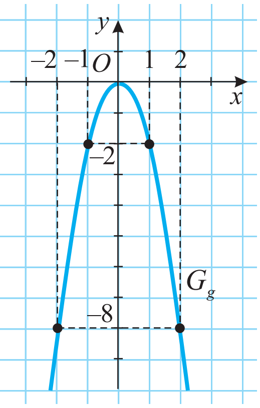




Рис. 18

2) ***Свойства функции***

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Значит, функция $f$ имеет единственный нуль: $x = 0$.
Следовательно, график $G_f$ пересекает оси $Ox$ и $Oy$ в точке $O(0, 0)$.

2° $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \geq 0$. Значит, функция $f$ принимает неотрицательные значения при любых $x \in \mathbb{R}$.

3° Функция $f$ строго убывает на промежутке $(-\infty, 0]$ и строго возрастает на промежутке $[0, +\infty)$.

4° $D(f) = \mathbb{R}$.
Значит, если $x \in D(f)$, то и $-x \in D(f)$.
Из того, что $f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 = 2x^2 = f(x)$, следует, что график $G_f$ симметричен относительно оси $Oy$.

5° Точка $x_0 = 0$ является точкой минимума функции $f$ и $f(x_0) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -2x^2$

1° $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
Значит, функция $g$ имеет единственный нуль: $x = 0$.
Следовательно, график $G_g$ пересекает оси $Ox$ и $Oy$ в точке $O(0, 0)$.

2° $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2x^2 \leq 0$. Значит, функция $g$ принимает отрицательные значения или значение нуль при любых $x \in \mathbb{R}$.

3° Функция $g$ строго возрастает на промежутке $(-\infty, 0]$ и строго убывает на промежутке $[0, +\infty)$.

4° $D(g) = \mathbb{R}$.
Значит, если $x \in D(g)$, то и $-x \in D(g)$.
Из того, что $g(-x) = -2 \cdot (-x)^2 = -2x^2 = g(x)$, следует, что график $G_g$ симметричен относительно оси $Oy$.

5° Точка $x_0 = 0$ является точкой максимума функции $g$ и $g(x_0) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$.

## Определения

Пусть $f: A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R}$, и $x_0 \in A$.

- Значение $f(x_0)$ называется **минимумом** функции $f$ на множестве $A$, если $f(x) \geq f(x_0)$ для любого $x \in A$. Обозначают: $f(x_0) = \min\limits_{x \in A} f(x)$. В этом случае говорят, что $x_0$ является **точкой минимума** функции $f$.
- Значение $f(x_0)$ называется **максимумом** функции $f$ на множестве $A$, если $f(x) \leq f(x_0)$ для любого $x \in A$. Обозначают: $f(x_0) = \max\limits_{x \in A} f(x)$. В этом случае говорят, что $x_0$ является **точкой максимума** функции $f$.
- Точки минимума и максимума называются **точками экстремума** (от латинского *extremum* – крайнее) функции $f$, а значения функции $f$ в этих точках называются **экстремумами функции** $f$.

**Запомните!**

***Свойства функции*** $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \boldsymbol{f(x)=ax^2,\ a\in\mathbb{R}^*}$

1° График $G_f$ является параболой, вершина которой находится в начале координат $O(0,\ 0)$ и: а) ветвями, направленными вверх, если $a>0$;
б) ветвями, направленными вниз, если $a<0$.
График $G_f$ пересекает оси $Ox$ и $Oy$ в единственной точке $O(0,\ 0)$.

2° Функция $f$ имеет единственный нуль: $x=0$.

3° Функция $f$ принимает неотрицательные значения, если $a>0$, и отрицательные значения или значение нуль, если $a<0$.

4° а) При $a>0$ функция $f$ строго убывает на промежутке $(-\infty,\ 0]$ и строго возрастает на промежутке $[0,\ +\infty)$.
б) При $a<0$ функция $f$ строго возрастает на промежутке $(-\infty,\ 0]$ и строго убывает на промежутке $[0,\ +\infty)$.

5° а) Если $a>0$, то $f(0)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=0$ и $x_0=0$ – точка минимума функции $f$.
б) Если $a<0$, то $f(0)=\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=0$ и $x_0=0$ – точка максимума функции $f$.

6° График $G_f$ симметричен относительно оси $Oy$.

***Применяем*** • Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций:
а) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2$, и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2$;
б) $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-0{,}5x^2$, и $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x^2$.

*Решение*:

Составим таблицу значений функций $f$ и $g$:

а)

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=2x^2$ | 8 | 2 | 0 | 2 | 8 |
| $g(x)=x^2$ | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

б)

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=-0{,}5x^2$ | –2 | –0,5 | 0 | –0,5 | –2 |
| $g(x)=-x^2$ | –4 | –1 | 0 | –1 | –4 |

Графики функций $f$ и $g$ изображены на рисунках 19 и 20.

а)

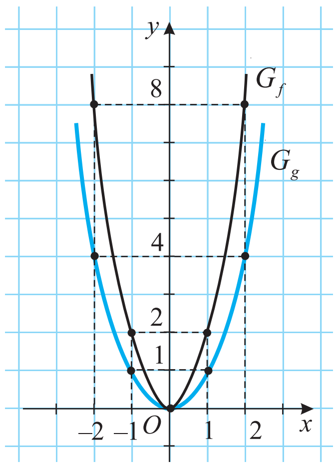



Рис. 19

б)

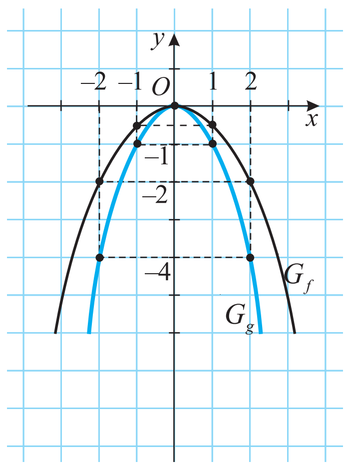



Рис. 20

**Замечание** Для функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2,\ a\in\mathbb{R}^*$, возможны случаи, приведенные на рисунках 21 и 22.

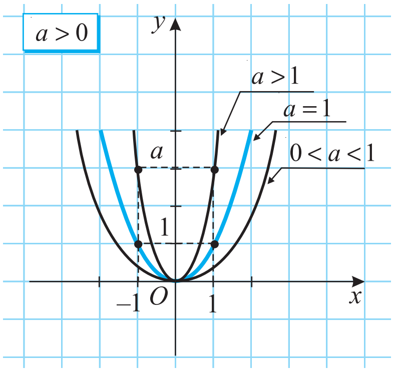



Рис. 21

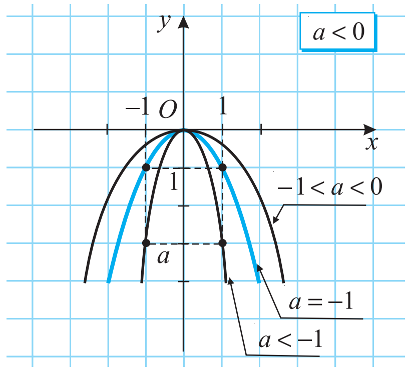



Рис. 22

## 3.3. Преобразование графиков

### *3.3.1. График функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+n,\ a\neq 0,\ n\in\mathbb{R}^*$*

**Исследуем**

- Дана функция $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

  Постройте график функции $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$.

  *Решение*:

  Составим таблицу значений функций $g$ и $f$:

| $x$ | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ | 8 | 4,5 | 2 | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 | 8 |
| $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2$ | 10 | 6,5 | 4 | 2,5 | 2 | 2,5 | 4 | 6,5 | 10 |

Графики функций $g$ и $f$ изображены на рисунке 23.

Замечаем, что при параллельном переносе на 2 единицы вверх каждой точки графика $G_g$ получаем соответствующую точку графика $G_f$. Таким образом, график функции $f$ получается из графика функции $g$ с помощью параллельного переноса вдоль оси $Oy$ на 2 единицы вверх.

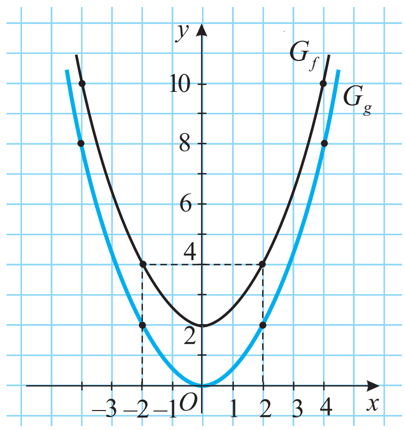



Рис. 23

**Применяем** • Дана функция $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

Постройте график функции $h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=\frac{1}{2}x^2-3$.

*Решение*:

Составим таблицу значений функций $g$ и $h$:

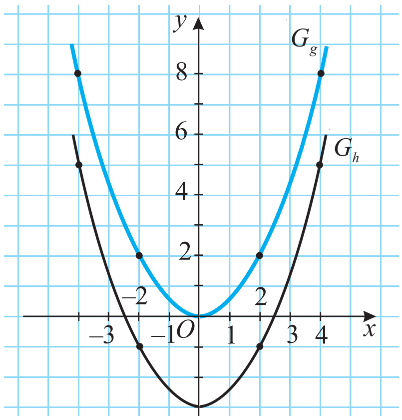



Рис. 24

| $x$ | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ | 8 | 4,5 | 2 | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 | 8 |
| $h(x)=\frac{1}{2}x^2-3$ | 5 | 1,5 | –1 | –2,5 | –3 | –2,5 | –1 | 1,5 | 5 |

Графики функций $g$ и $h$ изображены на рисунке 24.

Замечаем, что график функции $h$ получается из графика функции $g$ с помощью параллельного переноса вдоль оси $Oy$ на 3 единицы вниз.

**Обобщим** График функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+n,\ a\neq 0,\ n\in\mathbb{R}^*$, является параболой, которую можно получить из графика функции $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=ax^2,\ a\neq 0$, с помощью параллельного переноса вдоль оси $Oy$ вверх на $n$ единиц, если $n>0$, или вниз на $-n$ единиц, если $n<0$.

### 3.3.2. График функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=a(x-m)^2,\ a\neq 0,\ m\in\mathbb{R}^*$

**Исследуем**

- Дана функция $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

  Постройте график функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2$.

  *Решение*:

  Составим таблицу значений функций $g$ и $f$:

| $x$ | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)=\frac{1}{2}x^2$ | 8 | 4,5 | 2 | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 | 8 | 12,5 | 18 | 24,5 |
| $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2$ | 18 | 12,5 | 8 | 4,5 | 2 | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 | 8 | 12,5 |

Графики функций $g$ и $f$ изображены на рисунке 25.

Замечаем, что при параллельном переносе каждой точки графика $G_g$ вдоль оси $Ox$ на 2 единицы вправо получаем соответствующую точку графика $G_f$. Таким образом, график функции $f$ получается из графика функции $g$ с помощью параллельного переноса вдоль оси $Ox$ на 2 единицы вправо.

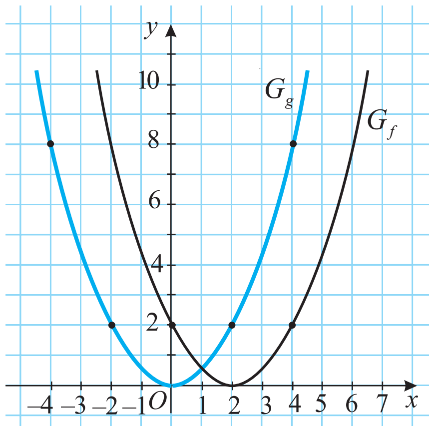



Рис. 25

**Применяем**

• Дана функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Постройте график функции $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$.

*Решение*:

Составим таблицу значений функций $g$ и $h$:

| $x$ | –6 | –5 | –4 | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ | 18 | 12,5 | 8 | 4,5 | 2 | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 | 8 | 12,5 |
| $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$ | 4,5 | 2 | 0,5 | 0 | 0,5 | 2 | 4,5 | 8 | 12,5 | 18 | 24,5 | 32 |

Графики функций $g$ и $h$ изображены на рисунке 26.

Замечаем, что при параллельном переносе каждой точки графика $G_g$ вдоль оси $Ox$ на 3 единицы влево получаем соответствующую точку графика $G_h$. Таким образом, график функции $h$ получается из графика функции $g$ с помощью параллельного переноса вдоль оси $Ox$ на 3 единицы влево.

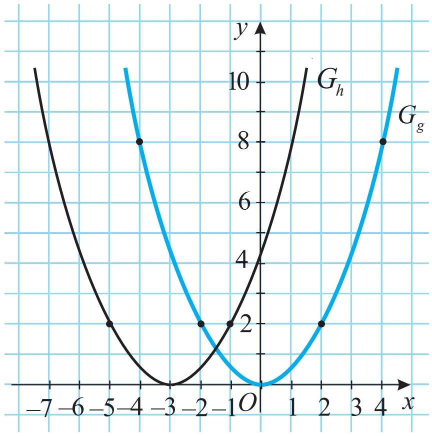



Рис. 26

**Обобщим**

График функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a(x-m)^2$, $a \neq 0$, $m \in \mathbb{R}^*$, является параболой, которую можно получить из графика функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2$, $a \neq 0$, с помощью параллельного переноса вдоль оси $Ox$ вправо на $m$ единиц, если $m > 0$, или влево на $-m$ единиц, если $m < 0$.

**Задание**

Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций:

а) $f(x) = -2x^2$, $g(x) = -2x^2 + 1$, $h(x) = -2x^2 - 3$;

б) $f(x) = -2x^2$, $g(x) = -2(x-1)^2$, $h(x) = -2(x+2)^2$.

## 3.4. Исследование функции вида $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

**Исследуем**

• Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x - 6$.

а) Постройте график функции $f$.

б) Исследуйте свойства функции $f$.

*Решение*:

а) 1. Находим точки пересечения графика $G_f$ с осью $Ox$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5 \text{ или } x = 2.$$

Следовательно, график $G_f$ пересекает ось $Ox$ в точках $A(-1{,}5;\ 0)$ и $B(2;\ 0)$.

2. Находим точку пересечения графика $G_f$ с осью $Oy$:

$$f(0) = 2 \cdot 0^2 - 0 - 6 = -6.$$

Значит, график $G_f$ пересекает ось $Oy$ в точке $C(0, -6)$.

3. Находим ось симметрии графика $G_f$:

$f\left(x+\frac{1}{4}\right)=f\left(-x+\frac{1}{4}\right)$ для любого $x\in\mathbb{R}$, что доказывает, что если точка $E\left(x+\frac{1}{4};\ y\right)\in G_f$, то и точка $E'\left(-x+\frac{1}{4};\ y\right)\in G_f$, то есть прямая, заданная уравнением $x=\frac{1}{4}$, является осью симметрии графика $G_f$ (рис. 27).

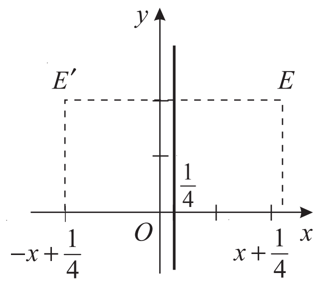



Рис. 27

4. Находим координаты вершины параболы.

Так как $x=\frac{1}{4}$ – ось симметрии графика $G_f$, то $x_0=\frac{1}{4}$ – абсцисса вершины параболы $G_f$, а ее ордината равна $y_0=f(x_0)=2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}-6=-\frac{49}{8}$.

Следовательно, точка $V\left(\frac{1}{4};-\frac{49}{8}\right)$ является вершиной параболы.

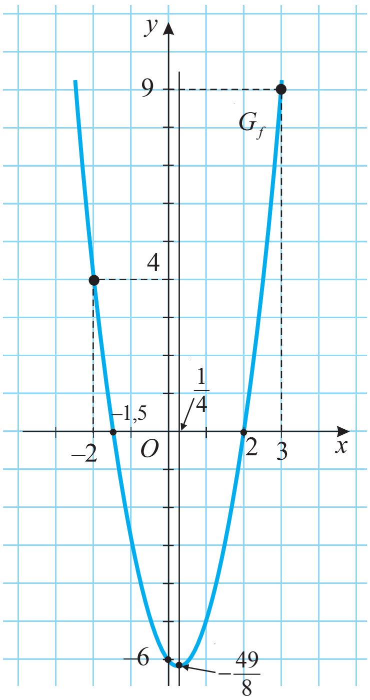



Рис. 28

5. Составляем таблицу значений функции $f$ для абсцисс точек пересечения графика $G_f$ с осями $Ox$, $Oy$ и для некоторых других значений аргумента $x$:

| $x$ | –2 | –1,5 | 0 | $\frac{1}{4}$ | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)=2x^2-x-6$ | 4 | 0 | –6 | $-\frac{49}{8}$ | 0 | 9 |

6. Строим по точкам график $G_f$ и получаем *параболу с ветвями, направленными вверх* (рис. 28).

б) Пользуясь графиком $G_f$, исследуем свойства функции $f$:

1° Функция $f$ имеет два нуля: $x_1=$ ______, $x_2=$ ______.

2° $f>0$ для $x\in$ ______ и $f<0$ для $x\in$ ______.

3° Функция $f$ строго убывает на промежутке ______ и строго возрастает на промежутке ______.

4° $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f($ ______ $)=$ ______ и точка $x=$ ______ – точка минимума функции $f$.

**Определение**

Функция вида $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, называется **функцией II степени**, или **квадратичной функцией**.

Так как действительное число $a$ ненулевое, выделив полный квадрат, получим:

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] \text{ или}$$

$$f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}=a\left[x-\left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2+\frac{-\Delta}{4a} \qquad (1)$$

для любого $x\in\mathbb{R}$, где $\Delta=b^2-4ac$ – дискриминант уравнения $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, соответствующего функции $f$.

Равенство (1) называется ***каноническим видом функции*** $f$.

Из (1) следует, что для того, чтобы от графического изображения функции $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}^*$, перейти к графическому изображению функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, необходимо выполнить два параллельных переноса графика $G_g$:

1) вдоль оси $Ox$ на $-\frac{b}{2a}$ единиц (вправо, если $-\frac{b}{2a} > 0$, и влево, если $-\frac{b}{2a} < 0$);
2) вдоль оси $Oy$ на $-\frac{\Delta}{4a}$ единиц (вверх, если $-\frac{\Delta}{4a} > 0$, и вниз, если $-\frac{\Delta}{4a} < 0$).

Дана функция:
а) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - x - 2$; б) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = 1 - x^2$.
1. Постройте: а) график функции $g$; б) график функции $h$.
2. Исследуйте: а) свойства функции $g$; б) свойства функции $h$.

**Запомните!**

Абсцисса $x_0$ вершины параболы $G_f$ вычисляется по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
Для вычисления ординаты $y_0$ вершины параболы $G_f$ используем формулу $y_0 = f(x_0)$ или $y_0 = \frac{-\Delta}{4a}$.

### *3.4.1. Множество значений функции II степени*

При любых значениях $x \in \mathbb{R}$ значения выражения $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ принадлежат промежутку $[0, +\infty)$, а значения выражения $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ принадлежат промежутку:

а) $[0, +\infty)$, если $a > 0$; б) $(-\infty, 0]$, если $a < 0$.

Итак, из (1) и а), б) следует, что:

1) $E(f) = \left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, если $a > 0$; 2) $E(f) = \left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$, если $a < 0$.

**Применяем**

• Дана функция:
а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 7x + 12$; б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -3x^2 - 2x + 1$.
Найдите $E(f)$.

*Решение*:

а) $f(x) = x^2 - 7x + 12 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Поскольку $a = 1 > 0$, то $E(f) = \left[-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$.

б) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1 =$ ______. Так как $a = -3 < 0$, то $E(f) =$ ______.

**Задание**

Дана функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2 - x - x^2$. Найдите $E(g)$.

### *3.4.2. Экстремумы функции II степени*

Рассмотрим функцию $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, и ее канонический вид $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}$, где $\Delta = b^2 - 4ac$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

1) *Случай* $a > 0$

Так как $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ и $a > 0$, то и $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$.

Тогда $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$. Значит, $f(x) \geq \frac{-\Delta}{4a}$ (2) для любого $x \in \mathbb{R}$.

Очевидно, что $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$ только при $x=-\dfrac{b}{2a}$.

Тогда $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{-\Delta}{4a}$ (3).

Таким образом, из (2) и (3) следует, что $f(x)\geq f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ (4) для любого $x\in\mathbb{R}$.

Из (2) и (4) следует, что $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{-\Delta}{4a}$ и $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ – точка минимума функции $f$ (рис. 29).

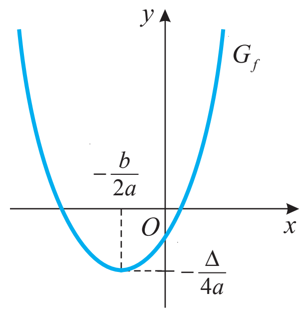


Рис. 29

**2)** *Случай* $a<0$

Так как $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ и $a<0$, то и $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2\leq 0$.

Тогда $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{-\Delta}{4a}\leq\dfrac{-\Delta}{4a}$. Значит, $f(x)\leq\dfrac{-\Delta}{4a}$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

Учитывая (3), получим $f(x)\leq f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ (5) для любого $x\in\mathbb{R}$.

Из (5) следует, что $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{-\Delta}{4a}$ и $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ – точка максимума функции $f$ (рис. 30).

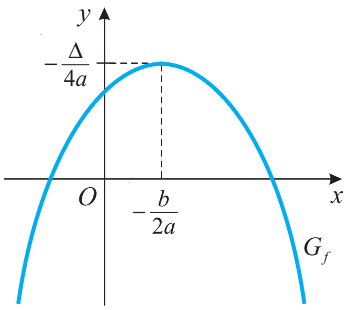


Рис. 30

**Применяем**

- Даны функции:

  а) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-7x+12$; б) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-3x^2-2x+1$.

  Найдите точки экстремума и экстремумы функций $f$ и $g$.

  *Решение*:

  а) Так как $a=1>0$, получим $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-7}{2}=3{,}5$ – точка минимума функции $f$ и $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(3{,}5)=-\dfrac{1}{4}$.

  б) Поскольку $a=-3<0$, получим $x_0=$ ____ $=$ ____ $=$ ____ – точка ____ функции $g$ и $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x)=g($ ____ $)=$ ____.

**Задание** Дана функция $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=4-x^2$. Найдите точки экстремума и экстремумы функции $h$.

### *3.4.3. Промежутки монотонности функции II степени*

**Обобщим**

Пусть $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, – функция II степени.

- Если $a>0$, функция $f$ строго убывает на промежутке $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ и строго возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ (рис. 29).
- Если $a<0$, функция $f$ строго возрастает на промежутке $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ и строго убывает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ (рис. 30).
- Промежутки $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right]$ и $\left[-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ называются ***промежутками монотонности функции $f$***.

**Применяем**

- Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: а) $f(x) = 3x^2 + x - 8$; б) $f(x) = -0{,}3x^2 - 6x + 3$.
  Найдите промежутки монотонности функции $f$.
  *Решение*:

  а) Так как $a = 3 > 0$ и $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{3 \cdot 2} = -\dfrac{1}{6}$, то функция $f$ строго убывает на промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{1}{6}\right]$ и строго возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{1}{6}; +\infty\right)$.

  б) Поскольку $a = -0{,}3 < 0$ и $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-6}{2(-0{,}3)} = -10$, то функция $f$ строго возрастает на промежутке $(-\infty, -10]$ и строго убывает на промежутке $[-10; +\infty)$.

**Задание** Дана функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - x$. Найдите промежутки монотонности функции $g$.

### *3.4.4. Нули функции II степени*

- Даны функции: а) $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2 - 9x + 18$;
  б) $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = 4x^2 - 4x + 1$;
  в) $f_3: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = -x^2 + x - 1$.

  Найдите нули функций $f_1$, $f_2$, $f_3$.

  *Решение*:

  а) $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x_1 = 3,\ x_2 = 6$. Следовательно, функция $f_1$ имеет два нуля: $x_1 = 3$, $x_2 = 6$ (рис. 31 а).

  б) $f_2(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0{,}5$.
  Значит, функция имеет единственный нуль: $x = 0{,}5$ (рис. 31 б).

  в) $f_3(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x - 1 = 0$.
  Это уравнение не имеет действительных решений. (Обоснуйте!)
  Таким образом, функция $f_3$ не имеет нулей (рис. 31 в).

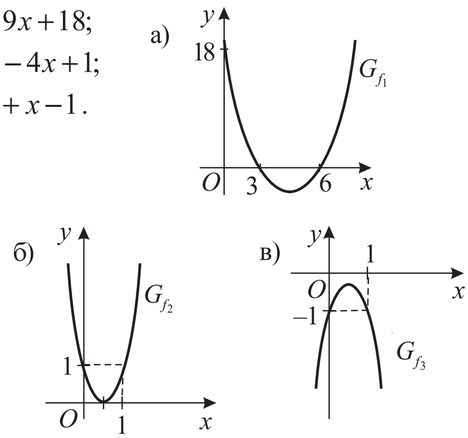



Рис. 31

**Обобщим** *Нулями функции* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, являются *действительные решения уравнения* $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, соответствующего функции $f$.

Напомним, что количество действительных решений уравнения II степени зависит от значения ее дискриминанта $\Delta = b^2 - 4ac$.

- При $\Delta > 0$ уравнение II степени имеет два действительных решения, а функция $f$ – два нуля: $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Следовательно, график $G_f$ пересекает ось $Ox$ в двух точках: $(x_1; 0)$, $(x_2; 0)$.
- При $\Delta = 0$ уравнение II степени имеет одно действительное решение, а функция $f$ – единственный нуль: $x = -\dfrac{b}{2a}$. Значит, график $G_f$ имеет одну общую точку с осью $Ox$: $\left(-\dfrac{b}{2a}; 0\right)$.
- При $\Delta < 0$ уравнение II степени не имеет действительных решений, то есть функция $f$ не имеет нулей. Следовательно, график $G_f$ не пересекает ось $Ox$.

**Задание** Даны функции: а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 10$; б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2x$.
Найдите нули функций $f$ и $g$.

### 3.4.5. *Знак функции II степени*

***Исследуем***

- Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Найдите множество значений $x \in \mathbb{R}$, при которых $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$.

  *Решение*:

  Знак функции $f$ зависит от знака дискриминанта $\Delta$ уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, соответствующего функции $f$.

  Запишем функцию $f$ в каноническом виде: $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right]$.

**1)** *Случай* $\Delta < 0$

Знак значений функции $f$ совпадает со знаком коэффициента $a$ для любого $x \in \mathbb{R}$ (рис. 32).

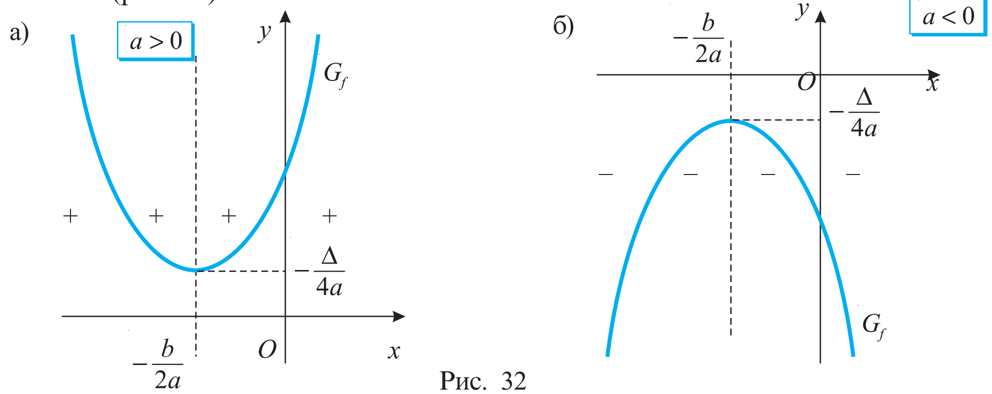



Рис. 32

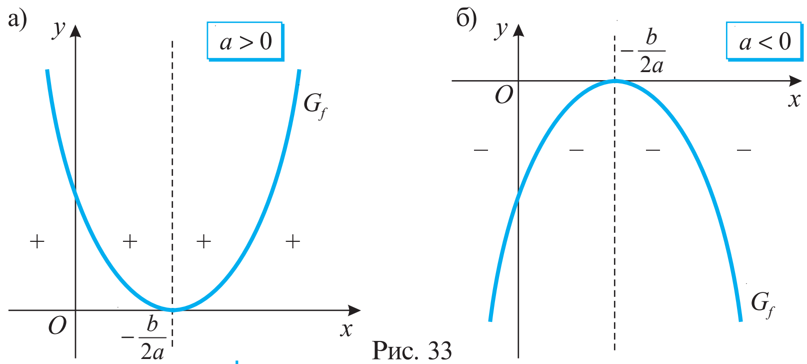



Рис. 33

**2)** *Случай* $\Delta = 0$

Знак значений функции $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ совпадает со знаком коэффициента $a$ для любого $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ (рис. 33).

**3)** *Случай* $\Delta > 0$

Знак значений функции $f$, нули которой $x_1 < x_2$, совпадает со знаком коэффициента $a$ для любого $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, и противоположен знаку коэффициента $a$ для любого $x \in (x_1, x_2)$ (рис. 34).

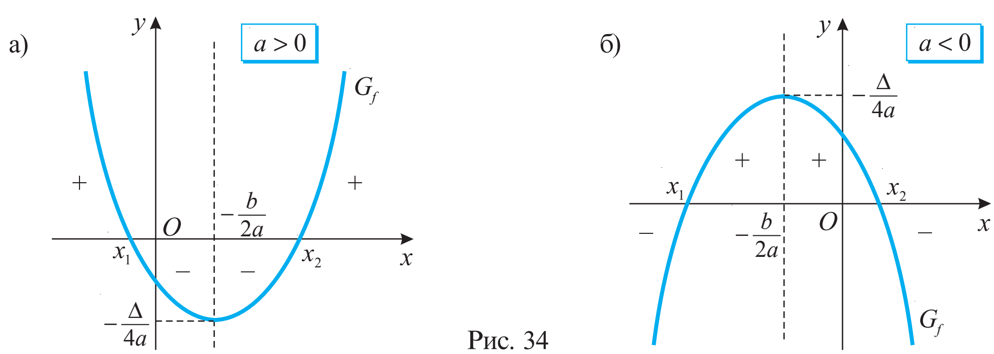



Рис. 34

**Замечание** Знак функции II степени и ее промежутки монотонности проще определить при помощи графика этой функции.

**Задание** Даны функции: а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x - 2$; б) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 2x - 3$. Найдите нули функций $f$ и $g$.

### *3.4.6. График функции II степени*

**Исследуем**

Для построения графика функции II степени поступаем следующим образом:

① Находим координаты точек пересечения графика $G_f$:

а) с осью $Ox$: решаем уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, соответствующее функции $f$; решения уравнения являются нулями функции $f$;

б) с осью $Oy$: вычисляем $f(0)$.

② Находим координаты вершины параболы: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ и ось симметрии $x = -\frac{b}{2a}$ параболы.

③ Составляем таблицу, называемую ***таблицей изменений*** функции $f$. Таблица содержит абсциссы точек пересечения графика $G_f$ с осями $Ox$ и $Oy$ (при условии, что такие точки существуют), абсциссы вершины параболы и другие значения аргумента.

④ Заполняя таблицу изменений, одновременно определяем промежутки монотонности функции, ее точки экстремумов и экстремумы, а также поведение графика $G_f$ на $-\infty$ и соответственно на $+\infty$.

⑤ Строим график функции.

**Замечание** Символом $\searrow$ обозначим убывающую функцию, символом $\nearrow$ обозначим возрастающую функцию.

**Применяем** • Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + 3$.

а) Постройте график функции $f$.

б) Исследуйте функцию на монотонность, определите знак и экстремумы функции $f$.

*Решение*:

а) ① Находим координаты точек пересечения графика $G_f$ с осью $Ox$: решаем уравнение $x^2 - 2x + 3 = 0$, соответствующее функции $f$; так как $\Delta = -8 < 0$, то график $G_f$ не пересекает ось $Ox$.

Находим координаты точки пересечения графика $G_f$ с осью $Oy$: $f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3$; следовательно, график $G_f$ пересекает ось $Oy$ в точке $(0, 3)$.

② Находим координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_0 = f(x_0) = 2$. Итак, точка $V(1, 2)$ – вершина параболы. Следовательно, прямая, заданная уравнением $x = -\frac{b}{2a} = 1$, является осью симметрии графика $G_f$.

③–④ Составляем таблицу изменений функции $f$:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = x^2 - 2x + 3$ | $+\infty$ | 6 | 3 | 2 | 3 | 6 | $+\infty$ |
| Вывод | | | | min | | | |

⑤ Строим график функции $f$ – параболу $G_f$ (рис. 35).

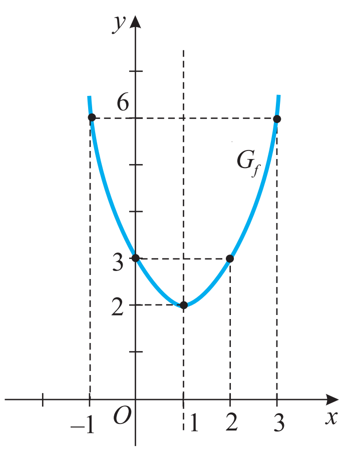


Рис. 35

б) Функция $f$ принимает положительные значения для любого $x \in \mathbb{R}$.

Функция $f$ строго убывает на промежутке $(-\infty, 1]$ и строго возрастает на промежутке $[1, +\infty)$.

Точка $x = 1$ является точкой минимума функции $f$ и $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f(1) = 2$.

## Упражнения и задачи

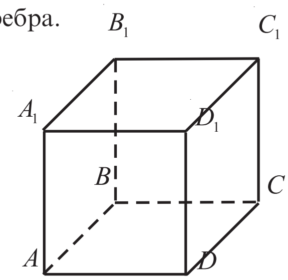
### Закрепляем знания

**1.** Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Найдите:
а) значения $x$, при которых функция $f$ принимает значения: 36; –4; 0,25; 100; 7; –1,6;
б) значения функции $f$ при следующих значениях $x$: 1,4; – 0,2; – 3; 0,4; 2; $\sqrt{5}$; 7,(2); $-4\sqrt{3}$.

**2.** *Исследуйте!* Даны точки:
а) $A(2; -2)$; б) $B(1; 2)$; в) $C(-1; 0,5)$; г) $D(1; -0,5)$; д) $E(0,5; 0,5)$.
Выясните, какие из них принадлежат графику функции:
1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2$;
2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -0,5x^2$;
3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0,5x^2$.

**3.** Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = 3x^2$; б) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$;
в) $f(x) = -1,5x^2$; г) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$.
1) Постройте график функции $f$.
2) Исследуйте свойства функции $f$.

**4.** *Работайте в парах!* а) Найдите функцию, задающую зависимость площади полной поверхности куба от длины его ребра.
б) Постройте график этой функции.
в) Найдите:
1) площадь полной поверхности куба, если известно, что длина его ребра равна: 0,5 см; 1,2 дм; 3 м.
2) длину ребра куба, если известно, что площадь его полной поверхности равна: 16 см$^2$; $8\sqrt{3}$ дм$^2$; 4 м$^2$.




**5.** Впишите такие действительные числа, чтобы точка $A(\square, \square)$ принадлежала графику функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = -x^2$;
в) $f(x) = 3x^2$; г) $f(x) = -2,5x^2$;
д) $f(x) = 3x(x-2)$; е) $f(x) = -0,5x(x+1)$;
ж) $f(x) = x^2 - x - 2$; з) $f(x) = -3x^2 + x + 1$;
и) $f(x) = x^2 + 3x + 5$.

**6.** Даны функции: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2,3x^2$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -4x^2$, $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{3}{4}x^2$.
Найдите: а) экстремумы; б) промежутки монотонности; в) знак функций.

**7.** Найдите (если существуют) нули функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = 16x^2 - 4$; б) $f(x) = 6x^2 + 3$; в) $f(x) = x^2 - 8x + 12$; г) $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$.

**8.** *Работайте в группах!* Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = x^2 - 7x + 12$; б) $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$; в) $f(x) = x^2 - x + 4$;
г) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$; д) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$; е) $f(x) = 9 - x^2$.
1) Постройте график функции $f$.
2) Найдите ось симметрии графика и исследуйте свойства функции $f$.

### Формируем способности и применяем

**9.** *Работайте в группах!* Постройте график и исследуйте свойства функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = x^2 + 3$; б) $f(x) = 2x^2 - 1$; в) $f(x) = 3(x+2)^2$;
г) $f(x) = -2(x-1)^2$; д) $f(x) = 4(x+2)^2 - 6$; е) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$.

**10.** Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = 4,7x^2$; б) $f(x) = -3x^2 + 2$; в) $f(x) = 4(x-1)^2$;
г) $f(x) = -2(x+3)^2$; д) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; е) $f(x) = 3(x-4)^2 + 5$.
Найдите множество значений $E(f)$.

**11.** Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций:

а) $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2,\ g(x) = 3x^2 + 2,\ h(x) = 3x^2 - 4;$

б) $f, g, h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -2x^2,\ g(x) = -2(x+1)^2 + 3,\ h(x) = -2(x-3)^2 - 4.$

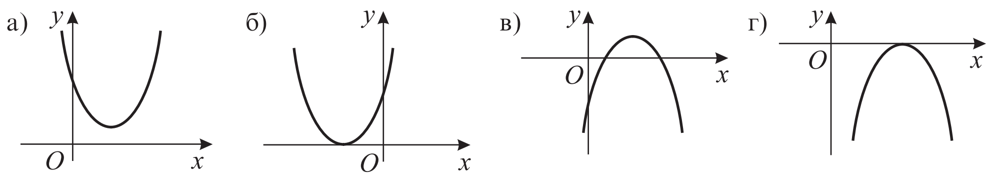
Что вы заметили?

**12.** ***Работайте в парах!*** Дана таблица изменений функции $f$:

| $x$ | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $3{,}5$ | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ | $+\infty$ | 18 | 10 | 0 | –2,25 | 0 | $+\infty$ |
| Вывод | | | | | min | | |

Постройте график функции $f$.

**13.** Дан график функции II степени:

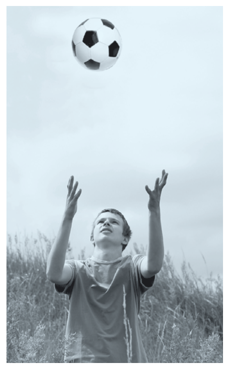



Найдите знаки коэффициента $a$ и дискриминанта $\Delta$ уравнения, соответствующего функции, заданной графически.

**14.** Поставьте один из знаков <, >, =, чтобы получить истинное высказывание:

1) Если график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$ – парабола с ветвями вниз и вершиной на оси $Ox$, то $a$ ▢ 0, D ▢ 0.

2) Если график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$ – парабола с ветвями вверх и вершиной на оси $Oy$, то $a$ ▢ 0, D ▢ 0.



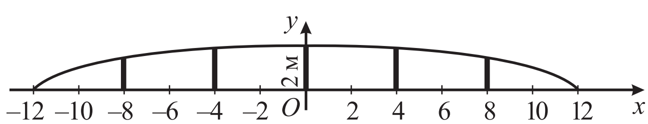
**15.** Пусть $h$ – высота (в метрах), на которой находится брошенный вверх мяч, $t$ – время (в секундах) нахождения мяча в движении. Зависимость переменной $h$ от переменной $t$ задается формулой: $h = 24t - 4{,}9t^2$.

а) Какова максимальная высота, которой достигает мяч?

б) За какое время мяч поднимается, за какое – падает?

в) Через сколько секунд после подбрасывания мяч упадет на землю?

**16.** Перила моста имеют форму дуги параболы. Высота перил 2 м, а длина соответствующей хорды – 24 м. Перила опираются на 5 вертикальных столбов, зафиксированных в точках, делящих хорду на части равной длины. Найдите высоту этих столбов.




**17.** Постройте график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x) = (x+2)(x-4);$ б) $f(x) = -6x(x+1);$ в) $f(x) = -2(x-3)(5-x);$

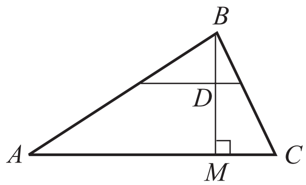
г) $f(x) = 5(x-1)(x-3);$ д) $f(x) = -(x-3)(x-4);$ е) $f(x) = 4x(x-2).$

**18.** *Работайте в парах!* Парабола 1) $y=3x^2$; 2) $y=-0{,}5x^2$ была смещена на 2 единицы вдоль оси $Ox$ и на 3 единицы вдоль оси $Oy$.

а) Задайте функцию $g$, графиком которой является парабола, полученная в результате заданных преобразований. Сколько таких функций можно задать?

б) Постройте график $G_g$ для каждой из полученных функций.

**19.** *Исследуйте!* Длина стороны $AC$ треугольника $ABC$ равна $a$, а высота, проведенная к этой стороне, равна $h$. Через точку $D$ высоты $BM$ проведена прямая, параллельная стороне $AC$. Задайте площади полученных фигур в виде функций, зависящих от аргумента $x$, где $x=BD$.




**20.** Найдите, пользуясь графиками, а затем аналитически, точки пересечения графиков функций:

а) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-2x^2-x+4$, и $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x+2$;

б) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x^2$, и $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x+3$.

**21.** Дана функция $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x+4)^2-1$.

а) Постройте график функции $f$.

б) Найдите ось симметрии графика функции $f$.

в) Исследуйте свойства функции $f$.

**22.** Пусть $h$ – высота (в метрах), на которой находится акробат во время прыжка, а $x$ – расстояние (в метрах), преодоленное им во время прыжка.

Зависимость переменной $h$ от переменной $x$ выражается формулой $h(x)=-0{,}75x^2+3x$.

а) Постройте график функции $h$ для $x\in[0;\ 4]$.

б) Какой максимальной высоты может достичь акробат во время прыжка?

## Развиваем способности и творим

**23.** (EG, 2022) Дана функция $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=mx^2+2x+m,\ m\neq 0$. Найдите действительные значения $m$, при которых график функции $f$ является параболой с ветвями вниз и с вершиной, принадлежащей оси абсцисс.

**24.** Найдите значения действительного параметра $a$, при которых функция $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ имеет нули:

а) $f(x)=ax^2+7$; б) $f(x)=ax^2-4$; в) $f(x)=x^2+a$; г) $f(x)=2x^2-a$.

**25.** При каких значениях коэффициентов $b$ и $c$ вершина параболы $y=x^2+bx+c$ находится в точке $V(-3;\ 6)$?

**26.** Задайте функцию $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a, b, c\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, если известно, что ее график проходит через точки $A(-2,\ 0)$, $B(1,\ 6)$ и ее максимум равен 6.

**27.** Приведите и решите примеры, подобные заданиям 13, 15, 16, 18, 21, 23.

**28.** Постройте график функции $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2-9, & \text{если } x\geq 3, \\ 3-x, & \text{если } x<3; \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} 4-x^2, & \text{если } x>0, \\ x-2, & \text{если } x\leq 0. \end{cases}$

*Задача для чемпионов* **29.** Постройте график функции $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=x^2-6|x|-7$;

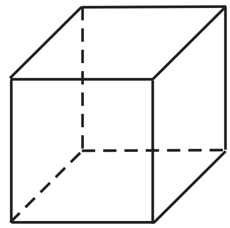
б) $f(x)=x^2-5|x+4|-26$;

в) $f(x)=|x^2-3x+2|$.

## § 4. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

*Исследуем*

- Дан куб с ребром $a$. Найдите функцию, задающую зависимость объема куба от длины его ребра.



*Решение*:

Объем куба вычисляется по формуле $V = a^3$. Следовательно, зависимость объема куба от длины его ребра задается функцией
$g: (0, +\infty) \to (0, +\infty),\ g(x) = x^3$.
Эта функция приводит к функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.

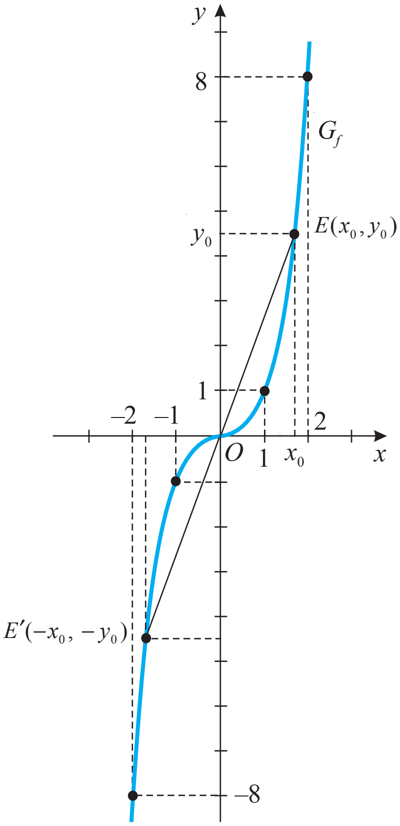



Рис. 36

- Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.

а) Постройте график функции $f$.

б) Исследуйте свойства функции $f$.

*Решение*:

а) Составим таблицу значений функции $f$ для значения нуль и для некоторых отрицательных и положительных значений аргумента $x$:

| $x$ | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y = x^3$ | 8 | 1 | 0 | 1 | 8 |

График, построенный по точкам, изображен на рисунке 36.

б) ***Свойства функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$***

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Значит, $x = 0$ – нуль функции $f$.

2° Функция $f$ строго возрастает на множестве $\mathbb{R}$.

3° Функция $f$ принимает отрицательные значения при $x \in (-\infty, 0)$ и положительные – при $x \in (0; +\infty)$.

4° Из того,что $f(-x) = -f(x)$, следует, что точка $E(x_0, y_0) \in G_f$, тогда и точка $E'(-x_0, -y_0) \in G_f$. Значит, график $G_f$ симметричен относительно начала координат $O(0, 0)$ (рис. 35).

График функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$, называется ***кубической параболой***.

5° Функция $f$ не имеет экстремумов.

*Применяем*

- Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$. Найдите значения $x$, при которых функция $f$ принимает значение: а) $-64$; б) $\frac{27}{8}$; в) 125.

*Решение*:

а) $x^3 = -64 \Leftrightarrow x = -4$; б) $x^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$; в) $x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 5$.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Даны точки:

а) $A(-2; 8)$; б) $B(3; 27)$; в) $C\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{8}\right)$; г) $D(0; 1)$; д) $E(-\sqrt{3}; -3\sqrt{3})$.

Какие из них принадлежат графику функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$?

**2.** Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$. Найдите:

а) значения $x$, при которых $f(x)$ равно: 125; –64; –16; 3,375; –1; 0,001; –343.

б) значения $f$ при следующих значениях $x$: 0,2; $-\frac{2}{5}$; 1,3; $2\sqrt{2}$; 10; 2,(5).

### Формируем способности и применяем

**3.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ графическим методом уравнение:
а) $x^3 = x - 1$; б) $x^3 = -2x$; в) $x^3 = 3x + 2$; г) $x^3 = 2 - x$.

**4.** *Работайте в парах!* 1) Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций:
а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -x^3; 2$
б) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 + 1$;
в) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 - 2$.
2) Найдите знаки функций $f$ и $g$. 3) Найдите экстремумы функций $f$ и $g$.

### Развиваем способности и творим

**5.** Найдите экстремумы функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
а) $f(x) = x^3 - 2$; б) $f(x) = (x+2)^3$; в) $f(x) = 2(x-8)^2 + 1$; г) $f(x) = -5x + 1$.

**6.** Постройте график функции: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x \le 0, \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

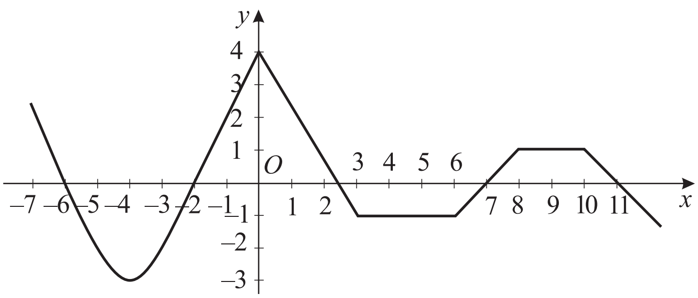
**7.** Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|^3$ и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x^3|$.

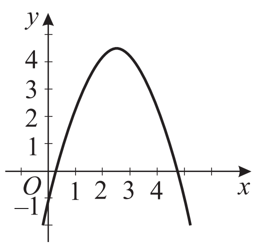
## Упражнения и задачи на повторение

### Закрепляем знания

**1.** Дана функция:
а) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3 - 2x$; б) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$; в) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\frac{2}{x}$;
г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$; д) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x + 1$; е) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.
Какие из заданных точек принадлежат графику $G_f$?
1) $A(-1; 1)$; 2) $B(1; 1)$; 3) $C(0; 1)$; 4) $O(0; 0)$;
5) $D(1; -2)$; 6) $E(0; 3)$; 7) $F(4; 2)$; 8) $M(-2; 1)$.

**2.** *Работайте в парах!*
Исследуйте график $G_f$. Найдите:
а) нули функции $f$;
б) промежутки монотонности функции $f$;
в) промежутки знакопостоянства функции $f$;
г) точки экстремума и экстремумы функции $f$.




**3.** (EG, 2023) На рисунке изображен график функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \ne 0$. Впишите в рамку одно из слов – *положительное* или *отрицательное*, – так, чтобы получилось истинное высказывание.
«Максимум функции $f$ есть $\boxed{\phantom{xxxxxx}}$ число».

### Формируем способности и применяем

**4.** Дано множество $P = \{a, b, c, d\}$. Задайте в виде диаграмм не менее четырех функций, определенных на множестве $P$ со значениями в множестве $P$.

**5.** Запишите формулу, задающую зависимость длины окружности от ее радиуса. Является ли эта зависимость прямой пропорциональностью?

**6.** У Марианны 15 леев. После того, как она купила $x$ почтовых марок по 0,5 лея, у нее осталось $y$ леев.
а) Задайте формулой зависимость $y$ от $x$.
б) Найдите область определения полученной функции.

**7.** Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-1{,}5x+b$, для $b\in\{-2,\ 0,\ 2,\ 5\}$. Что вы заметили?

**8.** Постройте график и определите свойства функции $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$, если:

а) $f(x)=-\dfrac{4}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{2x}$; в) $f(x)=\dfrac{7}{x}$; г) $f(x)=-\dfrac{1}{5x}$.

**9.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ графическим методом уравнение:

а) $\sqrt{x}=3x-2$; б) $\dfrac{25}{x}=x$; в) $\dfrac{1}{2x}=2x$; г) $3x^2=5x-2$.

**10.** ***Работайте в парах!*** Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+n$, для $n\in\{-1;\ 0;\ 1;\ 3\}$. Что вы заметили?

**11.** Постройте в одной прямоугольной системе координат графики функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2(x-m)^2$, для $m\in\{-1;\ 0;\ 1;\ 3\}$. Что вы заметили?

**12.** Температура воды в электрочайнике в данный момент – 10°C. За каждую минуту нагревания температура растет на 4°C, пока не достигает 100°C. Задайте формулой зависимость температуры воды (в градусах Цельсия) от времени нагрева $t$ (в минутах). Постройте график этой зависимости. Используя график, определите:

а) температуру воды через:
1) 5 минут; 2) 10 минут;
3) 15 минут; 4) 20 минут от начала нагревания.

б) через сколько минут температура воды достигла:
1) 50 °C; 2) 70 °C; 3) 100 °C?

**13.** ***Работайте в группах!*** Постройте график и исследуйте свойства функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, если:

а) $f(x)=1-x-x^2$; б) $f(x)=x^2-6x+9$; в) $f(x)=6x-1-9x^2$; г) $f(x)=3x^2+4x+2$.

**14.** Определите ось симметрии графика и экстремумы функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=5x^2+3$; б) $f(x)=x^2-4$; в) $f(x)=-3(x+2)^2$; г) $f(x)=6x^2-x+3$.

**15.** Задайте формулой функцию II степени, которая:

а) строго возрастает на промежутке $(-\infty,4]$ и строго убывает на промежутке $[4;+\infty)$;

б) строго убывает на промежутке $(-\infty,-2]$ и строго возрастает на промежутке $[-2;+\infty)$.

**16.** ***Исследуйте!*** Параболу – график функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x^2$, сдвинули на 2 единицы вдоль оси $Oy$ и на 3 единицы вдоль оси $Ox$.

а) Задайте формулой функцию $g$, графиком которой является парабола, полученная в результате преобразования графика функции $f$. Сколько функций $g$ можно задать?

б) Постройте график каждой из функций, полученных в пункте а).

в) Исследуйте свойства каждой из функций, полученных в пункте а).

**17.** Найдите координаты точек пересечения с осями $Ox$ и $Oy$ графика функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=2x^2-x-15$; б) $f(x)=-3x^2-2x+1$.

**18.** Приведите примеры применения изученных функций в спорте.

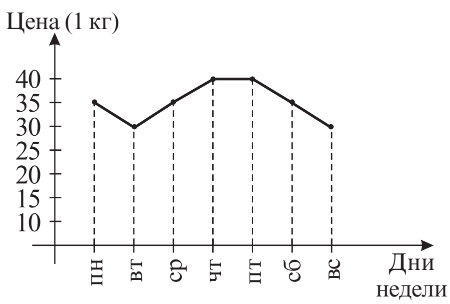
**19.** На рисунке изображен график изменения стоимости (в леях) 1 кг кизила на рынке за неделю. Определите:

а) Сколько стоил 1 кг кизила в четверг? А в воскресенье?

б) В какие дни цена была самой высокой? Какова была эта цена?

в) В какие дни цена была самой низкой? Какова была эта цена?

г) В какие дни цена не менялась?



**20.** ***Работайте в парах!*** Футболист бьет по воротам. Траектория движения мяча может быть описана функцией, заданной формулой $f(x)=-0{,}0125x^2+0{,}5x$, где $x$ – расстояние (в метрах), преодоленное мячом с момента удара, а $y$ – высота (в метрах), которую достигает мяч над футбольным полем.

а) Постройте график функции для $x\in[0;\,30]$.

б) Какова максимальная высота, которой может достичь мяч?

в) Каково максимальное расстояние, преодоленное мячом с момента удара?

**21.** Ученик, торопясь в школу, неплотно закрывает кран (в течении недели). Ежедневно он выходит из дома в 7.30 и возвращается в 14.30. При этом за 1 час из неплотно закрытого крана вытекает 0,5 литров воды.

а) Найдите потери воды за время отсутствия ученика в течение 5 дней.

б) Определите стоимость потраченной воды (1 м³ – 15,3 лея; 1 л = 0,001 м³).

в) Постройте график зависимости потраченной воды (л) от времени (ч).

## Развиваем способности и творим

**22.** Задайте формулой функцию I степени, для которой выполняется условие:

а) $f(2+x)=-5x+3$ для любого $x\in\mathbb{R}$;  б) $f(3x-1)=1-2x$ для любого $x\in\mathbb{R}$.

**23.** Постройте график функции:

а) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}3x^2-2, & \text{если } x\le 1,\\ \sqrt{x}, & \text{если } x>1;\end{cases}$

б) $f\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*,\ f(x)=\begin{cases}-x^3+9, & \text{если } x\le -2,\\ -\dfrac{2}{x}, & \text{если } -2<x<2,\\ -0{,}5x, & \text{если } x\ge 2.\end{cases}$

**24.** Пусть $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2+bx+c$.
Найдите коэффициенты $b$ и $c$, если известно, что вершина параболы $G_f$ находится в точке $A(-2;\,4)$.

**25.** Задайте формулой функцию II степени, если известно, что ее график проходит через точки:

а) $A(-3;\,0),\ B(2;\,5)$, и ее максимум равен 5;

б) $A(0;\,2),\ B(-1;\,4)$, и ее минимум равен 3.

**26.** Постройте график функции:

а) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3|x|-4$;  б) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|0{,}2x+5|$;  в) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=|3x^2-x-2|$.

**27.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ графическим методом уравнение:

а) $x^3=x^2-x+1$;  б) $2x=x^3-4$.

**28.** Дана функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x^2-x+1$. При каких действительных значениях $a$ справедливо соотношение $f(a)=-3f(-a)+6$?

**29.** Найдите наименьшее и наибольшее значение функции $f\colon D\to\mathbb{R}$ ($D$ – область определения функции):

а) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$;  б) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$.

**30.** (EG, 2021) Дана функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-mx+m^2,\ m\ne 0$. Найдите действительные значения $m$, при которых функция $f$ монотонно возрастает, а график функции $f$ пересекает ось $Oy$ в точке с ординатой, равной 4.

***Задача для чемпионов*** **31.** Постройте график функции:

а) $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x+x^3$;  б) $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2-x^3$.

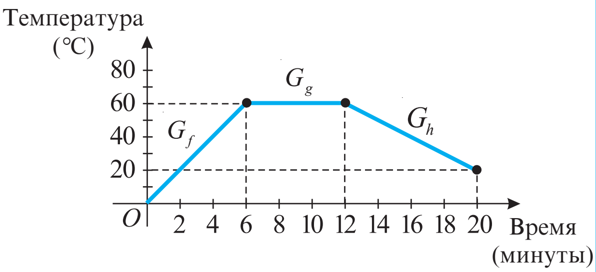
**32.** ***Работайте в группах!*** **Проект STREAM:** *Функции в искусстве.*

*Время выполнения работы*: 45 минут

# Итоговый тест

## Вариант I

**1.** На рисунке изображен график изменения температуры воды в течение 20 минут:




а) Отметьте букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно: «$G_f$ – график возрастающей функции».

**И** **Л**

б) На сколько градусов поднялась температура воды за первые 6 минут?

в) На сколько градусов изменилась температура воды за последние 8 минут?

г) В какой период времени температура воды не менялась?

д) Задайте формулами функции, представленные графиками $G_f$, $G_g$ и $G_h$.

**2.** Найдите действительные значения $x$, при которых функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -(x-4)^2$, и $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{4}{x}$, убывают. Обоснуйте ответ.

**3.** Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 - 5x - 3$.

а) Впишите в рамку один из знаков <, = или >, чтобы высказывание было истинным:

«$f(0)$ $\boxed{\phantom{0}}$ $f(-1)$».

б) Постройте график $G_f$.

в) Найдите $E(f)$.

г) Заполните рамки:

$f \nearrow$ при $x \in \boxed{\phantom{000}}$;

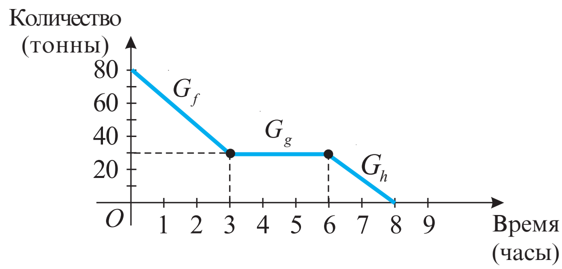
$f \searrow$ при $x \in \boxed{\phantom{000}}$;

$\max\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \boxed{\phantom{000}}$.

д) Приведите пример применения функции II степени в физике.

## Вариант II

**1.** На рисунке изображен график вывоза зерна со склада на протяжении 8 часов:




а) Отметьте букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно: «$G_f$ – график возрастающей функции».

**И** **Л**

б) На сколько тонн уменьшилось количество зерна через три часа?

в) На сколько тонн уменьшилось количество зерна на складе за последние два часа?

г) В какой период времени зерно со склада не вывозилось?

д) Задайте формулами функции, представленные графиками $G_f$, $G_g$ и $G_h$.

**2.** Найдите действительные значения $x$, при которых функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -(x+2)^2$, и $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x) = -\frac{8}{x}$, возрастают. Обоснуйте ответ.

**3.** Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

а) Впишите в рамку один из знаков <, = или >, чтобы высказывание было истинным:

«$f(-2)$ $\boxed{\phantom{0}}$ $f(1)$».

б) Постройте график $G_f$.

в) Найдите $E(f)$.

г) Заполните рамки:

$f \searrow$ при $x \in \boxed{\phantom{000}}$;

$f \nearrow$ при $x \in \boxed{\phantom{000}}$;

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \boxed{\phantom{000}}$.

д) Приведите пример применения функции II степени в повседневной жизни.

Глава

# 4 Уравнения. Системы уравнений

*«Важнейшая миссия цивилизации – научить человека думать».*
Томас Эдисон

## § 1. Уравнения вида $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Повторение и дополнения

### 1.1. Понятие уравнения с одним неизвестным

*Вспомним*

- Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:
  а) $2x-3=5$; б) $x^2+8=0$; в) $0{,}25x(8x+4)+5=2(x^2+0{,}5x+2)+1$.

*Решение*:
а) ОДЗ: $\mathbb{R}$. $2x-3=5 \Leftrightarrow 2x=8 \Leftrightarrow x=4$. $S=\{4\}$.
б) ОДЗ: $\mathbb{R}$. $x^2+8=0 \Leftrightarrow x^2=-8$. $S=\varnothing$.
в) ОДЗ: $\mathbb{R}$. $0{,}25x(8x+4)+5=2(x^2+0{,}5x+2)+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \square = \square \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}$. $S=\mathbb{R}$.

- Даны уравнения $(x-3)(x+1)=0$ и $2x^2-4x-6=0$.
  Равносильны ли эти уравнения?

*Решение*:
ОДЗ обоих уравнений является множество $\mathbb{R}$.
$2(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow x=3$ или $x=-1$. $S_1=\{-1, 3\}$.
Множеством решений уравнения $2x^2-4x-6=0$ является множество $S_2=\{-1; 3\}$.
Следовательно, $(x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow 2x^2-4x-6=0$, поскольку множества их решений равны: $S_1=S_2=\{-1; 3\}$.

**Определение** Равенство вида $A(x)=B(x)$, где $A(x)$, $B(x)$ – выражения от $x$, называется **уравнением с одним неизвестным** $x$.

*Замечание* Уравнения могут быть с несколькими неизвестными. Например, $5x-3y=3$ – уравнение с двумя неизвестными, $3u+2v-5t=0$ – уравнение с тремя неизвестными.

**Определение** Значение неизвестного, обращающее уравнение в истинное высказывание, называется **решением** уравнения.

*Запомните!*
Множество решений уравнения обозначается буквой $S$.
***Решить уравнение*** – значит найти множество его решений.
Уравнение может не иметь решений, может иметь конечное или бесконечное множество решений.

**Запомните!** Как правило, уравнение начинают решать с нахождения его области допустимых значений.

**Определения**

- Множество значений неизвестного (неизвестных), при которых имеют смысл все выражения уравнения, называется **областью допустимых значений** (ОДЗ) этого уравнения.
- Два уравнения с одним неизвестным (с одними и теми же неизвестными) называются **равносильными**, если множества их решений равны.

Между двумя равносильными уравнениями ставится символ $\Leftrightarrow$.

**Задание** Определите, равносильны ли уравнения: а) $x^2+5=0$ и $1+2x^2=0$;
б) $2-3x=4(x+0{,}5)$ и $x^2+4=0$.

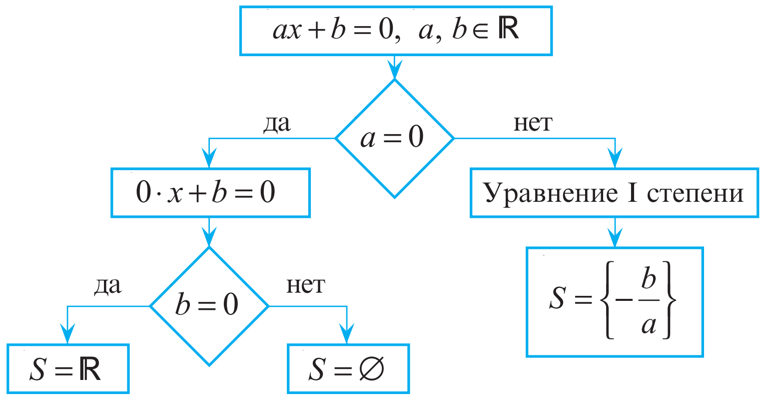
**Запомните!** Равносильные уравнения, которые решаются на некотором множестве (как правило, на ОДЗ исходного уравнения), называются ***равносильными на этом множестве***.

## 1.2. Уравнения I степени с одним неизвестным

- Используя следующие отношения равносильности, основанные на свойствах отношения равенства на множестве действительных чисел, получаем равносильные уравнения:

1. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow B(x)=A(x)$.
2. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)\pm C(x)=B(x)\pm C(x)$, где выражение $C(x)$ имеет смысл для любого $x\in$ ОДЗ исходного уравнения.
3. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)\cdot C(x)=B(x)\cdot C(x)$, где выражение $C(x)$ имеет смысл и $C(x)\neq 0$ для любого $x\in$ ОДЗ исходного уравнения.
4. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow \dfrac{A(x)}{C(x)}=\dfrac{B(x)}{C(x)}$, где выражение $C(x)$ имеет смысл и $C(x)\neq 0$ для любого $x\in$ ОДЗ исходного уравнения.

***Схема (алгоритм) решения уравнения вида $ax+b=0$, $a, b\in\mathbb{R}$***




**Определения**

- Уравнение вида $ax+b=0$, $a, b\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, называется **уравнением I степени с одним неизвестным**.
- Числа $a$, $b$ называются **коэффициентами уравнения**.

Уравнения I степени с одним неизвестным имеет ***единственное решение***: $-\dfrac{b}{a}$.
Следовательно, $S=\left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$.

## 1.3. Уравнения, приводимые к уравнению I степени с одним неизвестным

Некоторые уравнения могут быть приведены к уравнению I степени с одним неизвестным с помощью подстановок или отношений равносильности.

***Пример*** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-2x+3=x(x+2)-5$; б) $\dfrac{2x}{x+3}=\dfrac{5x}{x+3}-9$.

*Решение*:

а) ОДЗ: .

$x^2-2x+3=x(x+2)-5 \Leftrightarrow$ → раскрываем скобки

$\Leftrightarrow x^2-2x+3=x^2+2x-5 \Leftrightarrow$ → применяем отношение равносильности 2

$\Leftrightarrow -4x=-8 \,|:(-4) \Leftrightarrow$ → применяем отношение равносильности 4

$\Leftrightarrow x=2.$

*Ответ*: $S=$ .

б) ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Обозначив $\dfrac{x}{x+3}=t$, получим уравнение I степени $2t=5t-9 \Leftrightarrow 3t-9=0$ с неизвестным $t$, имеющее решение 3. Тогда на ОДЗ имеем: $\dfrac{x}{x+3}=3 \Leftrightarrow x=3(x+3) \Leftrightarrow x=-4{,}5$; $-4{,}5 \in$ ОДЗ.

*Ответ*: $S=\{-4{,}5\}$.

## 1.4. Уравнения I степени с одним неизвестным с параметром (дополнительно)

Уравнения I степени с одним неизвестным могут содержать *параметр*. В таких случаях необходимо исследовать решения уравнения в зависимости от значений параметра.

***Пример*** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $mx-3=2x+5m$, где $m \in \mathbb{R}$.

*Решение*:

ОДЗ: $\mathbb{R}$. $mx-3=2x+5m \Leftrightarrow x(m-2)=5m+3 \Leftrightarrow (m-2)x=5m+3$.

- Если $m=2$, то получим уравнение $0\cdot x=13$, которое не имеет решений.
- Если $m\neq 2$ $(m\in\mathbb{R}\setminus\{2\})$, то получим решение $x=\dfrac{5m+3}{m-2}$.

*Ответ*: При $m=2$, $S=\varnothing$; при $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $S=\left\{\dfrac{5m+3}{m-2}\right\}$.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

1. Назовите уравнения I степени:

а) $2x-1=0$; б) $3(x-1)=5$; в) $\dfrac{1}{x-1}=2$; г) $x^2-x=0$;

д) $3x=0$; е) $6x=-4$; ж) $2x+\dfrac{1}{x}+3=0$; з) $-\sqrt{5}x+2{,}5=0$.

2.  *Исследуйте!* Какой элемент множества $\{-2; -1; 0; 1{,}5; 5\}$ является решением уравнения?

а) $3x-2=x-6$; б) $\dfrac{x+1}{x}=1$; в) $(x+2)(x-5)=0$;

г) $x(x+1{,}5)=0$; д) $\dfrac{2x-1}{x-2}=2$; е) $x(x+1{,}5)(x-5)=0$.

3. Найдите ОДЗ уравнения:

а) $2(x-5)-4=5x+1$; б) $\dfrac{3}{x-5}=4$; в) $x(x+3)=0$.

**4.** *Работайте в парах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x-1=0$;  б) $-\frac{3}{4}x=\frac{1}{5}$;

в) $0{,}5x+4=0$;  г) $3-2x=0$;

д) $1{,}4+2x=0$;  е) $-\frac{5}{7}x-\frac{1}{3}=0$.

**5.** Найдите нуль функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=3x-1$;  б) $f(x)=2-6x$;

в) $f(x)=-\sqrt{19}x$;  г) $f(x)=\sqrt{5}x-2\sqrt{5}$.

**6.** Найдите нуль функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=3x-0{,}5$;  б) $f(x)=-8x+\sqrt{8}$;

в) $f(x)=-0{,}3x-2{,}8$.

## Формируем способности и применяем

**7.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2(x-1)+3(x+2)=5x+4$;

б) $6-3(2-x)+4x=7-x$;

в) $-1{,}4(5-x)+2{,}5(2+x)=-3{,}6+x$;

г) $5+7(1-x)-5x=x-8$.

**8.** *Работайте в парах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ методом подстановки уравнение:

а) $\frac{4}{x-5}=7-\frac{3}{x-5}$;  б) $-\frac{3(x+2)}{x}=\frac{2(x+2)}{x}+5$;

в) $\frac{5t}{t+1}=-\frac{1}{2}+\frac{3t}{t+1}$;  г) $\frac{0{,}5a+1{,}5}{2a}=9-\frac{a+3}{a}$.

**9.** Дополните так, чтобы получить истинное высказывание:

а) $3(x-1)-2x=4 \Leftrightarrow 2x+5=\square-x$;  б) $4x+2(1-x)=\square \Leftrightarrow x-3(x+4)=5-2x$.

**10.** Найдите закономерность и впишите пропущенное число:

| | | |
|---|---|---|
| $-3(1-z)=4z-8$ | $\boxed{30}$ | $2z-3(4-z)=12+z$ |
| $2,(5)t-\frac{2}{3}(t+1)=0$ | $\boxed{?}$ | $\frac{2}{9}(2-t)-4,(6)t=6$ |

**11.** Найдите закономерность и впишите пропущенное число:

| | | |
|---|---|---|
| $2(5-3x)+4x=7-x$ | $\boxed{81}$ | $8-(3-4x)-x=17$ |
| $9\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)-5x=8$ | $\boxed{?}$ | $14-2(x+5)+3x=6$ |

**12.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнения и найдите зашифрованное слово.

| Уравнение | Р | А | Б | О | В |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x-5=10$ | $-5$ | $\frac{5}{3}$ | $5$ | $3$ | $-\frac{5}{3}$ |
| $-x+6{,}5=x+0{,}5$ | $3$ | $7$ | $0$ | $\frac{7}{2}$ | $-\frac{7}{2}$ |
| $12-x=3(x-4)$ | $0$ | $6$ | $12$ | $-6$ | $-3$ |
| $\sqrt{3}\cdot x=0$ | $-\sqrt{3}$ | $2$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | $0$ |
| $x^2-2=x(x-0{,}2)$ | $2$ | $0{,}2$ | $-10$ | $10$ | $1$ |

## Развиваем способности и творим

**13.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(3x-1)^2-4(5x+6)=9(x^2-x+1)+2$;  б) $\frac{1}{2}(1-5x)+4(x^2-4)-\frac{3}{4}=\frac{5}{8}(2-x)+4x^2-3x$;

в) $2x^3-x+3=5(x+\frac{2}{5}x^3-2)-4x$;  г) $(4x-1)(4x+1)-5x=-4(x-4x^2)-7(x+3)$;

**14.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|x|=2x+1$;  б) $|2-x|=-0{,}5x+4$;  в) $|2x+1|=-x$;  г) $\frac{2}{3}|5t-1|=\frac{1}{3}t+2$.

**15.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение с действительным параметром $m$:

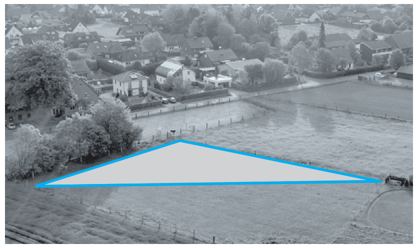
а) $mx-6=3x+4$;  б) $3-mx=2m(x+1)-1$;

в) $mx+m+3=x+4$;  г) $2(mx+x)-3(x+4)=5-m$.

**16.** Составьте задания, подобные упражнению **12**, и предложите их одноклассникам для решения.

# § 2. Уравнения II степени с одним неизвестным

## 2.1. Формулы решений



Необходимо оградить участок земли, имеющий форму прямоугольного треугольника. Известно, что длина одного из катетов треугольника на 5 м меньше длины гипотенузы, а длина второго катета на 3 м меньше длины первого катета. Найдите длину ограды.

*Решение*:

Пусть $x$ – длина гипотенузы. Тогда $(x-5)$ – длина первого катета, а $(x-8)$ – длина второго катета. По условию задачи, согласно теореме Пифагора, получим уравнение $(x-5)^2+(x-8)^2=x^2 \Leftrightarrow x^2-26x+89=0$, имеющее решения $x_1=13-4\sqrt{5}$, $x_2=13+4\sqrt{5}$.

Делаем вывод, что только число $13+4\sqrt{5}$ удовлетворяет условию задачи. (Обоснуйте, почему число $13-4\sqrt{5}$ не удовлетворяет условию задачи.) Следовательно, длина гипотенузы равна $(13+4\sqrt{5})$ м. Тогда длины катетов равны $(5+4\sqrt{5})$ м и $(8+4\sqrt{5})$ м. Значит, длина ограды равна $(26+12\sqrt{5})$ м.

*Ответ*: $(26+12\sqrt{5})$ м.

Уравнение $x^2-26x+89=0$ является уравнением II степени с одним неизвестным.

***Вспомним***

**Определения**

- Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, называется **уравнением II степени** (или **квадратным уравнением**) **с одним неизвестным**.
- Числа $a$, $b$, $c$ называются **коэффициентами уравнения** II степени (число $c$ называется еще **свободным членом**), $x$ – **неизвестное уравнения**.

Множество решений уравнения обозначают буквой $S$.

***Решить уравнение*** – значит найти множество его решений.

***I. Неполные уравнения II степени***

| **1.** $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$ | **2.** $a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$ | **3.** $a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0$ |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{ax^2+bx=0}$<br>$ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x(ax+b)=0.$<br>$S=\left\{0; -\dfrac{b}{a}\right\}.$ | $\boldsymbol{ax^2+c=0}$<br>$S=\varnothing$, если $a\cdot c>0$;<br>$S=\left\{-\sqrt{-\dfrac{c}{a}};\ \sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right\}$, если $a\cdot c<0$. | $\boldsymbol{ax^2=0}$<br>$ax^2=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0.$<br>$S=\{0\}.$ |

***Применяем***

- Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $-x^2+0{,}5x=0$; б) $\sqrt{2}x^2+1=0$; в) $-2x^2+5=0$; г) $\sqrt{5}x^2=0$.

*Решение*:

а) $-x^2+0{,}5x=0 \Leftrightarrow x(x-0{,}5)=0 \Leftrightarrow x=0$ или $x=0{,}5$. *Ответ*: $S=\{0; 0{,}5\}$.

б) $\sqrt{2}x^2+1=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2=-1$. *Ответ*: $S=\varnothing$.

в) $-2x^2+5=0\,|\cdot(-1) \Leftrightarrow$ ______ $\Leftrightarrow x=$ ______ или $x=$ ______. *Ответ*: $S=$ ______.

г) $\sqrt{5}x^2=0 \Leftrightarrow x=$ ______. *Ответ*: $S=$ ______.

**Запомните!**

Разделив коэффициенты любого уравнения II степени $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0,$ на $a$, получим равносильное уравнение $x^2+px+q=0$, называемое ***приведенным уравнением II степени***, где $p=\frac{b}{a}$, а $q=\frac{c}{a}$.

***II. Уравнение II степени общего вида: $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$***

Существование и количество решений уравнения II степени зависят от знака дискриминанта $\Delta=b^2-4ac$ или $\Delta_1=\frac{p^2}{4}-q$.

| $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ | | | $x^2+px+q=0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\Delta=b^2-4ac$ | | | $\Delta_1=\frac{p^2}{4}-q$ | | |
| $\Delta>0$ | $\Delta<0$ | $\Delta=0$ | $\Delta_1>0$ | $\Delta_1<0$ | $\Delta_1=0$ |
| $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ | Не имеет решений на $\mathbb{R}$. | $x=-\frac{b}{2a}$ | $x_1=-\frac{p}{2}-\sqrt{\Delta_1}$, $x_2=-\frac{p}{2}+\sqrt{\Delta_1}$ | Не имеет решений на $\mathbb{R}$. | $x=-\frac{p}{2}$ |
| $S=\left\{\frac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$ | $S=\varnothing$ | $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ | $S=\left\{-\frac{p}{2}\mp\sqrt{\Delta_1}\right\}$ | $S=\varnothing$ | $S=\left\{-\frac{p}{2}\right\}$ |

**Применяем**

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $2x^2-3x-2=0$; б) $x^2-11x+30=0$.

*Решение*:

а) ОДЗ: $\mathbb{R}$. $\Delta=b^2-4ac=25$.

$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2}$; $x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\cdot 2}=2$.

*Ответ*: $S=\{-0{,}5;\ 2\}$.

б) ОДЗ: $\mathbb{R}$. $\Delta_1=\frac{p^2}{4}-q=\frac{1}{4}$.

$x_1=\frac{\square}{\square}-\frac{\square}{\square}=\square$; $x_2=\frac{\square}{\square}+\frac{\square}{\square}=\square$.

*Ответ*: $S=\{5;\ 6\}$.

**Замечание**

В некоторых уравнениях II степени коэффициент $b$ – четное число, то есть $b=2k,\ k\in\mathbb{Z}^*$. Тогда эти уравнения имеют вид $ax^2+2kx+c=0,\ a\neq 0$.
Дискриминантом таких уравнений является $\Delta=(2k)^2-4ac=4(k^2-ac)$.
Следовательно, формулы их решений записываются так:

$$x_1=\frac{-k-\sqrt{k^2-ac}}{a},\quad x_2=\frac{-k+\sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Обозначив $\Delta_1=k^2-ac$, формулы решений запишем так:

$$x_1=\frac{-k-\sqrt{\Delta_1}}{a},\quad x_2=\frac{-k+\sqrt{\Delta_1}}{a}.$$

**Применяем**

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $2x^2-8x+3=0$.

*Решение*:

ОДЗ: $\mathbb{R}$. Здесь $a=2,\ c=3,\ b=-8=2\cdot(-4)$. Тогда: $k=-4,\ \Delta_1=k^2-ac=16-6=10$.

Следовательно, $x_1=\frac{-(-4)-\sqrt{10}}{2}=2-0{,}5\sqrt{10}$, $x_2=\frac{\square+\sqrt{\square}}{2}=\square+\square$.

*Ответ*: $S=\{2-0{,}5\sqrt{10};\ 2+0{,}5\sqrt{10}\}$.

## 2.2. Соотношения между решениями и коэффициентами

***Вспомним***

**Теорема Виета**

Если действительные числа $x_1$ и $x_2$ – решения уравнения

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0, \qquad (1)$$

то:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \qquad (2)$$

Если действительные числа $x_1$ и $x_2$ – решения уравнения

$$x^2+px+q=0, \qquad (3)$$

то:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases} \qquad (4)$$

С помощью соотношений Виета (2), (4) решения некоторых уравнений II степени с одним неизвестным могут быть определены без непосредственного решения самих уравнений.

***Применяем***

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $2x^2-3x-2=0$; б) $x^2-7x+12=0$.

*Решение*:

а) Найдем два действительных числа $x_1, x_2$ таких, что выполняются условия $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=-1$ и $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}$. Подбором находим $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=2$.

*Ответ*: $S=\{-0{,}5;\ 2\}$.

б) Найдем два действительных числа $x_1, x_2$ таких, что выполняются условия $x_1\cdot x_2=q=\square$ и $x_1+x_2=-p=\square$. Подбором находим $x_1=3$, $x_2=4$.

*Ответ*: $S=\{3;\ 4\}$.

***Вспомним***

**Теорема, обратная теореме Виета**

Если действительные числа $x_1$ и $x_2$ таковы, что выполняются условия (2), то $x_1, x_2$ – решения уравнения (1).

Если действительные числа $x_1$ и $x_2$ таковы, что выполняются условия (4), то $x_1, x_2$ – решения уравнения (3).

***Замечание***

Применяя теорему, обратную теореме Виета, можно составить уравнение II степени, если известны его решения $x_1$ и $x_2$.

***Применяем***

• Составьте уравнение II степени с одним неизвестным по его решениям $x_1=-5$, $x_2=2$.

*Решение*:

Так как $-5+2=-3=-p$ и $(-5)\cdot 2=-10=q$, получаем уравнение $x^2+3x-10=0$.

## 2.3. Уравнения, приводимые к уравнениям II степени с одним неизвестным

Некоторые более сложные уравнения могут быть сведены к уравнениям II степени методом введения вспомогательного неизвестного.

Например, уравнение вида $ax^4+bx^2+c=0$, $a\neq 0$, называемое ***биквадратным уравнением***, решают подстановкой $x^2=t$, где $t\geq 0$. В итоге данное уравнение сводится к уравнению II степени относительно $t$: $at^2+bt+c=0$, $a\neq 0$. Решаем это уравнение, а затем – уравнение (5) относительно $x$, и таким образом находим решения исходного уравнения.

**Применяем** • Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x^4 - x^2 - 1 = 0$; б) $(x^2 - 3x)^2 + 3(x^2 - 3x) - 28 = 0$.

*Решение*:

а) ОДЗ: $\mathbb{R}$. Пусть $x^2 = t, t \geq 0$. Тогда исходное уравнение сводится к уравнению $2t^2 - t - 1 = 0$, с решениями $t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = 1$. Уравнение $x^2 = -\frac{1}{2}$ не имеет действительных решений, а решениями уравнения $x^2 = 1$ являются $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

*Ответ*: $S = \{-1; 1\}$.

б) ОДЗ: $\mathbb{R}$. Обозначим $x^2 - 3x = z$. Получим уравнение II степени $z^2 + 3z - 28 = 0$, имеющее решения $z_1 = -7$, $z_2 = 4$. Решим на ОДЗ уравнения $x^2 - 3x = -7$ и $x^2 - 3x = 4$. Уравнение $x^2 - 3x + 7 = 0$ не имеет действительных решений. Уравнение $x^2 - 3x - 4 = 0$ имеет решения $x_1 = -1$, $x_2 = 4$.

*Ответ*: $S = \{-1; 4\}$.

## 2.4. Разложение выражений вида $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, на множители

**Вспомним**

> Если $a \neq 0$ и $\Delta \geq 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ (5), где $x_1$ и $x_2$ – действительные решения уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

**Применяем** • Разложите на множители выражение $2x^2 - 3x - 2$.

*Решение*:

Уравнение $2x^2 - 3x - 2 = 0$ имеет решения $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 2$.

Следовательно, $2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$.

## 2.5. Уравнения II степени с одним неизвестным с параметром (дополнительно)

Уравнения II степени с одним неизвестным могут содержать *параметр*. В таких случаях необходимо исследовать существование решений уравнения в зависимости от значений параметра.

• Найдите значения действительного параметра $m$, при которых уравнения $x^2 + mx + 4 = 0$ и $x^2 + 4x + m = 0$ имеют общее решение.

*Решение*:

Пусть $x_1$ – общее решение данных уравнений.

Подставив $x = x_1$, получим $x_1^2 + mx_1 + 4 = 0$ и $x_1^2 + 4x_1 + m = 0$.

Выполнив вычитание, получим $x_1(m - 4) + 4 - m = 0 \Leftrightarrow (m - 4)x_1 = m - 4$.

При $m = 4$ уравнения идентичны: $x_1^2 + 4x_1 + 4 = 0$. Общее решение $x_1 = -2$.

При $m \neq 4$ находим решение $x_1 = 1$. Подставив $x_1 = 1$ в одно из уравнений, находим $m = -5$. Тогда получим уравнения $x^2 - 5x + 4 = 0$ и $x^2 + 4x - 5 = 0$, имеющие решения $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ и соответственно, $x_3 = 1$, $x_4 = -5$.

Итак, при $m = 4$ уравнения имеют общее решение $x = -2$, а при $m = -5$ их общее решение $x = 1$.

*Ответ*: $m \in \{-5; 4\}$.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

1. *Исследуйте!* Даны уравнения: а) $5x^2 - x - \sqrt{2} = 0$; б) $3{,}4x^2 - x + 1 - \sqrt{2} = 0$; в) $(1 - \sqrt{3})x^2 + 7x - 3{,}5 = 0$.
Найдите пропущенное число: а) 5; ___; $-\sqrt{2}$; б) –3,4; $-1$; ___; в) ___; 7; – 3,5.

2. Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $x^2 - 16 = 0$; б) $t^2 - 25 = 0$; в) $5x^2 + 2x = 0$; г) $\sqrt{3}x^2 + 5 = 0$.

**3.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $4x^2+4x+1=0$; б) $5x^2-7x+2=0$; в) $3x^2-2x+1=0$;
г) $-4x^2+6x-5=0$; д) $0{,}1x^2-x-2{,}5=0$; е) $\sqrt{5}x^2+\sqrt{2}x+4=0$.

**4.** *Работайте в группах!* Решите на множестве $\mathbb{Z}$ приведенное уравнение II степени:

а) $x^2-2x+1=0$; б) $x^2-8x+12=0$; в) $x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$;
г) $x^2+1\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}=0$; д) $x^2-3x-4=0$; е) $x^2-\sqrt{3}x+6=0$.

**5.** *Исследуйте!* Не решая уравнение, определите знаки его решений:

а) $3x^2-x-2=0$; б) $x^2+x-12=0$; в) $-t^2+2t+8=0$; г) $u^2-10u+4=0$; д) $2x^2+5x+2=0$.

## Формируем способности и применяем

**6.** *Работайте в парах!* Составьте уравнение II степени по его решениям: а) 1 и 3; б) –4 и 5; в) –1 и –2; г) $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$; д) $2-\sqrt{3}$ и $2+\sqrt{3}$.

**7.** Используя теорему Виета, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $x^2-2x-15=0$; б) $3x^2-x-2=0$; в) $2x^2+x-1=0$; г) $x^2-4x+5=0$.

**8.** Разложите на множители выражение:

а) $x^2-2x-3$; б) $2x^2-x-3$; в) $4x^2-12x+9$.

**9.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\dfrac{x^2-5x}{x-4}=\dfrac{4}{4-x}$; б) $\dfrac{x^2-2x}{x^2-1}=\dfrac{1}{1-x^2}$;
в) $\dfrac{3{,}5x^2}{x+2}=\dfrac{4x+6}{2+x}$.

**10.** Пусть $x_1$ и $x_2$ – решения уравнения:

1) $5x^2+3x-9=0$; 2) $-3x^2-x+1=0$;
3) $2{,}8x^2+2x-3{,}5=0$.

Не решая уравнение, вычислите:

а) $x_1+x_2$; б) $x_1\cdot x_2$; в) $x_1^2+x_2^2$; г) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$.

**11.** Найдите два положительных числа, если известно, что их среднее арифметическое равно 12,5, а их среднее геометрическое – 10.

**12.** Сумма действительного числа с утроенным его обратным числом равна 4. Найдите это число. Сколько решений имеет задача?

**13.** *Работайте в парах!* Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:

а) $\sqrt{3}x^2+4x+\sqrt{3}=0$; б) $\sqrt{3}x^2+2\sqrt{7}x+\sqrt{3}=0$;
в) $(2x+1)^2=(4x+1)^2$.

**14.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ биквадратное уравнение:

а) $x^4-5x^2+4=0$; б) $x^4+5x^2+4=0$;
в) $a^4-a^2-2=0$; г) $2x^4-3x^2+1=0$.

**15.** Решите на множестве $\mathbb{Z}$ уравнение:

а) $x(x-\sqrt{7})=0$; б) $4x^2-4x+1=0$;
в) $\sqrt{11}x^2=0$; г) $-3x^2+x+4=0$.

**16.** *Работайте в парах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнения и упорядочите заданные ниже слова в зависимости от неотрицательных решений соответствующих уравнений (указанных в скобках). Прокомментируйте полученную пословицу.

1) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$; 2) $2x^2-x-1=0$; 3) $x^2-3x-10=0$; 4) $-8x^2-3x+0{,}5=0$; 5) $x(x+\sqrt{15})=0$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| пожнет $\left(\frac{1}{8}\right)$ | посеет (1) | кто $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ | ветер (5) | бурю (0) |

**17.** Найдите нули функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=3x-x^2$; б) $f(x)=-3x^2+x+2$; в) $f(x)=0,(4)x^2-1$; г) $f(x)=4{,}5x^2-2x-1$.

## Развиваем способности и творим

**18.** Разложите на множители выражение: а) $t^4+t^2-2$; б) $t^4-t^2-2$.

**19.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение: а) $x(x-1)(x-2)(x-3)=3$; б) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=3$.

**20.** Используя метод подстановки, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $5x^2+3|x|-9=0$; б) $2x^2-1=|x|(|x|-2)$.

**21*.** Найдите значения действительного параметра $m$, при которых уравнения $2x^2-3x+1=0$ и $3x^2+m(x+2)+1=0$ имеют общее решение.

**22*.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение с действительным параметром $m$:

а) $mx^2-3x-1=0$; б) $(m-2)x^2+x-4=0$; в) $x^2-mx+4=0$.

## § 3. Дробно-рациональные уравнения

В уравнениях а) $3x-5=2(1-x)$, б) $2x+\frac{3x}{x-1}=x+1$, в) $1-\frac{x-1}{x^2-4}=-\frac{2x}{x-2}$, левая и правая части – рациональные выражения, то есть выражения, составленные из чисел и букв с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления. Такие уравнения называются ***рациональными уравнениями***. В уравнениях б), в) и числитель, и знаменатель соответствующего алгебраического отношения содержат неизвестное. Такие уравнения называются ***рациональными уравнениями, содержащими неизвестное в знаменателе***, или ***дробно-рациональными уравнениями***.

Дробно-рациональные уравнения решаем по следующему *алгоритму*:

① Находим ОДЗ заданного уравнения.

② Переносим все выражения в левую часть уравнения.

③ Приводим левую часть уравнения к виду $\frac{A}{B}$.

④ Применяем правило приравнивания к нулю отношения.

⑤ Решаем полученное уравнение ($A = 0$).

⑥ Проверяем, все ли полученные значения удовлетворяют соответствующим условиям, в том числе принадлежат ли они ОДЗ.

⑦ Записываем ответ.

### *Применяем*

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{3x}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

*Решение*:

ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{3x}{x-1}-\frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2}{x^2-1}-\frac{3x}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}=0.$$

$3x^2+2x-1=0$ и $x^2-1\neq 0$.

Уравнение $3x^2+2x-1=0$ имеет решения $x_1=-1,\ x_2=\frac{1}{3}$.

Так как $x_1=-1\notin$ ОДЗ, то это значение не может быть решением исходного уравнения.

$x_2=\frac{1}{3}\in$ ОДЗ.

*Ответ*: $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Некоторые более сложные дробно-рациональные уравнения могут быть сведены к более простым уравнениям, если выполнить различные преобразования или применить метод введения вспомогательного неизвестного.

### *Применяем*

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\frac{2x^2}{x^2-2x+1}+\frac{3x}{x-1}-2=0$.

*Решение*:

ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, так как $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$, и оба отношения левой части уравнения не имеют смысла при $x=1$.

$$\frac{2x^2}{x^2-2x+1}+\frac{3x}{x-1}-2=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{(x-1)^2}+\frac{3x}{x-1}-2=0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+3\left(\frac{x}{x-1}\right)-2=0.$$

Введем вспомогательное неизвестное $t$. Пусть $\frac{x}{x-1}=t$. Получим уравнение $2t^2+3t-2=0$, имеющее решения $t_1=-2,\ t_2=\frac{1}{2}$. (Проверьте!) Для нахождения решения исходного уравнения остается решить уравнения $\frac{x}{x-1}=-2$ и $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}$.

Первое уравнение имеет решение $x_1=\frac{2}{3}$, а второе – решение $x_2=-1$. (Проверьте!)

Значения $x_1=\frac{2}{3}$ и $x_2=-1$ принадлежат ОДЗ. Следовательно, оба эти числа являются решениями исходного уравнения.

*Ответ*: $S=\left\{-1;\ \frac{2}{3}\right\}$.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Выявите дробно-рациональные уравнения:

а) $x-1=3$; б) $x^2-3x+4=0$; в) $\frac{t^2+1}{4}-\frac{t}{3}=\frac{1}{2}$;

г) $\frac{x}{x^2+2}-\frac{1}{x}=0$; д) $\frac{2}{t}-\frac{3}{t+1}=1$; е) $z^2-\frac{3}{z}-2=0$.

**2.** *Исследуйте!* Какие элементы множества $\{-1, 0, 1, 5\}$ являются решениями уравнения?

а) $\frac{x^2}{x-5}=\frac{2x-1}{x-5}$; б) $\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\frac{x+1}{x^2-1}$; в) $\frac{3}{x}=x-2$; г) $\frac{t}{t^2-1}=\frac{t}{t+1}$.

**3.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{1}{x}=2$; б) $-\frac{2}{x}=\frac{1}{3}$; в) $\frac{\sqrt{5}}{2x}=2{,}5$; г) $-\frac{3\sqrt{2}}{7x}=-\frac{1}{7}$.

**4.** Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:

а) $\frac{2}{x-1}=\frac{3}{4}$; б) $-\frac{5}{3x-2}=\frac{1}{2}$; в) $\frac{2x}{1-x}=\frac{2}{5}$; г) $\frac{3x+2}{x+2}=-\frac{1}{2}$.

**5.** *Работайте в парах!* Решите на множестве $\mathbb{Z}$ уравнение:

а) $\frac{2x-1}{x-1}=\frac{5x^2-1}{x-1}$; б) $\frac{x^2+2}{2+x}=\frac{2x-1}{x+2}$; в) $\frac{x(x-1)}{1-3x}=\frac{x^2+4x}{3x-1}$; г) $\frac{x^2}{x^2+5}=\frac{2x(x-3)}{x^2+5}$.

**6.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{2}{2x-5}-\frac{5}{5-2x}=\frac{4}{7}$; б) $\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{3-x}$; в) $\frac{2x^2}{x^2-16}=\frac{3x}{x+4}$.

### Формируем способности и применяем

**7.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{x}{x^2-6x+9}=\frac{5x}{x-3}$; б) $\frac{x-1}{x-2}=\frac{x}{1-x}$; в) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+3}{1-x^2}$; г) $\frac{x}{4x^2-4x+1}=-\frac{4x}{2x-1}$.

**8.** *Исследуйте!* Дополните так, чтобы полученные уравнения были равносильными.

а) $\frac{x^2}{x-1}=\frac{2-3x}{1-x} \Leftrightarrow 2x^2-\square x+4=0$;

б) $\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x}{x+2} \Leftrightarrow 5(x-\square)(2x-\square)=0$.

**9.** Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:

а) $\frac{0{,}5}{x+3}=\frac{2}{4x+12}$; б) $\frac{1{,}2}{2x-1}=-\frac{6}{5-10x}$; в) $\frac{2x-1}{x^2-8x+16}=\frac{4x-2}{2(x-4)^2}$.

**10.** *Работайте в группах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{3}{x-5}-\frac{x}{x+1}=\frac{10}{(x+1)(x-5)}$; б) $\frac{16}{x-2}-\frac{6}{x}=\frac{21}{x+3}$;

в) $\frac{x^2+x}{x-1}+2x=\frac{3x-1}{x-1}+2$; г) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x+4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}$.

**11.** Найдите значение $t$, при котором:

а) сумма алгебраических отношений $\frac{6t+18}{3t-1}$ и $\frac{4t-26}{2t+5}$ равна 4;

б) разность алгебраических отношений $\frac{3t+1}{1-2t}$ и $\frac{t-1}{t+1}$ равна $\frac{1}{2}$;

в) сумма алгебраических отношений $\frac{t+1}{t-5}$ и $\frac{10}{t+5}$ равна их произведению;

г) разность алгебраических отношений $\frac{6}{2t-1}$ и $-\frac{2}{t-2}$ равна их произведению.

**12.** ***Работайте в парах!*** Найдите закономерность и впишите пропущенное уравнение:

а)

| | |
|---|---|
| $\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3}$ | $x^2-36=0$ |
| $\frac{5x+7}{x-2}-\frac{2x+21}{x+2}=8\frac{2}{3}$ | ? |

б)

| | |
|---|---|
| $\frac{2(t-1)}{t+3}+\frac{t+3}{t-3}=5$ | $\frac{x+6}{x-5}=0$ |
| $\frac{4}{t+3}-\frac{5}{3-t}+1=\frac{1}{t-3}$ | ? |

**13.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(x^2-4)(2x+5)=0$; б) $\left(\frac{2+x}{x}-1\right)\cdot(6x-5)=0$; в) $(2x^2-3x+1)\cdot\left(\frac{x}{3x-1}+x\right)=0$;

г) $\left(\frac{2x}{x+2}+\frac{3}{x-2}+2\right)\cdot\left(x+1-\frac{3}{x+2}+8\right)=0$; д) $(5x^2-7x+8)\cdot\left(\frac{2x^2}{x-1}-\frac{5x}{x-1}+4\right)=0.$

**14.** (EG, 2018) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение $\frac{x^2-2}{x^2+x}-\frac{1}{x+1}=\frac{2x-3}{x}$.

**15.** (EG, 2015) Пусть $A$ – множество действительных решений уравнения $5x^2-9x-2=0$. Найдите множество $A\cap[-\sqrt{2};1]$.

### Развиваем способности и творим

**16.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{7}{2x^2+4x}+\frac{1}{2x-4}=\frac{2}{4-x^2}$; б) $\frac{x^2+4}{x^2-4}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}=\frac{3x-2}{x^2-4}$;

в) $\frac{1}{t-8}+\frac{1}{t-6}+\frac{1}{t+6}+\frac{1}{t+8}=0$; г) $\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$.

**17*.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение с действительным параметром $m$:

а) $\frac{x-m}{m}=\frac{2m}{x-m}$; б) $\frac{m}{x}+\frac{m-1}{x-1}=2$;

в) $\frac{x}{m}-2=\frac{m-1}{1-x}$; г) $\left|x+\frac{1}{x}-3\right|=m-3.$

# §4. Системы уравнений

## 4.1. Понятие системы уравнений


В газетном киоске было 1305 журналов и газет. После того как продали 100 газет и 50 журналов, в киоске осталось вдвое больше газет, чем журналов.
Сколько газет и сколько журналов было вначале?

*Решение*:
Пусть $x$ – первоначальное количество газет. По условию задачи получим систему двух уравнений с двумя неизвестными $\begin{cases}x+y=1305,\\ x-100=2(y-50),\end{cases}$ имеющую решение (870, 435). (Проверьте!)

*Ответ*: Первоначально в киоске было 870 газет и 435 журналов.

***Обобщим*** Рассмотрим уравнения $A_1(x,y)=B_1(x,y)$ и $A_2(x,y)=B_2(x,y)$. Если нужно найти общие решения этих уравнений, то есть упорядоченные пары чисел $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, удовлетворяющие первому **и** второму уравнениям, то говорят, что задана ***система двух уравнений с двумя неизвестными***. Обозначают: $\begin{cases}A_1(x,y)=B_1(x,y),\\ A_2(x,y)=B_2(x,y).\end{cases}$

Система может состоять также из трех уравнений с тремя неизвестными, из двух уравнений с тремя неизвестными и т. д.

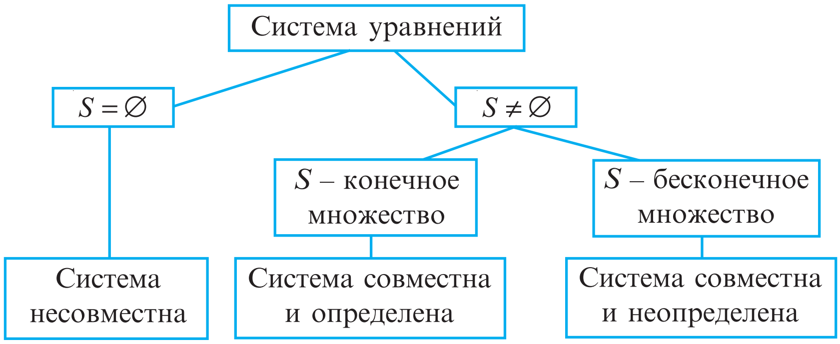
**Определение**

**Решением системы** двух уравнений с двумя неизвестными называется упорядоченная пара чисел $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, обращающая в верное равенство ***каждое*** уравнение системы.

***Запомните!***

***Решить систему уравнений*** – значит найти множество ее решений.
***Множество решений системы уравнений*** (обозначается буквой $S$) есть ***пересечение*** множеств решений уравнений этой системы.

***Соотношения между количеством решений и видами систем уравнений***




Решение системы уравнений, как правило, начинается с нахождения области ее допустимых значений.

***Область допустимых значений*** (ОДЗ) системы уравнений есть пересечение областей допустимых значений уравнений системы.

**Определение**

Две системы уравнений с одними и теми же неизвестными называются **равносильными**, если множества их решений равны.

Между двумя равносильными системами уравнений ставится символ $\Leftrightarrow$.

***Замечание***

Равносильные системы, которые решаются на некотором множестве (как правило, на ОДЗ исходной системы), называются ***равносильными на данном множестве***.

Отметим некоторые преобразования, приводящие к равносильным системам:

***Примеры***

1. Изменив порядок уравнений в системе, получаем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 3x - y = 4, \\ x + y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$

2. Заменив одно уравнение системы равносильным ему уравнением, получаем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 3x - y = 4, \\ 4x + 7y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4, \\ 4x + 7y = 0. \end{cases}$$

3. Выразив в одном из уравнений системы одно неизвестное через другое и подставив полученное выражение в остальные уравнения системы, получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} y = 3x - 4, \\ 8x + y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 4, \\ 8x + 3x - 4 = 0. \end{cases}$$

4. Заменив одно уравнение системы другим, которое образуется в результате сложения или вычитания двух уравнений системы (умноженных, если требуется, на некоторое число), получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 3x - y = 4, \\ 11x + y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - y = 4, \\ 14x = 4. \end{cases}$$

## 4.2. Методы решения систем двух уравнений с двумя неизвестными

***Основные методы решения систем уравнений***

- ***Метод подстановки***

$$\begin{cases} x-3y=-4, \\ x-7y=5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-4, \\ 3y-4-7y=5. \end{cases}$$

⇦ В одном из уравнений системы выражаем одно неизвестное через второе. Полученное выражение подставляем в другое уравнение системы.

- ***Метод сложения***

$$\begin{cases} 2x+0{,}5y=2, \mid \times 4 \\ 3x-2y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=-1, \\ 11x=7. \end{cases}$$

⇦ Складываем (вычитаем) два уравнения системы, чтобы исключить одно из неизвестных.

- ***Метод введения вспомогательных неизвестных (вспомогательного неизвестного)***:

$$\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{y-1}=3, \\ 4x^2+\dfrac{3}{y-1}=-2. \end{cases}$$

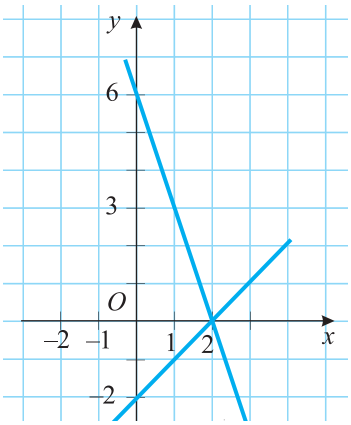
Пусть $x^2=u,\ \dfrac{1}{y-1}=v.$

Тогда получим систему $\begin{cases} u-v=3, \\ 4u+3v=-2. \end{cases}$

⇦ Вводим вспомогательные неизвестные, обозначив некоторые выражения этими неизвестными, чтобы получить более простую систему. Решив полученную систему, переходим к решению исходной.

- ***Графический метод***:

$$\begin{cases} x-y=2, \\ 3x+y=6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2, \\ y=-3x+6. \end{cases}$$




$S=\{2\}$.

⇦ Строим в одной прямоугольной системе координат графики уравнений системы и находим (если существуют) координаты точек их пересечения. Если графики уравнений системы не пересекаются, значит, система несовместна, то есть $S=\varnothing$.

### *Замечание*

Метод подстановки, метод сложения и метод введения вспомогательных неизвестных (вспомогательного неизвестного) являются ***алгебраическими методами***, а графический метод является ***геометрическим методом***.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** *Исследуйте!* Выявите, какие из упорядоченных пар чисел $(0,-2)$, $(-1,1)$, $(0,2)$, $(-2,2)$, $(0,3)$, $(3,0)$, $(-3,2)$ являются решениями системы уравнений:

а) $\begin{cases} 3x-y=-2, \\ 2x+3y=6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+4y=3, \\ x-y=-2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x=-2(x+y), \\ 5x+2y=-4. \end{cases}$

**2.** Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ методом подстановки систему уравнений:

а) $\begin{cases} x-3y=0, \\ 5x-y=-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y=1, \\ 6x+2y=0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 0{,}2x-3{,}5y=4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x+y=2, \\ \dfrac{2}{5}x-3y=10. \end{cases}$

**3.** Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ методом сложения систему уравнений:

а) $\begin{cases}2x-3y=-2,\\3x+y=5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}0{,}5y-3x=4{,}5,\\5x+2y=3;\end{cases}$ в) $\begin{cases}-2{,}2x+3y=2,\\3x-4y=-1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y=\frac{1}{6},\\2x+2y=3.\end{cases}$

**4.** Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ графическим методом систему уравнений:

а) $\begin{cases}y=2x,\\x-2y=9;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y=3,\\y+2x=6;\end{cases}$ в) $\begin{cases}y-3x=0,\\2x-y=-6;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x+y=-2,\\2x-y=4.\end{cases}$

**5.** ***Работайте в парах!*** Впишите такое действительное число, чтобы полученная система была совместной и: 1) неопределенной; 2) определенной.

а) $\begin{cases}2x-\square\, y=-4,\\10x-6y=-20;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-x+2y=-3,\\\square\, x-6y=9;\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x-y=-1,\\-12x+4y=\square\,.\end{cases}$

## Формируем способности и применяем

**6.** ***Работайте в группах!*** Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}3(x-2)=y-5,\\4x-3(y+1)=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}0{,}5x-3{,}4(5-y)=4{,}7,\\-4x+8y=12;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2-x=(x+1)^2+y,\\-5x-2y=1.\end{cases}$

**7.** Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ графическим и алгебраическим методом систему:

а) $\begin{cases}6-x=2y,\\2x+4y=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(x-2)^2=x^2+y,\\y+3x=6;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-3y=6,\\5(x-1)+6(y+2)=58;\end{cases}$ г) $\begin{cases}-x-3y=-7,\\x^2+y=(x-1)^2+3.\end{cases}$

## Развиваем способности и творим

**8.** Раскрыв модули, решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}|x|+3|y|=5,\\|x-2|+2|y-1|=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}3|x+3|+|y-4|=0,\\|x-6|+2|y|=5;\end{cases}$

в) $\begin{cases}a^2+2|b|=10,\\|a^2-2|+|b-4|=0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}2|z-3|-|y+1|=2,\\|z|+|y|=-5.\end{cases}$

**9.** Два корабля после встречи продолжили путь: один из них на юг, а другой – на запад. Через 2 часа расстояние между кораблями было 60 км. Вычислите скорость каждого корабля, если известно, что скорость одного из них на 6 км/ч больше, чем скорость второго.

**10.** Составьте систему двух уравнений с двумя неизвестными по ее решениям:

а) (1; 5) и (5; 1); б) (–1; 0) и (1; 2); в) (1; 0) и (3; 2); г) (–2; –1) и (1; 1).

**11.** Лодка плыла по реке против течения. Шляпа слетела с головы лодочника, когда лодка проплывала под мостом. Лодочник заметил пропажу шляпы через час, развернулся и догнал ее на расстоянии 4 км от моста. Найдите скорость течения.

***Задача для чемпионов***

**12.** При каких действительных значениях параметра $a$ система $\begin{cases}2x-y=3\\10x-ay=15\end{cases}$ является совместной и неопределенной?

## § 5. Решение задач с помощью уравнений и/или систем уравнений

Различные задачи из математики, физики, химии, экономики и других областей решаются с помощью уравнений и систем уравнений.

**1** В машину погрузили 35 мешков муки и сахара. Вес груза – 2 т 500 кг. Мешок муки весит 80 кг, а мешок сахара – 50 кг.
Сколько мешков муки и сколько мешков сахара погрузили в машину?

***уравнения*.**

Пусть $x$ – количество мешков муки.

Тогда $(35 - x)$ – количество мешков сахара. Мешок муки весит 80 кг, значит, погрузили $80x$ кг муки. Мешок сахара весит 50 кг, значит, погрузили $50(35 - x)$ кг сахара.

Согласно условиям задачи, получаем уравнение

$$80x + 50(35 - x) = 2\,500,$$

имеющее решение $x = 25$.

Таким образом, в машину погрузили 25 мешков муки и 10 мешков сахара.

***системы уравнений*.**

Пусть $x$ – количество мешков муки, а $y$ – количество мешков сахара.

Поскольку всего погрузили 35 мешков, получаем первое уравнение: $x + y = 35$.

Так как мешок муки весит 80 кг, а мешок сахара 50 кг, и всего погрузили 2 т 500 кг, получаем второе уравнение:

$$80x + 50y = 2\,500 \Leftrightarrow 8x + 5y = 250.$$

Согласно условиям задачи, получаем систему уравнений $\begin{cases} x + y = 35, \\ 8x + 5y = 250, \end{cases}$ имеющую решение $(25, 10)$.

*Ответ*: Всего погрузили 25 мешков муки и 10 мешков сахара.

***Вывод*** В некоторых случаях задача может быть решена как с помощью уравнения, так и с помощью системы уравнений.

***Вспомним***

Для решения задачи с помощью **уравнения** (**системы уравнений**):

① выявляем известные и неизвестные величины;

② обозначаем каждую выбранную неизвестную величину буквой;

③ устанавливаем взаимосвязь известных и неизвестных величин и составляем уравнение (систему уравнений);

④ решаем уравнение (систему уравнений);

⑤ анализируем полученные результаты, выбираем решение и записываем ответ.

***Применяем***

**2** Тракторист вспахивает поле. Через 4 часа к нему присоединяется еще один тракторист. Вместе они вспахали оставшийся участок поля за 8 часов.
За сколько часов каждый тракторист мог бы вспахать поле, если известно, что первому для этого потребовалось бы на 8 часов больше?

*Решение*:

Пусть $x$ – количество часов, за которое первый тракторист мог бы вспахать все поле. Тогда $(x - 8)$ – количество часов, за которое второй тракторист мог бы вспахать все поле. Производительность труда первого тракториста равна $\frac{1}{x}$ $\left(\frac{1}{x}\right.$ – часть поля, вспаханного за 1 час), а второго $\frac{1}{x-8}$. Зная, что первый тракторист проработал

12 часов (4 часа один и еще 8 часов вдвоем), а второй – 8 часов, и учитывая производительность труда каждого тракториста, получаем уравнение: $\frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}=1$.

Найдем решения этого уравнения.

ОДЗ: $x\in\mathbb{R}\setminus\{0, 8\}$.

$$\frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}=1 \Leftrightarrow \frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}-1=0 \Leftrightarrow \frac{12(x-8)+8x-x(x-8)}{x(x-8)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+28x-96}{x(x-8)}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-28x+96}{x(x-8)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-28x+96=0, \\ x(x-8)\neq 0. \end{cases}$$

Решениями системы, а значит, и исходного уравнения, являются $x_1=24$, $x_2=4$. (Проверьте!)

Значение $x_2=4$ не удовлетворяет условию задачи. (Обоснуйте!)

*Ответ*: Первый тракторист мог бы вспахать все поле за 24 часа,
второй – за 16 часов.

***Задание*** Решите задачу **2** с помощью системы уравнений.

**3** 85-процентный спиртовой раствор смешали с другим раствором и получили 10 л 79-процентного спиртового раствора.
Сколько литров каждого вида раствора смешали, если концентрация спирта во втором растворе была на 60% больше объема в литрах этого раствора?

*Решение*:

Пусть $x$ – объем в литрах первого раствора. Тогда (10 – $x$) л – объем второго раствора. Первый раствор содержит $\frac{x\cdot 85}{100}$ литров спирта, а концентрация второго спиртового раствора составляет $(10-x+66)\%$.

Согласно условию задачи, получаем уравнение $\frac{(10-x)(76-x)}{100}+\frac{85x}{100}=\frac{10\cdot 79}{100} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-x-30=0$, имеющее решения $x_2=-5$, $x_2=6$. (Проверьте!) Заметим, что значение $x_2=-5$ не удовлетворяет условию задачи.

*Ответ*: Было смешано 6 л 85-процентного спиртового раствора с 4 л другого раствора.

## Упражнения и задачи

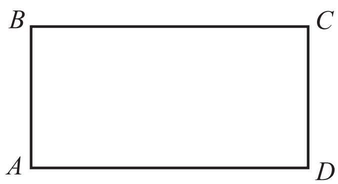
### Закрепляем знания

**Решите задачи 1–4 с помощью уравнения.**

**1.** Найдите два натуральных числа, если известно, что их сумма равна 12, а произведение – 11.

**2.** *Исследуйте!* Найдите два целых числа, если известно, что их разность равна 15, а сумма их квадратов равна 725.

**3.** Какова длина и ширина прямоугольника, если известно, что его периметр равен 30 м, а площадь – 44 м$^2$?




**4.** Одна из сторон прямоугольника на 3 см больше другой стороны. Найдите длины его сторон, если известно, что площадь прямоугольника равна 1720 см$^2$.

**Решите задачи 5–6:**
**а) с помощью уравнения;** **б) с помощью системы уравнений.**

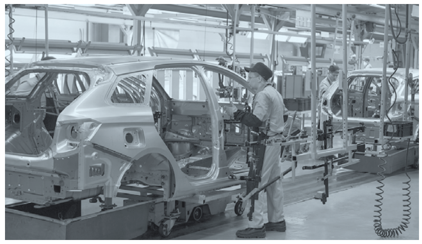
**5.** За 6 400 леев купили два отреза ткани одинаковой длины, но разного вида. 1 метр ткани первого вида и 1 метр ткани второго вида вместе стоят 320 леев, а 4 м ткани первого вида стоят столько же, сколько 6 м ткани второго вида. Сколько стоит 1 м ткани каждого вида? Сколько всего метров ткани было куплено?

**6.** ***Работайте в парах!*** Расстояние между двумя городами – 240 км. Из этих городов навстречу друг другу одновременно отправились два поезда: один со скоростью 80 км/ч, а другой – со скоростью, равной $\frac{3}{4}$ скорости первого поезда. Какое расстояние преодолел каждый поезд до их встречи?

## Формируем способности и применяем

**Решите задачи 7–13 с помощью уравнения.**

**7.** ***Работайте в группах!*** Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 52. Если из этого числа вычесть 18, то получим перевернутое число. Найдите это число.



**8.** По плану завод должен изготовить 360 деталей. В первые восемь дней завод ежедневно перевыполнял план на 20%. В последующие дни завод ежедневно перевыполнял план на 25%. В результате было произведено на 82 детали больше, чем предусмотрено планом. За сколько дней завод должен был выполнить заказ?

**9.** Площадь прямоугольного треугольника – 24 см$^2$. Если один из катетов уменьшить на 1 см, а другой увеличить на 3 см, площадь полученного треугольника будет 27,5 см$^2$. Найдите длины катетов первоначального треугольника.

**10.** Работая совместно, двое рабочих выполнили заказ за 12 часов. Если бы первый рабочий выполнил половину заказа, а затем второй – оставшуюся часть, то весь заказ был бы выполнен за 25 часов. За сколько часов каждый рабочий мог бы выполнить заказ?

**11.** Теплоход проходит по реке расстояние от пункта A до пункта B за 3 часа, а расстояние от B до A – за 4 часа. За сколько часов пройдет расстояние от A до B плот?

**12.** ***Работайте в парах!*** Сумма двух чисел равна 8, а сумма обратных им чисел равна 6. Найдите эти числа.

**13.** Сколько миллилитров спирта нужно добавить в 736 мл 16-процентного раствора йода, чтобы получить 10-процентный раствор йода?

**Решите задачи 14–15:**

**а) с помощью уравнения;** **б) с помощью системы уравнений.**

**14.** Сумма двух чисел равна 12, а их отношение равно $\frac{3}{7}$. Найдите эти числа.

**15.** ***Работайте в группах!*** 50 маек и 75 футболок вместе стоят 4 200 леев. После снижения цены маек на 10%, а футболок – на 20% стоимость этого товара стала 3 487,5 лея. Найдите первоначальную цену маек и футболок.

**16.** (EG, 2019) На математическом конкурсе представлены задачи, оцениваемые на 4 и 5 баллов. Ученик решил правильно 12 задач и набрал 53 балла. Определите, сколько задач каждого вида решил ученик.

## Развиваем способности и творим

**17.** Сколько прямоугольных треугольников существует, если известно, что длины их сторон – натуральные числа, а длина одного из катетов равна 15 см?

**18.** Найдите два натуральных числа, если известно, что разность их квадратов равна 45. Сколько решений имеет задача?

**19.** Для перевозки 60 т товара потребовались грузовые автомобили. Учитывая плохое состояние дорог, в каждый автомобиль загрузили на 0,5 т товара меньше, чем планировали. Поэтому были выделены дополнительно 4 автомобиля. Сколько грузовых автомобилей было запланировано первоначально?

**20.** У фермера два вида азотных удобрений: 15-процентный и 21-процентный азот. Какое количество химических удобрений каждого вида должен смешать фермер, чтобы получить 1 т 18-процентного азотного удобрения?

*Задача для чемпионов*

**21.** Собака, находящаяся в точке A, погналась за лисицей, которая была в 30 м от нее. Длина прыжка собаки равна 2 м, а лисицы – 1 м. На каком расстоянии от точки A собака догонит лисицу, если известно, что за одно и то же время собака делает два прыжка, а лисица – 3 прыжка?

## Упражнения и задачи на повторение

### Закрепляем знания

**1.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $2x-3{,}5(x-4)=6$; б) $0{,}5(x-2)+2{,}3x=5x-4$;

в) $\frac{4}{5}(x+3)-\frac{2}{3}=\frac{5}{7}x+4$; г) $2{,}4(x-3)-4x=1-x$.

**2.** Решите на множестве $\mathbb{Z}$ уравнение:

а) $5x^2-4x-1=0$; б) $-1{,}2x^2-7x=0$; в) $16x^2-1=0$; г) $36x^2-12x+1=0$.

**3.** *Работайте в парах!* Используя теорему Виета, решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $x^2-x-30=0$; б) $x^2+x-30=0$; в) $x^2-2x-120=0$.

**4.** Решите на множестве $\mathbb{Q}$ уравнение:

а) $\frac{5x}{x-1}-\frac{2}{x+2}=3$; б) $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{5x}{x-1}=-3$; в) $4-\frac{2}{x^2-4}=\frac{3x}{x-2}$; г) $\frac{5x}{x^2-9}-3=\frac{1}{x+3}$.

**5.** Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:

а) $\begin{cases}x-3y=4,\\5x-2y=-1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}2y-3x=6,\\8y-2x=-3;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x+2y=1,\\\frac{1}{4}+\frac{2}{3}y=4;\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x-y=-2,\\0{,}5(x-2)+y=8.\end{cases}$

**6.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $(2x^2-5x)(7x+1)=0$; б) $\left(\frac{x}{1-x}-2\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)=0$; в) $(3x^2+2x-1)(x^2-16)=0$.

**7.** В жилом доме 64 двухкомнатные и четырехкомнатные квартиры. Сколько двухкомнатных и сколько четырехкомнатных квартир, если известно, что всего в доме 160 комнат?

**8.** Разность двух чисел равна 84, а их отношение равно $\frac{2}{5}$. Найдите эти числа.

**9.** Смешали 6 кг конфет по 33 лея и 12 кг конфет по 30 леев. Сколько стоит 1 кг полученного ассорти?

### Формируем способности и применяем

**10.** *Работайте в группах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $\frac{3x^2}{x^2-2x+1}-\frac{5x}{x-1}+2=0$; б) $-\frac{5t^2}{(t+2)^2}+\frac{t}{t+2}+4=0$; в) $z^4+4z^2-5=0$;

г) $4x^2+5x+1=0$; д) $\frac{2x}{x^2-16}-\frac{3}{x+4}=\frac{5-x}{x-4}$; е) $\frac{3}{2x-1}-\frac{4x}{x+2}=5$.

**11.** Не решая уравнение, определите знаки его решений:
а) $x^2-8x+3=0$; б) $x^2+12x+8=0$; в) $x^2-14x-\sqrt{7}=0$.

**12.** *Работайте в парах!* Не решая уравнение $x^2-8x+12=0$, найдите:
а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2+x_2^2$; в) $x_1^3+x_2^3$; г) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$,
где $x_1$, $x_2$ – решения данного уравнения.

**13.** Разложите на множители выражение:
а) $x^{12}-2x^6+1$; б) $(2x-1)^4-3(2x-1)^2+2$; в) $3(2-x)^4-2(x-2)^2-1$; г) $t^4-4t^2+4$.

**14.** Пусть $x_1$ и $x_2$ – решения уравнения $x^2-8x+6=0$. Составьте уравнение II степени по его решениям:
а) $t_1=2x_1$ и $t_2=2x_2$; б) $t_1=\frac{x_1}{x_2}$ и $t_2=\frac{x_2}{x_1}$.

**15.** Решите на множестве $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ систему уравнений:
а) $\begin{cases}3(x-1)+4=5y,\\x-8(y+0,5)=2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}-(x+y)+4y=3,\\5x-4(0,2-y)=-2;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x^2-4(y+2)=(x-5)^2,\\3x-y=0.\end{cases}$

**16.** Решите графическим методом систему уравнений:
а) $\begin{cases}2x+5y=0,\\x-y=-7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\frac{1}{2}y=x+1,\\y-2x=-2;\end{cases}$ в) $\begin{cases}3x-y=8,\\3(x-1)=2+y.\end{cases}$

**17.** Поезд прошел путь в 210 км сначала со скоростью 60 км/ч, затем на аварийном участке – 20 км/ч. Весь путь был пройден за 6 часов. Вычислите длину аварийного участка пути.

**18.** Смешали 2 л 20-процентного раствора соли и 8 л 30-процентного. Какова концентрация соли в полученном растворе?

**19.** Сумма квадратов двух чисел равна 36. Разделив эти числа, получаем неполное частное 5 и остаток 3. Найдите эти числа.

**20.** Найдите нули функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
а) $f(x)=-3x^2-x-4$; б) $f(x)=-3x^2+x+4$; в) $f(x)=x^4-x^2-20$.

**21.** Два велосипедиста выехали одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Через час они встретились и, не останавливаясь, проследовали дальше. Велосипедист, выехавший из пункта A, прибыл в пункт B на 95 минут раньше, чем другой достиг пункта A. Найдите скорость каждого велосипедиста, если известно, что расстояние между пунктами A и B равно 28 км.

**22.** Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два туриста. Каждый двигался с постоянной скоростью и, прибыв в пункт назначения, не останавливаясь, отправился обратно. Когда они встретились на обратном пути, оказалось, что первый турист прошел на 4 км больше, чем второй. Первый пришел в пункт A через 1 час после повторной встречи, а второй пришел в пункт B через 2 ч 30 мин. Найдите скорость передвижения каждого туриста.

**23.** (EG, 2022) Найдите наибольшее действительное решение уравнения $6x^2+7x+2=0$.

**24.** (EG, 2016) Пусть $A$ – множество действительных решений уравнения $4x^2+3x-10=0$. Найдите множество $A\cup\{-2;\,0\}$.

**25.** (EG, 2016) В вазе розы красного и белого цвета, всего 21 роза. Количество красных роз на 3 больше удвоенного количества белых роз. Найдите количество роз каждого цвета.

**26.** (EG, 2015) Сумма двух чисел равна 55, а их отношение равно $\frac{2}{9}$. Найдите эти числа.

**27.** (EG, 2018) Найдите модуль разности действительных решений уравнения $x^2-7x+12=0$.

**28.** У Даны и Паулы вместе 90 конфет. Вычислите, сколько конфет у каждой девочки, если 40% конфет Даны на 15 больше, чем 30% конфет Паулы.

### Развиваем способности и творим

**29.** а) В системе координат $xOy$ постройте точки $A(0; 3)$ и $B(1; -2)$.

б) Постройте прямую $AB$.

в) Определите формулу функции $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx + n$, при условии, что графиком функции $f$ является прямая $AB$.

**30.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение:

а) $|2x^2 - x - 2| = 1$; б) $|x^2 + x - 2| = 1 - x$; в) $|-x^2 + 5x - 6| = x^2$.

**31.** Маме, отцу и сыну вместе 84 года. Сыну и маме вместе 45 лет, а сыну и отцу вместе 52 года. Вычислите возраст каждого члена семьи.

**32.** Составьте задачу, которая решалась бы с помощью:

а) уравнения $2x^2 - 3x - 5 = 0$; б) системы уравнений $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

**33.** ***Работайте в группах!*** **Проект:** *Приложения уравнений II степени в различных областях.*

## Итоговый тест

*Время выполнения работы: 45 минут*

### Вариант I

**1.** Дано уравнение $3t^2 - \square\, t + 4 = 0$.

а) Дополните таким действительным числом, чтобы множество решений уравнения содержало два элемента.

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, полученное в пункте а).

в) Напишите уравнение второй степени, решениями которого являются противоположные значения решений, полученных в пункте б).

**2.** Решите задачу с помощью системы уравнений: Соотношение между количеством мальчиков и девочек в 9 классе – $\frac{3}{5}$.

а) Сколько девочек в классе, если известно, что мальчиков на 6 меньше, чем девочек?

б) Сколько всего учеников в этом классе?

**3.** Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

а) Найдите значения $a$ и $b$, при которых точки $A(1, 4)$ и $B(-2, 8)$ принадлежат графику функции $f$.

б) Решите при $a = 2$ и $b = 3$ на множестве $\mathbb{N}$ уравнение $\frac{f(x)}{x-1} + x = 5$.

### Вариант II

**1.** Дано уравнение $2z^2 + \square\, z - 5 = 0$.

а) Дополните таким действительным числом, чтобы множество решений уравнения содержало два элемента.

б) Решите на множестве $\mathbb{R}$ уравнение, полученное в пункте а).

в) Напишите уравнение второй степени, решениями которого являются противоположные значения решений, полученных в пункте б).

**2.** Решите задачу с помощью системы уравнений: Соотношение между количеством учебников и количеством книг по художественной литературе в школьной библиотеке – $\frac{2}{3}$.

а) Сколько учебников в библиотеке, если известно, что их на 350 меньше, чем книг по художественной литературе?

б) Сколько всего книг в школьной библиотеке?

**3.** Дана функция $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$.

а) Найдите значения $m$ и $n$, при которых точки $A(-2, 1)$ и $B(3, 11)$ принадлежат графику функции $g$.

б) Решите при $m = 3$ и $n = -1$ на множестве $\mathbb{N}$ уравнение $\frac{x^2 + 7}{g(x)} - x = 3$.

Глава

# 5

# Неравенства. Системы неравенств

> *«Образование – лучшее богатство».*
> Пословица

## §1. Неравенства и системы неравенств I степени с одним неизвестным. Повторение и дополнения

### 1.1. Неравенства с одним неизвестным

*Исследуем* **1** Две фирмы принимают заказы на изготовление ученических билетов. Фирма BMR берет 200 леев за оформление заказа и по 10 леев за изготовление каждого ученического билета, а фирма CAR – 50 леев за оформление заказа и по 15 леев за каждый ученический билет. Укажите наименьшее количество ученических билетов, которое выгоднее заказать фирме BMR, чем фирме CAR.


*Решение*:

Пусть $x$ – необходимое количество ученических билетов. По условию задачи, фирме BMR за выполнение заказа нужно заплатить $(200+10x)$ леев, а фирме CAR – $(50+15x)$ леев.

Для ответа на вопрос задачи нужно решить на множестве $\mathbb{N}$ неравенство $200+10x<50+15x$ и выбрать из множества его решений наименьшее натуральное число.

Неравенство $200+10x<50+15x$ является примером неравенства с одним неизвестным.

**Определение** **Решением** неравенства с одним неизвестным называется ***любое*** значение неизвестного, обращающее это неравенство в верное числовое неравенство.

*Запомните!* ***Решить неравенство*** – значит найти множество его решений. Множество решений неравенства обозначается буквой $S$ и записывается в виде числового промежутка.

**Определение** Два неравенства называются **равносильными**, если множества их решений равны.

Между двумя равносильными неравенствами ставится символ $\Leftrightarrow$.

При решении неравенств используют следующие равносильные преобразования, основанные на свойствах числовых неравенств на множестве действительных чисел:

| | | Примеры |
|---|---|---|
| 1. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x) < f(x)$ | – если левую и правую части неравенства поменять местами, заменив знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному: | $x+3>2x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x<x+3$ |
| 2. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)+a > g(x)+a$ | – если к обеим частям неравенства прибавить одно и то же действительное число, то получим неравенство, равносильное данному: | $2x+5>7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x>7-5$ |
| 3. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow af(x) > ag(x)$ для любого $a \in \mathbb{R},\ a>0$ | – если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное действительное число, то получим неравенство, равносильное данному: | $3x>27 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x>27:3$ |
| 4. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow af(x) < ag(x)$ для любого $a \in \mathbb{R},\ a<0$ | – если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное действительное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному: | $-3x<81 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x>81:(-3)$ |

## 1.2. Числовые промежутки

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a<b$.

| Множество | Числовой промежуток | |
|---|---|---|
| | Обозначают | Геометрическая интерпретация |
| $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$ | $[a;\ b]$ |  |
| $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$ | $[a;\ b)$ |  |
| $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$ | $(a;\ b]$ |  |
| $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$ | $(a;\ b)$ |  |
| $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > a\}$ | $(a;\ +\infty)$ |  |
| $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge a\}$ | $[a;\ +\infty)$ |  |
| $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < b\}$ | $(-\infty;\ b)$ |  |
| $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \le b\}$ | $(-\infty;\ b]$ |  |
| $\mathbb{R}$ | $(-\infty;\ +\infty)$ |  |

## 1.3. Неравенства вида $ax+b \ge 0$ $(\le,\ >,\ <)$, $a, b \in \mathbb{R}$

**Вспомним**

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Для неравенства $ax+b \ge 0$ с неизвестным $x \in \mathbb{R}$ имеем:

$$ax+b \ge 0 \Leftrightarrow ax \ge -b.$$

Рассмотрим случаи, когда $a \ne 0$ и $a = 0$.

**1)** Случай $a \neq 0$

а) Если $a > 0$, то $ax \geq -b \Leftrightarrow x \geq -\frac{b}{a}$. Значит, $S = \left[-\frac{b}{a};\ +\infty\right)$.

б) Если $a < 0$, то $ax \geq -b \Leftrightarrow x \leq -\frac{b}{a}$. Значит, $S = \left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right]$.

**2)** Случай $a = 0$

а) Если $a = 0$ и $b > 0$, то $S = \mathbb{R}$.

б) Если $a = 0$ и $b = 0$, то $S = \mathbb{R}$.

в) Если $a = 0$ и $b < 0$, то $S = \varnothing$.

***Задание*** Аналогично решите неравенства вида $ax + b \leq 0$ (>, <), где $a, b \in \mathbb{R}$.

**Определение** Неравенствами **I степени с одним неизвестным** называются неравенства вида $ax + b < 0,\ ax + b > 0,\ ax + b \leq 0,\ ax + b \geq 0$, где $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0$.

Вернемся к рассмотренной в начале параграфа задаче 1 и решим неравенство:

$$200 + 10x < 50 + 15x \Leftrightarrow 15x - 10x > 200 - 50 \Leftrightarrow 5x > 150 \Leftrightarrow x > 30.$$

*Ответ*: Наименьшее количество ученических билетов, которое выгоднее заказать фирме BMR, равно 31.

***Задание*** Назовите, какие равносильные преобразования неравенств применили при решении этого неравенства.

***Применяем***

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

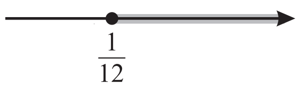
а) $x - 5 \leq 15x - 2(x + 3)$; б) $\frac{12x - 1}{3} < 4x + 3$; в) $\frac{2 - 3x}{3} > \frac{5 - 2x}{2}$;

г) $|2x - 1| < 3$; д) $|x - 4| \geq 1$.

*Решение*:

а) $x - 5 \leq 15x - 2(x + 3) \Leftrightarrow x - 5 \leq 15x - 2x - 6 \Leftrightarrow x - 15x + 2x \leq -6 + 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -12x \leq -1 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{12}$. Значит,




*Ответ:* $S = \left[\frac{1}{12};\ +\infty\right)$.

б) $\frac{12x - 1}{3} < 4x + 3 \Leftrightarrow 12x - 1 < 12x + 9 \Leftrightarrow 12x - 12x < 9 + 1 \Leftrightarrow 0 \cdot x < 10$.

*Ответ:* $S = \mathbb{R}$.

в) $\frac{2 - 3x}{3} > \frac{5 - 2x}{2} \Leftrightarrow 4 - 6x > 15 - 6x \Leftrightarrow 6x - 6x > 15 - 4 \Leftrightarrow 0 \cdot x > 11$.

Неравенство не имеет решений.

*Ответ:* $S = \varnothing$.

г) $|2x - 1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq 2x - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$.

*Ответ:* $S = [-1;\ 2]$.

д) $|x - 4| \geq 1 \Leftrightarrow x - 4 \geq 1$ sau $x - 4 \leq -1 \Leftrightarrow x \geq 5$ sau $x \leq 3$.

*Ответ:* $S = (-\infty;\ 3] \cup [5;\ +\infty)$.

***Замечание*** Множество решений неравенства I степени можно найти и другим способом – исследуя знак соответствующей функции.

- Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $2x+8<0$.

*Решение*:

Рассмотрим функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+8.$

Находим ее нуль: $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$.

Составим таблицу знаков функции $f$:

| $x$ | $-\infty$ | | $-4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ |

Значит, $f(x)<0$ при $x\in(-\infty;-4)$ (рис. 1).

*Ответ*: $S=(-\infty;-4)$.

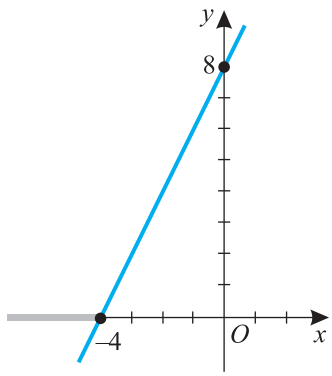


Рис. 1

## 1.4. Системы неравенств I степени с одним неизвестным

**2** Для приготовления в школьной столовой 20 порций первого блюда необходимо 0,5 кг мяса и 1 кг риса, а на приготовление одной порции второго блюда необходимо 0,1 кг мяса и 0,15 кг риса. Сколько комплексных обедов было приготовлено, если известно, что было израсходовано больше 11 кг мяса и меньше 18 кг риса?

*Решение*:

Пусть $x$ – количество приготовленных комплексных обедов. Значит, мяса было израсходовано $\left(\frac{0{,}5x}{20}+0{,}1x\right)$ кг, а риса $\left(\frac{x}{20}+0{,}15x\right)$ кг. По условию задачи получаем неравенства $\frac{0{,}5x}{20}+0{,}1x>11$ и $\frac{x}{20}+0{,}15x<18$. Нужно найти на множестве $\mathbb{N}$ общие решения первого **и** второго неравенств. В таких случаях говорят, что нужно решить систему двух неравенств (I степени) с одним неизвестным:

$$\begin{cases}\frac{0{,}5x}{20}+0{,}1x>11,\\ \frac{x}{20}+0{,}15x<18,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+4x>440,\\ x+3x<360,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x>440,\\ 4x<360,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>88,\\ x<90.\end{cases}$$

На множестве $\mathbb{N}$ система имеет единственное решение: 89.

*Ответ*: Было приготовлено 89 комплексных обедов.

***Вспомним***

В общем случае ***система двух неравенств I степени с одним неизвестным*** обозначается:

$$\begin{cases}a_1x+b_1\geq 0,\ a_1\in\mathbb{R}^*,\ b_1\in\mathbb{R},\\ a_2x+b_2\geq 0,\ a_2\in\mathbb{R}^*,\ b_2\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

**Определение**

**Решением** системы неравенств I степени с одним неизвестным называется любое значение неизвестного, обращающее ***каждое*** неравенство системы в верное числовое неравенство.

***Замечания***

1. Система неравенств может состоять из неравенств, содержащих любой из символов $<$, $\leq$, $>$, $\geq$.
2. Существуют системы из двух, трех и более неравенств.

**Запомните!**

***Решить систему неравенств*** – значит найти множество ее решений. ***Множество решений системы неравенств*** (обозначается буквой $S$) есть ***пересечение*** множеств решений неравенств этой системы.

**Определение**

Две системы неравенств называются **равносильными**, если множества их решений равны.

Между равносильными системами неравенств ставится символ $\Leftrightarrow$.

***Замечание***

Равносильные системы неравенств, решаемые на некотором множестве, называются ***равносильными на этом множестве***.

***Применяем***

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств $\begin{cases}3(x-1)\le 2(x+2),\\ 2x-1>5.\end{cases}$

*Решение*:

$$\begin{cases}3(x-1)\le 2(x+2)\\ 2x-1>5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-3\le 2x+4\\ 2x>6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 7,\\ x>3.\end{cases}$$


$x\in(3;\ 7]$

*Ответ*: $S=(3;\ 7]$.

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ двойное неравенство $-2<2x+1<5$.

*Решение*:

Двойное неравенство может быть записано в виде системы неравенств:

$$-2<2x+1<5\Leftrightarrow\begin{cases}2x+1>-2\\ 2x+1<5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x>-3\\ 2x<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1{,}5,\\ x<2.\end{cases}$$


$x\in(-1{,}5;\ 2)$

*Ответ*: $S=(-1{,}5;\ 2)$.

## Упражнения и задачи

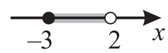
### Закрепляем знания

**1.** Определите, на каком из рисунков изображен промежуток $(-3;\ 2]$:

а) 


б) 


в) 


г) 


**2.** Изобразите на числовой оси и запишите в виде числового промежутка множество решений неравенства:

а) $-3\le x<-2$; б) $6{,}5\le x\le 11{,}5$; в) $2<x<4$;
г) $x>-2$; д) $x\le 6$.

**3.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $7x-5{,}3<8{,}7$; б) $1-3x>7$;
в) $30+5x\le 18-7x$; г) $5(x-1)+7\ge 1-3(x+2)$;
д) $x-\dfrac{2x+3}{2}\le\dfrac{x-1}{4}$; е) $0{,}5-3\ge 2+5(1-x)$.

**4.** Решите на множестве $\mathbb{N}$ неравенство:

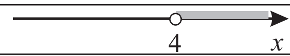
а) $5{,}6(x-3)-3{,}2(2-x)<20{,}8$;
б) $4{,}8(x-4)-3{,}7(2-x)<24{,}4$;
в) $2{,}85(x+1)\ge 3-2(x-0{,}5)$.

**5.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:

а) $\begin{cases}2x+1>0,\\ x-3<0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}1-x\le 0,\\ 3x+2<0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x-0{,}5\ge 0,\\ 2x-5\ge 0;\end{cases}$ г) $\begin{cases}1{,}2x-6\le 0,\\ 4x-3\le 0.\end{cases}$

**6.** ***Работайте в парах!*** Дополните таблицу по образцу первой строки:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $x$ меньше или равно семи | $x\le 7$ | $(-\infty;\ 7]$ |   |
| 2 | $x$ больше или равно двум | | | |
| 3 | | $-3<x<5$ | | |
| 4 | $x$ меньше, чем 5,4 | | | |
| 5 | | | |   |
| 6 | | | $(-\sqrt{3};\ +\infty)$ | |

## Формируем способности и применяем

7. *Исследуйте!* Две одинаковые авторучки дороже трех одинаковых блокнотов. Что дороже: 7 таких авторучек или 10 таких блокнотов?

8. Сколько существует натуральных чисел $n$ таких, что $6n+15\le 70$?

9. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x-1$. Найдите промежутки, на которых:
   а) $f(x)\ge 0$; б) $f(x)<0$.

10. Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+1$.
    а) Определите, принадлежит ли точка $A(-1;\,0)$ графику функции $f$.
    б) Найдите промежутки, на которых $f(x)>0$, $f(x)\ge 0$, $f(x)<0$, $f(x)\le 0$.
    в) Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $f(1)+|f(x)-x|\le f(0)$.

11. Аня и Мария сидят на диете для похудения. Аня, весившая от 60 до 65 кг, сбросила от 3 до 4 кг. Мария, весившая от 60 до 67 кг, сбросила от 4 до 5 кг. Определите, что покажут весы, если Аня и Мария вместе взвесятся по окончании диеты.

12. Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств:
    а) $\begin{cases}17x-2>12x-1,\\ 3-9x<1-x;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x-5\le 15-3x,\\ 1-4x>22-3x;\end{cases}$
    в) $\begin{cases}4-x\ge \dfrac{x-1}{3},\\ \dfrac{7x-1}{8}\ge 6;\end{cases}$ г) $\begin{cases}5(x+1)\ge 3(x+3)+1,\\ 2(2x-1)<7(x+1).\end{cases}$

13. ***Работайте в парах!*** Найдите область определения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:
    а) $f(x)=\sqrt{24x-48}$; б) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{4-5x}}$;
    в) $f(x)=\sqrt{10-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-6}}$.

14. Решите на множестве $\mathbb{R}$ двойное неравенство:
    а) $-5<3-2x<1$; б) $1<3x-2<7$;
    в) $-2\le 4-3x\le 10$; г) $3x-2<4x+1<3x+5$.

15. На одной полке на 5 книг больше, чем на другой. Известно, что на второй полке находится меньше 11 книг, а на обеих полках вместе – не меньше 25 книг. Сколько книг на каждой полке?

16. Отрезки длиной 5, 8 и $x$ являются сторонами треугольника. Найдите допустимые значения неизвестного $x$.

17. За 8 рейсов автобус перевез больше 187 пассажиров. При этом все места в автобусе были заняты, и только в одном из рейсов два пассажира ехали стоя. На следующий день тот же автобус выполнил 15 рейсов, во время которых свободными оказались три места, и перевез меньше 367 пассажиров. Сколько мест в автобусе?

18. (EG, 2019) Даны функции $f, g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-4x+2$, $g(x)=2x+9$. Найдите действительные значения $x$, при которых значение выражения $f(x)-g(x)$ неотрицательно.

19. (EG, 2021) Дана функция $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x+5$. Найдите действительные значения $x$, при которых соответствующие значения $f$ не больше 2.

## Развиваем способности и творим

20. Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:
    а) $|3x+2|>1$; б) $|6-9x|\ge 18$; в) $|3x+7|<5$.

21. Найдите значения действительного параметра $a$, при которых система неравенств имеет хотя бы одно решение:
    а) $\begin{cases}x<2,\\ x>a;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x\le 3,\\ x>a;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x\le -3,\\ x\ge a;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x\ge 5,\\ x\le a.\end{cases}$

22. Найдите значения действительного параметра $a$, при которых система неравенств не имеет решений:
    а) $\begin{cases}x<3,\\ x>a;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x\le 2,\\ x>a;\end{cases}$ в) $\begin{cases}x\le 5,\\ x\ge a;\end{cases}$ г) $\begin{cases}x\ge -2,\\ x\le a.\end{cases}$

# § 2. Неравенства II степени с одним неизвестным. Метод интервалов

## 2.1. Неравенства II степени с одним неизвестным

**Мастерская**

1. Постройте в отдельной системе координат график каждой из функций:
   $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 4x + 3;\quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 + 4x + 4;$
   $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -x^2 + 2x - 5.$
2. Найдите знаки функций $f, g, h$.
3. Сравните и прокомментируйте полученные результаты.

***Исследуем***

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x^2 - x - 6 > 0$.

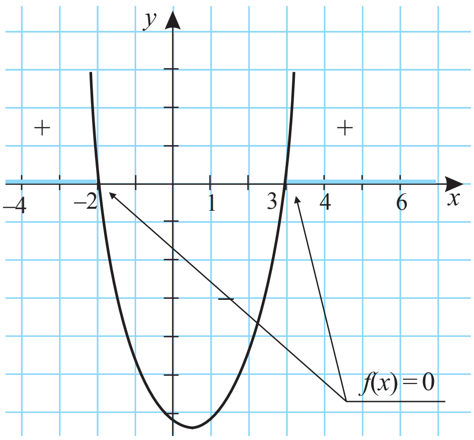



Рис. 2

*Решение*:

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x - 6$.

Найдем нули функции $f$:

$$x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ или } x = 3.$$

Изобразим схематически график функции $f$ (параболу) в прямоугольной системе координат (рис. 2).

Определим по графику значения $x$, при которых $f(x) > 0$. Получим $x < -2$ или $x > 3$.

*Ответ*: $S = (-\infty,\ -2) \cup (3,\ +\infty)$.

**Определение**

Неравенства вида:
$ax^2 + bx + c > 0,\quad ax^2 + bx + c \geq 0,\quad ax^2 + bx + c < 0,\quad ax^2 + bx + c \leq 0,$
$a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, называются **неравенствами II степени с одним неизвестным**.

***Запомните!***

Число $m$ является ***решением*** неравенства с одним неизвестным, если при замене неизвестного на $m$ в этом неравенстве получается истинное высказывание.

При решении неравенств применяют равносильные преобразования, используя свойства числовых неравенств на множестве действительных чисел.

*Алгоритм решения неравенств II степени с одним неизвестным*

① Равносильными преобразованиями приводим неравенство к неравенству вида $ax^2 + bx + c > 0$ $(ax^2 + bx + c < 0,\ ax^2 + bx + c \geq 0,\ ax^2 + bx + c \leq 0),\ a \neq 0.$

② Задаем функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0.$

③ Находим нули функции $f$, решив уравнение $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0.$

④ Изобразим схематически график функции $f$.

⑤ Находим значения $x$, при которых $f(x) > 0$ $(f(x) < 0,\ f(x) \geq 0,\ f(x) \leq 0).$

⑥ Записываем ответ.

**Применяем** • Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $-4x^2+4x-1\geq 0$.

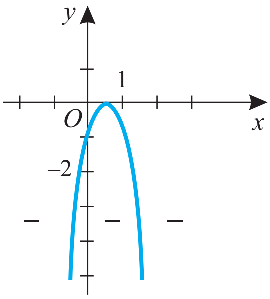


Рис. 3

*Решение*:

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-4x^2+4x-1$.

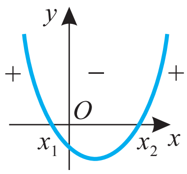
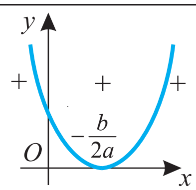
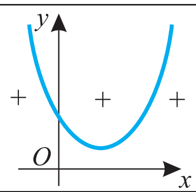
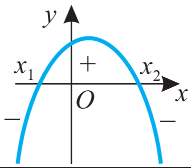
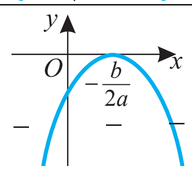
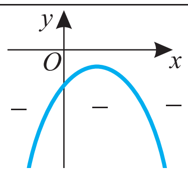
Находим нули функции $f$: $-4x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Построим в прямоугольной системе координат график функции $f$ (рис. 3). По графику определяем, что $f(x)\geq 0$ только при $x=\frac{1}{2}$.

*Ответ*: $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Данный способ решения неравенств II степени основан на свойствах функции II степени.

**Исследование неравенств вида $ax^2+bx+c>0,\ a\neq 0$, и $ax^2+bx+c\geq 0,\ a\neq 0$**

| Значения | | Знаки функции $f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ | Множество решений неравенства $ax^2+bx+c>0,\ a\neq 0$ | Множество решений неравенства $ax^2+bx+c\geq 0,\ a\neq 0$ |
|---|---|---|---|---|
| $a$ | $\Delta$ | | | |
| $a>0$ | $\Delta>0$ |  | $S=(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\ +\infty)$ | $S=(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ +\infty)$ |
| | $\Delta=0$ |  | $S=\left(-\infty;\ -\frac{b}{2a}\right)\cup\left(-\frac{b}{2a};\ +\infty\right)$ | $S=\mathbb{R}$ |
| | $\Delta<0$ |  | $S=\mathbb{R}$ | $S=\mathbb{R}$ |
| $a<0$ | $\Delta>0$ |  | $S=(x_1;\ x_2)$ | $S=[x_1;\ x_2]$ |
| | $\Delta=0$ |  | $S=\varnothing$ | $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$ |
| | $\Delta<0$ |  | $S=\varnothing$ | $S=\varnothing$ |

**Запомните!** Неравенства вида $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, $a\neq 0$, всегда можно свести к неравенствам рассмотренных в таблице видов путем умножения обеих частей неравенства на $-1$.

## 2.2. Метод интервалов

***Исследуем***

- Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x^2 - 2x - 15 < 0$.

*Решение*:

Разложим на множители левую часть неравенства: $x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$. Зададим функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$, и $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$. Составим таблицу знаков функций $f$ и $g$:

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | | $5$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | – | – | – | 0 | + |
| $g(x)$ | – | 0 | + | + | + |
| $f(x)\cdot g(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |

Из таблицы следует, что на каждом из интервалов $(-\infty, -3)$, $(-3, 5)$ и $(5, +\infty)$ функция $f \cdot g$ сохраняет свой знак. Говорят, что при переходе через точки – 3 и 5 знак функции $f \cdot g$ меняется следующим образом:


Следовательно, $x^2 - 2x - 15 < 0$ при $x \in (-3; 5)$.

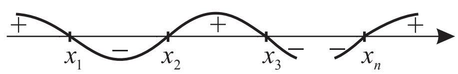
*Ответ*: $S = (-3; 5)$.

***Обобщим***

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – различные действительные числа, являющиеся ее нулями.

В каждом из интервалов, на которые разбивается область определения функции $f$ ее нулями $x_1, x_2, \ldots, x_n$, знак функции сохраняется, а при переходе через нуль функции ее знак меняется.

Изменение знаков функции $f$ графически изображается при помощи «кривой знаков»:




Изображение интерпретируется так: на интервалах, где «кривая знаков» расположена выше числовой оси, выполняется неравенство $f(x) > 0$, а на интервалах, где «кривая знаков» расположена ниже числовой оси, выполняется неравенство $f(x) < 0$.

Этот метод решения называют ***методом интервалов***.

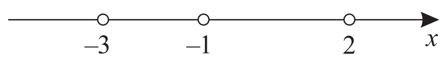
**1** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $(x-2)(x+1)(x+3) > 0$.

*Решение*:

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-2)(x+1)(x+3)$.

Находим нули функции $f$: $f(x) = 0$ при $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Отметим на числовой оси нули функции $f$:

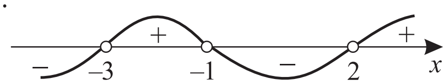



Определим знак функции $f$ на интервале $(2, +\infty)$. Для этого выберем любую точку интервала и определим знак функции $f$ в этой точке:

$$4 \in (2, +\infty),\ f(4) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 > 0.$$

Следовательно, $f(x) > 0$ при $x \in (2, +\infty)$.

Аналогично поступаем с остальными интервалами и строим «кривую знаков»:




Таким образом, $f(x) > 0$ при $x \in (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

*Ответ*: $S = (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

**2** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x(6-x)(x+2)\le 0$.

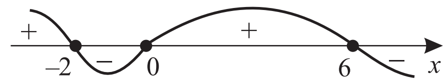
*Решение*:

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x(6-x)(x+2)$.

Находим нули функции $f$:

$f(x)=0$ при $x_1=-2,\ x_2=0,\ x_3=6$.

Строим «кривую знаков»:




Следовательно, $f(x)\le 0$ при $x\in[-2,\ 0]\cup[6,\ +\infty)$.

*Ответ*: $S=[-2,\ 0]\cup[6,\ +\infty)$.

## 2.3. Рациональные неравенства

*Исследуем*

• Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\dfrac{2x+6}{x-1}<0$.

*Решение*:

$\dfrac{2x+6}{x-1}<0 \Leftrightarrow (2x+6)(x-1)<0$.

Рассмотрим функцию $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=(2x+6)(x-1)$.

Замечаем, что $g(x)=0$ при $x_1=-3,\ x_2=1$.

Строим «кривую знаков»:


Таким образом, $g(x)<0$ при $x\in(-3,\ 1)$.

*Ответ*: $S=(-3,\ 1)$.

**Определение**

Неравенства вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}\ge 0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}<0,\ \dfrac{P(x)}{Q(x)}\le 0$, где $P(X),\ Q(X)$ – многочлены, соответствующие числителю $P(x)$ и знаменателю $Q(x)$, называются **дробно-рациональными неравенствами с одним неизвестным**.

*Замечание*

При решении неравенства $\dfrac{2x+6}{x-1}<0$ можно было не переходить к равносильному ему неравенству $(2x+6)(x-1)<0$, а рассмотреть функцию $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x+6}{x-1}$, найти нули этой функции (нули числителя) и нули знаменателя соответствующей алгебраической дроби и отметить их на числовой оси, построить «кривую знаков» и получить ответ.

Для решения дробно-рациональных неравенств с одним неизвестным методом интервалов можно применить следующий ***алгоритм***:

① Равносильными преобразованиями приводим исходное неравенство к неравенству вида $\dfrac{P(x)}{Q(x)}>0\ (\ge,<,\le)$, где $P(X)$ и $Q(X)$ – многочлены, соответствующие числителю $P(x)$ и знаменателю $Q(x)$.

② Определяем множество $D$, которое находим, исключив из множества $\mathbb{R}$ решения уравнения $Q(x)=0$.

③ Задаем функцию $f\colon D\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

④ Находим нули функции, то есть нули числителя, решив уравнение $P(x)=0$.

⑤ Отмечаем на числовой оси множество $D$ и нули функции $f$.

⑥ Строим «кривую знаков».

⑦ Выбираем интервалы, соответствующие знаку функции $f$.

⑧ Записываем ответ.

**Применяем**

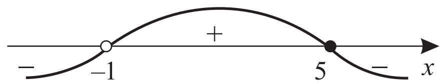
- Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\dfrac{5-x}{2x+2} \geq 0$.

*Решение*:

$2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{5-x}{2x+2}$. Отметим, что $f(x)=0$ при $x=5$. Учитываем, что 5 – решение неравенства, а –1 не является его решением.

Строим «кривую знаков»:




Следовательно, $f(x) \geq 0$ при $x \in (-1,\ 5]$.

*Ответ*: $S=(-1,\ 5]$.

**Запомните!**

**1.** Значения, при которых функция $f$ не определена (нули знаменателя), не включаются в множество решений исходного неравенства (графически на числовой оси нули знаменателя изображаются незакрашенными кружочками).

**2.** Нули функции $f$ (нули числителя) не включаются в множество решений исходного неравенства, если это неравенство содержит символ > или <. Нули функции $f$ включаются в множество решений исходного неравенства, если это неравенство содержит символ ≥ или ≤ (в этом случае графически на числовой оси нули изображаются закрашенными кружочками) и нули принадлежат $D(f)$.

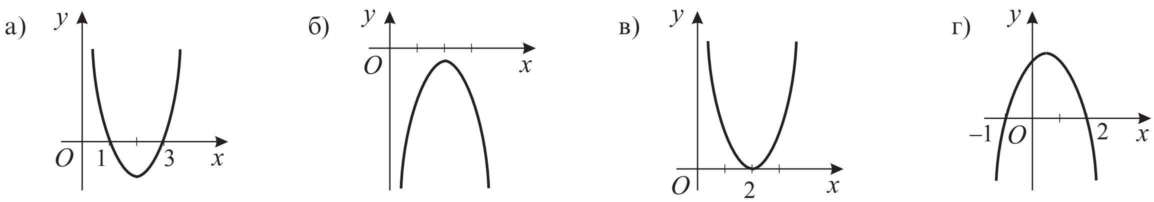
## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Равносильны ли неравенства?

а) $x^2 \leq 1$ и $x \leq 1$; б) $x^2 > 4$ и $x > 2$; в) $(x+3)^2 \geq 0$ и $(x+5)^2 \geq 0$.

**2.** *Исследуйте!* Функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, задана графически. Запишите, используя график, множество решений каждого из неравенств $f(x)>0$, $f(x) \geq 0$, $f(x)<0$, $f(x) \leq 0$.




**3.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $6x^2-7x+2>0$; б) $-x^2-2x+48<0$; в) $8x^2+10x-3 \leq 0$; г) $25x^2-10x+1>0$;
д) $49x^2-28x+4 \leq 0$; е) $4x^2-4x+15>0$; ж) $7x<x^2$; з) $4x^2-x<5$.

**4.** Решите методом интервалов на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $(x+8)(x-5)>0$; б) $x(x+2) \leq 0$; в) $\dfrac{x-5}{x+6}<0$; г) $\dfrac{x+1}{x+4} \geq 0$; д) $\dfrac{2x-1}{1-3x} \geq 0$.

### Формируем способности и применяем

**5.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $x(x+5)-2>4x$; б) $(x+4)(x+5)-x \leq 5$; в) $(5x+1)(3x-1)>(4x-1)(x+2)$; г) $2x(3x-1) \geq 4x^2+5x+9$.

**6.** *Работайте в парах!* Составьте неравенство II степени по его множеству решений:

а) $S=\mathbb{R}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=[-2;\ 3]$; г) $S=(-\infty;\ 1) \cup (5;\ +\infty)$; д) $S=\{3\}$.

**7.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $3x^2+4 \leq 10-x(x-2)$; б) $(3x-2)^2 \geq 3x(x-1)$; в) $\dfrac{-3}{x^2+x-20} \geq 0$; г) $\dfrac{1}{x^2+5x+7}<0$.

**8.** *Работайте в парах!* Найдите область определения функции $f\colon D \to \mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{1-x-2x^2}$;  б) $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{3x^2+12x}}$.

**9.** *Работайте в группах!* Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $x(x+2)(x-3)<0$;  б) $(2x+1)(3-x)(x+5)\ge 0$;  в) $(x-1)(x^2-5x+6)\le 0$;  г) $\dfrac{x^2-x-6}{x-1}\ge 0$.

### Развиваем способности и творим

**10.** Можно ли из листа бумаги размером 10 на 3 см вырезать прямоугольник, у которого ширина на 4 см меньше длины, а площадь больше, чем 21 см²?

**11.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $\dfrac{4x-2}{3x+5}+4\le 0$;  б) $3-x\ge\dfrac{1}{2-x}$;  в) $x+\dfrac{2}{x}>3$;  г) $\dfrac{7x-5}{x+1}>x$.

**12.** Найдите область определения функции $f\colon D\to\mathbb{R}$:

а) $f(x)=\sqrt{-x^2+x+30}+\dfrac{1}{x-1}$;  б) $f(x)=\sqrt{x^2-x-42}+\sqrt{100-x^2}$.

**13.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ двойное неравенство: а) $-4\le x^2-5x+2\le -2$;  б) $-1<x^2+2x<3$.

**14.** При каких значениях действительного параметра $m$ неравенство выполнено для любых действительных значений: а) $5x^2-x+m>0$;  б) $mx^2-10x-5<0$?

**15.** При каких значениях действительного параметра $a$ неравенство не имеет решений?

а) $x^2+ax+1<0$;  б) $ax^2+4ax+5\le 0$.

## Упражнения и задачи на повторение

### Закрепляем знания

**1.** Найдите наибольшее целое решение неравенства: а) $x+2\ge 2{,}5x-1$;  б) $x-\dfrac{x+4}{4}+\dfrac{3x-1}{2}<3$.

**2.** *Исследуйте!* Найдите наименьшее натуральное число, принадлежащее множеству решений неравенства $3x-2<1{,}5x+4$.

**3.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $x^2+3x+2>0$;  б) $2x<x^2$;  в) $4x^2<1$;

г) $(x-3)(x+7)\ge 0$;  д) $x^2-x+3>0$;  е) $\dfrac{x-5}{3x+3}\le 0$.

### Формируем способности и применяем

**4.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств: а) $\begin{cases} x-4>5-2x, \\ 3-2x<7+x; \end{cases}$  б) $\begin{cases} 10x-2>4x+1, \\ 2x-\dfrac{2}{3}>\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

**5.** *Исследуйте!* Найдите наименьшее целое число, принадлежащее области определения функции, заданной формулой $f(x)=\sqrt{4+x+\dfrac{3}{x}}$.

**6.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство:

а) $(x-4)^2+12\ge(3x-2)^2$;  б) $3x(x+\sqrt{3})\le(x+\sqrt{3})^2$;

в) $\dfrac{(x-2)(x^2+4)}{3x+1}\le 0$;  г) $\dfrac{7x}{3x-4}\ge 1$.

**7.** *Работайте в парах!* При каких значениях $x$ значения функции $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2-14x+20$, больше соответствующих значений функции $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2x-16$?

**8.** (EG, 2021) Дана функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x-2$. Найдите действительные значения $x$, при которых значения выражения $f(1)-f(x)$ неотрицательные.

**9.** (EG, 2023) Дана функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-4$. Найдите действительные значения $x$, при которых $f(3)\cdot f(x)<3x$.

### Развиваем способности и творим

**10.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ систему неравенств: а) $\begin{cases} x-2>5x-\dfrac{x-3}{2}, \\ |3x+2|<10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x-2|\geq 6, \\ |x-5|\leq 3. \end{cases}$

**11.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ двойное неравенство $1<\dfrac{7x-2}{2x+1}<3$.

**12.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $\dfrac{|x+1|}{x^2+4x-12}\geq 0$.

**13.** При каких значениях действительного параметра $a$ неравенство $ax^2-8ax+3a+7\geq 0$ не имеет решений на множестве $\mathbb{R}$?

**14.** При каких значениях действительного параметра $a$ неравенство $(a^2-1)x^2+2(1-a)x+2\geq 0$ выполняется для любых $x\in\mathbb{R}$?

**15.** Решите на множестве $\mathbb{Z}$ уравнение $28x+30y+31z=365$.
*Указание*. Одно из решений уравнения представляет месяцы года.

**16.** *Работайте в группах!* **Проект:** *Уравнения, неравенства, системы в химии и физике.*

## Итоговый тест

*Время выполнения работы: 45 минут*

### Вариант I

**1.** Даны выражения $E_1=\dfrac{2x-5}{3}$ и $E_2=-\dfrac{4x+1}{5}$.
а) Найдите действительные значения $x$, при которых $E_1<E_2$.
б) Найдите действительные значения $x$, при которых сумма выражений $E_1$ и $E_2$ является неотрицательным числом.
в) Решите на $\mathbb{R}$ систему $\begin{cases} E_1>0, \\ E_2\leq 0. \end{cases}$

**2.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x(x-5)-8\geq 2x$.

**3.** Даны функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+x-3$, и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+5$.
а) Отметьте букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно:
«Функция $g$ принимает положительные значения при $x\in(5,+\infty)$». **И** **Л**
б) Найдите $x\in\mathbb{R}$, при которых $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0$.

**4.** Условия одноразового посещения одного бассейна: стоимость 1 часа – 20 леев; минимальная сумма, которую должен потратить клиент – 40 леев. Условия одноразового посещения другого бассейна: стоимость 1 часа – 15 леев; минимальная сумма, которую должен потратить клиент – 60 леев. Через сколько часов посещение второго бассейна станет выгоднее, чем посещение первого бассейна?

### Вариант II

**1.** Даны выражения $M_1=\dfrac{1-3x}{2}$ и $M_2=\dfrac{2x+3}{7}$.
а) Найдите действительные значения $x$, при которых $M_1<M_2$.
б) Найдите действительные значения $x$, при которых разность $M_1-M_2$ является неотрицательным числом.
в) Решите на $\mathbb{R}$ систему $\begin{cases} M_1\leq 0, \\ M_2>0. \end{cases}$

**2.** Решите на множестве $\mathbb{R}$ неравенство $x(x-3)-6\leq 2x$.

**3.** Даны функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+6$, и $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x^2-8x-3$.
а) Отметьте букву **И**, если высказывание истинно, или букву **Л**, если оно ложно:
«Функция $f$ принимает отрицательные значения при $x\in(6,+\infty)$». **И** **Л**
б) Найдите $x\in\mathbb{R}$, при которых $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0$.

**4.** Условия подключения к интернету фирмой Moldnet: 240 леев за установку и 150 леев – ежемесячная плата за обслуживание. Условия подключения к интернету фирмой Supernet (при той же скорости интернета): 300 леев за установку и 140 леев – ежемесячная плата за обслуживание. Через сколько месяцев после подключения предложение фирмы Moldnet станет более выгодным?

Глава **6**

# Элементы теории вероятностей и математической статистики. Элементы финансовой математики

*«Человек без образования подобен почве без полива».*
Пословица

Мы довольно часто используем слова: *события*, *случайно*, *возможно*, *вероятно*, *достоверно*, *шанс*, *вероятность*. Что означают эти понятия? Зачем нужно их знать? Когда и как мы можем их применять?

Ответы мы узнаем в этой главе.

## §1. Понятие события


*Исследуем*

1. Бросают игральную кость. Какая грань выпадет при проведении эксперимента «Бросание игральной кости»?

2. Даниела купила лотерейный билет. Этот билет может быть выигрышным или не выигрышным. Существуют ли другие возможные исходы?

3. Рассмотрим эксперимент «Бросание баскетбольного мяча в корзину». Каковы возможные результаты этого эксперимента?

*Решение*:

1. Нельзя предусмотреть с точностью, какая из граней с очками 1, 2, 3, 4, 5 или 6 выпадет.

2. Конечно, билет может быть выигрышным или не выигрышным, других возможностей не существует.

3. Результатами эксперимента «Бросание баскетбольного мяча в корзину» могут быть: попадание или нет.

Бросание игральной кости, покупка лотерейного билета, бросание баскетбольного мяча в корзину являются примерами экспериментов.

**Определения**

- Повторение некоторого эксперимента называется **испытанием**.
- Результат эксперимента называется **событием**.

Например, «Выпадение грани с 5 очками» – это событие эксперимента «Бросание игральной кости»; «Билет не выигрышный» – это событие эксперимента «Участие в лотерее».

Существует много событий, о которых нельзя сказать с точностью, наступят они или нет. Например, события «Выпадение грани с 3 очками», «Попадание мяча в корзину» нельзя предугадать с полной уверенностью. Они зависят от многих случайных факторов и называются *случайными событиями*.

**Определение**

**Случайным событием** называется событие, которое в результате эксперимента может наступить, а может и не наступить.

Событие «Выпадение одной из граней с 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очками при бросании игральной кости» является достоверным, а событие «Извлечение двух зеленых карандашей из коробки с синими или красными карандашами» является невозможным. Событие «Кошка разговаривает» также является невозможным событием.

**Определение**

- **Невозможным событием** называется событие, которое в результате эксперимента не может наступить. Невозможное событие обозначается $\varnothing$.
- **Достоверным событием** называется событие, которое обязательно наступит в результате любого испытания. Достоверное событие, как правило, обозначается $E$.

Например, событие «После вторника следует воскресенье» является невозможным, а событие «После июня следует июль» является достоверным.

***Запомните!***

События могут быть достоверными, невозможными или случайными.
События обозначаются, как правило, заглавными буквами латинского алфавита: $A$, $B$, $C$, ...
Событие взаимосвязано с соответствующим экспериментом.

***Внимание!*** В рамках одного эксперимента выделяют общее число возможных исходов и число благоприятствующих событию исходов из общего числа возможных исходов.

***Примеры***

**1.** При бросании монеты выделяют два исхода: {орел, решка}. Значит, имеем два случайных события: $A$ = {выпал «орел»}; $B$ = {выпала «решка»}.


Таким образом, и событие $A$, и событие $B$ имеют по одному благоприятствующему исходу из двух возможных исходов.

**2.** При бросании игральной кости может выпасть одна из граней: с 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очками. Значит, всего существуют шесть исходов: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

***Замечание***

При бросании игральной кости могут быть определены и другие события, не только выпадение грани с 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очками. Такие события будут рассмотрены ниже.

Существуют события, имеющие равновозможные исходы. Например, если в коробке содержится одинаковое количество синих и красных карандашей, то событие $B$ = {извлечен синий карандаш} и событие $C$ = {извлечен красный карандаш} имеют одинаковые шансы наступить. В случае, когда количество красных карандашей в коробке больше, чем количество синих карандашей, событие $C$ более возможно, чем событие $B$.

***Применяем***

При бросании игральной кости рассмотрим события:

$A_1$ = {выпадение грани с 1 очком};
$A_2$ = {выпадение граней с 3 или 4 очками};
$A_3$ = {выпадение граней с 1, 2 и 3 очками};
$A_4$ = {выпадение грани с четным числом очков};
$A_5$ = {выпадение грани с нечетным числом очков};
$A_6$ = {выпадение грани с количеством очков меньше 5};
$A_7$ = {выпадение одной из грани с 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очками}.

1) Сопоставьте понятия «достоверное событие», «возможное событие», «событие более возможное, чем», «невозможное событие», «равновозможные события» с событиями $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, $A_7$.

2) Определите число благоприятствующих исходов к каждому из событий $A_1 - A_7$.

*Решение*:

1) События $A_1$, $A_2$, $A_4$, $A_5$, $A_6$ являются возможными; событие $A_3$ – невозможное; событие $A_7$ – достоверное; событие $A_2$ – более возможное, чем событие $A_1$; событие $A_6$ – более возможное, чем событие $A_2$; события $A_4$ и $A_5$ – равновозможные. (Предложите и другие сопоставления.)

2) Событие $A_1$ имеет только один благоприятствующий исход; событие $A_2$ – 2 благоприятствующих исхода; событие $A_3$ не имеет благоприятствующих исходов; событие $A_4$ имеет 3 благоприятствующих исхода; событие $A_5$ – 3 благоприятствующих исхода; событие $A_6$ – 4 благоприятствующих исхода; событие $A_7$ – 6 благоприятствующих исходов из 6 возможных.

**Запомните!** Элементы множества возможных исходов случайного эксперимента называются ***элементарными событиями***.

**Примеры**

а) При бросании игральной кости элементарными являются события $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$. Событие «выпадение нечетного количества очков» не является элементарным.

б) При бросании монеты рассматриваются 2 элементарных события: {выпадение «орла»}, {выпадение «решки»}.

**Запомните!** События случайного эксперимента являются **равновозможными**, если с уверенностью можно сказать, что все они имеют одинаковые шансы произойти.

**Примеры**

1. События $A_4$ и $A_5$ при бросании игральной кости равновозможны.
2. При бросании игральной кости имеем 6 равновозможных событий, относящихся к выпадению каждой из граней с 1, 2, 3, 4, 5, 6 очками.

**Замечание** Понятие *равновозможные события* позволяет сравнивать два случайных события с точки зрения шанса наступления. Достоверные и невозможные события встречаются не очень часто. Фактически мы живем в мире экспериментов и случайных событий. Поэтому важно знать, существуют ли какие-то закономерности в мире случайных событий. Можем ли мы заранее определить шанс наступления интересующего нас случайного события?

Ответы на такие вопросы дает важный раздел математики, который называется **теорией вероятностей**.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

1. Укажите несколько событий эксперимента:
а) выбирают наугад одно число из множества $\{10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100\}$;
б) бросают монету три раза;
в) нагревают воду до температуры $100°$;
г) играют партию в шахматы.

**2.** Определите и запишите элементарные события эксперимента:
а) выбирают один день недели;
б) выбирают старосту класса из двух кандидатов;
в) наугад извлекают шар из урны, содержащей 10 шаров, пронумерованных числами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;
г) наугад извлекают шар из урны, содержащей белые и черные шары.

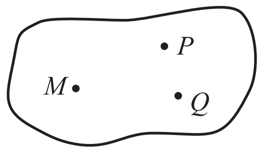
**3.** ***Работайте в парах!*** Определите, какие из следующих событий являются достоверными, невозможными, случайными:
а) В 2020 году население Земли будет составлять 8 млрд человек.
б) В 2016 году в Молдове родятся 25000 мальчиков.
в) После среды наступит вторник.
г) День рождения друга 30 февраля.
д) За субботой следует воскресенье.
е) После октября наступает декабрь.

## Формируем способности и применяем

**4.** ***Исследуйте!*** Сравните шансы наступления событий $A$ и $B$, используя выражения: «более возможно, чем», «менее возможно, чем», «равновозможные».
а) Вы проснулись утром:
$A$ = {наступил будний (рабочий) день};
$B$ = {наступил выходной (праздничный) день}.
б) Сборная Республики Молдова играет в футбол со сборной Бразилии:
$A$ = {выиграет сборная Республики Молдова};
$B$ = {выиграет сборная Бразилии}.

в) Подбрасывают игральную кость:
$A$ = {выпадет грань с 6 очками}; $B$ = {выпадет грань не с 6 очками}.
г) Выполняли тест по математике:
$A$ = {все ученики получили отметку 10}; $B$ = {некоторые ученики получили отметку 10}.

**4.** ***Исследуйте!*** Наугад соединяют 3 неколлинеарные точки.
Какие геометрические фигуры можно получить?
Каков шанс получить треугольник?




**6.** Подбрасывают одновременно две игральные кости и записывают сумму выпавших очков. Учитывая возможные результаты, приведите по два примера:
а) достоверных событий; б) невозможных событий; в) случайных событий.

**7.** Приведите примеры достоверных, невозможных, случайных событий из различных школьных дисциплин.

## Развиваем способности и творим

**8.** Приведите по 3 примера случайных, достоверных, невозможных событий некоторых случайных экспериментов из повседневной жизни.

**9.** В урне 5 белых, 8 черных, 10 красных шаров. Определите, какое наименьшее количество шаров необходимо извлечь наугад из урны, чтобы среди них были:
а) 2 красных шара; б) 3 черных шара; в) 1 белый;
г) 2 шара различных цветов; д) 3 шара различных цветов.

**10.** Подбрасываются одновременно 2 игральных кубика. Определите множество, элементы которого представляют событие «получение суммы в 6 очков».

**11.** В отделе работают 8 мужчин и 4 женщины. Наугад выбирают двух работников. Каков шанс, что отобранные работники являются мужчинами?

# §2. Понятие вероятности

## 2.1. Классическое определение вероятности

*Исследуем*

**1** Бросается игральная кость. Вычислите шанс выпадения:

а) 1 очка; б) числа очков, кратных 2; в) числа очков меньше 5; г) 8 очков.

*Решение*:

а) Шанс, что при бросании игральной кости выпадет 1 очко, равен одному из шести, или $1:6=0{,}1(6)$.

б) При бросании игральной кости может выпасть любая из граней с 1, 2, 3, 4, 5, 6 очками. Среди них только три числа (2, 4, 6) кратны 2. Следовательно, существуют три шанса из шести, что выпадет число, кратное 2, то есть, шанс этого события равен $3:6=0{,}5$.

в) Среди чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6, которые могут выпасть при бросании кости, только четыре числа (1, 2, 3 и 4) меньше 5. Следовательно, существуют четыре шанса из шести, чтобы выпавшее число очков было меньше 5, то есть, шанс равен $4:6=0,(6)$.

г) Так как ни одна грань игральной кости не содержит 8 очков, шанс выпадения грани с 8 очками равен 0.

**2** Бросают монету. Вычислите шанс наступления события:

а) выпадение «орла»; б) выпадение «решки».

*Решение*:

а) Есть один шанс из двух, что при бросании монеты выпадет «орел», или $1:2=0{,}5$.

Обозначаем: $P(s)=0{,}5$.

б) Для выпадения «решки» при бросании монеты также есть один шанс из двух, то есть, $1:2=0{,}5$.

Обозначаем: $P(b)=0{,}5$.

**3** В урне 3 белых, 5 черных и 4 красных шара. Извлекают наугад один шар. Вычислите шанс события, что выбранный шар будет:

а) белым; б) черным; в) красным.

*Решение*:

а) Шанс извлечения белого шара может быть представлен в виде отношения числа белых шаров и общего количества шаров в урне: $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}=0{,}25$.

Обозначаем: $P(a)=0{,}25$.

б) Из 12 шаров 5 шаров – черные. Значит, шанс извлечения черного шара равен $\frac{5}{12}=0{,}41(6)$.

Обозначаем: $P(n)=0{,}41(6)$.

в) Шанс извлечения красного шара равен $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}=0,(3)$.

Обозначаем: $P(r)=0,(3)$.

Замечаем, что для вычисления шанса наступления некоторого события находят значение отношения числа благоприятствующих исходов к общему числу исходов эксперимента. Полученное число является **вероятностью случайного события**.

**Определение**

**Вероятностью** случайного события $A$ называется отношение числа $m$ равновозможных исходов, благоприятствующих $A$, к общему числу $n$ всех равновозможных исходов эксперимента.

**Запомните!**

Вероятность события $A$ обозначается $P(A)$.

Согласно определению,

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1)$$

Формула (1) – ***классическое определение вероятности***.

**Примеры**

**1.** Вероятность выпадения «орла» при бросании монеты равна $P(s) = 0{,}5$, а вероятность выпадения «решки» равна $P(b) = 0{,}5$, так как $m = 1$, а $n = 2$.

**2.** Вероятность выпадения грани с 4 очками при бросании игральной кости равна $P(4) = \frac{1}{6}$, так как $m = 1$, а $n = 6$.

Иногда вероятность выражается в процентах.

Тогда для события «выпадение «орла» $P(s) = 50\%$, а для события «выпадение «решки» $P(b) = 50\%$.

Вероятность широко используется в жизненной практике, экономике, социологии и т.д. Например, если метеослужба объявила, что «завтра ожидается дождь с вероятностью 70%», то это не означает, что обязательно будет дождь, но шансы довольно велики. Поэтому, выходя из дома, стоит взять с собой зонтик.

## 2.2. Свойства вероятности

**Запомните!**

Из определения вероятности выведем следующие ***свойства вероятности***:

1° Вероятность достоверного события $E$ равна 1. Значит, $P(E) = 1$.

Действительно, так как $m = n$, то, согласно (1), получим $P(E) = \frac{n}{n} = 1$.

2° Вероятность невозможного события равна 0. Значит, $P(\varnothing) = 0$.

Действительно, так как $m = 0$, то, согласно (1), получим $P(\varnothing) = \frac{0}{n} = 0$.

3° Вероятность случайного события – это число, содержащееся между 0 и 1.

Действительно, число $m$ исходов, благоприятствующих случайному событию $A$, удовлетворяет двойному неравенству $0 < m < n$, откуда $0 < \frac{m}{n} < 1$. Следовательно, $0 < P(A) < 1$.

**Обобщим**

**1.** Вероятность любого события $A$ удовлетворяет двойному неравенству $0 \le P(A) \le 1$.

**2.** Чем вероятность больше, тем чаще наступает случайное событие при проведении соответствующего эксперимента.

**Применяем** **1** Вычислите вероятность события:

а) $A$ = {выпадение при бросании игральной кости одной грани с 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очками};

б) $B$ = {выпадение 9 очков при бросании игральной кости};

в) $C$ = {извлечение наугад белого шара из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров}.

2 Расположите полученные вероятности в порядке возрастания.

*Решение*:

**1.** а) Так как для события $A$ число благоприятствующих исходов равно $m=6$, а число всех возможных исходов равно $n=6$, получим $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{6}{6}=1$.

Итак, событие $A$ является достоверным событием, и его вероятность равна 1.

б) Так как при бросании игральной кости число исходов, благоприятствующих событию $B$, равно $m=0$, а число всех возможных исходов равно $n=6$, то получим:

$$P(B)=\frac{\square}{\square}=\square.$$

Событие $B$ является невозможным событием, и его вероятность равна 0.

Так как в урне $3+7=10$ (шаров), то число исходов, благоприятствующих событию $C$, равно $m=3$, а число возможных исходов равно $n=10$. Тогда:

$$P(C)=\frac{m}{n}=\frac{\square}{\square}=\square.$$

Событие $C$ является случайным событием, вероятность которого равна $\square$.

**2.** Расположив в порядке возрастания вычисленные вероятности, получим $0<0{,}3<1$ или $P(B)<P(C)<P(A)$.

***Запомните!***

Равновозможные события еще называют ***равновероятными событиями***. Вероятность каждого из равновероятных событий одна и та же.


Например, события {выпадение «орла»} или {выпадение «решки»} равновероятны при бросании ровной монеты. Но если подбрасывать деформированную монету, эти события уже не равновероятны, и вероятность каждого из них может быть вычислена только при проведении испытаний.

Вероятность событий можно вычислить без выполнения экспериментов, только если точно известно, что все возможные результаты эксперимента являются равновероятными.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** *Исследуйте!* Каков шанс того, что при бросании игральной кости выпадет грань с:
а) 6 очками; б) 0 очков; в) 10 очками; г) 3 очками?

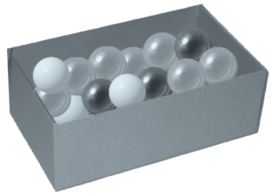
**2.** В наборе из 20 квадратов количество красных квадратов равно количеству синих квадратов. Каков шанс извлечения наугад красного квадрата? А синего квадрата?

**3.** *Работайте в парах!* Вычислите шанс выпадения при бросании игральной кости грани с количеством очков:
а) меньше 2; б) больше 2; в) меньше 3; г) меньше 6; д) больше 10.

**4.** Найдите вероятность извлечения белого шара из урны, содержащей 15 белых шаров.

**5.** Бросают игральную кость. Вычислите вероятность выпадения числа очков:
а) кратного 2; б) кратного 3; в) кратного 4; г) кратного 1.

**6.** Какова вероятность того, что после воскресенья наступит понедельник?



**7.** В урне 4 белых, 5 черных и 11 красных шаров. Вычислите вероятность того, что извлеченный наугад шар:
а) белый; б) черный; в) красный.

**8.** Какова вероятность того, что рыба заговорит?

**9.** *Исследуйте!* Найдите вероятность того, что взятое наугад натуральное ненулевое число меньше 91 является числом:
а) простым; б) четным; в) нечетным.

## Формируем способности и применяем

**10.** В корзине три пары рукавиц разного цвета. Вынимают наугад две рукавицы. Какова вероятность того, что пара рукавиц будет одного цвета?

**11.** В урне находятся 5 белых, 6 красных и 7 зеленых шаров. Наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар не будет белым?

**12.** В VIII классе 14 юношей и 17 девушек. Для дежурства в классе выбирают наугад одного ученика. Какова вероятность того, что этот ученик:
а) юноша; б) девушка?

**13.** В урне 6 белых, 5 желтых и 13 зеленых шаров. Определите, какое минимальное количество шаров нужно одновременно извлечь наугад из урны, чтобы среди них были:
а) два зеленых шара; б) два белых шара;
в) два желтых шара; г) два шара разных цветов.

**14.** В урне 30 шаров, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 30. Выбирают наугад один шар. Найдите вероятность событий:
$A$ = {на шаре – число, которое при делении на 5 дает в остатке 1};
$B$ = {на шаре – число, которое является точным квадратом}.

## Развиваем способности и творим

**15.** Найдите вероятность того, что взятое наугад ненулевое натуральное число меньше 501 имеет сумму цифр, равную 13.

**16.** В урне 50 жетонов, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 50. Извлекают наугад один жетон. Найдите вероятность событий:
$A$ = {на жетоне – число, взаимно простое с 15};
$B$ = {на жетоне – число, взаимно простое с 25};
$C$ = {на жетоне – число, взаимно простое с 30}.

**17.** 1) Приведите примеры трех экспериментов с:
а) равновероятными событиями;
б) событиями, которые не являются равновероятными.
2) Вычислите вероятность событий из пункта а).

**18.** Составьте и решите по одной задаче, подобной упражнениям 6, 7, 8, 10, 14.

**19.** *Работайте в группах!* **Проект:** *Приложения вероятностей в различных областях.*

## §3. Элементы математической статистики

*Исследуем*

• Ученики VIII класса получили следующие отметки за тест по математике: две 3, одну 4, семь 5, четыре 6, пять 7, три 8, четыре 9 и две 10. Представьте в виде таблицы соответствие между отметками от 1 до 10 включительно и количеством полученных отметок.

*Решение*:

Таблица содержит результаты тестирования учащихся VIII класса по математике.

| Отметка | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Частота | 0 | 0 | 2 | 1 | 7 | 4 | 5 | 3 | 4 | 2 |

Рис. 1

В этом случае говорят, что выполнен статистический анализ, сбор и регистрация некоторых данных.

*Запомните!*

***Математическая статистика*** – это наука, занимающаяся сбором, регистрацией, обработкой, анализом и интерпретацией данных, относящихся к некоторому явлению (из экономической деятельности или социальной жизни, из физики, биологии, метрологии, сельского хозяйства и др.).

### Определения

- Любое множество, элементами которого являются предметы статистического анализа, называется **статистической совокупностью.** Число элементов статистической совокупности называется **объемом совокупности**.
- Каждый элемент статистической совокупности называется **статистической единицей** (или **индивидуумом**).
- Общая черта всех статистических единиц совокупности называется **статистическим признаком**.
- Статистический признак, который может быть измерен (отметка, возраст, рост, объем и т.д.), называется **количественным признаком** (**числовым**).
- Статистический признак, который нельзя измерить (цвет глаз, предпочтения и т.д.), называется **качественным признаком**.
- Статистический признак, принимающий только некоторые изолированные значения из соответствующего множества значений, называется **дискретным признаком** (отметка, количество учащихся в классе и т.д.).
- Статистический признак, принимающий любое значение из определенного числового промежутка, называется **непрерывным признаком** (рост, объем, площадь и т.д.).

### *Примеры*

| Совокупность | Ученики класса | Ученики класса | Автомобили на фирме | Сотрудники фирмы | Сотрудники фирмы |
|---|---|---|---|---|---|
| Признак | Отметка за тест по математике | Цвет глаз | Продолжительность эксплуатации | Возраст | Вес/ Масса тела |

Признаки *отметка за тест по математике*, *продолжительность эксплуатации*, *возраст*, *вес* – это количественные признаки, а признак *цвет глаз* – качественный признак.

**1** Укажите в примере, приведенном в начале параграфа:

а) статистическую совокупность; б) статистические единицы;

в) статистический признак и его тип.

*Решение*:

а) Статистическая совокупность – множество учащихся класса.

б) Статистическая единица – каждый учащийся класса.

в) Статистический признак – отметка, полученная при тестировании; тип – дискретный признак.

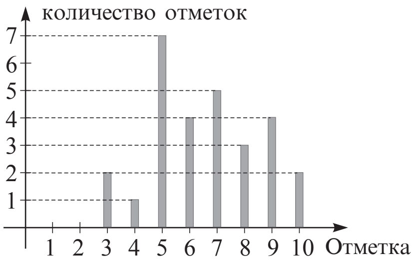


Рис. 2

**2** Представьте в виде столбчатой диаграммы результаты тестирования по математике из примера, приведенного выше.

*Решение*:

Графическое представление изображено на рисунке 2.

Результаты, полученные при статистическом анализе, могут быть представлены в виде таблицы (*таблица статистических данных* (рис. 1) или с помощью графиков (*столбчатые, круговые и квадратные диаграммы, диаграммы структурного типа* (*структурный круг, квадрат*) и т.д.).

Например, на рисунке 3 (структурный круг) представлена возможная структура сельскохозяйственной площади и способ ее распределения.

Рисунок 4 (квадратная диаграмма) представляет динамику изменения количества книг в библиотеке за определенный период времени.

Выпуск продукции некоторого предприятия за квартал (год, месяц, неделю, день) можно представить в виде графика, названного ***графиком производственной деятельности*** (рис. 5).

Рис. 3

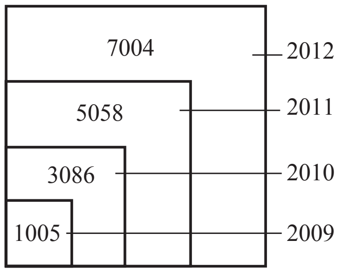


Рис. 4

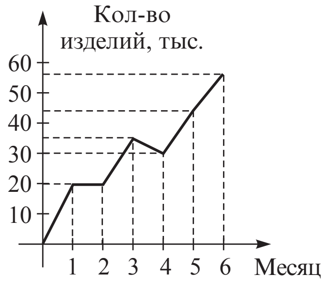


Рис. 5

***Запомните!*** При построении графиков, представляющих результаты некоторого статистического анализа, важно придерживаться соответствующей пропорциональности между статистическими данными.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** При статистическом анализе посещаемости уроков учащимися 5–9 классов в ноябре получены следующие результаты: в 5А классе – 10 пропусков уроков, в 5Б – 8 пропусков, в 6А – 4 пропуска, в 6Б – 2 пропуска, в 7 – 14 пропусков, в 8 – 7 пропусков, в 9А – 8 пропусков, в 9Б – 3 пропуска.

а) Укажите: статистическую совокупность, статистические единицы, статистический признак и его тип.

б) Представьте полученные результаты:

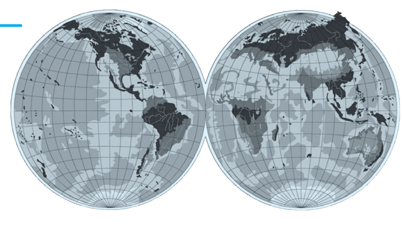
1) в виде таблицы; 2) в виде столбчатой диаграммы.

**2.** *Исследуйте!* Пусть зарегистрированы статистические данные относительно роста учащихся вашего класса.

а) Укажите: статистическую совокупность, статистические единицы, статистический признак.

б) Представьте полученные статистические данные в виде таблицы.

### Формируем способности и применяем



**3.** Изобразите с помощью структурного круга количество юношей и количество девушек в вашем классе.

**4.** Представьте, используя квадратные диаграммы, площади континентов (данные можно найти в учебнике по географии).

5. Изобразите в виде столбчатой диаграммы распределение учащихся вашей школы по классам.
6. *Минипроект.* Записывайте каждый час температуру воздуха в воскресенье. Представьте эти данные в виде графика.

### Развиваем способности и творим

7. *Исследуйте!* Выполните статистический анализ некоторого события (эксперимента) из социальной жизни, экономики и т. д. Соберите, запишите и представьте полученные данные в виде таблицы, графика или диаграммы.
8. *Работайте индивидуально!* **Исследуйте.** *События в моей жизни.*

## §4. Элементы финансовой математики

В различных ситуациях обсуждается финансовое положение в семье, в государстве, на работе и т. д. Используются термины: *процент*, *прибыль*, *НДС*, *цена*, *кредит*, *бюджет*. Что означают эти термины, когда и как мы можем их использовать?

Процент – *pro centum* (лат.) – разделить на сто.

### 4.1. Проценты

*Вспомним*

- Отношение вида $\frac{p}{100}$ (записывают $p\%$) называется **процентным отношением**.
- Один процент (1 %) – это одна сотая часть некоторой исходной величины.

$$p\,\% = \frac{p}{100};\quad 1\,\% = \frac{1}{100},\quad 25\,\% = \frac{25}{100}.$$

- $1 = 100\,\% = \frac{100}{100}$.

*Запомните!*

1. Чтобы вычислить, сколько процентов ($p$) составляет число $n$ от другого числа $m$, следует умножить значение отношения $\frac{n}{m}$ на 100 %:

$$\boxed{p\,\% = \frac{n}{m}\cdot 100\,\%}\,. \tag{1}$$

2. Чтобы найти $p\%$ от заданного числа $n$, применяем формулу:

$$\boxed{m = \frac{p}{100}\cdot n}\,. \tag{2}$$

3. Чтобы вычислить число $n$, зная, что число $m$ составляет $p\%$ от него, применяем формулу:

$$\boxed{n = \frac{100}{p}\cdot m}\,. \tag{3}$$

*Замечание*

Проценты как правило применяются в бизнесе, банковских и финансовых операциях и т.д.
Промилле используются в областях, где требуются расчеты с повышенной точностью. Например, в фармацевтической промышленности.

$0{,}1\,\% = 1\,‰ = \frac{1}{1000}$ – читается «промилле».

*Применяем*

**1** В классе 12 девочек, что составляет 48 % от общего числа учащихся этого класса. Сколько учеников в классе?

*Решение*:

Применим формулу (3) и получим: $n = \frac{100}{48}\cdot 12 = 25$.

*Ответ*: 25 учеников.

**2** Цена на товар упала на 10%. Через месяц новая цена упала еще на 20% и стала равной 207 леям. Вычислите первоначальную цену товара.

*Решение*:

Пусть $x$ – начальная цена. После первого снижения цена стала $x-\frac{10}{100}\cdot x=0{,}9x$ (леев). А после второго снижения цена равна $0{,}9x-0{,}2\cdot(0{,}9x)=0{,}9x(1-0{,}2)=$ $=0{,}8\cdot 0{,}9\cdot x=0{,}72$ (леев). После двух изменений цены получим: $0{,}72x=207$.

Итак, $x=207:0{,}72=287{,}5$ (лея).

*Ответ*: 287,5 лея.

## 4.2. Прибыль

Проценты широко применяются в финансовой области, в том числе для вычисления величины прибыли.

*Запомните!*

- ***Прибыль*** это сумма денег, которая должна быть уплачена за использование суммы денег (также называемой ***капиталом***), взятой взаймы или вложенной в банк.
- ***Процентная ставка*** – это процентное соотношение между прибылью (как правило, получаемой за год) и суммой (капиталом), взятой взаймы или вложенной в банк.

*Пример* Если 1 000 000 леев, вложенных на один год, приносит прибыль в размере 125 000 леев, то ***процентная ставка*** составляет 12,5%. Это соответствует ***ежемесячной процентной ставке*** в размере $\frac{12{,}5}{12}$ %, т.е. 1,04%.

*Запомните!*

Взаимосвязь между прибылью, временем вложения и процентной ставкой зависит от типа вложений.
Существуют ***вложения с простыми процентами*** и ***вложения со сложными процентами***.

*Применяем*

- Клиент вкладывает в банк 15 000 леев в виде вложения с простыми процентами. Годовая ставка – 11%. Какая сумма будет у клиента через 3 года?

*Решение*:

Сумма вклада (капитал) составляет $S_0=15\,000$ леев, а годовая процентная ставка равна $p=11\,\%$. Тогда прибыль за год составит $D=S_0\cdot\frac{p}{100}=15\,000\cdot\frac{11}{100}=1\,650$ (леев).

Таким образом, сумма через год будет равна $S_1=S_0+D=S_0+S_0\cdot\frac{p}{100}=15000+1650=$ $=16\,650$ (леев).

Через два года сумма будет равна $S_2=S_0+D+D=S_0+2D=S_0+2S_0\cdot\frac{p}{100}=18\,300$ (леев).

А через три года – $S_3=S_0+D+D+D=S_0+3D=S_0+3S_0\cdot\frac{p}{100}=19\,950$ (леев).

*Ответ*: 19 950 леев.

*Обобщим* В случае вложения суммы $S_0$ под простые проценты с годовой ставкой в $p$%, через $n$ лет прибыль будет $\boxed{D_n=n\cdot D=S_0\cdot n\cdot\frac{p}{100}}$, а итоговая сумма – $\boxed{S_n=S_0\left(1+n\cdot\frac{p}{100}\right), n\in\mathbb{N}^*}$.

*Запомните!*

Сумма вложена в режиме ***со сложными процентами*** тогда, когда в конце первого периода вложения прибыль в виде простых процентов, полученная от этой суммы, добавляется к первоначальной сумме для получения прибыли в следующем периоде. ***В таких случаях также говорят, что вложение реализуется с капитализацией.***

Пусть $S_0$ – первоначальная сумма, вложенная в виде вклада со сложными процентами на $n$ лет, а $p\%$ – одна и та же процентная ставка для каждого года. Итак, через год полученная прибыль будет равна $D_1 = S_0 \cdot \frac{p}{100}$. Эта прибыль добавляется к первоначальной сумме $S_0$.

Следовательно, сумма $S_1 = S_0 + D_1 = S_0 + S_0\frac{p}{100} = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$ становится суммой (капиталом), которая будет приносить прибыль на второй год.

Прибыль, полученная на второй год, равна $D_2 = S_1 \cdot \frac{p}{100} = S_0 \cdot \frac{p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Она прибавляется к сумме $S_1$ так, что сумма

$$S_2 = S_1 + D_2 = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right) + S_0\frac{p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right) = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$$

становится суммой (капиталом), которая будет приносить прибыль на третий год.

Через $n$ лет полученная прибыль будет равна $\boxed{D_n = S_0 \cdot \frac{p}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1}}$, а общая сумма – $\boxed{S_n = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}$.

**Внимание!**

В формуле $D_n$ обозначает прибыль, соответствующую каждому периоду (каждому году) вложения, то есть, прибыль, полученную за последний период (за последний год) вложения, то есть, за $n$-ый год. Не следует путать с прибылью, полученной за весь период вложения, которая рассчитывается по формуле $D_t = S_0 \cdot \left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^n - 1\right]$.

**Применяем** Вычислите прибыль и сумму, полученную через два года, от вложения 200 000 леев со сложными процентами с годовой ставкой 9%. Найдите общую прибыль, полученную за весь срок вложения.

*Решение*:

Имеем $S_0 = 200\,000$, $n = 2$, $p = 9\%$.

Тогда $D_2 = S_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^{2-1} = 200\,000 \cdot \frac{9}{100} \cdot \left(\frac{100+9}{100}\right) = 180 \cdot 109 = 19\,620$ (леев).

Общая сумма будет равна

$$S_2 = S_0 \cdot \left(1+\frac{p}{100}\right)^2 = 200\,000 \cdot \left(1+\frac{9}{100}\right)^2 = 200\,000 \cdot \frac{11\,881}{10\,000} = 237\,620 \text{ (леев).}$$

Итак, $D_2^* = S_0 \cdot \left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 - 1\right] = 200\,000 \cdot \left[\left(1+\frac{9}{100}\right)^2 - 1\right] = 37\,620$ (леев).

*Ответ*: Прибыль за второй год – 19 620 леев; общая сумма – 237 620 леев. Прибыль за весь срок вложения – 37 620 леев.

## 4.3. НДС, цены

При покупке товаров нас интересует как их качество, так и цена.

**Запомните!**

- ***Себестоимость*** – цена, отражающая все затраты на производство одной единицы товара (продукта): затраты на оплату рабочей силы, расходы, связанные со средствами производства (сырье, электроэнергия, оборудование, аренда помещения и т.д.), расходы на реализацию.
- ***НДС***, или ***налог на добавленную стоимость***, представляет собой доход (налог) в бюджет государства, оплачиваемый потребителями товаров и услуг. В государственный бюджет плата за добавленную стоимость перечисляется

каждым владельцем/потребителем. Эти сборы каждый раз добавляются к цене продажи и в конечном итоге оплачиваются потребителями.

НДС начисляется исходя из суммы дохода, которую хочет получить собственник товара (продукта).

- ***Ставка налога*** (***процент НДС***) является фиксированной и единоразовой на определенный период времени, устанавливаемый государством. Например, в Республике Молдова стандартная ставка составляет 20%, а ставка подоходного налога – 12% от годового налогооблагаемого дохода, но она может варьироваться в зависимости от определенных категорий доходов в соответствии с положениями Налогового кодекса.
- ***Цена продажи = себестоимость + НДС***. (В некоторых случаях цена продажи включает также ***коммерческую надбавку*** и ***прибыль производителя***.)

*Применяем* Цена продажи товара составляет 640,5 лея. Зная, что НДС составляет 20%, определите себестоимость товара.

*Решение*:

Пусть $x$ леев – начальная цена. Тогда $x+\frac{20}{100}x=640{,}5$.

Итак, $1{,}2x=640{,}5$, а $x=533{,}75$. *Ответ*: 533,75 лея.

## 4.4. Бюджет, кредиты

*Запомните!* Бюджет представляет собой учет доходов и расходов страны, фирмы, семьи, человека.

Чтобы избежать финансовых проблем, связанных с нехваткой денег, каждой семье, каждому человеку рекомендуется вести учет денег, планировать свои расходы и возможные доходы.

- ***Семейный бюджет*** (или ***личный бюджет***) – это план (проект) относительно семейных (или личных) доходов и расходов на определенный период времени (обычно, год или месяц).

Бюджет должен быть составлен таким образом, чтобы предусмотреть обязательные расходы (еда, одежда, транспорт, налоги и т.д.) и сбережения на непредвиденные расходы.

*Запомните!*

***Полезные советы по разумным расходам***

- Планируйте покупки.
- Обратите внимание на качество.
- Сравнивайте цены и магазины.
- Отслеживайте и используйте скидки.
- Договаривайтесь о цене, если это возможно.
- Читайте и анализируйте рекламные объявления.
- Рассмотрите гарантию и возможные варианты ремонта.
- Ищите перерабатываемые товары (продукты).

*Примеры* **1.** Дину – студент. Он составил следующий бюджет на апрель:

| Доход | | |
|---|---|---|
| 1. | Стипендия | 800 леев |
| 2. | Резерв | 500 леев |
| 3. | Помощь родителей | 1 400 леев |
| | Итого | 2 700 леев |

| Расходы | | |
|---|---|---|
| 1. | Транспорт | 100 леев |
| 2. | Аренда квартиры | 700 леев |
| 3. | Интернет | 300 леев |
| 4. | Продовольственные товары | 1 300 леев |
| 5. | Отдых (кино, театр и т.д.) | 250 леев |
| | Итого | 2 650 леев |

**2.** Месячный бюджет семьи Луческу:

| Доходы | | |
|---|---|---|
| 1. | Зарплаты | 18 400 леев |
| 2. | Пенсии | 7 250 леев |
| 3. | Процентные деньги | 300 леев |
| | Итого | 25 950 леев |

| Расходы | | |
|---|---|---|
| 1. | Коммунальные услуги | 2 360 леев |
| 2. | Абонемент TV, интернет | 270 леев |
| 3. | Продовольственные товары | 8 400 леев |
| 4. | Непродовольственные товары | 2 500 леев |
| 5. | Транспорт/бензин | 2 600 леев |
| 6. | Отдых (кино, театр, экскурсии и т.д.) | 1 000 леев |
| 7. | Нередвиденные расходы | 2 200 леев |
| | Итого | 19 330 |

*Запомните!* Любое культурное, семейное, государственное, религиозное мероприятие и т.д. организуется и осуществляется на основе рационального бюджета.

Источником временного увеличения доходов в случае необходимости является *кредит* (*займ*). Под ***кредитом*** понимается сумма денег, взятая взаймы на определенное время, которая подлежит возврату с уплатой процентов. Действие по предоставлению кредита называется ***кредитованием***.

Лицо (финансовый агент), предоставляющее кредит, называется ***кредитором***, заемная сумма называется ***кредитом***, а лицо (экономический агент), получающее кредит, называется ***дебитором*** (***должником***).

При оформлении кредита оговариваются и фиксируются в договоре срок и условия его ***погашения***.

Существуют различные типы кредитов: ***банковские, коммерческие, бюджетные кредиты; краткосрочные (до 1 года), среднесрочные (1–5 лет), долгосрочные (больше 5 лет) кредиты; внутренние кредиты, международные кредиты*** и т.д.

Кредит можно погасить как одним, так и несколькими платежами.

*Применяем* Банк предоставил предпринимателю кредит в размере 50 000 леев на два года под простые проценты с годовой процентной ставкой 15%. Вычислите сумму, которую предприниматель должен будет вернуть в конце срока погашения.

*Решение*:

По условию задачи, имеем $S_0 = 50\,000$ леев, $n = 2$, а $p = 15\%$.

Общая сумма составит $S_2 = S_0 \cdot \left(1 + \frac{2p}{100}\right) = 50\,000 \cdot \frac{130}{100} = 65\,000$ (леев).

*Ответ*: 65 000 леев.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Аграрной фирме предстоит вспахать 720 га. На первом этапе было вспахано 144 га. Какой процент от всей площади был вспахан?

**2.** 22% от суммы денег составляет 1 650 леев. Найдите первоначальную сумму.

**3.** По итогам учебного года 26% учащихся гимназии стали выпускниками. Сколько учеников было в гимназии, если осталось 370 учеников?

**4.** Какую прибыль принесет капитал в 74 000 леев в течение 1 года, если процентная ставка составляет 16%?

**5.** Клиент вложил в банк сумму в размере 160 000 леев под простые проценты сроком на 2 года и получил прибыль в размере 17 600 леев. Определите годовую процентную ставку.

**6.** *Работайте в парах!* Сумма в 12 миллионов леев помещена в режим вклада со сложными процентами и годовой процентной ставкой 10%. Найдите общую прибыль, полученную через 5 лет.

**7.** Вычислите годовую процентную ставку, если сумма, вложенная в режиме вклада со сложными процентами, за 2 года вырастет на 44%.

**8.** Найдите отпускную цену товара стоимостью 4 800 леев без НДС, если НДС составляет 24%.

**9.** Какова цена продажи телевизора, если затраты на производство составляют 8 250 леев, а НДС – 20%?

**10.** *Работайте в группах!* Перечертите и дополните таблицу.

| Товар | Цена продажи без НДС | НДС (20%) | Цена продажи с НДС |
|---|---|---|---|
| I | 2 000 | | |
| II | | | 8 000 |
| III | 12 300 | | |


**11.** В магазине выдали чек об оплате. Определите, правильно ли рассчитан НДС в леях.

**12.** Семья Пыслару составила месячный бюджет:

| Доходы | | |
|---|---|---|
| 1. | Зарплаты | 9 350 леев |
| 2. | Пенсии | 3 400 леев |
| | Итого | 12 750 леев |

| Расходы | | |
|---|---|---|
| 1. | Коммунальные услуги | 30% доходов |
| 2. | Абонемент TV, интернет | 200 леев |
| 3. | Продовольственные товары | 45% доходов |
| 4. | Транспорт/бензин | 700 леев |
| 5. | Школьные принадлежности | 350 леев |
| | Итого | ? леев |

а) Найдите общую сумму расходов.
б) Будет ли сумма доходов достаточной, чтобы покрыть необходимые расходы?

**13.** Составьте личный бюджет на март.

**14.** *Исследуйте!* Обсудите с родителями и составьте семейный бюджет на один зимний месяц.

**15.** Клиент берет кредит в размере 1 000 д.е. (денежных единиц) в режиме простых процентов сроком на 2 года с годовой процентной ставкой 10%. Какую сумму он должен будет вернуть?

**16.** Банк предоставил предпринимателю кредит в размере 12 000 д.е. сроком на 2,5 года в режиме простых процентов с годовой процентной ставкой 15%. Какую сумму получит банк в конце срока кредитования?

## Формируем способности и применяем

**17.** В школьной библиотеке 16 400 книг, из них 7 380 – учебники, а 25% от остальных – поэтические сборники.
а) Сколько процентов составляют учебники? б) Сколько поэтических сборников в библиотеке?
в) Сколько процентов от общего количества книг составляют остальные книги?

**18.** *Работайте в парах!* Семья рассчитывает приобрести холодильник по цене 9 500 леев. По случаю «черной пятницы» магазин предлагает скидку в размере 11%.
а) Сколько денег сэкономит семья? б) По какой цене был куплен холодильник?

**19.** ***Работайте в группах!*** Коммерческий банк указывает процентную ставку (в %) на конец срока в следующей таблице:

| Валюта / Срок | Леи | USD ($) | Евро | Леи (для сумм больше 25 млн) |
|---|---|---|---|---|
| 1 месяц | 12,50 | 2,20 | 3,20 | 15,00 |
| 3 месяца | 13,50 | 2,25 | 3,30 | 16,00 |
| 6 месяцев | 14,50 | 2,30 | 3,40 | 16,50 |
| 1 год | 14,75 | 2,50 | 4,00 | 17,50 |

Рассчитайте прибыли, соответствующие суммам:
1) 2 500 долларов; 2) 300 евро; 3) 5 млн леев; 4) 35 млн леев на срок:
а) 1 месяц; б) 3 месяца; в) 6 месяцев; г) 1 год.

**20.** Сумма в размере 100 млн леев вложена в банк сроком на 3 года в режиме вклада со сложными процентами с годовой процентной ставкой 14,5%.
а) Какова будет сумма депозита в конце срока? б) Какую общую прибыль принесет это вложение?

**21.** Капитал в размере 2,5 млн леев вложен в режиме вклада с простыми процентами сроком на 2 года с годовой процентной ставкой 12%.
а) Какую прибыль принесет этот депозит в конце срока размещения?
б) Какова будет сумма депозита по окончании срока размещения?

**22.** ***Работайте в парах!*** В магазине стиральная машина стоит 8 240 леев, а рядом с ценой указан НДС: 1 648 леев.
а) Найдите процент НДС. б) Какова себестоимость стиральной машины?

**23.** Цена продажи продукта составляет 5 280 леев. Эта цена состоит из себестоимости, коммерческой надбавки и НДС. Известно, что коммерческая надбавка составляет 14 % от себестоимости, а НДС составляет 18 % от себестоимости. Найдите себестоимость продукта.

**24.** Фирме предоставлен кредит в размере 20 миллионов леев сроком на 2 года в режиме сложных процентов. По итогам двух лет сумма кредита и прибыли составит 23 328 000 леев. Определите годовую процентную ставку.

**25.** Сумма в размере 100 000 леев берется фермером под простые проценты следующим образом: 2 года с годовой процентной ставкой 12%, 3 месяца под 15% и 9 дней под 20%. Определите финальную сумму, которую должет будет вернуть дебитор.
*Примечание*: Финансовый год состоит из 360 дней.

**26.** Семья планирует бюджет на Новый год. Запланированная сумма составляет 6 500 леев.
а) Используя данные фотографии, заполните таблицу так, чтобы расходы не превышали запланированную сумму.

| Расходы | | |
|---|---|---|
| 1. | Подарки детям | |
| 2. | Продовольственные товары | |
| 3. | Фрукты | |
| 4. | Сладости | |
| 5. | Фейерверки | |
| | Итого | |

б) Составьте аналогичный бюджет для празднования Нового года в вашей семье.

### ■■■ Развиваем способности и творим

**27.** 2 года и 3 месяца назад человек взял в долг 10 000 леев в режиме сложных процентов, начисляемых ежегодно. За прошедшие три года годовые процентные ставки были, соответственно, 15%, 17% и 20%. Определите, какую сумму должен заплатить человек и какова была соответствующая прибыль.

**28.** Клиент предполагает иметь через 5 лет банковский вклад в размере 210 млн леев. Какую сумму должен внести клиент в данный момент при режиме сложных процентов и годовой процентной ставке 20% , чтобы через 5 лет у него на счету была запланированная сумма?

**29.** ***Работайте в группах!*** **Проект:** *Финансы в нашей жизни.*

**30.** ***Работайте индивидуально!*** **Проект:** *Семейный и личный бюджет.*

## Упражнения и задачи на повторение

### ■ Закрепляем знания

**1.** ***Исследуйте!*** В коробке конфеты красного, желтого и зеленого цвета: половина конфет красного цвета, треть – желтого цвета, а остальные – зеленого цвета. Какой цвет менее вероятен при извлечении наугад одной конфеты из коробки?

**2.** В урне 12 шаров, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 12. Опыт состоит в извлечении наугад одного шара. Перечислите элементарные события этого опыта.

**3.** В корзине 7 зеленых и 14 красных яблок. Какова вероятность, что наугад извлеченное яблоко:
а) зеленое; б) красное?

**4.** Грани кубика окрашены в красный и желтый цвет. Вероятность выпадения грани желтого цвета при бросании кубика равна $\frac{1}{6}$, а грани красного цвета – $\frac{5}{6}$. Сколько желтых и сколько красных граней у кубика?

**5.** ***Работайте в парах!*** В урне 10 шаров, пронумерованных числами 1, 2, 3, ..., 10. Извлекают наугад один шар. Найдите вероятность того, что номер выбранного шара является числом:
а) простым; б) четным; в) нечетным; г) больше 4;
д) меньше 7; е) больше 11; ж) меньше 11; з) кратным 3.

**6.** Капитал в размере 25 млн леев размещен под простые проценты сроком на: 1) 1 год; 2) 3 года с годовой процентной ставкой 20%.
а) Определите, какую прибыль принесет это размещение за весь инвестиционный период.
б) Какова должна быть годовая процентная ставка на этот капитал, чтобы через 2 года он принес прибыль, равную прибыли, полученной через 3 года?

**7.** Какова годовая процентная ставка банковской операции, если первоначальный капитал в размере 60 000 д.е. определяет конечный капитал в размере 67 200 д.е.?

**8.** В магазине холодильник продается за 14 400 леев, включая НДС 20%. Найдите себестоимость холодильника.

### ■■ Формируем способности и применяем

**9.** Найдите вероятность того, что взятое наугад ненулевое натуральное число меньше 151 является:
а) степенью с показателем больше 1; б) точным квадратом.

**10.** В ящике 150 деталей. Известно, что 2% из них бракованные. Найдите вероятность того, что взятая наугад деталь будет без брака.

**11.** Из колоды в 36 карт наугад достают одну карту. Найдите вероятность того, что выбранная карта – туз.

**12.** Найдите вероятность того, что взятое наугад натуральное ненулевое число меньше 121 имеет сумму цифр, равную 9.

**13.** В пакете 6 красных и 12 зеленых яблок. Какое наименьшее количество яблок нужно взять одновременно, чтобы быть уверенным, что среди них будет хотя бы одно красное?

**14.** *Работайте в парах!* Равновероятны ли события:
а) $A$ = {из 30 билетов, пронумерованных числами 1, 2, 3, …, 30, наугад извлекается билет с номером 2};
$B$ = {из 30 билетов, пронумерованных числами 1, 2, 3, …, 30, наугад извлекается билет с номером 20}.
б) $A$ = {выигрыш в лотерее}; $B$ = {невыигрыш в лотерее}.

**15.** Кредит в 100 млн леев размещен под простые проценты с годовой процентной ставкой 10%. Определите, на какой период времени осуществляется инвестиция, если за период погашения будет получена прибыль в размере 5 млн леев.

**16.** Какова годовая процентная ставка банковской операции, если первоначальный капитал в 200 млн леев определит конечный капитал в размере 216 млн леев?

**17.** Цена продажи товара составляет 6 600 леев. Эта цена состоит из себестоимости, коммерческой надбавки и НДС. Известно, что коммерческая надбавка составляет 12% от себестоимости, а НДС – 20% от себестоимости. Найдите себестоимость товара.

**18.** Сумма в 2 000 д.е. берется в долг в режиме простых процентов следующим образом: 1 год с процентной ставкой 20%, 5 месяцев с процентной ставкой 15% и 15 дней с процентной ставкой 25%. Найдите полученную прибыль и общую сумму, которую вернет должник.

**19.** Физическое лицо берет кредит в размере 8 000 д.е. на 2 года. Найдите, какую сумму вернет должник, если:
а) годовая простая процентная ставка составляет 16%;
б) годовая сложная процентная ставка при годовой капитализации составляет 14%.

## Развиваем способности и творим

**20.** *Исследуйте!* Дима выиграет в игре, если извлеченный из урны шар будет белым. Какую урну должен выбрать Дима, чтобы вероятность выигрыша была наибольшей:
а) с 12 белыми шарами из 38;
б) с 45 белыми шарами из 105;
в) с 18 белыми и 54 красными шарами;
г) с одинаковым количеством белых, красных и черных шаров?

**21.** В урне шары, пронумерованные числами, состоящими из цифр 5, 6 и 7. Найдите вероятность того, что номер выбранного наугад шара начинается с цифры 5.

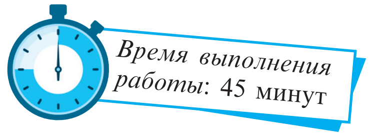
**22.** Монету подбрасывают 3 раза. Какова вероятность, что:
а) «орел» выпадет 2 раза;
б) «орел» выпадет хотя бы один раз?

**23.** Инвестор может разместить капитал в размере 10 млн леев в банке под 40% годовых или вложить средства в производство с ожидаемой эффективностью 150%. Производственные потери описываются квадратичной функцией, определяемой формулой $f(x)=0{,}05x^2$, где $x$ – стоимость инвестированного капитала в леях. Прибыль облагается налогом по ставке $p$%. При каких значениях $p$ вложение в производство будет более выгодным вложением капитала?

---

**30.** *Работайте индивидуально!* **Проект:** *Статистика в профессиях родителей.*

# Итоговый тест




## Вариант I

1. В корзине 3 красных и одно желтое яблоко.
Рассмотрим события:
$A_1 = \{$извлечение яблока красного цвета$\}$,
$A_2 = \{$извлечение яблока желтого цвета$\}$.
Заполните рамки:
а) $P(A_1) = \boxed{\phantom{000}}$; б) $P(A_2) = \boxed{\phantom{000}}$.

2. В лотерее участвуют 20 выигрышных билетов и 360 невыигрышных. Лиза приобрела лотерейный билет. Какова вероятность того, что этот билет выигрышный?

3. Бросают кубик, грани которого окрашены в синий и желтый цвет. Вероятность выпадения грани синего цвета равна $\frac{1}{3}$, а грани желтого цвета – $\frac{2}{3}$. Сколько синих и сколько желтых граней у кубика?

4. Цена продажи товара составляет 2 400 леев и рассчитывается с применением НДС 20 % к себестоимости.
Найдите себестоимость товара.

5. Человек положил в банк 4 000 леев под простые проценты. Какая сумма накопится через 2 года, если годовая процентная ставка составляет 8 %?

6. На диаграмме представлено распределение книг в школьной библиотеке:


а) Сколько процентов от общего числа составляют книги по математике?
б) Сколько всего книг в библиотеке, если книг по математике 240?

## Вариант II

1. В урне 1 белый и два красных шара.
Рассмотрим события:
$A_1 = \{$извлечение шара белого цвета$\}$,
$A_2 = \{$извлечение шара красного цвета$\}$.
Заполните рамки:
а) $P(A_1) = \boxed{\phantom{000}}$; б) $P(A_2) = \boxed{\phantom{000}}$.

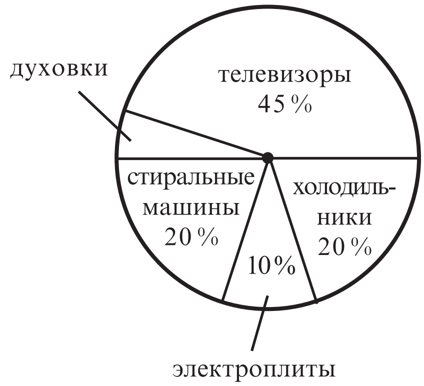
2. В лотерее участвуют 200 билетов, из которых 15 невыигрышных. Вычислите вероятность того, что участник лотереи не выиграет.

3. Бросают кубик, грани которого окрашены в коричневый и зеленый цвет. Вероятность выпадения грани коричневого цвета равна $\frac{2}{3}$, а грани зеленого цвета – $\frac{1}{3}$. Сколько коричневых и сколько зеленых граней у кубика?

4. Цена продажи товара составляет 1 800 леев и рассчитывается с применением НДС 20 % к себестоимости. Найдите себестоимость товара.

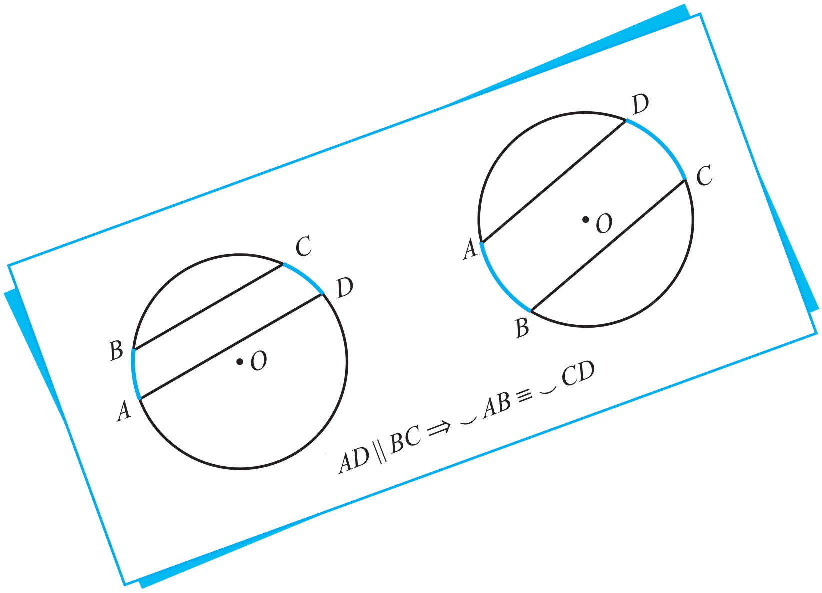
5. Человек положил в банк 6 000 леев под простые проценты. Какая сумма накопится через 2 года, если годовая процентная ставка составляет 10 %?

6. На диаграмме представлено распределение товара на складе:

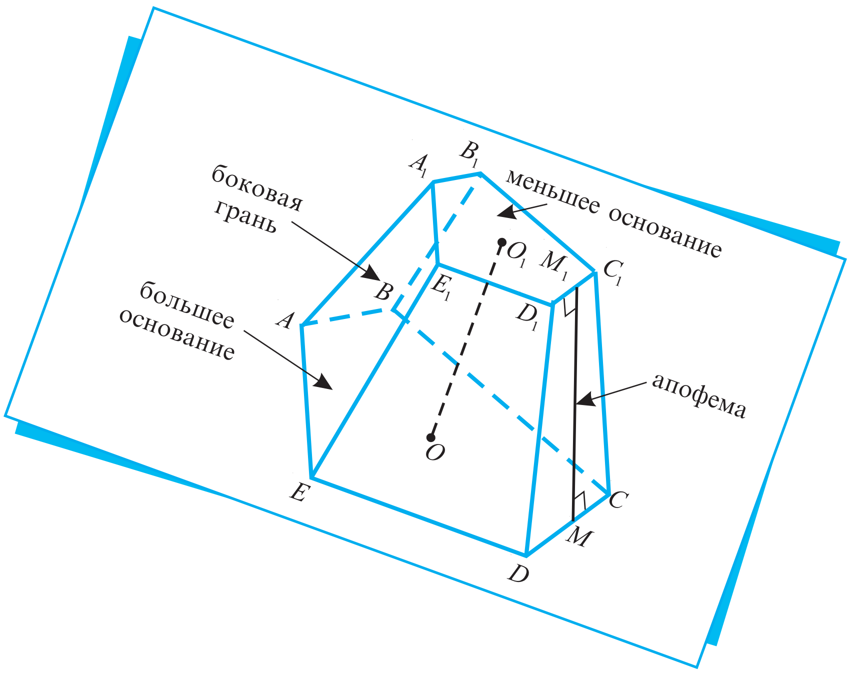



а) Сколько процентов от общего количества товаров составляют духовки?
б) Сколько единиц товара находится на складе, если духовок – 150?

# ГЕОМЕТРИЯ



A
B
C
D
O
AD || BC ⇒ ⌣AB = ⌣CD

боковая грань
меньшее основание
большее основание
апофема
A₁
B₁
C₁
D₁
E₁
M₁
O₁
A
B
C
D
E
M
O

Глава
# 1 Окружность

*«Геометрия – самая красивая форма математики».*
Прокл

## §1. Повторение и дополнения

### 1.1. Элементы окружности. Основные свойства

**Вспомним**

**1** Какую фигуру определяет множество:
а) точек, равноудаленных от концов заданного отрезка;
б) точек, расположенных на расстоянии 5 см от заданной точки.

**Определения**

- Пусть $r$ – действительное положительное число и $O$ – точка на плоскости. **Окружностью с центром** $O$ **и радиусом** $r$ называется множество всех точек плоскости, расположенных на расстоянии $r$ от точки $O$ (рис. 1). *Обозначаем*: $\mathscr{C}(O,r)$.
- Пусть $A \in \mathscr{C}(O,r)$. Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо ее точкой, называется **радиусом**.
- Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой.** Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**.
- Точки $A$ и $B$ окружности называются **диаметрально противоположными**, если $[AB]$ является диаметром.

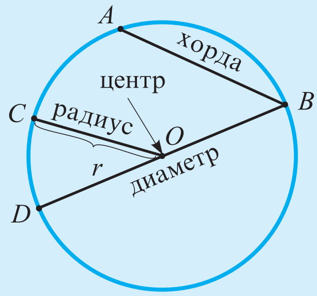


Рис. 1

- Вспомните определение конгруэнтных фигур и определите, какие из следующих окружностей конгруэнтны:
$\mathscr{C}_1(A, r=3 \text{ см})$, $\mathscr{C}_2(B, r=4 \text{ см})$, $\mathscr{C}_3(A, r=4 \text{ см})$, $\mathscr{C}_4(B, r=3 \text{ см})$.

**2** Точка $O$ – центр окружности (рис. 2). Назовите точки, расположенные от точки $O$ на расстоянии:
а) равном радиусу окружности;
б) меньшем радиуса окружности;
в) большем радиуса окружности.
Какие из этих точек принадлежат внутренней области окружности?

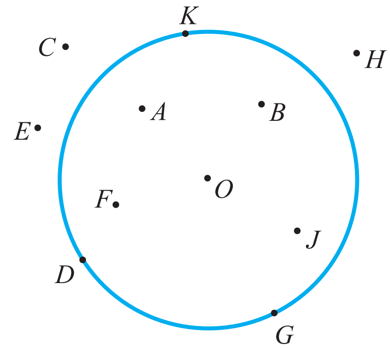


Рис. 2

## Определения

- Дана окружность $\mathscr{C}(O,r)$. Множество точек $M$ плоскости, для которых $OM < r$, называется **внутренней областью окружности**.
  *Обозначаем:* Int $\mathscr{C}(O,r)$.
- Множество точек $N$ плоскости, для которых $ON > r$, называется **внешней областью** окружности. *Обозначаем:* Ext $\mathscr{C}(O,r)$.
- Окружность $\mathscr{C}(O,r)$, объединенная со своей внутренней областью, называется **кругом с центром** $O$ **и радиусом** $r$. *Обозначаем:* $\mathscr{D}(O,r)$.
  Следовательно, $\mathscr{D}(O,r)=\mathscr{C}(O,r)\cup$ Int $\mathscr{C}(O,r)=\{M \mid OM \le r\}$.

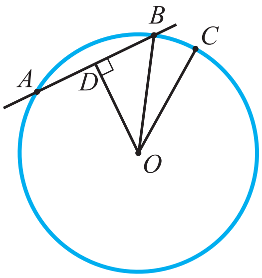


Рис. 3

**3** *Докажите, что любые **три различные точки окружности** на рисунке 3 **неколлинеарны**.

*Указание.* Рассмотрите рисунок 3. Докажите методом от противного, что $C \notin AB$, где $A$, $B$, $C$ – три произвольные различные точки окружности. Предположив, что $C \in AB$, рассмотрите прямоугольные треугольники $ODB$ и $ODC$.

• Какое наибольшее количество общих точек может быть у прямой и окружности?

## Исследуем

**4** Точка $O$ – центр окружности (рис. 4).

Что можно сказать об отрезке $OM$ и треугольнике $AOB$, если: а) $OM \perp AB$;

б) точка $M$ – середина отрезка $AB$?

Сделайте вывод.

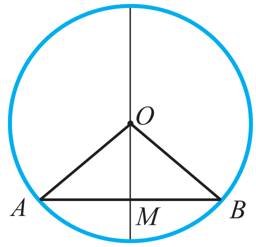


Рис. 4

## Теорема 1

Если диаметр окружности проходит через середину хорды, то он перпендикулярен этой хорде.

• Сформулируйте высказывание, обратное теореме 1, которое также является теоремой.

• Докажите теорему 1 и обратную ей теорему.

## Теорема 2

Если две хорды окружности конгруэнтны, то они равноудалены от центра этой окружности.

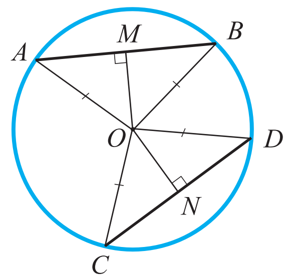


Рис. 5

*Докажем теорему 2.

*Условие*: $\{A,B,C,D\}\subset\mathscr{C}(O,r)$, $[AB]\equiv[CD]$.

*Заключение*: $\mathrm{d}(O,[AB])=\mathrm{d}(O,[CD])$.

*Доказательство*:

① $\Delta AOB\equiv\Delta COD$ (признак ССС). Пусть точки $M$, $N$ – середины отрезков $AB$ и $CD$ соответственно (рис. 5).

② Отрезки $[OM]$ и $[ON]$ являются медианами и высотами треугольников $AOB$ и $COD$. Согласно ①, $[OM]\equiv[ON]$.

③ $\mathrm{d}(O,[AB])=OM=ON=\mathrm{d}(O,[CD])$, ч. т. д. ►

• Высказывание, обратное теореме 2, также является теоремой. Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме 2.

• Переформулируйте в одну теорему вида «*Условие* тогда и только тогда, когда *Заключение*»:

а) теорему 1 и теорему, обратную ей; б) теорему 2 и теорему, обратную ей.

• Применив теорему 1, объясните, как можно найти неизвестный центр заданной окружности.

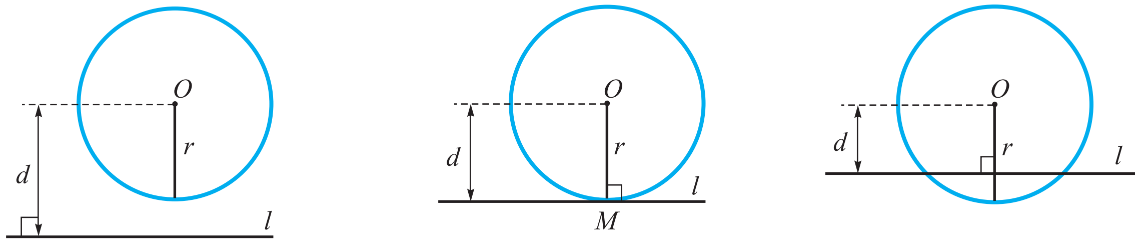
* Дополнительный материал

## 1.2. Взаимное расположение прямой и окружности

**Вспомним**

**1** Точка $O$ – центр окружности (рис. 6).

Обратите внимание, как называется прямая $l$ в каждом случае.




прямая, **не пересекающая** окружность

прямая, **касательная** к окружности; $M$ – точка касания

прямая, **секущая** к окружности

Рис. 6

• Пусть $d$ – расстояние от центра окружности $\mathscr{C}(O,r)$ до прямой $l$. Дополните так, чтобы получить истинные высказывания.

а) Прямая $l$ ______ окружность $\mathscr{C}(O,r)$ тогда и только тогда, когда $d > r$.

б) Прямая $l$ является касательной к окружности тогда и только тогда, когда ______.

в) Прямая $l$ является ______ тогда и только тогда, когда $d <$ ______.

**Теорема 3**

Если прямая является касательной к окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

*Докажем теорему 3.

*Условие*: $\mathscr{C}(O,r) \cap l = \{M\}$.

*Заключение*: $OM \perp l$.

*Доказательство*:

Применим метод от противного.

① Предположим обратное: $OM \not\perp l$.

Пусть перпендикуляр, проведенный из точки $O$ к прямой $l$, пересекает прямую $l$ в точке $A$ (рис. 7).

② Отметим точку $B \in l$, чтобы $[AB] \equiv [AM]$.

③ $\Delta OAB \equiv \Delta OAM$ (Признак КК).

④ Согласно ③, $[OB] \equiv [OM]$, то есть $[OB]$ – радиус.

Следовательно, $B \in \mathscr{C}(O,r)$.

Теперь прямая $l$ имеет две общие точки ($M$ и $B$) с окружностью, что является противоречием.

Значит, предположение, что $OM \perp l$, было неверным, то есть $OM \perp l$. ►

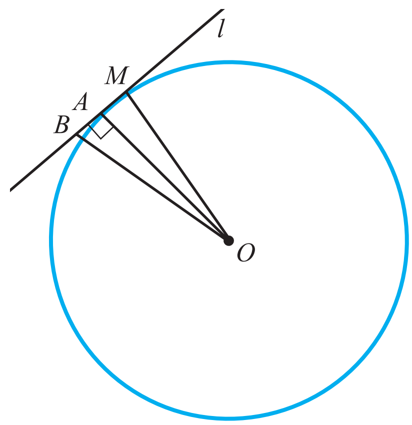



Рис. 7

Высказывание, обратное теореме 3, также является теоремой.

• Сформулируйте и докажите теорему, обратную теореме 3.

* Дополнительный материал

**Задача на построение** (дополнительно)

Пусть точка $M$ принадлежит окружности $\mathscr{C}(O, r)$ (рис. 8).

Проведем касательную к этой окружности так, чтобы точка $M$ была точкой касания.

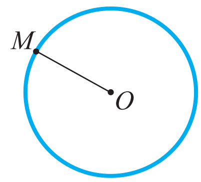



Рис. 8

***Объясняем***:

① Проведем радиус $OM$ (рис. 9).

② Проведем перпендикуляр $AB$ к прямой $OM$:
– отметим точку $O_1 \in OM$, чтобы $[O_1M] \equiv [OM]$;
– проведем окружности $\mathscr{C}_1(O, r_1)$ и $\mathscr{C}_2(O_1, r_1)$, где $r_1 > r$;
– $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A, B\}$.

③ По теореме, обратной теореме 3, $AB \perp OM$ и $M \in \mathscr{C}(O, r)$, а значит, прямая $AB$ является касательной к этой окружности в точке $M$.

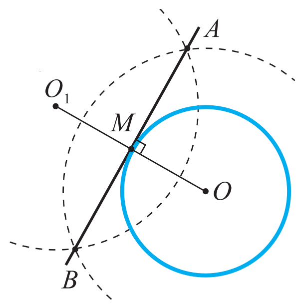



Рис. 9

**Запомните!**

Через любую точку окружности можно провести единственную прямую, касательную к окружности в этой точке.

**Задание**

Докажите, что на рисунке 10:
а) $[AM] \equiv [BM]$;
б) $[MO$ – биссектриса угла $AMB$.

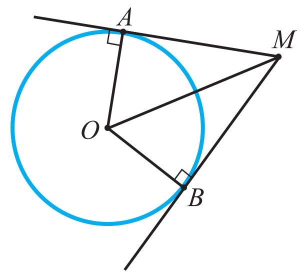



Рис. 10

**Запомните!**

- Две касательные, проведенные через точку, лежащую вне окружности, образуют два касательных отрезка, конгруэнтных между собой.
- Полупрямая с началом в той же точке, проходящая через центр окружности, является биссектрисой угла, образованного касательными.

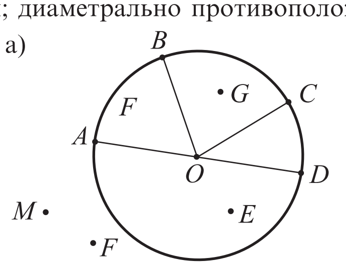
## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

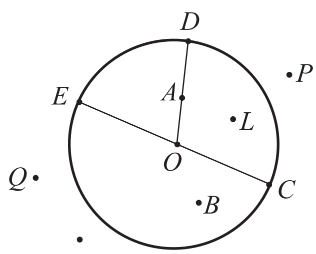
**1.** Постройте и обозначьте окружность:
а) с центром $A$ радиуса 4 см; б) с центром $B$ радиуса 6 см.

**2.** *Работайте в парах!* На рисунке точка $O$ – центр окружности. Назовите: радиусы; хорды; диаметры; точки, расположенные во внутренней области окружности; точки, расположенные во внешней области окружности; диаметрально противоположные точки.

а)




б)




**3.** Определите взаимное расположение точки $A$ и $\mathscr{C}(O, r = 6\text{ см})$, если расстояние от точки $A$ до точки $O$ равно:
а) 6 см; б) $3\sqrt{5}$ см; в) 6,(6) см; г) $(\sqrt{5} + \sqrt{3})$ см.

**4.** Хорды $AB$ и $CD$ равноудалены от центра окружности. Найдите $AB$, если:

а) $CD=8$ см; б) $AB+CD=14$ см;

в) $AB+2CD=6\sqrt{10}$ см; г) $5AB+CD=12$ см.

**5.** Диаметр $AB$ пересекает хорду $MN$ той же окружности радиуса $R$ под прямым углом в точке $E$. Найдите расстояние от центра окружности до $MN$, если:

а) $ME=9$ см, $R=15$ см;

б) $ME=12$ см, $R=13$ см;

в) $4NE=2R-2$ см $=32$ см.

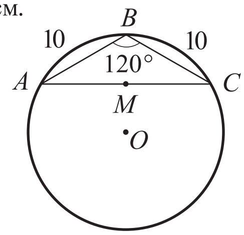
**6.** Пусть $d$ – расстояние от прямой $l$ до центра окружности $\mathscr{C}(O, r)$. Определите взаимное расположение прямой $l$ и окружности, если:

а) $d=3$ см, $r=4$ см; б) $d=6{,}3$ см, $r=3\sqrt{5}$ см;

в) $d=r=2{,}7$ см; г) $d=0$ см, $r=\dfrac{4}{9}$ см;

д) $d=\sqrt{3-\sqrt{5}}$ см, $r=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$ см.

**7.** Найдите радиус окружности и длины отрезков $AC$ и $BM$, где точка $M$ – середина отрезка $AC$.




**8.** Через точку $M$, лежащую вне окружности, проведены касательные к этой окружности. Точки $A$ и $B$ – точки касания. Найдите $BM$, если:

а) $AM=13{,}7$ см; б) $AM-2BM=-3{,}(4)$ см;

в) $AB=8$ см, $m(\angle AMB)=60°$.

**9.** Серединный перпендикуляр ненулевого отрезка $AB$ проходит через центр окружности $\mathscr{C}(O, r)$. Определите взаимное расположение прямой $AB$ и окружности, если:

а) $OA=5$ см, $r=6$ см;

б) $OA=r=\dfrac{3}{4}$ см;

в) $OA=14$ см, $r=12\dfrac{1}{5}$ см и $AB=12$ см;

г) $OA=15$ см, $r=12$ см и $AB=18$ см.

**10.** Дана окружность $\mathscr{C}(O, r)$. Найдите расстояние от центра окружности до хорды $AB$, если:

а) $AB=8$ см, $r=5$ см;

б) $AB=24$ см, $r=13$ см;

в) $AB=a$, $r=b$.

**11.** Пусть $[AB]$ – хорда окружности $\mathscr{C}(O, r)$, а $d$ – расстояние от центра окружности до этой хорды. Определите $r$, если:

а) $AB=12$ см, $d=8$ см; б) $AB=d=\sqrt{3}$ см.

**12.** Через точку, расположенную на расстоянии радиуса от окружности, проведены две касательные к этой окружности. Найдите величину угла между касательными.

**13.** *Работайте в группах!* Постройте окружность, зная, что длина любой хорды, проведенной в этой окружности, не больше 10 см.

**14.** Дана окружность $\mathscr{C}(O, r=8$ см$)$ и ее хорда $AB$. Постройте с помощью угольника середину отрезка $[AB]$.

**15.** Расстояние между центром $O$ окружности и хордой $AB$ в два раза меньше радиуса окружности. Найдите $m(\angle ABO)$.

**16.** На расстоянии 6 см от центра окружности проведена хорда длиной $12\sqrt{3}$ см. Найдите радиус окружности.

**17.** Каково взаимное расположение точки $M$ и окружности $\mathscr{C}(O, r)$, если:

а) $OM=\dfrac{1}{2}r$; б) $OM=|2-\sqrt{5}|\,r$; в) $OM=\dfrac{2}{r}$.

## Формируем способности и применяем

**18.** Через точку $A$, расположенную на расстоянии 29 см от центра окружности $\mathscr{C}(O, r)$, проведена касательная $AB$ к окружности ($B$ – точка касания). Найдите радиус окружности, если $AB=21$ см.

**19.** Пусть $A\in \operatorname{Ext}\mathscr{C}(O, r=5$ см$)$ и $C\in\mathscr{C}(O, r)$, $AC$ – касательная к окружности. Найдите $OA$, если $m(\angle OAC)=30°$.

**20.** Пусть $M\in \operatorname{Ext}\mathscr{C}(O, r=3{,}5$ см$)$ и $A\in\mathscr{C}(O, r)$, $AM$ – касательная к окружности. Найдите $OM$, если $m(\angle AMO)=30°$.

**21.** Пусть $M\in \operatorname{Ext}\mathscr{C}(O, r)$ и $A\in\mathscr{C}(O, r)$, $AM$ – касательная к окружности. Найдите радиус окружности, если $m(\angle AMO)=45°$ и $AM=7{,}5$ см.

**22.** Пусть $M\in \operatorname{Ext}\mathscr{C}(O, r=\sqrt{15}$ см$)$ и $A\in\mathscr{C}(O, r)$, $AM$ – касательная к окружности. Точка $N$ – середина отрезка $OM$. Найдите $AN$, если $m(\angle AOM)=60°$.

**23.** *Работайте в парах! Математика в жизни.* Михаил построил окружность и стер ее центр. Как можно найти центр этой окружности?

*Указание.* Примените теорему 1 (стр. 119) и свойство серединного перпендикуляра к отрезку.

**24.** Пусть $AM$ – касательная к окружности $\mathscr{C}(O, R)$ в точке $A$. Найдите расстояние от точки $O$ до точки $M$, если:
а) $AM = 0{,}8$, $r = 0{,}6$;
б) $AM = 24$, $r = 18$;
в) $AM = x$, $r = y$.

**25.** *Исследуйте!* Докажите, что середины конгруэнтных хорд лежат на одной окружности.
*Указание.* Примените теорему 2 (стр. 119).

**26.** Окружности $\mathscr{C}(O, r)$ и $\mathscr{C}(O_1, r)$ пересекаются в точках $M$ и $N$. Найдите $OO_1$, если $MO = 13$ см, $MO_1 = 6$ см, $MN = 10$ см.

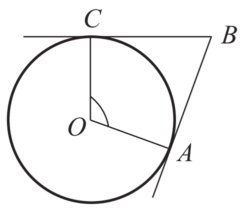
**27.** Постройте окружность радиуса $r$, проходящую через точки $A$ и $B$, если:
а) $AB = 5$ см, $r = 6$ см;
б) $AB = \sqrt{15}$ см, $r = 5$ см. *Указание.* Используйте теорему высоты и равенство $(\sqrt{15})^2 = 3 \cdot 5$.

**28.** Дана окружность $\mathscr{C}(O, r = 8$ см$)$. Постройте треугольник $ABC$, вписанный в эту окружность так, чтобы $AB = 2BC = 10$ см.

**29.** Постройте с помощью линейки и циркуля угол, равный:
а) $45°$; б) $22°30'$; в) $157°30'$.

**30.** В окружности с центром $O$ и радиусом 6 см хорда $AB$ конгруэнтна радиусу. Найдите расстояние от точки $O$ до хорды $AB$.

**31.** На рисунке $BA$ и $BC$ – касательные к окружности с центром $O$ в точках $A$ и $C$. Найдите величину угла $ABC$, если известно, что $m(\angle AOC) = 110°$.




## Развиваем способности и творим

**32.** Окружность $\mathscr{C}(O_1, R)$ лежит вне окружности $\mathscr{C}(O_2, r)$, то есть $O_1O_2 > R + r$. Прямая $l$ – общая касательная к окружностям, где $A$ и $B$ – точки касания. Найдите $O_1O_2$, если $m(\angle AO_1O_2) = 60°$, $R = 15$ см, $r = 5$ см. Рассмотрите все возможные случаи.

**33.** Одна из точек касания вписанной в прямоугольный треугольник окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 см и 12 см. Найдите длины катетов треугольника.

**34.** В окружности радиуса 25 см по одну сторону от центра проведены две параллельные хорды длиной 40 см и 30 см. Найдите расстояние между этими хордами.

**35.** Дана прямая $l$ и точки $M$ и $N$. Постройте окружность, проходящую через точки $M$ и $N$, центр которой лежит на прямой $l$. В каком случае задача:
а) имеет одно решение;
б) имеет бесконечное число решений;
в) не имеет решений?

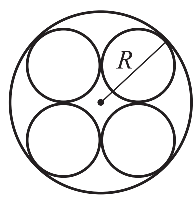
**36.** Точка $M$ лежит во внешней области окружности $\mathscr{C}(O, r)$. Через точку $M$ проведите прямую, которая пересечет окружность, и точки пересечения определят хорду длины $x$, где:
а) $r = 10$ см, $MO = 15$ см, $x = 8$ см;
б) $r = 8$ см, $MO = 12$ см, $x = 10$ см.
*Указание.* Примените теорему: *Две хорды одной окружности конгруэнтны тогда и только тогда, когда они равноудалены от центра этой окружности.*

### Занимательная математика

**37.** Поделите круг с помощью трех прямых на:
а) 4 части; б) 5 частей;
в) 6 частей; г) 7 частей.

**38.** Из точки окружности на один из радиусов опущен перпендикуляр. Он делит этот радиус на два отрезка, пропорциональных числам 8 и 9, считая от центра. Найдите длину перпендикуляра, если радиус окружности равен 68 см.

**39.** На дне круглой кастрюли расположены вплотную друг к другу 4 одинаковые цилиндрические банки, как на рисунке. Найдите радиус $R$ основания кастрюли, если радиус основания банки равен 4 см.



# § 2. Углы, вписанные в окружность

## 2.1. Центральный угол. Дуга окружности

***Вспомним*** **1** Найдите величину угла, описанного минутной стрелкой часов за 10 минут.

**Определения**

- Угол с вершиной в центре окружности называется ее **центральным углом**.
- Пересечение окружности с внутренней областью центрального угла называется **меньшей дугой** окружности.
  *Обозначаем*: $\smile AB$, где $A$ и $B$ – точки пересечения центрального угла с окружностью.
- Пересечение окружности с внешней областью центрального угла называется **большей дугой** окружности. *Обозначаем*: $\smile ACB$, где $C$ – точка, принадлежащая окружности, но не принадлежащая меньшей дуге.
- Точки $A$ и $B$ называются **концами дуг**. Дуги $AB$ и $ACB$ называются **дополнительными дугами**. Кроме того, что точки $A$ и $B$ определяют две дуги, они еще определяют хорду $AB$. Говорим: «Хорда $AB$ стягивает дугу $AB$».

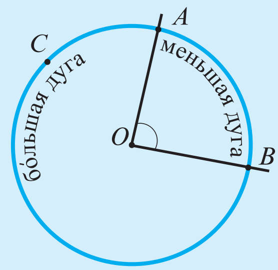



Рис. 12

- **Градусная мера меньшей дуги** окружности считается равной градусной мере соответствующего центрального угла.
- **Градусная мера большей дуги** окружности считается равной 360° минус градусная мера ее дополнительной дуги.
- Две **дуги** одной окружности (или двух конгруэнтных окружностей) **конгруэнтны**, если их градусные меры равны. Обозначение $\smile AB \equiv \smile CD$ читается: «Дуги $AB$ и $CD$ конгруэнтны».
- Концы диаметра делят окружность на две конгруэнтные дуги, называемые **полуокружностями**, градусная мера каждой равна 180°.

***Исследуем*** **2** Рассмотрите рисунок 13 (точка $O$ – центр окружности).
Используя данные рисунка и зная, что $\angle AOB \equiv \angle COD$ и $[AG] \equiv [EF]$, вычислите:
а) $CD$;
б) $m(\angle FOE)$.

***Объясняем***:
$\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (Признак СУС).
Следовательно, $CD$ = ___ см.
$\Delta AOG \equiv$ ___ (Признак ССС).
$m(\angle FOE) = m(\angle$ ___$)$ = ___°.

*Ответ*: $CD$ = ___ см, $m(\angle FOE)$ = ___°.

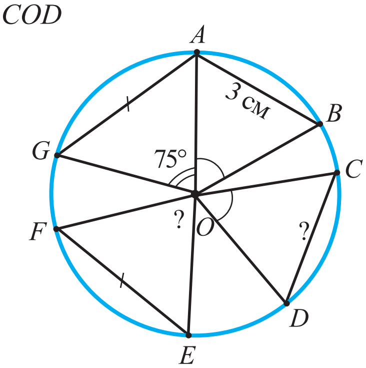



Рис. 13

**Теорема 4** Если две хорды одной окружности (или двух конгруэнтных окружностей) конгруэнтны, то дуги, стягиваемые ими, конгруэнтны.

Если две хорды одной окружности (или двух конгруэнтных окружностей) конгруэнтны, то дуги, стягиваемые ими, конгруэнтны

**Задача на построение** (дополнительно)

**3** Как можно построить окружность, зная, что хорда длиной 3 см стягивает дугу в 70°?

*Решение*:

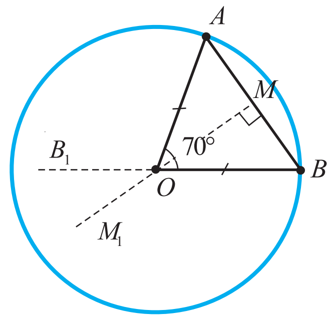


Рис. 14

① Для того чтобы построить окружность, надо построить отрезок, равный радиусу окружности (рис. 14).

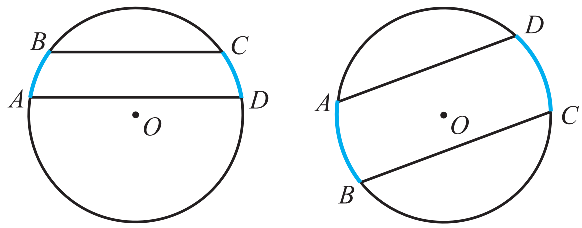
② Предположим, что построение выполнено (см. рисунок).

③ Пусть $[OM]$ – высота равнобедренного треугольника $AOB$.
$\Delta OMB$ – прямоугольный, $m(\angle B)=55°$,
$BM = 1{,}5$ см.
Следовательно, согласно признаку КУ, треугольник $OMB$ (в частности, гипотенузу $OB$) можно построить однозначно.

④ Построение можно выполнить следующим образом:
– построим отрезок $AB$, равный 3 см;
– построим серединный перпендикуляр $MM_1$ отрезка $AB$, где точка $M$ – середина отрезка $AB$;
– построим $[BB_1$ так, чтобы $m(\angle MBB_1)=55°$;
– $[MM_1 \cap [BB_1 = \{O\}$;
– построим окружность $\mathscr{C}(O, OB)$.

• Применив свойства треугольников и углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, можно доказать:

**Теорема 5** Две дуги окружности, заключенные между двумя параллельными хордами, конгруэнтны (рис. 15).

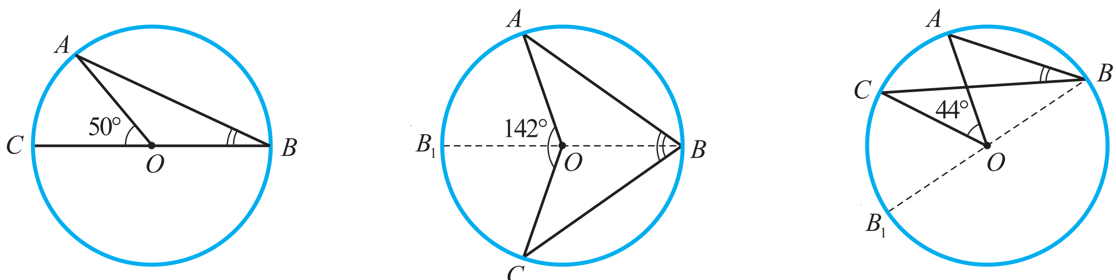


$AD \parallel BC \Rightarrow \smile AB \equiv \smile CD$
Рис. 15

• Докажите, что две равноудаленные от центра окружности хорды конгруэнтны.

## 2.2. Углы, вписанные в окружность

***Исследуем*** • Рассмотрите окружности (рис. 16) и найдите $m(\angle ABC)$.



а) б) в)

Рис. 16

*Решение*:

а) Рассмотрим $\Delta AOB$: $[AO]\equiv[OB]$, значит, $\angle B\equiv\angle A$.

$\angle AOC$ – внешний угол треугольника $AOB$, значит, $m(\angle AOC)=m(\angle A)+m(\angle B)$.

$m(\angle B)=\frac{1}{2}m(\angle \square)=\square°$.

б) Как и в предыдущем пункте, $m(\angle ABB_1)=\frac{1}{2}m(\angle AOB_1)$, (1)

$m(\angle B_1BC)=\frac{1}{2}m(\angle \square)$. (2)

Сложив соотношения (1) и (2), получим:

$m(\angle ABB_1)+m(\angle B_1BC)=m(\angle ABC)=\frac{1}{2}m(\angle \square)=\square°$.

в) Аналогично пунктам а) и б), получим:

$m(\angle ABC)=\frac{1}{2}m(\angle \square)=\square°$.

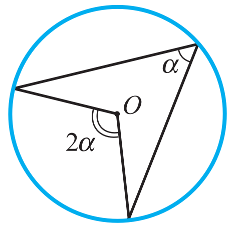


Рис. 17

**Теорема 6**

> Величина угла, вписанного в окружность, равна половине величины дуги, на которую он опирается (рис. 17).

*Следствие 1*

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, конгруэнтны (рис. 18).

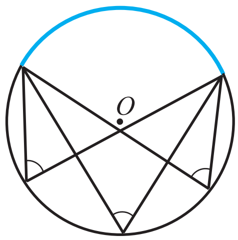


Рис. 18

*Следствие 2*

Вписанные углы, опирающиеся на полуокружность, – прямые (рис. 19).

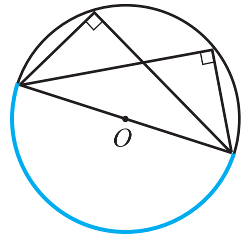


Рис. 19

***Задание***

На рисунке 20 показан алгоритм построения касательной к окружности с центром $O$ из данной точки $M$, лежащей вне окружности. Применив следствие 2, объясните алгоритм этого построения.

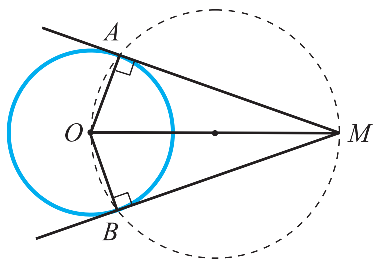
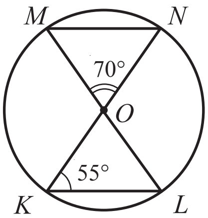


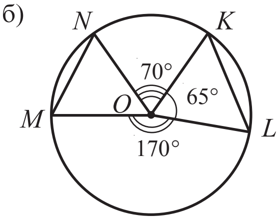
Рис. 20

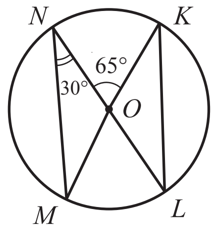
## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

1. Постройте и обозначьте центральный угол величины $\alpha$ окружности $\mathscr{C}(O, r)$, зная, что:
   а) $\alpha=60°$, $r=4$ см; б) $\alpha=90°$, $r=6$ см; в) $\alpha=120°$, $r=\sqrt{5}$ см.
2. Точки $A$, $B$, $C$ принадлежат окружности, $B\in \smile AC$.
   а) Найдите $m(\smile BC)$, если $m(\smile AC)=120°$, $m(\smile AB)=75°$.
   б) Найдите $m(\smile AC)$, если $m(\smile AB)=35°$, $m(\smile BC)=55°$.
   в) Найдите $m(\smile AB)$, если $m(\smile AC)=150°$, $m(\smile AC)+m(\smile BC)=175°$.
3. ***Работайте в парах!*** Сравните $MN$ и $KL$ на следующих рисунках (точка $O$ – центр окружности):

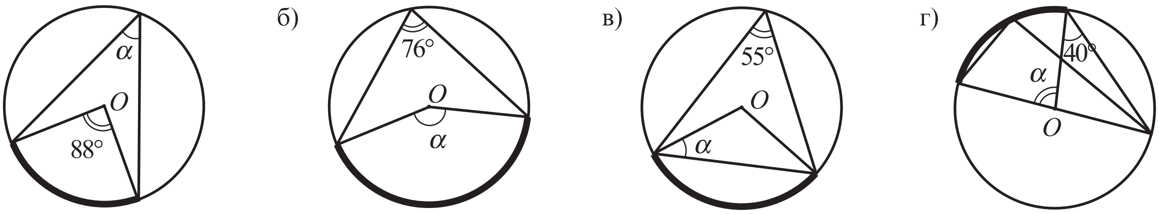
а)



б)



в)


**4.** Найдите величину угла $\alpha$ (точка $O$ – центр окружности).

а) б) в) г)




**5.** Чему равна градусная мера центрального угла, опирающегося на дугу, длина которой равна:

а) $\frac{1}{3}$ окружности; б) $\frac{1}{5}$ окружности;

в) $\frac{1}{10}$ окружности; г) $\frac{1}{12}$ окружности;

д) $\frac{1}{6}$ полуокружности; е) $\frac{1}{12}$ полуокружности?

**6.** *Работайте в группах!* Постройте угол $ABC$, образованный секущей $AC$ и касательной $AB$ к окружности так, чтобы:

а) $m(\angle ABC) = 40°$; б) $m(\angle ABC) = 75°$;

в) $m(\angle ABC) = 350°$.

**7.** Постройте угол $ABC$ с вершиной $B$ во внутренней области окружности так, чтобы:

а) $m(\angle ABC) = 25°$; б) $m(\angle ABC) = 115°$;

в) $m(\angle ABC) = 210°$.

**8.** Постройте угол $ABC$ с вершиной $B$ во внешней области окружности так, чтобы:

а) $m(\angle ABC) = 70°$; б) $m(\angle ABC) = 127°$;

в) $m(\angle ABC) = 165°$.

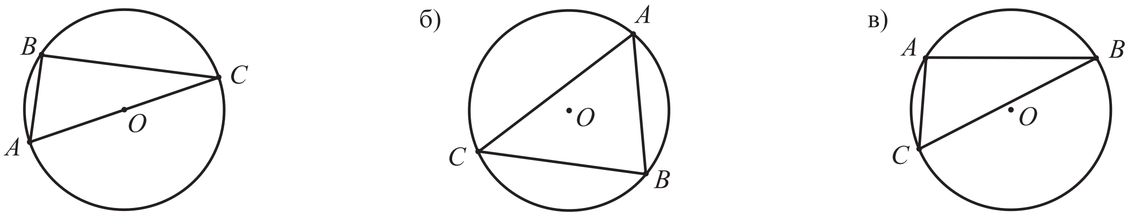
**9.** Найдите диаметр окружности, в которую вписан треугольник $ABC$ с прямым углом $B$ и:

а) $AC = 8$ см, $BC = 4$ см;

б) $AB = 20$ см, $BC = 21$ см.

**10.** *Исследуйте!* Не измеряя величины углов, определите вид (остроугольный, тупоугольный, прямоугольный) треугольника $ABC$, изображенного на рисунке (точка $O$ – центр окружности).

а) б) в)




**11.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$ расположены на окружности в данной последовательности. Диаметры $[AC]$ и $[BD]$ взаимно перпендикулярны. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

**12.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$ расположены на окружности в данной последовательности. Диаметры $[AC]$ и $[BD]$ неперпендикулярные. Определите вид четырехугольника $ABCD$.

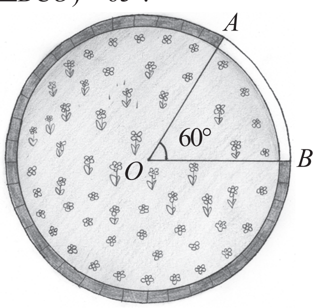
**13.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$ расположены в данной последовательности на окружности с центром $O$ и $AB \parallel CD$. Найдите:

а) $m(\angle AOD)$, если $m(\angle BOC) = 50°$;

б) $m(\angle BOC)$, если $m(\angle DAO) = 70°$;

в) $m(\angle ADO)$, если $m(\angle BCO) = 65°$.

**14.** Господин Албу побелил за 10 минут часть бордюра, опоясывающего клумбу с цветами (см. рисунок). За сколько минут он побелит оставшуюся часть?




**15.** Дан угол $ABC$, образованный секущей $AB$ и касательной $AC$ ($A$ – точка касания) к окружности с центром $O$. Найдите $m(\angle BAC)$, если $m(\angle AOB) = 80°$.

## Формируем способности и применяем

**16.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ расположены на окружности в данной последовательности. Найдите градусные меры дуг $AB$, $BC$, $CD$, $DEA$, если они прямо пропорциональны числам 3, 4, 2, 3.

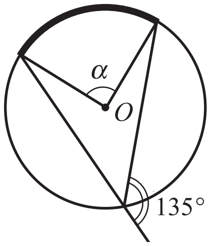
**17.** Точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ расположены на окружности в данной последовательности. Найдите градусные меры дуг $AB$, $BC$, $CD$, $DEA$, если они прямо пропорциональны числам 1, 2, 3, 6.

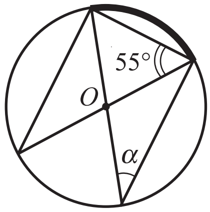
**18.** Через точку окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, длины которых равны 35 см и 12 см. Найдите радиус окружности.

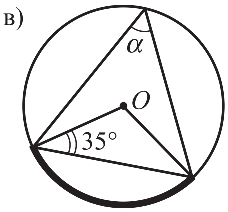
**19.**  *Исследуйте!* Сколько дуг и сколько хорд определено:
а) тремя данными точками окружности;
б) семью данными точками окружности;
в) $n$ данными точками окружности?

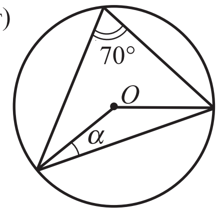
**20.** Разделите окружность на шесть дуг так, чтобы их градусные меры были прямо пропорциональны числам $1, 3, 6, 7, 8, 11$.

**21.** Найдите величину угла $\alpha$ (точка $O$ – центр окружности):

а) 


б) 


в) 


г) 


**22.** Чему равна градусная мера дуги, описанной минутной стрелкой часов, в следующих временных интервалах:
а) 20 минут; б) 25 минут;
в) 4 минуты; г) 35 минут?

**23.** Точки $A$ и $B$ лежат на окружности так, что $m(\smile AB) = 120°$. Найдите радиус окружности, если $AB = 6\sqrt{3}$ см.

**24.** Хорды $AB$ и $AC$ одной окружности конгруэнтны, и длина каждой из них равна 16 см. Найдите радиус окружности, если $m(\smile BC) = 120°$.

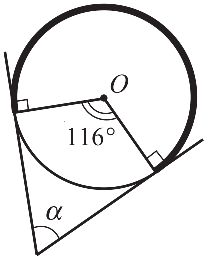
**25.** Пусть $AB$ – хорда окружности. Через точку $A$ проведена касательная $AC$ к окружности, а через точку $B$ – хорда $BD$. Найдите $m(\angle BAC)$, если $m(\angle BDA) = 80°$.

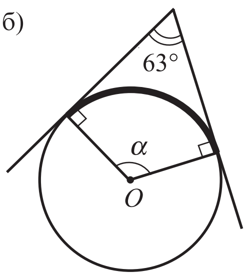
## Развиваем способности и творим

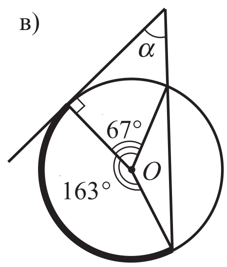
**26.** Стороны угла величиной 60° касаются окружности радиуса 20 см. Найдите расстояние между точками касания.

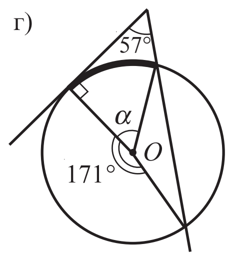
**27.** Стороны прямоугольного треугольника касаются окружности. Одна из точек касания делит один из катетов на отрезки длиной 3 см и 5 см. Найдите длину гипотенузы.

**28.** Найдите величину угла $\alpha$ (точка $O$ – центр окружности):

а) 


б) 


в) 


г) 


**29.** Постройте с помощью линейки и циркуля дугу, градусная мера которой равна:
а) 60°; б) 30°; в) 120°; г) 15°.

**30.** Дан угол, равный 19°. С помощью линейки и циркуля постройте угол, равный:
а) 9°. *Указание.* $180° = 19° \cdot 9 + 9°$. б) 5°; в) 1°.

**31.** Дан угол, равный 25°. С помощью линейки и циркуля постройте угол, равный:
а) 10°. *Указание.* $100° = 25° \cdot 4 = 90° + 10°$.
б) 5°; в) 20°.

**32.** Дана окружность $\mathscr{C}(O, r = 4 \text{ см})$ и точка $A$, лежащая вне окружности. Постройте касательные $AM$ и $AN$ к окружности.

**33.** Длина хорды 30 см. Через один из концов хорды проведена касательная к окружности, а через второй – другая хорда длиной 36 см и параллельная касательной. Найдите радиус окружности.

**34.** В окружности радиуса 2 см проведена хорда длиной 1 см. Через один из концов хорды проведена касательная к окружности, а через второй – другая хорда, параллельная касательной. Найдите длину этой хорды.

# Упражнения и задачи на повторение

## Закрепляем знания

**1.** а) Постройте окружность радиуса 5 см. Постройте хорды $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, диаметры $MN$ и $KL$.
б) Измерьте величины углов $LMK$ и $LNK$.

**2.** *Исследуйте!* Определите взаимное расположение точки $A$ и $\mathscr{C}(O,\ r = 7\sqrt{3}$ см), если:
а) $OA = \dfrac{19}{2\sqrt{3}}$ см; б) $OA = (4\sqrt{3} + 2\sqrt{5})$ см; в) $OA = \dfrac{21}{\sqrt{3}}$ см; г) $OA = (7 + \sqrt{3})$ см.

**3.** Точки $A, B, C$ принадлежат окружности $\mathscr{C}(O,\ r = 6{,}5$ см), причем $[AB]$ – диаметр. Найдите $AC$, если $BC = 12$ см.

**4.** Дана окружность $\mathscr{C}(O,\ r = 8\sqrt{5}$ см) и конгруэнтные хорды $AB$ и $CD$. Найдите $d(O,\ AB)$, если $d(O,\ CD) = 6$ см.

**5.** Дана окружность $\mathscr{C}(O,\ r = \sqrt{19}$ см). Найдите длину хорды $AB$, если $d(O,\ AB) = \sqrt{6}$ см.

**6.** Постройте и обозначьте центральный угол величиной $45°$ окружности $\mathscr{C}(O,\ r = 6$ см).

**7.** Точки $M, N, K, L$ расположены в данном порядке на окружности. Найдите:
а) $m(\smile MN)$, если $m(\smile ML) = 115°$, $m(\smile NL) = 55°$;
б) $m(\smile NK)$, если $m(\smile MK) = 37°$, $m(\smile NL) = 65°$, $m(\smile ML) = 85°$;
в) $m(\smile KL)$, если $m(\smile MN) = 39°$, $m(\smile MK) = 94°$, $m(\smile NL) = 122°$.

**8.** Постройте в окружности $\mathscr{C}(O,\ r = 4{,}5$ см) вписанный угол, равный:
а) $100°$; б) $160°$; в) $240°$; г) $180°$.

**9.** Хорды $AB$ и $CD$ окружности пересекаются в точке $M$. Найдите:
а) $AM$, если $CM = 18$ см, $MD = 3$ см, $MB = 9$ см;
б) $MB$, если $AM = \sqrt{7}$ см, $CM = 3{,}5$ см, $MD = 8$ см.

**10.** Точки $A, B, C, D$ расположены в данном порядке на окружности, $AB \cap CD = \{M\}$. Найдите:
а) $CM$, если $AM = 24$ см, $MB = 8$ см, $MD = 16$ см;
б) $MD$, если $AM = \dfrac{2}{3}$ см, $MB = \dfrac{3}{4}$ см, $CM = 1$ см.

**11.** Точки $A, B, C$ расположены на окружности с центром $O$. Найдите:
а) $m(\angle ABC)$, если $m(\angle AOC) = 104°$;
б) $m(\angle AOC)$, если $m(\angle ABC) = 37°$;
в) $m(\angle OAC)$, если $m(\angle AOC) = 88°$;
г) $m(\angle ACO)$, если $m(\angle ABC) = 29°$.

**12.** *Работайте в парах!* Найдите градусную меру дуги, описанной минутной стрелкой часов, в следующих временных интервалах:
а) 5 минут; б) 25 минут; в) 45 минут.

**13.** В окружности радиусом 6 см хорда образует с диаметром угол $30°$. Найдите длину хорды.

## Формируем способности и применяем

**14.** Постройте треугольник $ABC$ со сторонами, длиной $\sqrt{5}$ см, $2\sqrt{5}$ см, $3\sqrt{2}$ см, и описанную около него окружность.

**15.** Точки $A$, $B$, $C$ принадлежат окружности $\mathscr{C}(O,\ r = 2\sqrt{6}$ см), причем $[AB]$ – диаметр. Найдите $BC$, если $OM = 4$ см, где точка $M$ – середина отрезка $BC$.

**16.** С помощью угольника и циркуля постройте угол, равный:
а) $135°$; б) $157°\ 30'$.

**17.** Диаметр $AB$ окружности радиуса $2\sqrt{17}$ см пересекает хорду $CD$ в ее середине – точке $M$. Найдите $AM$ и $BD$, если $CM = 5\sqrt{2}$ см.

**18.** Медиатриса хорды $AB$ пересекает окружность в точках $C$ и $D$. Найдите радиус окружности, если $AB = 14$ см и $d(C, AB) = 4$ см.

**19.** Из точки $M$ проведены касательные к $\mathscr{C}(O,\ r = 6$ см), где точки $A$ и $B$ – точки касания. Найдите $OM$, если $AM = 9$ см.

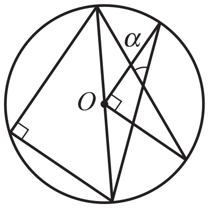
**20.** *Работайте в парах!* Найдите углы треугольника $ABC$, вписанного в окружность, если:
а) $m(\smile AB) = 50°$, $m(\smile AC) = 80°$;
б) $m(\smile AB) = 46°$, $m(\smile AC) = 74°$.

## Развиваем способности и творим

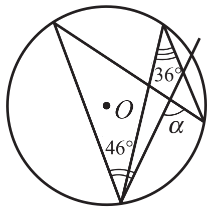
**21.** В равнобедренную трапецию $ABCD$ с бóльшим основанием $AD$ вписана окружность. Найдите радиус окружности, если $AB = 20$ см, $BC = 8$ см.

**22.** Найдите величину угла $\alpha$ (точка $O$ – центр окружности):

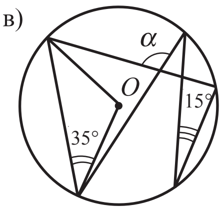
а)




б)




в)




**23.** *Исследуйте!* Докажите, что величина угла с вершиной во внутренней области окружности равна полусумме градусных мер дуги, заключенной между его сторонами, и дуги между продолжениями его сторон.

**24.** *Работайте в группах!* **Проект STEAM.** *Окружность и круг в архитектуре.*

# Итоговый тест

*Время выполнения работы:* 45 минут

## Вариант I

**1.** а) Начертите и обозначьте окружность с центром $M$ и радиусом 3 см. Постройте диаметр $BD$, хорды $DA$ и $BA$, касательную к окружности в точке $A$.
б) Определите истинность высказывания:
«Если расстояние от точки $M$ до точки $X$ равно $(\sqrt{3}+2)$ см, то точка $X$ находится вне данной окружности».
Объясните ответ.
в) Зная, что $m(\angle AMB) = 50°$, найдите величины углов треугольника $ABD$.
г) Зная, что $m(\angle AMB) = 50°$, найдите величину угла между заданной касательной и хордой $DA$.

**2.** Диаметр $AB$ окружности с центром $O$, радиус которой 13 см, перпендикулярен хорде $MN$ длиной 24 см и пересекает ее в точке $C$.
а) Найдите расстояние от центра окружности до хорды $MN$.
б) В каком отношении точка $C$ делит диаметр $AB$?

**3.** Стороны равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $BC$ = 9 см и $AD$ = 25 см касательны к окружности с центром $O$.
а) Найдите длину боковой стороны трапеции.
б) Найдите радиус окружности.
в) Докажите, что треугольник $AOB$ – прямоугольный.

## Вариант II

**1.** а) Начертите и обозначьте окружность с центром $N$ и радиусом 2 см. Постройте диаметр $AB$, хорды $AC$ и $BC$, касательную к окружности в точке $A$.
б) Определите истинность высказывания:
«Если расстояние от точки $N$ до точки $Y$ равно $(\sqrt{5}-1)$ см, то точка $Y$ находится вне данной окружности».
Объясните ответ.
в) Зная, что $m(\angle CBA) = 40°$, найдите величины углов треугольника $ACN$.
г) Зная, что $m(\angle CBA) = 40°$, найдите величину острого угла между заданной касательной и хордой $AC$.

**2.** Хорда $AB$ длиной 40 см окружности с центром $O$ перпендикулярна диаметру $DC$ и находится на расстоянии 21 см от центра окружности.
а) Найдите радиус окружности.
б) В каком отношении делит диаметр $DC$ точка его пересечения с хордой $AB$?

**3.** Стороны равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB$ = 24 см, $CD$ = 25 см касательны к окружности с центром $Q$.
а) Найдите радиус окружности.
б) Найдите длины оснований трапеции.
в) Докажите, что треугольник $CDQ$ – прямоугольный.

Глава

# 2 Площади

*«Природа говорит на языке математики; буквы этого языка – окружности, треугольники и другие геометрические фигуры».*

Галилео Галилей

## §1. Понятие площади

С понятием площади мы встречались еще в начальных классах, когда вычисляли площадь квадрата, прямоугольника. В действительности мы определяли площадь поверхности, ограниченной этими многоугольниками.

Объединение выпуклого многоугольника со своей внутренней областью называется **выпуклой многоугольной поверхностью**. Объединение конечного числа выпуклых многоугольных поверхностей является **многоугольной поверхностью**.

Площадь – это величина, характеризующая многоугольную поверхность. Однако, по традиции, вместо «площадь многоугольной поверхности» говорим «площадь многоугольника». Обозначим площадь многоугольника $A_1A_2...A_n$ через $\mathcal{A}_{A_1A_2...A_n}$.

Заметим, что площадь обладает следующими свойствами:

1° Площадь многоугольника выражается неотрицательным числом.

2° Площади конгруэнтных многоугольников равны.

3° Если многоугольник составлен из различных многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников.

4° Площадь квадрата со стороной, равной единице, равна единице.

Значит, если длина стороны квадрата равна 1 м, то его площадь равна одному квадратному метру (обозначаем: м$^2$); если длина стороны квадрата равна 1 см, то его площадь равна одному квадратному сантиметру (обозначаем: см$^2$), и т. д.

Многоугольники с равными площадями называются **эквивалентными многоугольниками**.

## § 2. Площадь параллелограмма

### 2.1. Площадь квадрата, площадь прямоугольника, площадь ромба

*Вспомним*

**1** Вычислите площадь квадрата, если длина его стороны равна 2,5 см.

*Решение*:

Площадь квадрата, длина которого равна $a$, вычисляется по формуле $\mathcal{A} = a^2$. Значит, $\mathcal{A} = 2{,}5^2 = 6{,}25$ (см$^2$).

**2** Дан квадрат $ABCD$ (рис. 1).

а) Сравните площади треугольников $ABC$ и $ADC$.

б) Вычислите площадь треугольника $ABC$, если длина стороны квадрата 3 см.

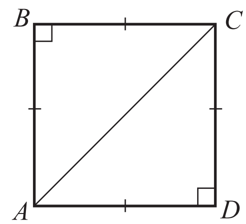


Рис. 1

*Решение*:

а) $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (признак КК). Следовательно, по свойству 2°, $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADC}$.

б) По свойству 3°, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 3^2 = 4{,}5$ (см$^2$).

***Обобщим***

**Площадь квадрата** со сторонами длиной $a$ равна $a^2$.
**Площадь равнобедренного прямоугольного треугольника** с катетами длиной $a$ равна $\frac{a^2}{2}$.

**3** Вычислите площадь прямоугольника, длины сторон которого равны 7,2 см и 1,1 см.

*Решение*:

Площадь прямоугольника со сторонами длиной $a$ и $b$ вычисляется по формуле $\mathcal{A} = a \cdot b$. Следовательно, $\mathcal{A} = 7{,}2 \cdot 1{,}1 = 7{,}92$ (см$^2$).

**4** Дан прямоугольник $ABCD$ (рис. 2).

а) Сравните площади треугольников $ABC$ и $ADC$.

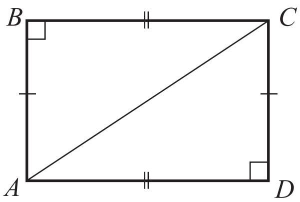


Рис. 2

б) Найдите площадь треугольника $ABC$, если длины сторон прямоугольника равны 6 см и 12 см.

*Решение*:

а) $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (признак КК). Значит, по свойству 2°, $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ADC}$.

б) По свойству 3°,

$\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{ABC} + \mathcal{A}_{ACD} \Rightarrow \mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 12 = 36$ (см$^2$).

***Обобщим***

**Площадь прямоугольника** со сторонами длиной $a$ и $b$ равна $\mathcal{A} = a \cdot b$.

**Площадь прямоугольного треугольника** с катетами длиной $a$ и $b$ равна $\mathcal{A} = \frac{1}{2} a \cdot b$.

***Исследуем***

**5** Вычислите площадь ромба $ABCD$, длины диагоналей которого равны $AC = 13{,}4$ см и $BD = 18$ см.

*Решение*:

Пусть $O$ – точка пересечения диагоналей ромба. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны, и точка пересечения делит их пополам.

Прямоугольные треугольники $AOB$, $COB$, $COD$, $AOD$ конгруэнтны.

Следовательно, $\mathcal{A}_{ABCD} = 4\mathcal{A}_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO =$
$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 13{,}4 \cdot 18 = 120{,}6$ (см$^2$).

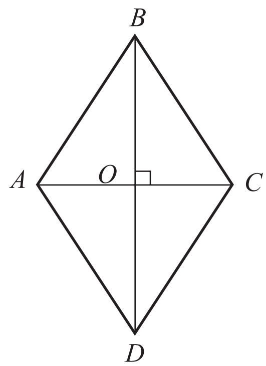


Рис. 3

***Обобщим***

**Площадь ромба** равна половине произведения его диагоналей.

$\boxed{\mathcal{A}_{\text{ромба}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$, где $d_1$ и $d_2$ – длины диагоналей ромба.

### 2.2. Площадь параллелограмма

*Исследуем*

**1** Дан параллелограмм $ABCD$, где $[BM]$, $[CN]$ – его высоты (рис. 4).

а) Сравните площади треугольников $ABM$ и $DCN$.

б) Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $MB = 8$ см и $AD = 11$ см.

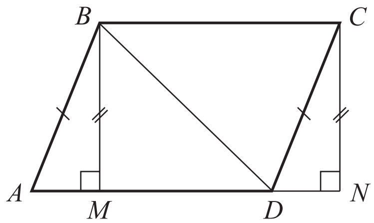


Рис. 4

*Решение*:

а) $\Delta ABM \equiv \Delta DCN$ (признак КГ). Значит, по свойству 2°, $\mathscr{A}_{ABM} = \mathscr{A}_{DCN}$.

б) По свойству 3° имеем $\mathscr{A}_{ABCD} = \mathscr{A}_{MBCD} + \mathscr{A}_{ABM} = \mathscr{A}_{MBCD} + \mathscr{A}_{DCN} = \mathscr{A}_{MBCN}$.

$MBCN$ – прямоугольник, и $\mathscr{A}_{MBCN} = MB \cdot BC = MB \cdot AD = 8 \cdot 11 = 88$ (см$^2$).

*Обобщим*

**Площадь параллелограмма** равна произведению длины его стороны и высоты, проведенной к этой стороне.

$\boxed{\mathscr{A}_{\text{парал.}} = a \cdot h}$, где $h$ – высота, проведенная к стороне длины $a$.

## § 3. Площадь треугольника

*Исследуем*

**1** Вычислите площадь треугольника $ABC$ с высотой $BM$, если $AC = 16$ см, $BM = 8$ см.

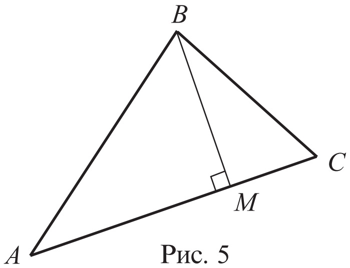


Рис. 5

*Решение*:

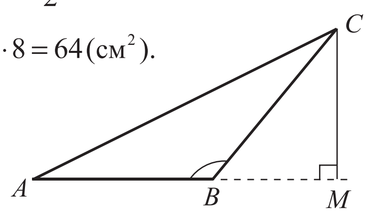
Треугольники $AMB$ и $BMC$ – прямоугольные (рис. 5).

Следовательно, $\mathscr{A}_{AMB} = \frac{1}{2} BM \cdot AM$, $\mathscr{A}_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot MC$.

Значит, $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{AMB} + \mathscr{A}_{BMC} = \frac{1}{2} BM \cdot AM + \frac{1}{2} BM \cdot MC =$

$= \frac{1}{2} BM(AM + MC) = \frac{1}{2} BM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8 = 64$ (см$^2$).

- Рассмотрите рисунок и вычислите площадь треугольника $ABC$, если $AB = 12$ см, а $CM = 10$ см.




*Обобщим и узнаем*

- **Площадь треугольника** равна половине произведения длины стороны и высоты, проведенной к этой стороне.

  $\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{2} a \cdot h}$, где $h$ – высота, проведенная к стороне длины $a$ треугольника.

- **Формула Герона**:

  $\boxed{\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, где $a$, $b$, $c$ – длины сторон треугольника, а $p = \frac{a+b+c}{2}$ – его полупериметр.

**Теорема 1**

Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

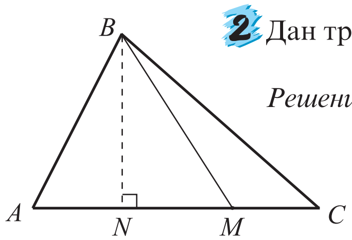


Рис. 7

**2** Дан треугольник $ABC$ и $M \in (AC)$, такой, что $\frac{AM}{MC} = 4$ (рис. 7). Найдите $\frac{\mathscr{A}_{ABM}}{\mathscr{A}_{BMC}}$.

*Решение*:

Отметим точку $N \in AC$, так, чтобы $BN \perp AC$.

Таким образом, $[BN]$ – общая высота треугольников $ABM$ и $BMC$.

Имеем: $\frac{\mathscr{A}_{ABM}}{\mathscr{A}_{BMC}} = \frac{\frac{1}{2} BN \cdot AM}{\frac{1}{2} BN \cdot MC} = \frac{AM}{MC} = 4.$

**Теорема 2**

> Пусть дан треугольник $ABC$ и $M \in (AC)$. Тогда $\frac{\mathscr{A}_{ABM}}{\mathscr{A}_{BMC}} = \frac{AM}{MC}$.

*Следствие.* Медиана треугольника делит этот треугольник на два эквивалентных треугольника.

# § 4. Площадь трапеции

***Исследуем***

**1** Пусть $TRAP$ – трапеция с бóльшим основанием $TP$ длиной $a$, меньшим основанием $RA$ длиной $b$ и высотой $h$. Вычислите площадь трапеции.

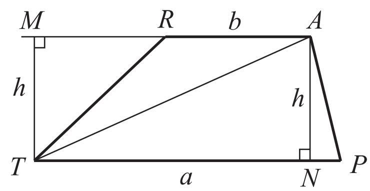


Рис. 8

*Решение*:

Отметим точки $M \in RA$ и $N \in TP$, такие, что $TM \perp RA$, $AN \perp TP$ (рис. 8). Очевидно, что $TM = AN = h$.

Тогда $\mathscr{A}_{TRAP} = \mathscr{A}_{TRA} + \mathscr{A}_{TAP} = \frac{1}{2} TM \cdot RA + \frac{1}{2} AN \cdot TP = \frac{1}{2} h \cdot b + \frac{1}{2} h \cdot a = \frac{1}{2} h(a+b).$

***Обобщим***

> Площадь трапеции с основаниями длиной $a$ и $b$ и высотой $h$ вычисляется по формуле $\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{2} h(a+b) = h \cdot m}$, где $m$ – длина средней линии трапеции.

**2** Дана трапеция $ABCD$, где $AD \parallel BC$ (рис. 9).

а) Сравните $\mathscr{A}_{ABD}$ и $\mathscr{A}_{ACD}$, $\mathscr{A}_{ABC}$ и $\mathscr{A}_{BCD}$.

б) Пусть $\{I\} = AC \cap BD$. Сравните $\mathscr{A}_{ABI}$ и $\mathscr{A}_{CID}$.

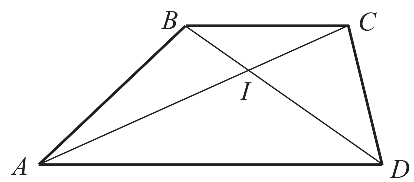


Рис. 9

*Решение*:

а) Высоты треугольников $ABD$ и $ACD$, опущенные из вершин $B$ и $C$ на общую сторону $AD$, являются высотами трапеции. Следовательно, треугольники $ABD$ и $ACD$ – эквивалентны, то есть $\mathscr{A}_{ABD} = \mathscr{A}_{ACD}$. Аналогично можно показать, что $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{BCD}$.

б) $\mathscr{A}_{ABI} = \mathscr{A}_{ABD} - \mathscr{A}_{AID}$, $\mathscr{A}_{CID} = \mathscr{A}_{ACD} - \mathscr{A}_{AID}$.

Но согласно пункту а), $\mathscr{A}_{ABD} = \mathscr{A}_{ACD}$. Следовательно, $\mathscr{A}_{ABI} = \mathscr{A}_{CID}$.

***Обобщим***

> Треугольники, образованные диагоналями трапеции с боковыми сторонами и одним из оснований, эквивалентны.
> Треугольники, образованные диагоналями и боковыми сторонами, эквивалентны.

# § 5. Площадь правильного многоугольника. Длина окружности и площадь круга

**1** Зная, что $m$ – длина апофемы, а $l$ – длина стороны, вычислите площадь правильного многоугольника: а) с 6 сторонами; б) с $n$ сторонами.

*Решение*:

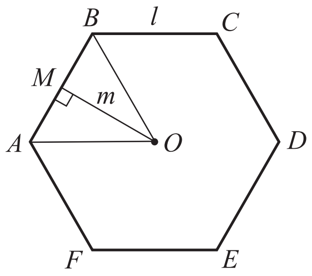


Рис. 10

а) Правильный многоугольник с 6 сторонами называется правильным шестиугольником.

Пусть $O$ – центр окружности, вписанной в правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 10). Очевидно, что треугольники $AOB$, $BOC$, $COD$, $DOE$, $EOF$ и $AOF$ конгруэнтны, и сумма их площадей равна площади шестиугольника $ABCDEF$.

Следовательно,

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \mathcal{A}_{AOB}. \qquad (1)$$

Пусть $[OM]$ – высота треугольника $AOB$. Так как треугольник $AOB$ равнобедренный, то $[OM]$ – апофема, то есть $OM = m$.

$$\mathcal{A}_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} m \cdot l. \qquad (2)$$

Подставив (2) в (1), получим: $\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{1}{2} ml = 3ml.$

*Ответ*: $3ml$.

б) Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ – правильный многоугольник с $n$ сторонами, точка $O$ – центр окружности, вписанной в этот многоугольник (рис. 11).

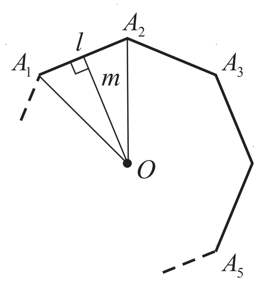


Рис. 11

Аналогично пункту а), если соединим точку $O$ с вершинами многоугольника, то получим $n$ конгруэнтных треугольников и $\mathcal{A}_{A_1, A_2 \ldots A_n} = n \cdot \mathcal{A}_{A_1OA_2}$.

Но $\mathcal{A}_{A_1OA_2} = \frac{1}{2} ml$. Следовательно, $\mathcal{A}_{A_1, A_2 \ldots A_n} = \frac{1}{2} mnl$.

*Ответ*: $\frac{1}{2} mnl$.

***Обобщим***

- ***Апофема*** правильного многоугольника – это отрезок, соединяющий центр многоугольника с серединой одной из его сторон. Апофема перпендикулярна этой стороне.
- ***Площадь правильного n-угольника*** вычисляется по формуле $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot l$, где $m$ – апофема, $l$ – длина стороны многоугольника
- ***Площадь равностороннего треугольника*** со стороной $l$ равна $\frac{\sqrt{3}}{4} l^2$.

- Докажите формулу для вычисления площади равностороннего треугольника.

**2** Дана окружность радиуса 1. Можно доказать, что в эту окружность возможно вписать любой правильный $n$-угольник. Вычислив периметры этих многоугольников, получим, например:

для $n = 4$, $P_4 = 4\sqrt{2} \approx 5{,}656854$;

для $n = 8$, $P_8 = 8\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 6{,}12253492$;

для $n = 16$, $P_{16} = 16\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \approx 6{,}24289030$;

для $n = 32$, $P_{32} = 32\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} \approx 6{,}27309698$.

Заметим, что полученные периметры приближенно равны. Естественно, что каждый из этих периметров – это приближенное значение с определенной точностью длины окружности радиуса 1. Очевидно, что, чем больше число сторон правильного многоугольника, тем точнее приближенное значение длины окружности.

Вычисленные периметры приближенно равны удвоенному иррациональному числу $\pi \approx 3{,}14159...$

Следовательно, длина окружности радиуса 1 равна $2\pi$.

Можно доказать формулу $\boxed{L = 2\pi R}$, где $L$ – длина окружности, а $R$ – ее радиус.

**3** Найдите площадь круга $\mathcal{D}(O, R)$.

*Решение*:

В окружность $\mathcal{C}(O, R)$ впишем правильный $n$-угольник.

Площадь этого многоугольника равна $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} n \cdot l \cdot m$, где $l$ – длина стороны, а $m$ – апофема многоугольника.

Чем больше $n$, тем точнее $n \cdot l$ приближает значение длины окружности, а $m$ – радиус $R$ окружности. Поэтому можем считать, что $\mathcal{A}_{\text{круга}} = \frac{1}{2} L \cdot R$, где $L$ – длина окружности, ограничивающей круг.

Следовательно, так как $L = 2\pi R$, получим $\boxed{\mathcal{A}_{\text{круга}} = \pi R^2}$.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Вычислите периметр и площадь квадрата, если длина его стороны равна:
а) 3 см; б) 3,7 см;
в) $6\sqrt{5}$ см; г) $7\frac{2}{9}$ см.

**2.** Найдите длину стороны квадрата, если его площадь равна:
а) 225 см$^2$; б) 48 см$^2$;
в) $16\frac{1}{8}$ см$^2$; г) $(\sqrt{3} - 2)^2$ см$^2$.

**3.** Вычислите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, если длины его катетов равны:
а) 2,7 см; б) 3,5 см;
в) $(2 + \sqrt{3})$ см; г) $\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}$ см.

**4.** Найдите длину катета равнобедренного прямоугольного треугольника, если его площадь равна:
а) 72 см$^2$; б) 120 см$^2$;
в) $2\frac{1}{12}$ см$^2$; г) $(2\sqrt{5} - 5)^2$ см$^2$.

**5.** Вычислите площадь прямоугольника, длины сторон которого равны:
а) 4,4 см и 1,2 см; б) $4\sqrt{7}$ см и $2\sqrt{7}$ см;
в) $(2\sqrt{31} + \sqrt{29})$ см и $(2\sqrt{31} - \sqrt{29})$ см;
г) $11\frac{1}{16}$ см и $\frac{256}{177}$ см.

**6.** Вычислите периметр и площадь прямоугольного треугольника, если длины его катетов равны:
а) 3 дм и 40 см; б) 12 см и 50 мм;
в) 0,8 м и 60 см; г) 120 мм и 1,2 дм.

**7.** Найдите измерения прямоугольника с площадью $\mathcal{A}$ и периметром $\mathcal{P}$, если:
а) $\mathcal{A} = 18{,}25$ см$^2$, $\mathcal{P} = 19{,}6$ см;
б) $\mathcal{A} = 110$ см$^2$, $\mathcal{P} = 32\sqrt{2}$ см;
в) $\mathcal{A} = \frac{14}{27}$ см$^2$, $\mathcal{P} = 1\frac{4}{9}$ см;
г) $\mathcal{A} = 32$ см$^2$, $\mathcal{P} = 36$ см.

**8.** Длины сторон двух квадратных земельных участков – 15 м и 25 м. Одно из измерений земельного участка прямоугольной формы, эквивалентного данным квадратным участкам, равно 50 м. Найдите другое его измерение.

**9.** *Работайте в парах!* Дан параллелограмм $ABCD$, $h_1 = \mathrm{d}(A, BC)$, $h_2 = \mathrm{d}(B, CD)$ и $\mathcal{A}$ – площадь параллелограмма. Перечертите и заполните таблицу:

| $AB$ | $BC$ | $h_1$ | $h_2$ | $\mathcal{A}$ |
|---|---|---|---|---|
| | 15 | 12 | 10 | |
| $5\sqrt{5}$ | 5 | | $3\sqrt{5}$ | |
| | | 7 | 10,5 | 210 |
| | 18 | | 9 | 162 |

**10.** Пусть $h_a, h_b, h_c$ – высоты треугольника, проведенные соответственно к сторонам $a$, $b$, $c$, а $\mathscr{A}$ – площадь треугольника. Перечертите и заполните таблицу:

| $a$ | $b$ | $c$ | $h_a$ | $h_b$ | $h_c$ | $\mathscr{A}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 12 | | 10 | | 5 | |
| | 15 | | 12 | 10 | 9 | |
| 14,4 | | 16 | | 12 | | 144 |
| 24 | 30 | | | | 21 | 210 |

**11.** Дан треугольник $ABC$. Найдите площадь треугольника, если:
а) $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 9$ см;
б) $AB = 18$ см, $BC = 9\sqrt{3}$ см, $AC = 8\sqrt{3}$ см;
в) $AB = 10$ см, $BC = 12$ см, $m(\angle A) = 90°$.

**12.** *Работайте в группах!* Пусть $h$ – высота трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием $AB$. Найдите площади треугольников $ABC$, $ABD$, $ADC$, $DCB$, если:
а) $AB = 11$ см, $CD = 8$ см, $h = 9$ см;
б) $AB = 7\sqrt{5}$ см, $CD = 4\sqrt{5}$ см, $h = 5\sqrt{5}$ см;
в) $AB = 9\dfrac{15}{22}$ см, $CD = \dfrac{90}{11}$ см, $h = 11$ см;
г) $AB = 12$ см, $AD = 7$ см, $m(\angle A) = m(\angle B) = 45°$.

**13.** *Работайте в парах!* Пусть $h$ – высота, $m$ – средняя линия и $\mathscr{A}$ – площадь трапеции $ABCD$ с бóльшим основанием $AB$. Перечертите и заполните таблицу:

| $AB$ | $CD$ | $h$ | $m$ | $\mathscr{A}$ |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 6 | 7 | | |
| 18 | | 22 | 16 | |
| 32 | | 20 | | 560 |

**14.** Вычислите длину окружности и площадь круга, радиус кторого равен:
а) 10 см; б) 15 см; в) 8 см.

**15.** Найдите площадь параллелограмма с углом 45°, если одна из его диагоналей равна 9 см и совпадает с одной из его высот.

**16.** Высоты параллелограмма равны 8 см и 6 см, а его площадь – 72 см$^2$. Найдите периметр параллелограмма.

**17.** Точка $E$ – середина стороны $BC$ параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 104 см$^2$. Найдите площадь треугольника $ABE$.

**18.** Найдите площадь круга, ограниченного окружностью длиной $4\pi$ м.

## Формируем способности и применяем

**19.** Вершины правильного $n$-угольника расположены на окружности радиусом 4 см. Найдите площадь многоугольника, если:
а) $n = 6$; б) $n = 8$; в) $n = 10$.

**20.** Найдите периметр и площадь квадрата, если его диагонали равны:
а) $12\sqrt{2}$ см; б) 18 см; в) $a\sqrt{2}$ см; г) $x$ см.

**21.** Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если его сторона увеличится:
а) в 3 раза; б) в 7 раз; в) в $n$ раз?

**22.** Во сколько раз уменьшится диагональ квадрата, если площадь уменьшится:
а) в 4 раза; б) в 10 раз; в) в $(\sqrt{11} - 4)^2$ раз?

**23.** *Работайте в парах!* Во сколько раз увеличится площадь прямоугольника, если:
а) длина одной из его сторон увеличится в 4 раза;
б) длина каждой его стороны увеличится в 5 раз;
в) длина одной стороны увеличится в 8 раз, а другой уменьшится в 3 раза?

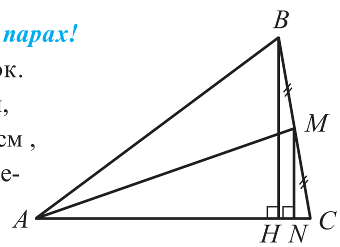
**24.** Найдите площадь равнобедренной трапеции $ABCD$, у которой высота $BH$ равна 7 см, а точка $H$ делит основание $AD$ на два отрезка так, что наибольший из них равен 9 см.

**25.** Найдите площадь прямоугольной трапеции с основаниями 12 см и 9 см и боковой стороной, равной 6 см.

**26.** Вершины трапеции расположены на окружности, радиус которой равен 13 см, а центр находится на основании трапеции. Найдите площадь трапеции, если ее высота равна 12 см.

**27.** Диагонали ромба соответственно увеличили на 40% и 20%. На сколько процентов увеличилась его площадь?

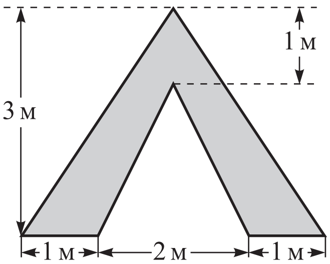
**28.** *Работайте в парах!* Рассмотрите рисунок. Зная, что $AB = 20$ см, $BH = 12$ см, $AM = 18$ см, найдите площадь треугольника $ABC$.



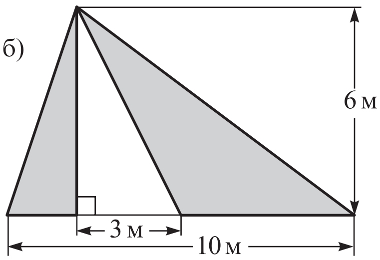
**29.** *Исследуйте!*

На $1\ м^2$ расходуется 100 г краски. Сколько краски потребуется для покраски следующей поверхности?

а)




б)




**30.** Дан параллелограмм $ABCD$. Точка $K$ лежит на прямой $AD$ так, что $AD = DK$. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$, если $\mathcal{A}_{BDK} = 24\ см^2$.

**31.** Найдите площадь прямоугольного треугольника, зная, что сумма длин его катетов равна 11 см, а сумма их квадратов – $61\ см^2$.

**32.** Вычислите площадь трапеции, диагонали которой равны 113 см и 17 см, а ее высота – 15 см.

**33.** Найдите радиус круга, зная, что его площадь равна сумме площадей двух других кругов, радиусы которых соответственно равны 5 см и 12 см.

## Развиваем способности и творим

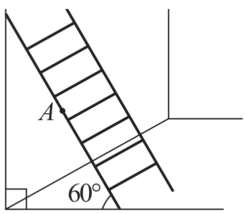
**34.** Диагональ $AC$ параллелограмма $ABCD$ пересекает высоту $BE$ в точке $O$ так, что $\frac{BO}{OE} = \frac{5}{3}$. Найдите площадь четырехугольника $BEDC$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна $100\ см^2$.

**35.** Точка $E$ принадлежит стороне $AD$ прямоугольника $ABCD$ так, что $\frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}$. Найдите площадь четырехугольника $BEDC$, если площадь прямоугольника $ABCD$ равна $S$.

**36.** Центр окружности, вписанной в равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AC$, делит высоту $BM$ в отношении $\frac{17}{15}$. Найдите периметр и площадь треугольника, если радиус окружности равен 7,5 см.

**37.** Найдите площадь трапеции с основаниями 7 см и 20 см и диагоналями 13 см и $5\sqrt{10}$ см.

**38.** Определите множество всех точек $M$, принадлежащих внутренней области равнобедренного треугольника $ABC$ с основанием $AC$, зная, что $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{BCM}$.

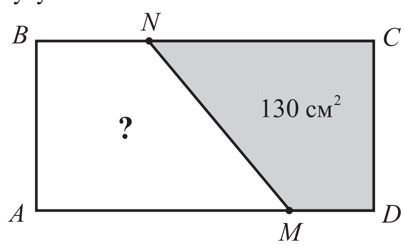



**39.** Лестница опирается на вертикальную стену и горизонтальный пол. Она соскальзывает по стене так, что ее верхние точки коснутся пола. Найдите длину дуги, описываемой точкой $A$, которая лежит на середине лестницы (см. рисунок), зная, что длина лестницы 6 м.

**40.** Найдите площадь трапеции с основаниями 2 см и 3 см и диагоналями 3 см и 4 см.

**41.** Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника делит гипотенузу в отношении 3 : 4. Вычислите площадь треугольника, если длина гипотенузы равна 35 см.

**42.** Точки $M$ и $N$ лежат на сторонах соответственно $AD$ и $BC$ прямоугольника $ABCD$ (см. рисунок) так, что $\frac{DM}{AM} = 0{,}25$, $\frac{CN}{BN} = 2$. Найдите $\mathcal{A}_{ABNM}$, если $\mathcal{A}_{DMNC} = 130\ см^2$.




**43.** Даны точки $A(-2;\ -5)$, $B(6;\ 7)$, $C(4;\ -9)$. Найдите:
а) площадь треугольника $ABC$; б) координаты точки $D$, если $ABCD$ – прямоугольник;
в) площадь прямоугольника $ABCD$.

**44.** В равнобокую трапецию вписана окружность радиуса $r$. Найдите площадь трапеции, если ее большее основание в 2 раза длиннее меньшего основания.

**45.** *Работайте в группах!* Постройте 4 неконгруэнтных эквивалентных треугольника.

**46.** Разделите треугольник на 5 эквивалентных между собой треугольников.

**47.** *Работайте в группах!* **Проект STREAM:** *Площади в искусстве.*

**48.** *Работайте индивидуально!* **Проект:** *Площади в моей жизни.*

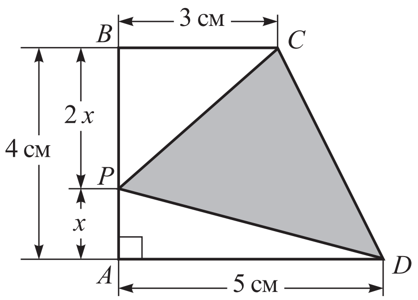
# Итоговый тест

*Время выполнения работы:* 45 минут

## Вариант I

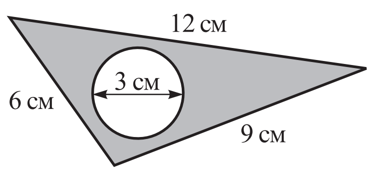
1. Дополните:
а) Площадь прямоугольника со сторонами 4 см и 8 см равна ___ .
б) Площадь прямоугольного треугольника с катетами 6 см и 11 см равна ___ .
в) Площадь параллелограмма с одной из сторон 18 см и высотой 5 см, проведенной к этой стороне, равна ___ .
г) Площадь ромба с диагоналями 13 см и 9 см равна ___ .

2. *ABCD* – прямоугольная трапеция.




а) Найдите площадь трапеции *ABCD*.
б) Вычислите *AP*.
в) Найдите площадь закрашенной части рисунка.

3. Рассмотрите рисунок. Найдите:
а) площадь круга;
б) площадь закрашенной части рисунка.

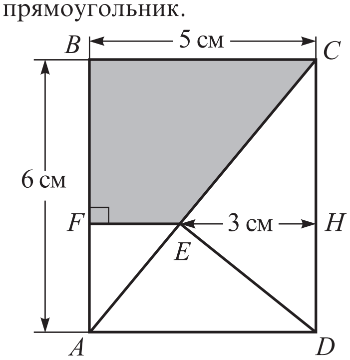



4. Даны точки $A(-7; 2)$, $B(-3; 10)$, $C(9; 4)$. Найдите:
а) площадь треугольника *ABC*;
б) координаты точки *D*, если *ABCD* – прямоугольник;
в) площадь прямоугольника *ABCD*.

## Вариант II

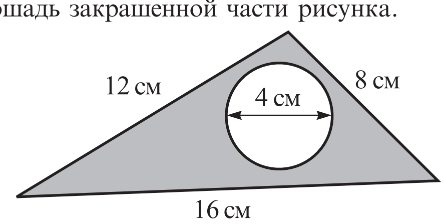
1. Дополните:
а) Площадь прямоугольника со сторонами 5 см и 7 см равна ___ .
б) Площадь прямоугольного треугольника с катетами 14 см и 4 см равна ___ .
в) Площадь параллелограмма с одной из сторон 12 см и высотой 6 см, проведенной к этой стороне, равна ___ .
г) Площадь ромба с диагоналями 11 см и 8 см равна ___ .

2. *ABCD* – прямоугольник.




а) Найдите *BF*.
б) Найдите площадь закрашенной части рисунка.
в) Найдите площадь треугольника *AED*.

3. Рассмотрите рисунок. Найдите:
а) площадь круга;
б) площадь закрашенной части рисунка.




4. Даны точки $A(-10; 4)$, $B(2; 10)$, $C(6; 2)$. Найдите:
а) площадь треугольника *ABC*;
б) координаты точки *D*, если *ABCD* – прямоугольник;
в) площадь прямоугольника *ABCD*.

Глава

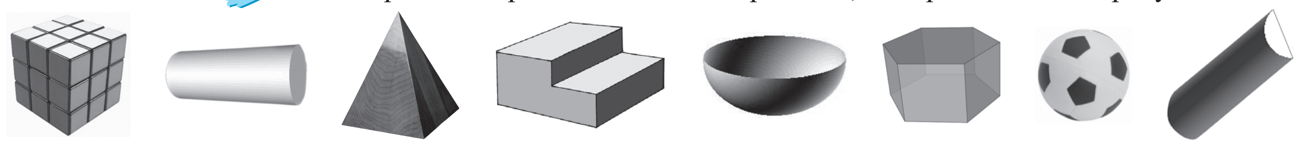
3

# Многогранники

«*Где материя, там и геометрия*».
Иоганн Кеплер

## § 1. Многогранники

**1** Рассмотрите поверхность каждого предмета, изображенного на рисунке 1.



① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧

Рис. 1

а) Отберите предметы, ограниченные многоугольными поверхностями.
б) Назовите изученные ранее геометрические тела, модели которых изображены на данном рисунке.
в) Какие из известных вам геометрических тел имеют грани, ребра, вершины?

**Определение**

- **Многогранник** – это геометрическое тело, ограниченное многоугольными поверхностями. Многоугольные поверхности называются **гранями**, стороны граней – **ребрами**, а их вершины – **вершинами** многогранника.
- Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется **диагональю** многогранника.

***Замечание*** Иногда мы называем грань многогранника по названию многоугольника, который ограничивает эту грань.

***Применим*** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2).
$DD_1C_1C$ – грань, $[AA_1]$ – ребро,
$D$ – вершина и $[B_1D]$ – диагональ куба.

- Назовите все остальные элементы куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

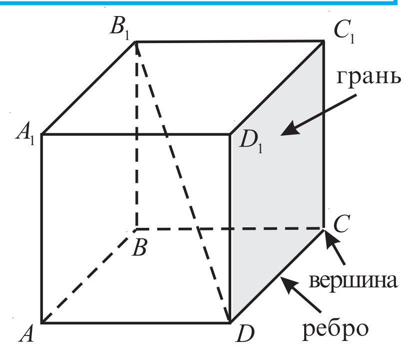



Рис. 2

**2** **Как правильно построить куб?**

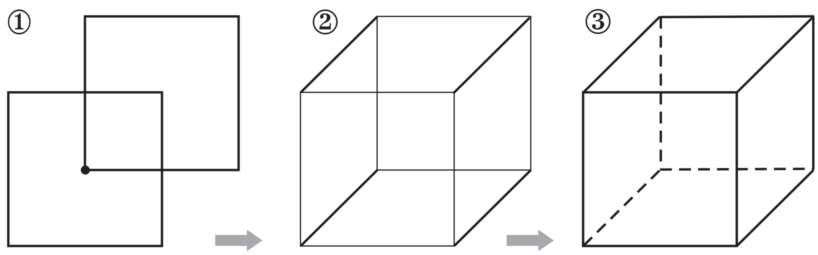



Рис. 3

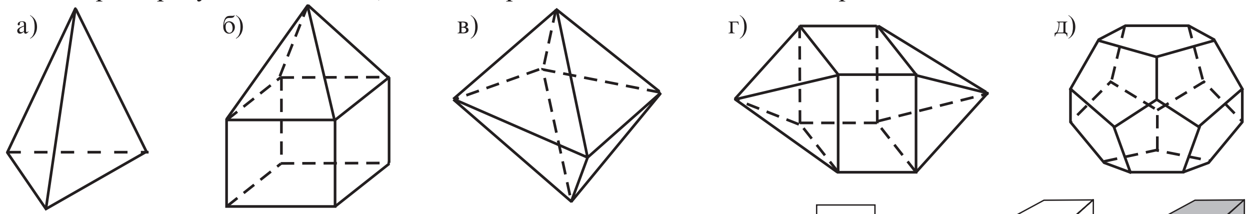
① Строим квадрат, затем из центра квадрата, двигаясь вправо и вверх, строим другой квадрат, конгруэнтный первому (рис. 3).
② Соединяем соответствующие вершины этих двух квадратов.
③ С помощью ластика «разорвем» невидимые ребра.

- Вспомните, по какой формуле можно вычислить площадь полной поверхности и объем куба, а затем найдите площадь полной поверхности и объем куба, ребро которого равно 6 см.

# Упражнения и задачи

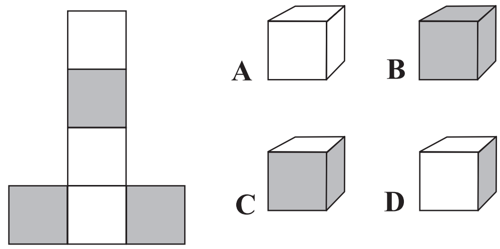
## Закрепляем знания

**1.** Рассмотрите рисунки и найдите, сколько граней имеет каждый многогранник.




**2.** *Исследуйте!* Сколько диагоналей имеет каждый из многогранников, изображенных в задании 1?

**3.** Какие из заданных кубов могут иметь данную развертку? Выберите правильный вариант ответа:
а) **A** и **B**; б) **C** и **D**; в) **A** и **D**; г) **B** и **D**.




**4.** Вычислите площадь полной поверхности и объем куба, ребро которого равно 3 см.

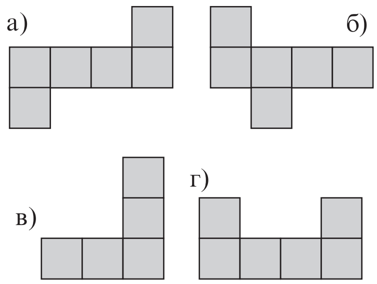
**5.** Найдите объем и площадь полной поверхности куба, если сумма длин его ребер равна 48 см.

**6.** *Работайте в парах!* Вычислите площадь полной поверхности и объем куба, диагональ которого равна $2\sqrt{3}$ см.

## Формируем способности и применяем

**7.** Какова вместимость (в литрах) канистры, если она имеет форму куба с ребром 30 см?

**8.** *Исследуйте!* Миша хочет сделать коробку в форме куба, без крышки, но с двойным дном. Какую из разверток он должен использовать?




**9.** Объем куба равен 125 см$^3$.
Вычислите площадь полной поверхности куба.

**10.** Найдите объем куба, если площадь его полной поверхности равна 24 см$^2$.

**11.** *Работайте в парах!* Сколько весит ледяной куб, ребро которого равно 20 см, если 1 дм$^3$ льда весит 0,9 кг?

**12.** Сумма площадей боковых граней куба равна 216 см$^2$. Найдите длину диагонали куба.

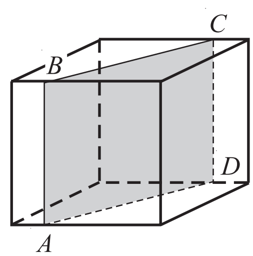
## Развиваем способности и творим

**13.** Найдите площадь полной поверхности куба, зная, что его диагональ длиннее ребра на 1 см.

**14.** Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, у которого $AB = 4$ см. Найдите:
а) расстояние от $D'$ до $B$; б) расстояние от $D'$ до $AB$.

**15.** В кубе $ABCDA'B'C'D'$ точка $P$ – середина отрезка $[C'D']$, и $AP = 8\sqrt{7}$ см. Найдите площадь полной поверхности и объем куба.

**16.** *Исследуйте!* Плоскость пересекает куб (как показано на рисунке) так, что полученное сечение – прямоугольник.
Аналогично покажите, как надо построить сечение, чтобы получить:
а) равносторонний треугольник; б) правильный шестиугольник;
в) равнобокую трапецию.




**17.** Из 27 одинаковых маленьких кубиков построили большой куб. Сравните площадь полной поверхности большого куба с площадью тела, полученного после удаления всех маленьких кубиков, расположенных при вершинах большого куба.

**18.** *Работайте в группах!* **Проект STEAM:** *Многогранники вокруг нас.*

# § 2. Призма

**1** Александр мечтает о постройке большого дома с бассейном прямоугольной формы, размеры которого 10 × 5 м. Какова будет вместимость бассейна, если его глубина составит 2 м?

Для решения этой задачи изучим специальный класс многогранников – призмы.

Исследуйте внимательно параграф и скажите: на какое геометрическое тело похож бассейн?

## 2.1. Элементы призмы. Классификация призм

Напомним, что две ***плоскости параллельны***, если у них нет общих точек.

**Определения**

- **Призмой** называется многогранник, образованный двумя конгруэнтными параллельными гранями (**основаниями**) и всеми отрезками, соединяющими соответствующие точки этих двух граней. Грани призмы, отличные от оснований, называются **боковыми гранями**. Стороны боковых граней называются **боковыми ребрами**.
- Множество точек призмы, не принадлежащих ни основаниям призмы, ни боковым граням, называется **внутренней областью призмы.**

Как правило, при обозначении призмы сначала пишем буквы вершин нижнего основания, а затем буквы вершин верхнего основания.

*Пример*

Призма, изображенная на рисунке 4, может быть обозначена $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

$A_1B_1C_1D_1E_1$ – основание, $EE_1D_1D$ – боковая грань, а $[EE_1]$ – боковое ребро этой призмы.

- Сколько боковых ребер у призмы, изображенной на рисунке 4? А диагоналей?

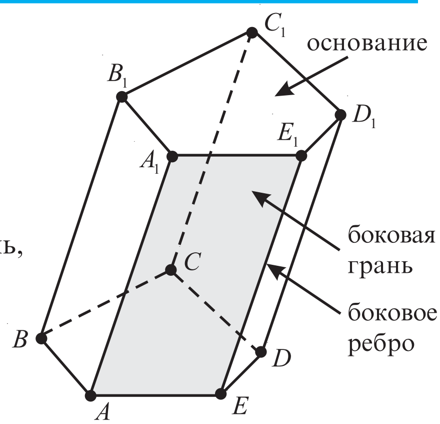



Рис. 4

На основании определения призмы можно доказать:

**Теорема 1** Соответствующие стороны оснований призмы параллельны и конгруэнтны.

Таким образом, в случае призмы, изображенной на рисунке 4, получим $AE \parallel A_1E_1$ и $[AE] \equiv [A_1E_1]$, $AB \parallel A_1B_1$ и $[AB] \equiv [A_1B_1]$ и т. д.

- Применив теорему 1 и признаки параллелограмма, докажите теоремы 2 и 3.

**Теорема 2** Боковые грани призмы являются параллелограммами.

**Теорема 3** Все боковые ребра призмы конгруэнтны между собой и параллельны.

**Определение** **Прямая перпендикулярна плоскости**, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости (рис. 5).

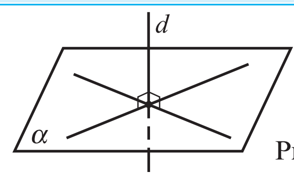
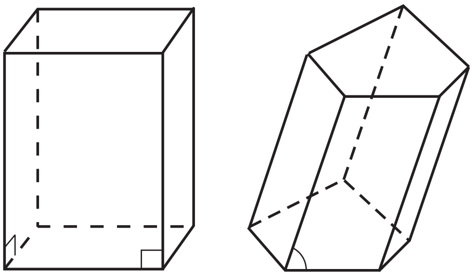



Рис. 5

Любой отрезок, перпендикулярный плоскостям оснований призмы, концы которого принадлежат данным плоскостям, называется ***высотой*** призмы. Длина этого отрезка также называется ***высотой***.



а) б)

Рис. 6

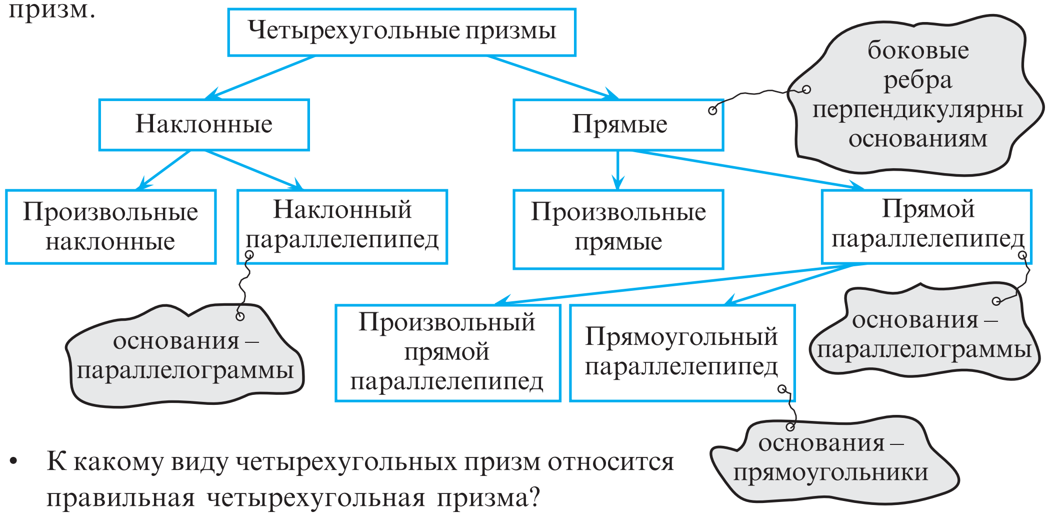
Если боковые ребра призмы перпендикулярны плоскостям оснований, призма называется ***прямой призмой*** (рис. 6 а), в противном случае – ***наклонной*** (рис. 6 б). Заметим, что боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками, а боковые ребра – ее высотами.

Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется ***правильной призмой***.

Призмы классифицируются в соответствии с многоугольниками, лежащими в основании: *треугольные*, *четырехугольные*, *пятиугольные*, *шестиугольные* и т. д.

На рисунке 6 б изображена наклонная пятиугольная призма.

**2** Рассмотрите схему и обратите внимание на классификацию четырехугольных призм.




- К какому виду четырехугольных призм относится правильная четырехугольная призма? Обоснуйте.

## *Применим*

**3** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA' = 10$ см, $AD = 8$ см, $DC = 6$ см (рис. 7). Найдите $A_1C$.

*Решение*:

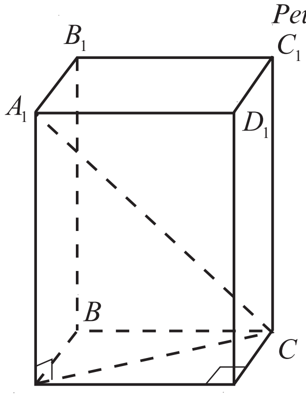



Рис. 7

$AC^2 = AD^2 + CD^2$ (1), → так как $[AC]$ – диагональ прямоугольника $ABCD$.

$A_1C^2 = A_1A^2 + AC^2$ (2), → так как $\Delta A_1AC$ прямоугольный, с прямым углом $A$.

$A_1C^2 = A_1A^2 + AD^2 + CD^2$. → подставим (1) в (2).

Значит,

$A_1C = \sqrt{10^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{200} =$
$= 10\sqrt{2}$ (см). → $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.

*Ответ*: $10\sqrt{2}$ см.

## Теорема 4 (Теорема Пифагора в пространстве)

Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех линейных измерений этого параллелепипеда:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{(рис. 8).}$$

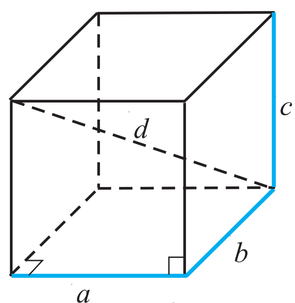



Рис. 8

## 2.2. Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем призмы

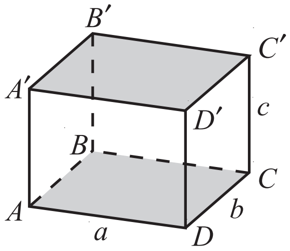


Рис. 9

**4** а) Начертите развертку прямоугольного параллелепипеда, изображенного на рисунке 9.

б) Вычислите площади боковой и полной поверхностей параллелепипеда.

*Решение*:

а) На рисунке 10 изображена развертка параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$.

б) Пусть $\mathscr{A}_б$ – площадь боковой поверхности, а $\mathscr{A}_п$ – площадь полной поверхности параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$.

$$\mathscr{A}_б = \mathscr{A}_{AA'D'D} + \mathscr{A}_{DD'C'C} + \mathscr{A}_{CC'B'B} + \mathscr{A}_{BB'A'A} = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc = 2c(a+b).$$

$$\mathscr{A}_п = \mathscr{A}_б + \mathscr{A}_{ABCD} + \mathscr{A}_{A'B'C'D'} = \mathscr{A}_б + ab + ab = 2ac + 2bc + 2ab = 2(ac + bc + ab).$$

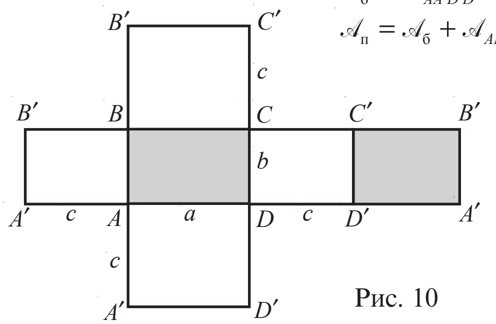


Рис. 10

Объединение боковых граней призмы называется ***боковой поверхностью*** призмы.

***Площадь боковой поверхности*** призмы обозначают: $\mathscr{A}_б$.

Площадь основания призмы обозначается: $\mathscr{A}_{осн}$.

***Площадь полной поверхности*** равна сумме площади боковой поверхности и площадей ее оснований и обозначается: $\mathscr{A}_п$.

**Теорема 5** Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с измерениями $a$, $b$, $c$, вычисляется по формуле $\mathscr{A}_п = 2(ab + ac + bc)$ (рис. 8).

**Мастерская** Изготовьте из картона правильную шестиугольную призму, боковые ребра которой равны 9 см, а стороны основания – 5 см.

**Теорема 6** Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания и высоты призмы (или длины бокового ребра).

Докажем теорему 6.

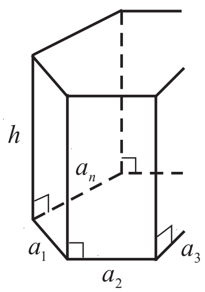


Рис. 11

*Условие*: Пусть $a_1, a_2, ..., a_n$ – стороны основания прямой призмы и $h$ – высота призмы (рис. 11).

*Заключение*: $\mathscr{A}_б = P \cdot h$, где $P = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

*Доказательство*:

① Боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками.

② $\mathscr{A}_б = \mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2 + ... + \mathscr{A}_n$, где $\mathscr{A}_i$ – площадь боковой грани с измерениями $a_i$ и $h$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

③ $\mathscr{A}_i = a_i \cdot h$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ (согласно ① и ②).

④ Подставив ③ в ②, получим: $\mathscr{A}_б = a_1 \cdot h + a_2 \cdot h + ... + a_n \cdot h$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$\mathscr{A}_б = (a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot h = P \cdot h$ (ч.т.д.). ▶

**5** Вычислите объем прямоугольного параллелепипеда, измерения которого $a = 4$ см, $b = 3$ см, $c = 5$ см.

*Решение*:

Основание параллелепипеда «вмещает» $4 \cdot 3 = 12$ (квадратов), площадь каждого квадрата равна 1 см$^2$ (рис. 12). На каждый квадрат можно установить кубик, ребро которого 1 см. Таким образом, основание параллелепипеда «вмещает» 12 кубиков. Так как высота этого слоя равна 1 см, а высота параллелепипеда – 5 см, то параллелепипед состоит из 5 слоев. Следовательно, объем прямоугольного параллелепипеда равен: $12 \cdot 5 = 60$ (см$^3$).

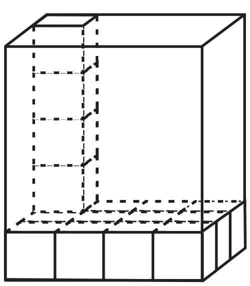


Рис. 12

*Ответ*: 60 см$^3$.

Обобщив результат задачи, получим:

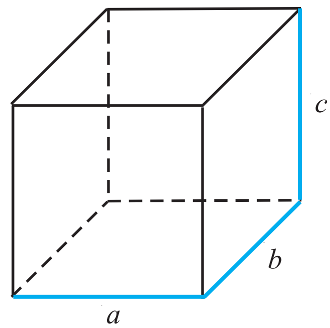


Рис. 13

**Теорема 7**

> Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его линейных измерений: $\mathcal{V} = abc$ (рис. 13).

Так как основание прямоугольного параллелепипеда является прямоугольником, то формулу из теоремы 7 можно записать следующим образом:

$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{осн}} \cdot c \quad (*),$$

где $\mathcal{A}_{\text{осн}} = a \cdot b$ – площадь основания параллелепипеда.

Более того, можно доказать, что формула (*) верна для любой призмы. Следовательно, имеет место

**Теорема 8**

> Объем любой призмы равен произведению площади ее основания на высоту:
> $$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{\text{осн}} \cdot h.$$

***Применим*** **6** Основания призмы – параллелограммы. Одна из сторон параллелограмма равна 6 см, а высота, проведенная к этой стороне, равна 4 см. Высота призмы – 14 см. Найдите объем призмы.

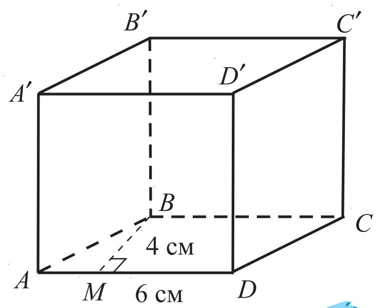


Рис. 14

*Решение*:

Пусть $ABCDA'B'C'D'$ – данная призма (рис. 14).

Тогда $\mathcal{V}_{\text{призмы}} = \mathcal{A}_{ABCD} \cdot h$, где $h$ – высота призмы.

$\mathcal{A}_{ABCD} = BM \cdot AD = 6 \cdot 4 = 24$ (см$^2$).

$\mathcal{V}_{\text{призмы}} = 24 \cdot 14 = 336$ (см$^3$).

*Ответ*: 336 см$^3$.

**7** Решим задачу **1** (см. начало параграфа):

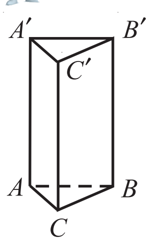
Вместимость бассейна равна объему прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 5 м, 10 м и 2 м. Значит, $\mathcal{V} = 5\text{ м} \cdot 10\text{ м} \cdot 2\text{ м} = 100\text{ м}^3$.

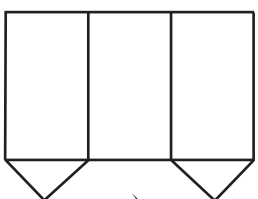
*Ответ*: 100 м$^3$.

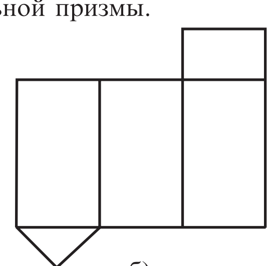
## Упражнения и задачи

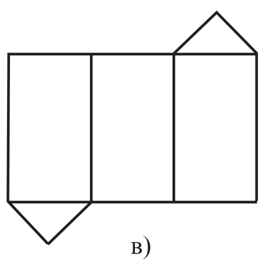
### Закрепляем знания

1. ***Исследуйте!*** Определите развертку треугольной призмы.





а)


б)


в)

2. ***Работайте в парах!*** Начертите развертку прямой правильной треугольной призмы, у которой:
а) сторона основания равна 2 см и высота – 4 см;
б) сторона основания равна 3 см и высота – 2 см.

**3.** Перечертите таблицу в тетрадь и впишите *Да*, если геометрическое тело имеет указанное свойство.

| | Четырехугольная призма (произвольная) | Прямоугольная четырехугольная призма | Правильная четырехугольная призма | Параллелепипед (произвольный) | Прямой параллелепипед (произвольный) | Прямоугольный параллелепипед | Куб |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| В основании – четырехугольник | Да | Да | Да | Да | Да | Да | Да |
| Боковые ребра перпендикулярны плоскости основания | | Да | | | Да | | |
| В основании – параллелограмм | | | | | | | |
| В основании – прямоугольник | | | | | | | |
| Боковые грани – параллелограммы | | | | | | | |
| В основании – квадрат | | | | | | | |
| Боковые грани – квадраты | | | | | | | |

**4.** Найдите площадь полной поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны 6 см и 7 см, а высота – 5 см.

## Формируем способности и применяем

**5.** Вычислите площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если сторона его основания равна 8 см, площадь основания – 40 см$^2$, а объем параллелепипеда – 240 см$^3$.

**6.** Найдите площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда, если сторона его основания равна 4 см, площадь основания – 24 см$^2$, а объем – 168 см$^3$.

**7.** Периметр основания прямоугольного параллелепипеда равен 40 см, а площадь его боковой поверхности – 400 см$^2$. Найдите объем параллелепипеда, зная, что длина его основания на 4 см больше ширины.

**8.** Объем прямоугольного параллелепипеда равен 90 см$^3$. Вычислите площади боковой и полной поверхностей параллелепипеда, если стороны его основания равны 3 см и 5 см.

**9.** Вычислите площадь боковой поверхности и объем правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна 6 см, а высота – 7 см.

**10.** Объем правильной треугольной призмы равен 36 см$^3$. Вычислите площади боковой и полной поверхностей призмы, если сторона ее основания равна 4 см.

**11.** Все ребра прямой треугольной призмы равны $2\sqrt{3}$ см. Вычислите объем призмы.

**12.** ***Работайте в парах!*** Площадь основания правильной треугольной призмы равна $16\sqrt{3}$ см$^2$. Вычислите площадь полной поверхности и объем призмы, зная, что высота призмы в два раза меньше длины стороны основания.

**13.** Зная, что сторона основания правильной треугольной призмы равна 3 см, а площадь боковой поверхности – 45 см$^2$, найдите объем этой призмы.

**14.** Периметр основания правильной треугольной призмы равен 15 см. Вычислите площадь полной поверхности и объем призмы, если ее высота равна 7 см.

**15.** Диагонали трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны 1 см, 2 см, 3 см. Найдите диагональ параллелепипеда.

**16.** Вычислите площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна 4 см, а высота – 7 см.

**17.** Вычислите объем правильной четырехугольной призмы, площадь основания которой равна 25 см$^2$, а площадь боковой поверхности – 160 см$^2$.

**18.** Сторона основания правильной четырехугольной призмы равна 6 см, а ее объем равен 432 см$^3$. Вычислите площади боковой и полной поверхностей призмы.

**19.** Металлический стержень имеет форму правильной треугольной призмы, сторона основания которой равна 10 см, а высота 1 м. Вычислите массу стержня, зная, что плотность металла равна 7 600 кг/м$^3$.

**20.** Диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы равна 13 см. Зная, что площадь основания призмы равна 25 см$^2$, найдите ее объем и площадь полной поверхности.

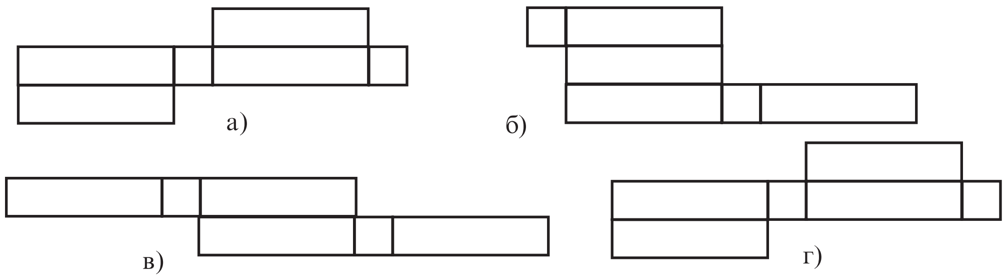
**21.** Объем правильной четырехугольной призмы равен 128 см$^3$, а ее высота – 8 см. Найдите площади боковой и полной поверхностей.

**22.** Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 3 см, а ее высота – 5 см. Найдите площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем призмы.

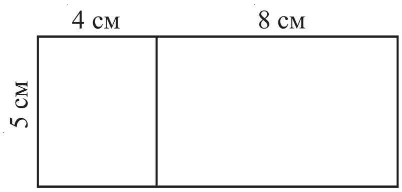
**23.** Найдите площадь полной поверхности правильной шестиугольной призмы, если площадь ее основания равна $54\sqrt{3}$ см$^2$, а объем – 324 см$^3$.

**24.** Найдите объем правильной шестиугольной призмы, высота которой равна 5 см, а площадь боковой поверхности – 120 см$^2$.

**25.** *Исследуйте!* Какие из чертежей не являются развертками прямоугольного параллелепипеда?



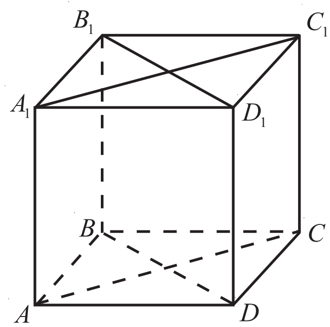

**26.** На рисунке изображены две грани развертки прямоугольного параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда.




**27.** Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда соответственно равны $\sqrt{41}$ см, $4\sqrt{26}$ см и $5\sqrt{17}$ см. Найдите отношение объема параллелепипеда к длине его диагонали.

**28.** Периметр основания правильной шестиугольной призмы равен 18 см, а площадь боковой поверхности – $162\sqrt{3}$ см$^2$. Найдите объем призмы.

**29.** *Работайте в парах!* Дана призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок). Найдите площадь боковой поверхности, если $\mathscr{A}_{AA_1C_1C} = 3$ см$^2$, $\mathscr{A}_{BB_1D_1D} = 4$ см$^2$.




**30.** Найдите площади боковой и полной поверхностей правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 2 см, а объем $60\sqrt{3}$ см$^3$.

**31.** Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, равны $6$ м$^2$, $6$ м$^2$ и $4$ м$^2$. Найдите объем параллелепипеда.

## Развиваем способности и творим

**32.** Бидон в форме прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 10 см, 15 см и 20 см, заполнен водой. Содержимое бидона перелили в сосуд кубической формы, ребро которого равно 50 см. До какой высоты поднимется вода в сосуде?

**33.** Измерения прямоугольного параллелепипеда прямо пропорциональны числам 2, 3, 5, а его объем равен 240 см$^3$. Найдите: а) диагонали параллелепипеда; б) площадь полной поверхности параллелепипеда.

**34.** По боковой поверхности коробки, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, обозначенного $ABCDA'B'C'D'$, ползет муравей из точки $A$ в точку $C'$ – по наикратчайшему пути. Зная, что $AB = 8$ см, $BC = 4$ см и $AA' = 12\sqrt{3}$ см, найдите:
а) площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем параллелепипеда;
б) длину пути муравья.

**35.** Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$, у которой $AB = 8$ см, а диагональ боковой грани равна 10 см. Вычислите площадь полной поверхности призмы и ее объем.

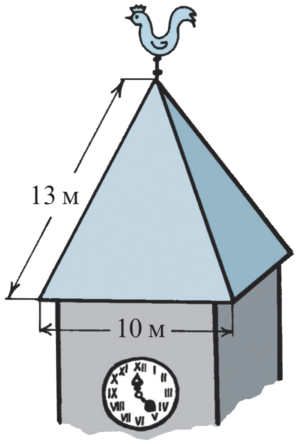
**36.** (EG, 2021) Канистра имеет форму куба с диагональю $\sqrt{3}$ дм. Найдите вместимость канистры в дм$^3$.

**37.** (EG, 2016) Бассейн имеет форму правильной четырехугольной призмы со стороной основания 4 м и высотой 2 м. Для облицовки керамической плиткой стен и дна бассейна применяют плиточный клей. Одного пакета клея хватает на 4 м$^2$ поверхности. Определите количество пакетов клея, необходимого для облицовки бассейна.

**38.** На столе лежат 3 кубика. Ребра двух из них имеют длины 5 см и 12 см. Найдите длину ребра третьего кубика, если известно, что для окраски поверхности третьего кубика использовано такое же количество краски, которое потребовалось бы для окраски поверхности двух других кубиков.

**39.** (EG, 2019) Металлическую деталь в форме прямоугольного параллелепипеда с измерениями 4 см, 6 см и 9 см переплавили в куб. Найдите длину ребра куба.

# § 3. Пирамида. Усеченная пирамида




**1** Крыша башни имеет форму четырехугольной пирамиды, стороны основания которой конгруэнтны и равны 10 м, а конгруэнтные боковые ребра равны 13 м. Сколько краски необходимо для покраски данной крыши, если одной банки хватает на $10 \text{ м}^2$ поверхности?

Для решения задачи изучим другой вид многогранников – *пирамиды.*

## 3.1. Элементы пирамиды. Классификация пирамид

**Определение**

**Пирамидой** называется многогранник, образованный многоугольной поверхностью, называемой **основанием**, точкой, не принадлежащей основанию (**вершина пирамиды**), и всеми отрезками, соединяющими вершину пирамиды с точками основания.

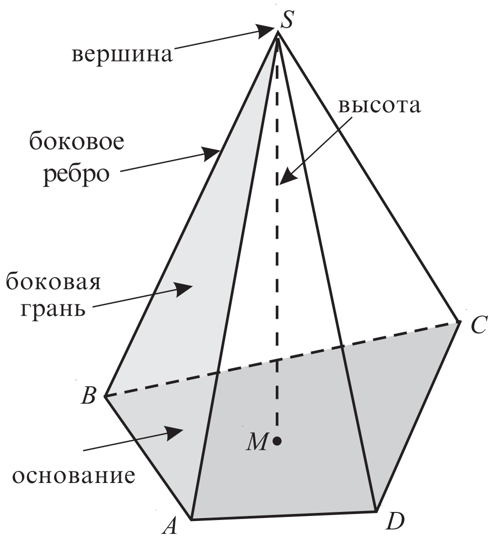



Рис. 15

Отрезок, проведенный из вершины пирамиды перпендикулярно основанию, называется ***высотой*** пирамиды. Длина этого отрезка также называется ***высотой*** пирамиды.

***Боковые грани*** пирамиды являются треугольниками с общей вершиной в вершине пирамиды. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются ***боковыми ребрами***.

Множество точек пирамиды, не принадлежащих ни основанию пирамиды, ни боковым граням, называется ***внутренней областью пирамиды***.

Обычно, обозначая пирамиду, вначале пишут букву вершины пирамиды, а затем буквы вершин основания этой пирамиды.

*Пример*

Пирамида, изображенная на рисунке 15, может быть обозначена $SABCD$.

$ABCD$ – основание, $S$ – вершина, $ABS$ – боковая грань, $[SB]$ – ребро пирамиды.

Если отрезок $[SM]$ перпендикулярен основанию, то $[SM]$ – высота пирамиды $SABCD$.

Пирамиды классифицируются в соответствии с многоугольником, лежащим в основании: *треугольные* (*тетраэдры*), *четырехугольные*, *пятиугольные*, *шестиугольные*, *семиугольные* и т. д.

**Определение**

Пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, называется **правильной пирамидой**.

• Применив теорему Пифагора, докажите:

**Теорема 9**

Боковые ребра прямой пирамиды конгруэнтны.

Высота боковой грани, проведенная из вершины правильной пирамиды, называется ***апофемой*** этой пирамиды.

• Несмотря на то, что треугольная пирамида называется еще и ***тетраэдром***, термин *правильный тетраэдр* не используется в случае любой правильной треугольной пирамиды.

**Определение** Тетраэдр, все ребра которого конгруэнтны, называется **правильным тетраэдром**.

- Сформулируйте несколько свойств правильного тетраэдра.

*Пример*

Грани правильного тетраэдра являются конгруэнтными равносторонними треугольниками.

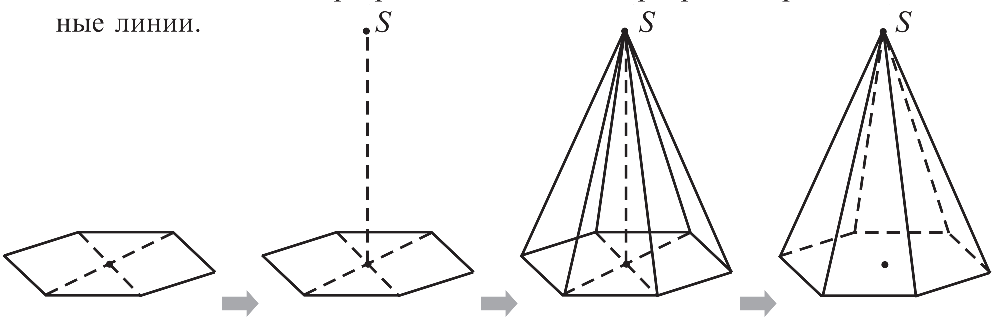
**2** **Как правильно построить пирамиду?**

① Строим с помощью линейки и карандаша основание пирамиды (рис. 16).

② Отмечаем вершину пирамиды. В случае правильной пирамиды находим центр основания, затем из этого центра проводим вертикальную линию и отмечаем на ней вершину пирамиды.

③ Соединяем вершину пирамиды с вершинами основания.

④ С помощью ластика «разрываем» невидимые ребра и стираем вспомогательные линии.




① ② ③ ④

Рис. 16

## 3.2. Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем пирамиды

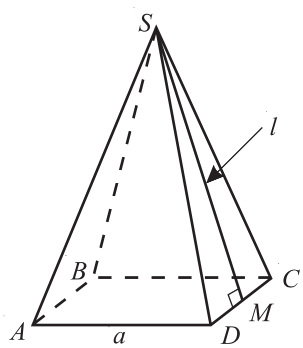



Рис. 17

**3** а) На рисунке 17 изображена правильная пирамида $SABCD$. Нарисуйте схематически ее развертку.

б) Вычислите площадь боковой поверхности пирамиды $SABCD$, если сторона ее основания равна $a$, а апофема пирамиды – $l$.

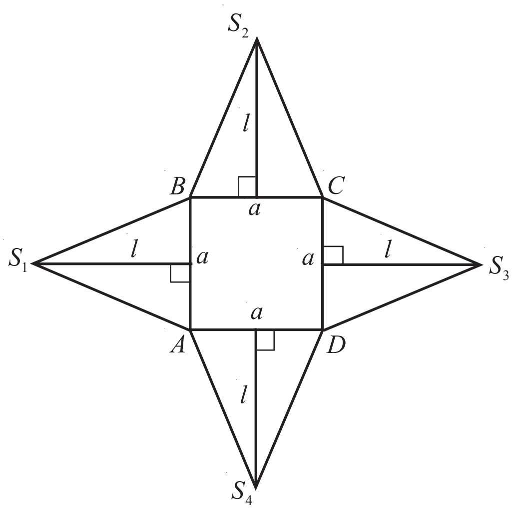



Рис. 18

*Решение*:

а) На рисунке 18 изображена развертка пирамиды $SABCD$.

Очевидно, что треугольники $AS_1B$, $BS_2C$, $CS_3D$, $DS_4A$ являются равнобедренными и конгруэнтными между собой.

б) Площадь боковой поверхности ($\mathscr{A}_б$) пирамиды равна сумме площадей равнобедренных треугольников, изображенных на рисунке 18.

$\mathscr{A}_{AS_1B} = \frac{1}{2}a \cdot l.$

Значит, $\mathscr{A}_б = 4 \cdot \frac{1}{2}al = 2al.$

*Ответ*: $\mathscr{A}_б = 2al.$

**Замечание**

Так как периметр основания пирамиды равен $P = 4a$, ответ задачи можно записать следующим образом:

$$\mathcal{A}_б = \frac{1}{2} P \cdot l,$$

где $P$ – периметр основания пирамиды.

Объединение боковых граней пирамиды называют ***боковой поверхностью*** пирамиды.

***Площадь полной поверхности*** пирамиды равна сумме площадей боковой поверхности и ее основания.

**Теорема 10**

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему пирамиды (рис. 19).

$$\mathcal{A}_б = \frac{1}{2} P \cdot l,$$

где $P$ – периметр основания.

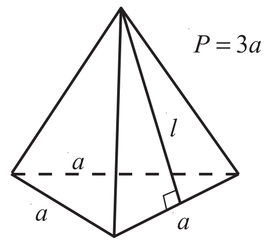



Рис. 19

**Применим**

• *Решение задачи* 1:

Для того чтобы найти площадь поверхности крыши, надо вычислить площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$, сторона основания которой равна 10 м, а боковое ребро – 13 м (рис. 20).

Пусть $[SM]$ – апофема пирамиды.

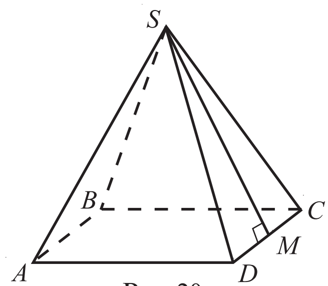



Рис. 20

$SM = \sqrt{SD^2 - DM^2}$, → так как $\Delta SMD$ – прямоугольный, с прямым углом $M$.

$SM = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ (м).

$\mathcal{A}_б = \frac{1}{2} P \cdot SM$, → $P$ – периметр основания.

$\mathcal{A}_б = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 12 = 240$ (м$^2$). → так как периметр основания равен 40 м.

$240 : 10 = 24$ (банки).

*Ответ*: 24 банки краски.

***Работайте в парах!***

а) Изобразите правильный тетраэдр.

б) Нарисуйте развертку этого тетраэдра, зная, что длина его ребра равна 8 см.

в) Найдите длину апофемы тетраэдра.

г) Вычислите площадь полной поверхности тетраэдра.

4 Чему равен объем пирамиды, рассмотренной в задаче 1 ?

Чтобы ответить на этот вопрос, сначала рассмотрим следующую теорему.

**Теорема 11**

Объем пирамиды равен одной трети произведения площади основания на ее высоту: $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{осн} \cdot h$.

## Применим

• Решим задачу 4:

Вычислим объем правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (рис. 21), сторона основания которой равна 10 м, а ребро – 13 м.

① Пусть $O$ – точка пересечения диагоналей основания $ABCD$. Тогда $[SO]$ – высота пирамиды $SABCD$ → так как $SABCD$ – правильная пирамида.

② $AO = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$ (м) → так как диагональ квадрата со стороной $a$ равна $a\sqrt{2}$.

③ $SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{169 - 50} = \sqrt{119}$ (м) → так как $SO$ – катет прямоугольного треугольника $SOA$.

④ $\mathcal{V}_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_b \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \sqrt{119} = \frac{100\sqrt{119}}{3}$ (м$^3$) → по теореме 11.

*Ответ*: $\frac{100\sqrt{119}}{3}$ м$^3$.

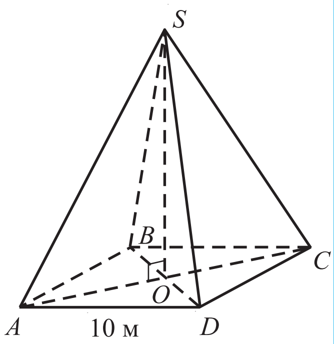


Рис. 21

## 3.3. Усеченная пирамида

Плоскость, параллельная плоскости основания пирамиды и пересекающая пирамиду, разбивает ее на два многогранника – один из них ***усеченная пирамида***, а другой – пирамида поменьше.

Параллельные грани усеченной пирамиды называются ***основаниями***.

Любой отрезок, перпендикулярный основаниям и соединяющий точки этих оснований, называется ***высотой*** усеченной пирамиды. Длина этого отрезка также называется ***высотой*** усеченной пирамиды.

Основания усеченной пирамиды являются подобными многоугольниками. Боковые грани – трапеции.

Обычно при обозначении усеченной пирамиды сначала пишем буквы вершин бóльшего основания, а затем буквы вершин меньшего основания.

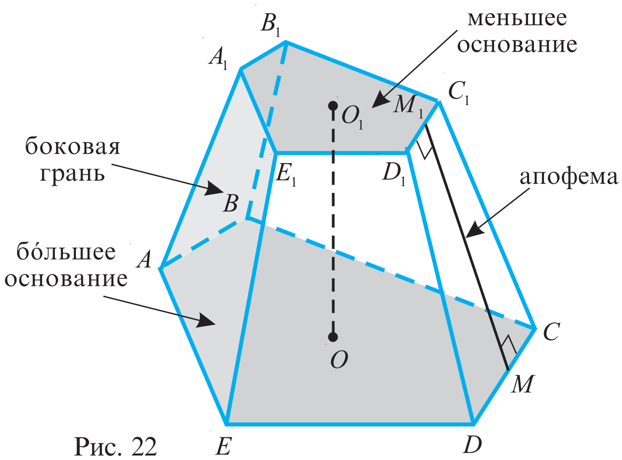


Рис. 22

*Пример*

Усеченная пирамида, изображенная на рисунке 22, может быть обозначена $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

Многоугольники $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ – соответственно большее и меньшее основания, $AA_1E_1E$ – боковая грань.

Если отрезок $[OO_1]$ перпендикулярен основаниям, то $[OO_1]$ – высота усеченной пирамиды.

***Правильной усеченной пирамидой*** является прямая усеченная пирамида, основания которой – правильные многоугольники. Ее боковые грани – конгруэнтные трапеции.

Высоты боковых граней правильной усеченной пирамиды называются ***апофемами*** усеченной пирамиды. Например, $[MM_1]$ – апофема этой усеченной пирамиды (рис. 22).

Усеченные пирамиды классифицируются в соответствии с многоугольником, лежащим в основании: *треугольные*, *четырехугольные*, *пятиугольные*, *шестиугольные*, *семиугольные* и т. д.

Усеченная пирамида имеет развертку.

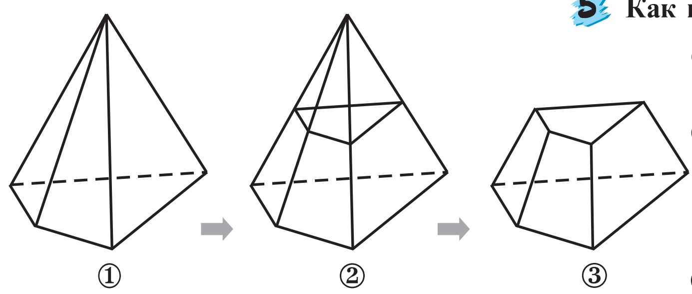



Рис. 23

**5 Как правильно построить усеченную пирамиду?**

① Строим с помощью линейки и карандаша пирамиду (рис. 23).

② Отмечаем на боковом ребре точку и через нее проводим многоугольник, стороны которого соответственно параллельны сторонам основания пирамиды.

③ С помощью ластика стираем боковые ребра меньшей пирамиды.

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна $9\sqrt{3}$ см$^2$, а ее апофема – 5 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

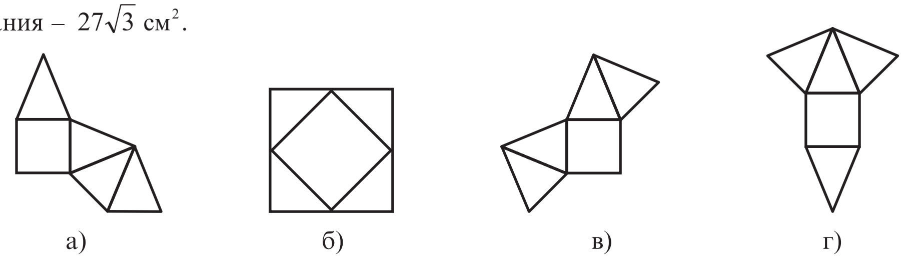
**2.** Периметр основания правильной треугольной пирамиды равен $18\sqrt{3}$ см, ее высота – 4 см, а апофема пирамиды – 5 см. Найдите площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем пирамиды.

**3.** Объем правильной треугольной пирамиды равен $3\sqrt{3}$ см$^3$, ее высота – 1 см, а апофема пирамиды – 2 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

**4.** Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна $36\sqrt{3}$ см$^2$, ее апофема – 4 см, а высота пирамиды – 2 см. Найдите площадь полной поверхности и объем пирамиды.

**5.** Вычислите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, апофема которой равна 4 см, а площадь основания – $27\sqrt{3}$ см$^2$.

**6.** *Работайте в парах!* Какие из следующих фигур не являются развертками пирамиды?




**7.** Апофема правильной четырехугольной пирамиды равна 3 см, ее высота – $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ см, а площадь боковой поверхности – 18 см$^2$. Найдите объем пирамиды.

**8.** Вычислите площадь боковой поверхности и объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см, ее апофема – 5 см, а высота – 4 см.

**9.** Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12 см, периметр основания пирамиды – 40 см, ее апофема – 13 см. Найдите площадь полной поверхности и объем пирамиды.

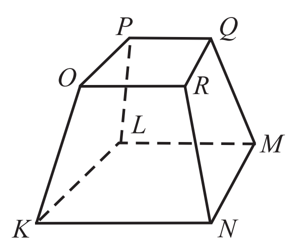
**10.** Найдите площадь полной поверхности и объем правильной четырехугольной пирамиды, площадь основания которой 36 см$^2$, ее апофема – 6 см, а высота $3\sqrt{3}$ см.

**11.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см, ее апофема – 5 см, а высота – 3 см. Вычислите площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем пирамиды.

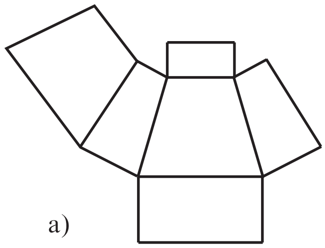
**12.** Найдите площадь полной поверхности и объем правильной шестиугольной пирамиды, сторона основания которой равна 4 см, ее высота – 2 см, а апофема – 4 см.

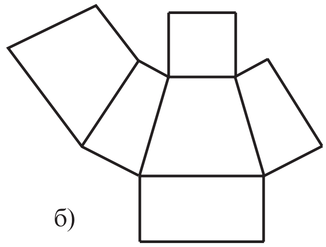
**13.** Начертите усеченную пирамиду:
а) треугольную; б) четырехугольную; в) пятиугольную.

**14.** На рисунке изображена усеченная пирамида. Укажите:
а) основания; б) боковые грани; в) боковые ребра.



**15.** Зная свойства, которыми обладают основания и боковые грани усеченной пирамиды, определите, какая из следующих разверток является разверткой четырехугольной усеченной пирамиды.


а)


б)

**16.** Начертите развертку усеченной пирамиды:
а) правильной треугольной;
б) четырехугольной, в основаниях которой лежат параллелограммы;
в) четырехугольной, в основаниях которой лежат трапеции.

**17.** *Исследуйте!* В многограннике две грани параллельны, а остальные являются трапециями. Определите, является ли многогранник усеченной пирамидой, если параллельные грани:
а) подобные треугольники; б) равносторонние треугольники;
в) квадраты; г) правильные многоугольники с одинаковым числом сторон.

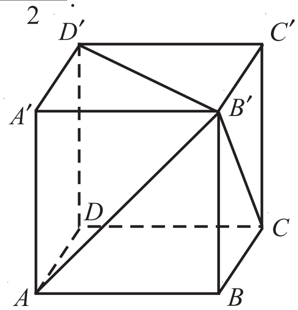
## Формируем способности и применяем

**18.** Дана правильная четырехугольная пирамида. Обозначим: $a$ – сторона основания, $l$ – апофема, $P$ – периметр основания, $\mathscr{S}_б$ – площадь боковой поверхности, $\mathscr{S}$ – площадь полной поверхности. Найдите:
а) $P$, $\mathscr{S}_б$ и $\mathscr{S}$, если $a=6$ м, $l=12$ м;
б) $l$, $P$ и $\mathscr{S}_б$, если $a=13$ м, $\mathscr{S}=689$ м$^2$;
в) $a$, $P$, $\mathscr{S}$, если $l=16$ м, $\mathscr{S}_б=288$ м$^2$;
г) $a$, $l$, $\mathscr{S}$, если $P=44$ м, $\mathscr{S}_б=396$ м$^2$;
д) $a$, $k$, $P$, если $\mathscr{S}_б=352$ м$^2$, $\mathscr{S}=416$ м$^2$.

**19.** Площадь основания правильной шестиугольной пирамиды равна $48\sqrt{3}$ см$^2$, а апофема пирамиды – 5 см. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

**20.** Пирамида Хеопса первоначально имела высоту 147,5 м, а в основании – квадрат со стороной 232 м. Отношение длины апофемы $VM$ к отрезку $OM$, где $V$ – вершина пирамиды, а $O$ – центр основания, равно знаменитому числу, которое использовалось еще в древней архитектуре. Найдите это число и сравните его с $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

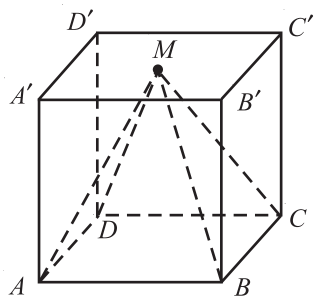
**21.** *Работайте в парах!* Длина ребра куба, изображенного на рисунке, равна $4\sqrt{3}$ см. Вычислите высоту тетраэдра $AA'D'B'$ ($A'D'B'$ – основание тетраэдра).




**22.** Объем правильной шестиугольной пирамиды равен $48\sqrt{3}$ см$^3$, высота пирамиды – 3 см, а ее апофема конгруэнтна стороне основания. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

**23.** Площадь боковой поверхности правильной шестиугольной пирамиды равна 192 см², ее высота – 4 см, а апофема пирамиды конгруэнтна стороне основания. Вычислите объем пирамиды.

**24.** Длина ребра куба, изображенного на рисунке, равна 16 см. Вершина $M$ пирамиды $MABCD$ – центр грани $A'B'C'D'$ куба. Найдите отношение площади боковой поверхности к площади основания пирамиды.




**25.** Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды конгруэнтна высоте пирамиды. Вычислите площадь боковой поверхности и объем пирамиды, если ее высота равна 10 см, а апофема – $5\sqrt{7}$ см.

## Развиваем способности и творим

**26.** Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см, а длина стороны основания – 12 см. Найдите площадь полной поверхности и объем пирамиды.

**27.** Дан правильный тетраэдр $ABCD$, у которого $AB = 4$ см, а $G_1, G_2, G_3$ – центры тяжести треугольников $DBC$, $DAC$ и соответственно $DAB$.
а) Вычислите площадь полной поверхности и объем тетраэдра.
б) Найдите отношение площади треугольника $G_1G_2G_3$ к площади треугольника $ABC$.

**28.** Высота правильного тетраэдра равна 8 см. Найдите объем тетраэдра.

**29.** Анна купила 2 пакета молока в форме правильной четырехугольной пирамиды со стороной 10 см и высотой 9 см, а Михаил – один пакет в форме правильной четырехугольной призмы со стороной основания 5 см и высотой 25 см. Определите, кто купил больше молока.

**30.** (EG, 2020) В правильной четырехугольной пирамиде объемом 36 см$^3$ высота в два раза меньше длины основания. Найдите длину стороны основания.

**31.** *Работайте индивидуально!* **Проект:** *Многогранники в моем доме.*

## Упражнения и задачи на повторение

### Закрепляем знания

**1.** Найдите сумму величин углов, образованных гранями: а) треугольной пирамиды;
б) четырехугольной призмы;
в) пятиугольной призмы.

**2.** Вычислите высоту правильного тетраэдра, ребро которого равно 10 см.

**3.** Найдите объем правильного тетраэдра, ребро которого равно 8 см.

**4.** Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 7 см, 4 см, 8 см. Найдите площадь полной поверхности и объем параллелепипеда.

**5.** Объем куба равен 216 см$^3$. Вычислите площадь полной поверхности куба.

**6.** Дана правильная треугольная призма, сторона основания которой равна 4 см, а высота – 8 см. Найдите площадь боковой поверхности призмы и ее объем.

**7.** Боковыми гранями правильной шестиугольной призмы являются квадраты, а сторона основания равна 2 см. Вычислите площадь боковой поверхности и объем призмы.

**8.** Дана прямая призма $ABCDEF$, в основании которой лежит прямоугольный треугольник $ABC$. Высота призмы конгруэнтна гипотенузе $AC$ и $AB = 12$ см, $BC = 9$ см. Вычислите:
а) площадь полной поверхности и объем призмы;
б) площадь треугольника $EBK$, где точка $K$ – середина ребра $AC$.

**9.** *Исследуйте!* Сколько всего диагоналей в:
а) пятиугольной усеченной пирамиде;
б) усеченной пирамиде, основания которой являются $n$-угольниками?

**10.** Пусть $ABCA'B'C'$ – правильная треугольная призма. Зная, что расстояние между центрами двух боковых граней равно 4 см, а площадь боковой поверхности – $96\sqrt{3}$ см$^2$, вычислите:
а) высоту призмы; б) объем призмы.

**11.** Все ребра правильной призмы $ABCA'B'C'$ равны 3 см. Вычислите длину отрезка $AD$, где точка $D$ – середина ребра $B'C'$.

**12.** Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 15 см и 5 см, а его площадь боковой поверхности в два раза больше площади основания. Вычислите высоту и объем параллелепипеда.

**13.** Дан куб, диагональ которого равна 3 см. Соединив центр куба с его вершинами, получим 6 конгруэнтных пирамид. Чему равен объем каждой из этих пирамид?

**14.** Дана треугольная призма $ABCA'B'C'$. Две стороны треугольника $ABC$ равны 17 см и 24 см, а величина угла между ними – 30°. Зная, что высота призмы равна 12 см, найдите ее объем.

### Формируем способности и применяем

**15.** Сумма измерений прямоугольного параллелепипеда равна 24 см, длина диагонали – 18 см. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

**16.** Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, точка $M$ – середина $[A'D']$, а точка $P$ – середина $[AB]$. Зная, что $MP = 4\sqrt{3}$ см, вычислите длину ребра и объем куба.

**17.** Сумма длин ребер, исходящих из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, равна 15 см, а его диагональ – $\sqrt{77}$ см. Вычислите площадь полной поверхности параллелепипеда.

**18.** Объем правильной четырехугольной призмы равен 175 см$^3$, а ее высота – 7 см. Вычислите длину диагонали и площадь полной поверхности призмы.

**19.** Сторона основания правильной шестиугольной призмы равна 6 см, а ее высота – 8 см. Вычислите длины диагоналей призмы, площадь полной поверхности и ее объем.

**20.** ***Работайте в парах!*** Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, у которого $AB=12$ см, $BC=35$ см. Площадь сечения, проходящего через ребро $AA'$ и $CC'$, равна 370 см². Вычислите площадь боковой поверхности и объем параллелепипеда.

## Развиваем способности и творим

**21.** Поверхность в форме равностороннего треугольника, высота которого равна $4\sqrt{3}$ см, является разверткой тетраэдра. Вычислите площадь полной поверхности и объем тетраэдра.

**22.** Дана правильная треугольная пирамида $VABC$, в основании которой лежит треугольник $ABC$ и $AB=12\sqrt{2}$ см, $AV=12$ см.

а) Найдите высоту треугольника $ABC$.

б) Вычислите высоту пирамиды.

в) Найдите объем пирамиды.

**23*.** Из пирамиды, высота которой 12 см, а сторона основания – 8 см, получили правильную четырехугольную усеченную пирамиду. Вычислите длину бокового ребра усеченной пирамиды, зная, что ее высота равна 4 см.

**24.** Площадь полной поверхности правильного тетраэдра равна $6\sqrt{3}$ см$^2$. Найдите объем тетраэдра.

# Итоговый тест

*Время выполнения работы: 45 минут*

## Вариант I

**1.** Сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда с высотой 20 см и сторонами основания 10 см и 15 см наполнен водой.

а) Начертите развертку параллелепипеда в масштабе 1:5.

б) Найдите площадь боковой поверхности параллелепипеда.

в) Сколько литров воды в сосуде?

г) Воду из данного сосуда перелили в сосуд, имеющий форму куба с ребром 20 см. На какой уровень поднялась вода в кубическом сосуде?

д) Найдите отношение между емкостями сосудов.

**2.** Металлическое тело имеет форму правильного тетраэдра.

а) Найдите ребро тетраэдра, если сумма всех его ребер равна 54 см.

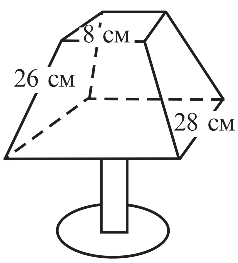
б) Начертите развертку тетраэдра.

в) Найдите общую площадь тела.

г) Вычислите высоту тетраэдра.

д) Данное тело переплавили в правильные тетраэдры с ребрами 3 см. Сколько всего маленьких тетраэдров получили?

**3.** Абажур для лампы имеет форму правильной четырехугольной усеченной пирамиды без оснований (см. рисунок) и изготовлен из ткани. Хватит ли отреза ткани в форме квадрата со стороной 50 см для изготовления данного абажура?




## Вариант II

**1.** Ваза в виде правильной треугольной призмы со стороной основания 12 см и высотой 30 см наполовину наполнена водой.

а) Начертите развертку призмы в масштабе 1:3.

б) Найдите площадь боковой поверхности призмы.

в) Сколько литров воды в вазе?

г) Воду из вазы перелили в сосуд, имеющий форму куба с ребром 20 см. На какой уровень поднялась вода в кубическом сосуде?

д) Найдите отношение между емкостями сосуда и вазы.

**2.** Металлическое тело имеет форму правильного тетраэдра.

а) Найдите ребро тетраэдра, если сумма всех его ребер равна 72 см.

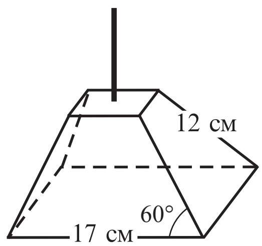
б) Начертите развертку тетраэдра.

в) Найдите общую площадь тела.

г) Вычислите высоту тетраэдра.

д) Данное тело переплавили в правильные тетраэдры с ребрами 6 см. Сколько всего маленьких тетраэдров получили?

**3.** Люстра в виде правильной четырехугольной усеченной пирамиды без оснований (см. рисунок) изготовлена из стекла. Хватит ли листа стекла в форме квадрата со стороной 50 см для изготовления данной люстры?



Глава

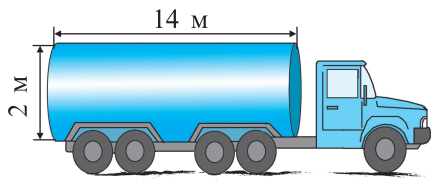
# 4 Круглые тела

> *«Геометрия влечет душу к истине и создает дух философии».*
> Платон

На практике кроме многогранников встречаются тела, полностью или частично ограниченные неплоскими поверхностями: сфера, цилиндр, конус и т.д., называемые **круглыми телами**. Как и многогранники, эти тела обладают рядом интересных свойств. Например, из всех геометрических тел с одной и той же площадью поверхности шар имеет наибольший объем.

Так как поверхность круглых тел образуется (как мы позже убедимся) при полном вращении геометрических фигур вокруг некоторой прямой, эти тела называют еще **телами вращения**.

## § 1. Цилиндр (прямой круговой)




1 На автозаправке решили покрасить 10 цистерн (цилиндрической формы) – машин, перевозящих бензин. Длина каждой цистерны равна 14 м, а диаметр основания – 2 м. Сколько банок краски понадобится, если одной банки хватает на покраску поверхности площадью 15 м$^2$?

### 1.1. Элементы цилиндра

**Определение**

- Геометрическое тело, образованное двумя конгруэнтными кругами, лежащими в параллельных плоскостях, и всеми отрезками, соединяющими соответствующие точки этих кругов, называется **круговым цилиндром** (рис. 1).
- Круги цилиндра называются **основаниями цилиндра**.

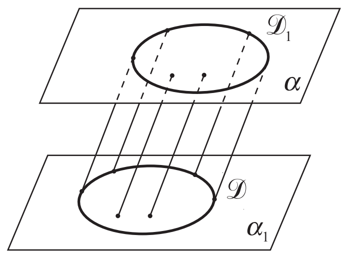



Рис. 1

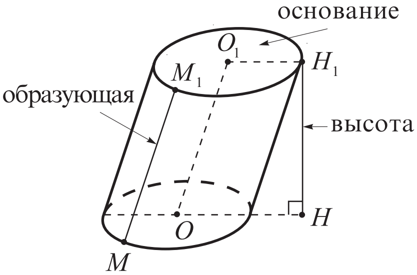



Рис. 2

Любой отрезок, перпендикулярный плоскостям оснований цилиндра, концы которого принадлежат этим плоскостям, называется ***высотой*** цилиндра. Длина этого отрезка также называется ***высотой***.

Например, на рисунке 2 изображен цилиндр, основаниями которого являются круги $\mathscr{D}(O, OM)$ и $\mathscr{D}_1(O_1, O_1M_1)$.

Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}_1$ – окружности, ограничивающие круги $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}_1$.

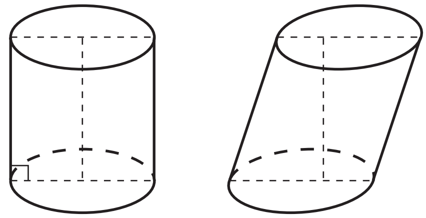
Отрезки, параллельные прямой $OO_1$, соединяющие соответствующие точки окружностей $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$, называются ***образующими цилиндра***.

Таким образом, отрезок $MM_1$ – образующая цилиндра, изображенного на рисунке 2.

Множество всех образующих цилиндра называется ***боковой поверхностью*** цилиндра, а множество точек цилиндра, которые не принадлежат ни основаниям, ни боковой поверхности, называется ***внутренней областью цилиндра***.

Если образующие цилиндра перпендикулярны плоскостям оснований, то цилиндр называется ***прямым*** (рис. 3а), в противном случае цилиндр называется ***наклонным*** (рис. 3б).

Заметим, что образующие прямого цилиндра являются его высотами.



а) Рис. 3 б)

*Замечания*

1. В IX классе изучается только прямой круговой цилиндр, который для краткости называется просто ***цилиндром***.
2. На практике чаще встречаются задачи, связанные с поверхностью цилиндра. Поэтому для краткости под понятием цилиндр иногда подразумевается только его поверхность.

**2** Опишите тело, которое получится при полном вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой $AB$.

*Решение*:

При полном вращении прямоугольника $ABCD$ вокруг прямой $AB$ получится цилиндр, высотой которого является отрезок $AB$, а радиусом – отрезок $AD$ (рис. 4).

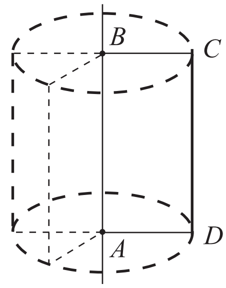



Рис. 4

## 1.2. Развертка цилиндра. Сечения

**1** Рассмотрите развертку цилиндра.

*Решение*:

Разрезав боковую поверхность цилиндра по образующей, получим прямоугольную поверхность (рис.5). Размеры этого прямоугольника равны длине окружностей оснований и длине образующих цилиндра. Следовательно, развертка цилиндра состоит из двух кругов равных радиусов и прямоугольной поверхности, измерения которой равны длине одной из окружностей оснований и длине образующей цилиндра.

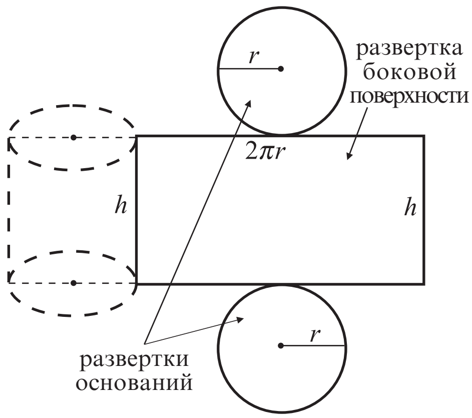



Рис. 5

**Мастерская** Изготовьте из картона прямой круговой цилиндр, высота которого равна 15 см, а радиус основания – 5 см.

**2** Какая фигура получится при пересечении цилиндра плоскостью, содержащей центры оснований цилиндра?

*Решение*:

Пусть $O_1$ и $O_2$ – центры оснований цилиндра. Сечением цилиндра плоскостью, проходящей по оси $O_1O_2$, является прямоугольник $ABCD$ с измерениями, равными высоте цилиндра и диаметру оснований (рис. 6).

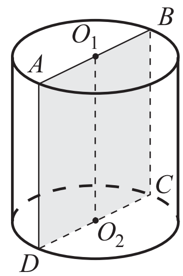



Рис. 6

**Замечание**

Прямоугольник $ABCD$ называется ***осевым сечением*** цилиндра, а прямая $O_1O_2$ – ***осью симметрии*** цилиндра.

**Применим**

• Прямой круговой цилиндр, радиус основания которого равен 10 см, а образующая – 16 см, пересечен плоскостью, параллельной его оси симметрии (рис.7). Найдите расстояние от плоскости сечения до оси, если площадь сечения равна 192 см$^2$.

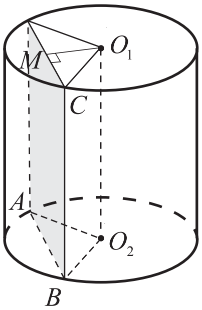


Рис. 7

*Решение*:

Сечением цилиндра плоскостью, параллельной его оси симметрии, является прямоугольник $ABCD$, одно из измерений которого равно образующей цилиндра.

Значит, $S_{ABCD} = AD \cdot DC \Rightarrow DC = \dfrac{S_{ABCD}}{AD} = \dfrac{192}{16} = 12$ (см).

Пусть $O_1M$ – высота равнобедренного треугольника $DO_1C$ и $DO_1 = O_1C = 10$ см. $O_1M$ является расстоянием от оси $O_1O_2$ до плоскости сечения.

Таким образом, $O_1M = \sqrt{DO_1^2 - \left(\dfrac{DC}{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 36} = 8$ (см).

*Ответ*: 8 см.

## 1.3. Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем цилиндра

**1** Пусть $r$ – радиус основания цилиндра, $h$ – длина образующей (высоты) цилиндра. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

*Решение*:

Так как развертка боковой поверхности цилиндра – это прямоугольник с измерениями $2\pi r$ (длина основания) и $h$, то получаем, что ее площадь равна $\boxed{S_б = 2\pi rh}$.

**Запомните!**

***Площадь боковой поверхности*** цилиндра обозначают: $S_б$.
***Площадь полной поверхности*** ($S_п$) цилиндра равна сумме площадей боковой поверхности и двух его оснований.

Из того, что площадь основания равна $S_{осн} = \pi r^2$, следует, что площадь полной поверхности цилиндра равна

$$S_п = S_б + 2S_{осн} = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \boxed{2\pi r(h+r)}.$$

**2** Вычислите объем:

а) правильной четырехугольной призмы с высотой $h$ и стороной основания $a$;
б) цилиндра, высота которого $h$, а радиус оснований $r$.

*Решение*:

а) Объем призмы равен $S_{осн} \cdot h$, где $S_{осн}$ – площадь основания, $h$ – высота призмы. Следовательно, $V = a^2 \cdot h$.

б) Если считать, что основания правильной призмы являются правильными многоугольниками с очень большим числом сторон, то получим тело, подобное цилиндру (рис. 8).

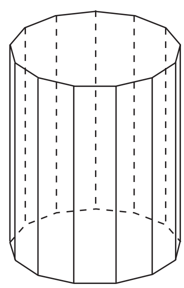


Рис. 8

Следовательно, как и в случае с призмой, можно считать объем цилиндра равным $S_{осн} \cdot h$.

Значит, $\boxed{V = S_{осн} \cdot h = \pi r^2 h}$.

**Теорема 1**

Для любого прямого кругового цилиндра
$$\mathcal{A}_б = 2\pi rh,$$
$$\mathcal{A}_п = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r),$$
$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_{осн} \cdot h = \pi r^2 h,$$
где $r$, $h$, $\mathcal{A}_б$, $\mathcal{A}_{осн}$, $\mathcal{A}_п$, $\mathcal{V}$ являются соответственно радиусом основания, высотой, площадью боковой поверхности, площадью основания, площадью полной поверхности и объемом цилиндра.

- *Решим задачу* 1 (см. начало параграфа):

Пусть $S$ – поверхность одной цистерны, $S_п$ – поверхность всех цистерн.

Тогда $S = 2\pi r(h+r)$, где $h = 14$ м, $r = 1$ м.

$S \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 = 94{,}2$ (м$^2$).

$S_п = 94{,}2 \cdot 10 = 942$ (м$^2$).

Из того, что $942 : 15 = 62{,}8$ и $62 < 62{,}8 < 63$, следует, что необходимо 63 банки краски.

*Ответ*: 63 банки.

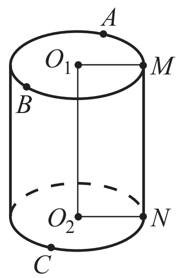
## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Постройте:

а) прямой круговой цилиндр; б) наклонный круговой цилиндр.

Перечислите его элементы.




**2.** ***Исследуйте!*** На рисунке изображен прямой круговой цилиндр с основаниями $\mathcal{C}(O_1, R)$, $\mathcal{C}(O_2, R)$. Укажите из отрезков $AO_1$, $BO_1$, $AB$, $MN (MN \parallel O_1O_2)$, $O_1O_2$, $CO_2$, $CN$, $O_2N$:

а) образующие; б) высоты;

в) радиусы оснований; г) хорды оснований.

**3.** Дана прямоугольная поверхность с измерениями $l$ и $L$. Является ли она разверткой боковой поверхности прямого кругового цилиндра с основанием $\mathcal{C}(O_1, R)$ и образующей $G$, если:

а) $L = 0{,}8\pi$, $l = \frac{2}{5}$, $r = 0{,}4$, $g = 0{,}4$; б) $L = \sqrt{12}$, $l = \frac{1}{3}$, $r = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$, $g = 0{,}3$; в) $L = 6\pi^2$, $l = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $r = 3\pi$, $g = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

**4.** ***Работайте в группах!*** Дан прямой круговой цилиндр с основаниями $\mathcal{C}(O_1, R)$, $\mathcal{C}(O_2, R)$ и образующей $G$, $h = O_1O_2$, $\mathcal{A}_{осн}$, $\mathcal{A}_б$, $\mathcal{A}_п$, $\mathcal{V}$ – соответственно площадь основания, площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем цилиндра. Заполните таблицу:

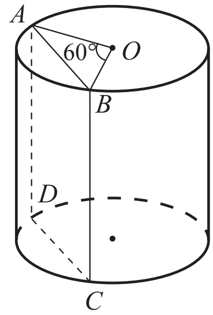
| $R$ | $G$ | $h$ | $\mathcal{A}_{осн}$ | $\mathcal{A}_б$ | $\mathcal{A}_п$ | $\mathcal{V}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | $16\pi$ | $24\pi$ | | |
| 2,5 | | 0,4 | | | | |
| | | 5 | | | | $125\pi$ |
| $2\sqrt{3}$ | $\sqrt{3}$ | | | | | |
| | | 1 | | | $1{,}5\pi$ | |

**5.** Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого равна $S$. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра, если: а) $S = 100$ см$^2$; б) $S = 4$ см$^2$; в) $S = 0{,}64$ см$^2$.

**6.** Прямоугольник, длины сторон которого равны 5 см и 8 см, вращается вокруг своей большей стороны. Найдите площадь полной поверхности и объем полученного тела вращения.

**7.** Отношение длин сторон прямоугольника равно 0,75, а его площадь – 48 см$^2$. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника вокруг его оси симметрии. Сколько решений имеет задача?

## Формируем способности и применяем




**8.** Дан прямоугольник $ABCD$, у которого $AB = a$ и $m(\angle CAB) = \alpha$.
Он является разверткой боковой поверхности прямого кругового цилиндра. Вычислите площадь полной поверхности и объем цилиндра (рассмотрите оба случая), зная, что:
а) $a = 24$ см и $\alpha = 30°$; б) $a = 10$ см и $\alpha = 45°$; в) $a = 16$ см и $\alpha = 60°$.

**9.** *Работайте в парах!* На рисунке изображен прямой круговой цилиндр. $[AD]$ и $[BC]$ – две образующие цилиндра. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, зная, что $O$ – центр основания и $\mathcal{A}_{ABCD} = 20$ см$^2$.

**10.** Высота прямого кругового цилиндра равна $H$, а радиус – $R$. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно его оси на расстоянии $d$ от оси цилиндра, если:
а) $R = 5$ см; $H = 10$ см; $d = 4$ см;
б) $R = \sqrt{17}$ см; $H = 4$ см; $d = 4$ см;
в) $R = x$; $H = 2x$; $d = 0{,}5x$.

**11.** Найдите объем камня, если при погружении его в цилиндрический сосуд радиуса $R$ уровень воды повышается на $h$:
а) $R = 8$ см; $h = 3$ см; б) $R = 3\sqrt{2}$ см; $h = 2\sqrt{2}$ см.

**12.** *Работайте в парах!* Найдите массу трубы, если ее длина – $l$, толщина – $h$, внутренний диаметр – $H$, плотность материала – $\rho$:
а) $l = 3$ м; $h = 5$ см; $H = 10$ см; $\rho = 10$ г/см$^3$;
б) $l = 4\sqrt{2}$ м; $h = \sqrt{2}$ см; $H = 9\sqrt{2}$ см; $\rho = \dfrac{12}{\sqrt{2}}$ г/см$^3$.

**13.** Высота прямого кругового цилиндра равна 8 см, а его объем – $72\pi$ см$^3$. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

**14.** *Исследуйте!* Один сосуд – узкий и высокий, другой – в два раза шире и в два раза ниже, чем первый. Какой из них имеет бо́льшую емкость?

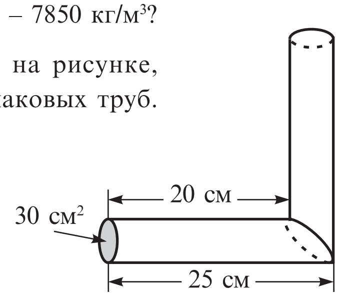
**15.** Радиус основания цилиндра равен 5 см, площадь боковой поверхности в 3 раза больше площади одного основания. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра.

**16.** Отношение высоты цилиндра к радиусу основания равно 1,6. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра, если известно, что площадь его боковой поверхности равна $80\pi$ см$^2$.

**17.** Высота цилиндра равна 8 см, а радиус основания – 5 см. На каком расстоянии от оси цилиндра надо провести плоскость параллельно ей, чтобы площадь сечения была равна 48 см$^2$? Составьте и решите подобную задачу.

**18.** *Исследуйте!* Сколько весит железный прут диаметром 10 см и длиной 0,5 м, если известно, что плотность железа – 7850 кг/м$^3$?

**19.** Тело, изображенное на рисунке, состоит из двух одинаковых труб. Найдите объем тела.




## Развиваем способности и творим

**20.** Из цилиндрического стержня изготовили максимальное количество гаек квадратной формы со стороной 12 см с минимальным расходом материала. В каждой гайке проделали отверстие диаметром 6 см. Найдите диаметр стержня. Сколько процентов от объема стержня составляют отходы при переработке?

**21.** Из цилиндрического стержня диаметром 14 см производят гайки в форме правильного шестиугольника толщиной 4 см. Какое максимальное количество гаек можно изготовить из такого стержня, если известно, что его длина 89 см? Сколько процентов от объема стержня составят отходы, если диаметр отверстия каждой гайки равен 8 мм?

**22.** Во сколько раз надо увеличить высоту прямого кругового цилиндра, не меняя его основания, чтобы его объем увеличился в 8 раз?
Составьте и решите подобную задачу.

**23.** Во сколько раз надо увеличить радиус основания прямого кругового цилиндра, не меняя высоты, чтобы его объем увеличился в 8 раз?

# § 2. Конус (прямой круговой). Усеченный конус

*Исследуем*

**1** Зерно засыпали в бункер элеватора в форме конуса, высота которого равна 2,4 м и площадь основания – 26 м². Сколько тонн зерна поместилось в хранилище, если одна тонна зерна занимает 1,3 м³?

## 2.1. Элементы конуса

**Определения**

Дан круг $\mathscr{D}$ и $V$ – точка, не принадлежащая плоскости круга.

- Геометрическое тело, образованное всеми отрезками, соединяющими точку $V$ с точками, принадлежащими кругу $\mathscr{D}$, называется **круговым конусом** (рис. 9).
- Круг $\mathscr{D}$ называется **основанием** конуса, а точка $V$ – **вершина** конуса.
- Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются **образующими** конуса.

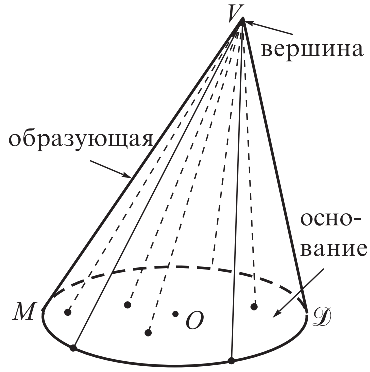


Рис. 9

Например, на рисунке 9 изображен конус с вершиной $V$ и основанием $\mathscr{D}$. Отрезок $VM$ – образующая этого конуса.

Пусть $O$ – центр основания кругового конуса (рис. 10).

Если прямая $VO$ перпендикулярна основанию конуса, то конус называется ***прямым*** (рис. 10 а), в противном случае конус называется ***наклонным*** (рис. 10 б).

Множество всех образующих конуса называется ***боковой поверхностью конуса***. Множество точек конуса, которые не принадлежат ни боковой поверхности, ни основанию конуса, называется ***внутренней областью конуса***.

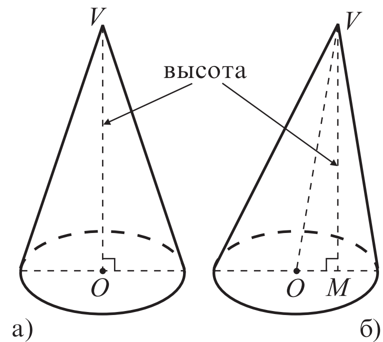


Рис. 10

Перпендикуляр, опущенный из вершины конуса на плоскость основания, называется ***высотой*** конуса (рис. 10).

Длина этого отрезка также называется ***высотой***.

*Замечания*

1. Высота прямого кругового конуса совпадает с отрезком, соединяющим вершину конуса с центром его основания.
2. Часто для краткости изложения конусом называют только его поверхность.
3. В IX классе изучается только прямой круговой конус, который для краткости называется просто ***конусом***.

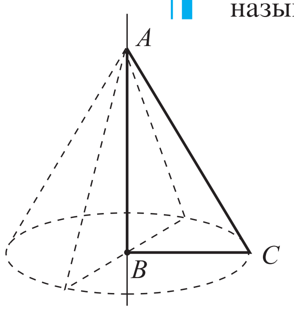


Рис. 11

**2** Дан прямоугольный треугольник $ABC$, у которого $m(\angle ABC) = 90°$. Опишите тело, которое получится при полном вращении треугольника $ABC$ вокруг прямой $AB$.

*Решение*:

При полном вращении треугольника $ABC$ вокруг прямой $AB$ получится прямой круговой конус, образующей которого является $AC$, а радиусом основания – $BC$ (рис. 11).

## 2.2. Развертка конуса. Сечения

Рассмотрите и опишите развертку конуса.

*Решение*:

Разрезав боковую поверхность конуса по образующей, получим поверхность в форме кругового сектора (рис.12). Заметим, что радиус круга равен длине образующей конуса, а его длина – периметру основания конуса.

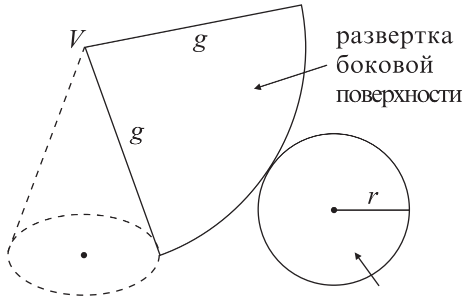


Рис. 12

**Мастерская** Изготовьте из картона конус, образующая сектора которого равна 10 см, а радиус основания – 5 см.

• Пересекая конус плоскостью, содержащей его вершину и центр основания, получим сечение, ограниченное равнобедренным треугольником. Это сечение называется ***осевым сечением конуса***. На рисунке 13 поверхность, ограниченная треугольником $ABC$, – осевое сечение конуса.

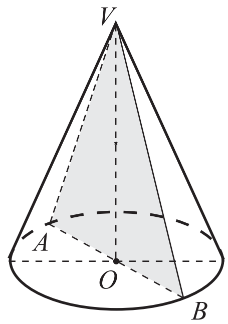


Рис. 13

*Замечание* Прямая $VO$, где $V$ – вершина, а $O$ – центр основания конуса, называется ***осью симметрии*** конуса.

## 2.3. Площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем конуса

Пусть $g$ – образующая конуса, $r$ – радиус основания.

- ***Площадь боковой поверхности*** конуса обозначают: $\mathcal{A}_б$.
- $\mathcal{A}_б = \pi g r$.
- ***Площадь полной поверхности*** $(\mathcal{A}_п)$ конуса равна сумме площадей боковой поверхности и его основания.
- $\mathcal{A}_п = \pi g r + \pi r^2 = \pi r(g + r)$.

*Применим* • Найдите площадь поверхности тела, полученного при вращении квадрата со стороной $a$ вокруг своей диагонали.

*Решение*:

При вращении квадрата вокруг диагонали получаем тело, образованное двумя конгруэнтными конусами, радиус основания ($r$) которых равен половине длины диагонали квадрата, а образующая ($g$) конгруэнтна стороне квадрата (рис. 14).

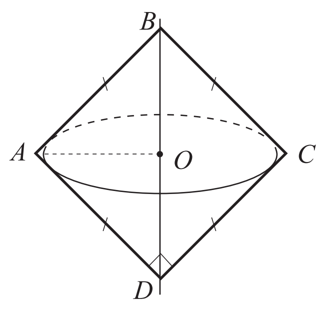


Рис. 14

Приняв во внимание ответ задачи 1, получим:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \pi\, g r = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2 \pi \sqrt{2}.$$

*Ответ*: $a^2 \pi \sqrt{2}$ квадратных единиц.

**2** Найдите объем конуса, высота которого $h$, а радиус основания $r$.

*Решение*:

Рассмотрев правильную пирамиду, в основании которой лежит многоугольник с большим числом сторон, получим тело, подобное конусу (рис. 15). Следовательно, как и в случае с пирамидой, объем конуса можно вычислить по формуле $\mathscr{V}=\frac{1}{3}\mathscr{A}_{осн}\cdot h$.

Но $\mathscr{A}_{осн}=\pi r^2$. Значит, $\boxed{\mathscr{V}=\frac{1}{3}\pi r^2 h}$.

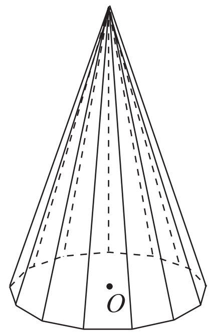



Рис. 15

**Теорема 1** Для любого прямого кругового конуса $\mathscr{A}_б=\pi g r$,

$$\mathscr{A}_п=\mathscr{A}_б+\mathscr{A}_{осн}=\pi g r+\pi r^2=\pi r(g+r),$$

$$\mathscr{V}=\frac{1}{3}\mathscr{A}_{осн}\cdot h=\frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

где $r$, $g$, $h$, $\mathscr{A}_б$, $\mathscr{A}_{осн}$, $\mathscr{A}_п$, $\mathscr{V}$ являются соответственно радиусом основания, образующей, высотой, площадью боковой поверхности, площадью основания, площадью полной поверхности и объемом конуса.

• *Решим задачу* **1** (см. начало параграфа):

Пусть $V$ – объем собранного зерна.

$V=\frac{1}{3}\pi R^2 h$, где $r$ – радиус основания зернохранилища, а $h=2{,}4$ м.

По условию задачи, $2\pi r^2=26$ (м). Следовательно, $V=\frac{1}{3}\cdot 26\cdot 2{,}4=20{,}8$ (м$^3$).

Значит, зерно весит $20{,}8:1{,}3=16$ (т).

*Ответ*: 16 тонн зерна.

## 2.4. Элементы усеченного конуса

*Исследуем*

Сечение конуса плоскостью, параллельной его основанию, является кругом. Часть конуса, ограниченная этим кругом и основанием конуса, называется ***усеченным конусом*** (рис.16). Круги усеченного конуса называются ***основаниями***. Отрезки усеченного конуса, лежащие на образующих конуса, называются ***образующими*** усеченного конуса. Множество образующих усеченного конуса составляет ***боковую поверхность*** усеченного конуса. Отрезок усеченного конуса, лежащий на высоте конуса, называется ***высотой*** усеченного конуса.

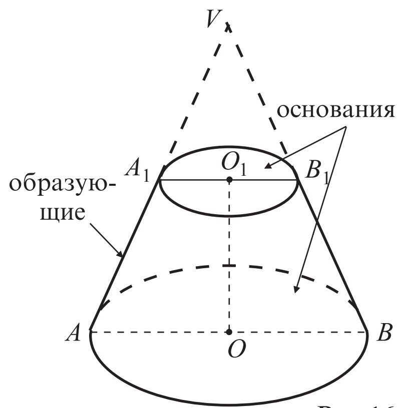



Рис. 16

Пусть $O$, $O_1$ – центры оснований усеченного конуса. Отрезок $OO_1$ является ***высотой*** усеченного конуса. Длина отрезка $OO_1$ также называется ***высотой***.

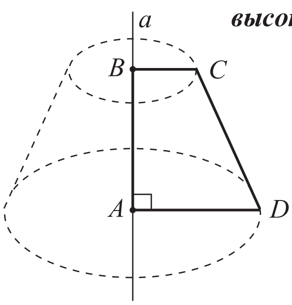



Рис. 17

**1** Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, у которой $m(\angle A)=90°$. Опишите тело, которое получится при вращении трапеции $ABCD$ вокруг прямой $AB$.

*Решение*:

При вращении трапеции $ABCD$ (рис. 17) вокруг прямой $AB$ получится прямой круговой усеченный конус.

Меньшее (большее) основание трапеции равно радиусу меньшего (большего) основания усеченного конуса, $AB$ – высота усеченного конуса.

## 2.5. Развертка усеченного конуса. Сечения

**1** Рассмотрите и опишите развертку усеченного конуса (рис. 18).

*Решение*:

Разрезав боковую поверхность усеченного конуса по образующей, получим сектор кругового кольца.

Заметим, что длины дуг кольца равны длинам оснований усеченного конуса.

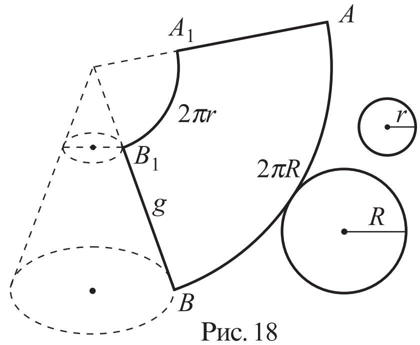


Рис. 18

**Мастерская** Изготовьте из картона усеченный конус, радиусы оснований которого равны 2 см и 4 см, а длина образующей – 10 см.

При пересечении усеченного конуса плоскостью, содержащей центры его оснований, получим сечение, которое называется ***осевым сечением*** усеченного конуса.

Осевое сечение усеченного конуса является поверхностью, ограниченной равнобокой трапецией (рис. 19).

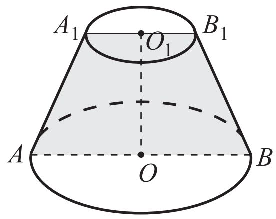


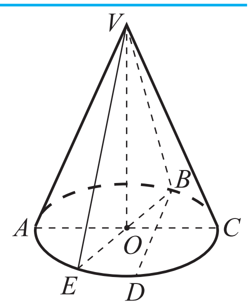
Рис. 19

*Замечание* Прямая $OO_1$, где $O$ и $O_1$ – центры оснований усеченного конуса, называется ***осью симметрии*** усеченного конуса.

- Какая фигура получится при пересечении усеченного конуса плоскостью, не содержащей его центры оснований, но параллельной прямой, проходящей через эти центры?

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания




**1.** Постройте:
а) прямой круговой конус; б) наклонный круговой конус.

**2.** На рисунке изображен прямой круговой конус с центром основания $O$. Укажите:
а) образующие; б) высоты;
в) радиусы оснований; г) хорды оснований.

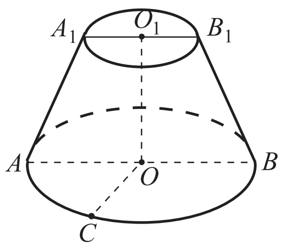
**3.** Нарисуйте развертку прямого кругового конуса с образующей $g$ и радиусом основания $R$, если: а) $g = 5$ см, $R = 2$ см; б) $g = 7$ см, $R = 3$ см.

**4.** *Работайте в парах!* Дан прямой круговой конус с основанием $\mathcal{C}(O, R)$, $\mathcal{A}_{осн}$, $\mathcal{A}_б$, $\mathcal{A}_п$, $\mathcal{V}$ – соответственно площадь основания, площадь боковой поверхности, площадь полной поверхности и объем конуса, $g$ – образующая и $h$ – высота конуса. Заполните таблицу:

| $r$ | $g$ | $h$ | $\mathcal{A}_{осн}$ | $\mathcal{A}_б$ | $\mathcal{A}_п$ | $\mathcal{V}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | | 3 | | | | |
| 5 | 13 | | | | | |
| | | 4 | | | | $108\pi$ |
| 8 | | | | $80\pi$ | | |
| | 7 | | | | | $30\pi$ |

**5.** Равнобедренный треугольник со сторонами 5 см, 5 см, 6 см вращают вокруг его оси симметрии. Найдите площадь полной поверхности и объем полученного геометрического тела.

**6.** Равнобедренный треугольник со сторонами 13 см, 13 см, 10 см вращают вокруг его основания. Найдите площадь полной поверхности и объем полученного геометрического тела.



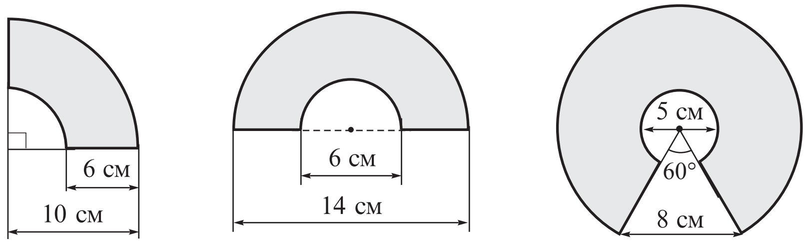

**7.** Постройте усеченный конус:
а) прямой круговой; б) наклонный круговой.

**8.** ***Работайте в парах!*** На рисунке изображен прямой круговой усеченный конус. Укажите: а) образующие; б) высоты; в) радиусы оснований.

**9.** Равнобокая трапеция с основаниями 10 см и 5 см вращается вокруг своей оси симметрии. Опишите тело, которое получится при вращении, если высота трапеции равна 8 см.

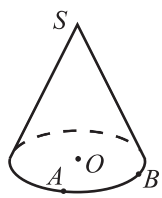
**10.** Нарисуйте развертку прямого кругового усеченного конуса с образующей $g$ и радиусами оснований $R$, $r$, если: а) $g = 6$ см, $R = 3$ см, $r = 1$ см; б) $g = 8$ см, $R = 4$ см, $r = 2$ см.

**11.** ***Работайте в группах!*** Используя данные рисунка, найдите радиусы оснований, длину образующей и высоту прямого кругового усеченного конуса, развертка боковой поверхности которого совпадает с заданным сектором кольца.



а) б) в)

## Формируем способности и применяем

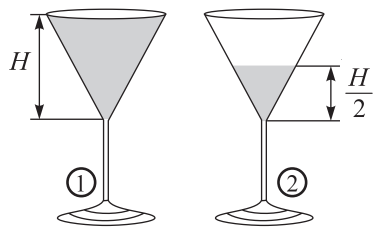



**12.** Площадь полной поверхности прямого кругового конуса равна $253\ \text{см}^2$, а площадь боковой поверхности – $11\ \text{см}^2$. Найдите длину образующей конуса.

**13.** Вычислите площадь плоскости сечения конуса, проходящего через точки $S$, $A$, $B$, если $SO = 10$ см, $OA = 3$ см, $AB = 4$ см.

**14.** Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 4,5 см и 6 см, вращается вокруг высоты, проведенной из вершины прямого угла. Найдите площадь полной поверхности и объем полученного тела вращения.

**15.** Площадь осевого сечения конуса равна $S$. Найдите площадь боковой поверхности и объем конуса, если радиус основания конуса – $R$.




**16.** ***Работайте в парах!*** На рисунке изображены идентичные фужеры конической формы. В первом (левом) фужере 200 мл сока. Сколько сока во втором фужере?

## Развиваем способности и творим

**17.** Площадь сечения конуса плоскостью, параллельной основанию, равна $S$. Сечение проходит на расстоянии $d$ от вершины конуса. Найдите площадь боковой поверхности и объем конуса, если высота конуса равна $h$.

**18.** Прямоугольный треугольник, катеты которого равны $a$ и $b$, вращают вокруг гипотенузы. Найдите объем полученного тела.

**19.** Площадь основания прямого кругового конуса равна $9\pi\ \text{см}^2$. Найдите площадь полной поверхности конуса, если его объем равен $12\pi\ \text{см}^3$.

**20.** Образующая прямого кругового конуса равна 10 см, угол при вершине осевого сечения равен $120°$. Найдите объем конуса.

**21.** Равносторонний треугольник, сторона которого равна 8 см, вращается вокруг прямой, содержащей вершину треугольника и параллельной стороне, не содержащей эту вершину. Найдите объем полученного тела вращения.

**22.** Ромб со стороной 8 см и острым углом, равным 60°, вращают вокруг одной из сторон. Найдите объем полученного тела.

**23.** Равнобокую трапецию, основания которой равны 10 см, 12 см, а боковая сторона – 10 см, вращают вокруг большего основания. Найдите объем полученного тела.

# § 3. Сфера

Шесть мальчиков разделили поровну и съели арбуз, радиус которого 20 см, а четыре девочки разделили поровну и съели арбуз, радиус которого 15 см. Кому досталось больше арбуза: каждой девочке или каждому мальчику?

## 3.1. Элементы сферы

*Исследуем*

**1** Дана фиксированная точка $O$, и $R$ – действительное положительное число.

а) Что собой представляет геометрическое место точек на плоскости, расположенных на расстоянии $R$ от точки $O$?

б) Какую геометрическую фигуру получим при вращении в плоскости отрезка длиной $R$ вокруг одного из его концов (фиксированного)?

в) Как называется геометрическое место точек пространства, расположенных на расстоянии $R$ от точки $O$?

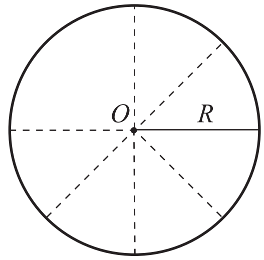



Рис. 24

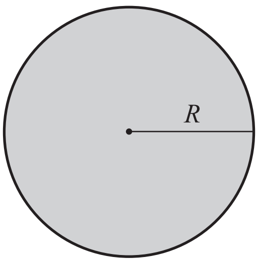



Рис. 25

*Решение*:

а) Геометрическим местом точек на плоскости, расположенных на расстоянии $R$ от точки $O$, является окружность $\mathscr{C}(O,R)$ (рис. 24).

б) При полном вращении отрезка длиной $R$ вокруг одного из его концов получим круг радиуса $R$ (рис. 25).

в) Множество точек пространства, расположенных на расстоянии $R$ от точки $O$, называется ***сферой с центром O и радиусом R***.

Любой отрезок, соединяющий центр сферы с точкой на ней, называется ***радиусом*** (рис. 26). Отрезок, соединяющий две точки сферы, называется ***хордой***. Хорда, проходящая через центр сферы, называется ***диаметром***.

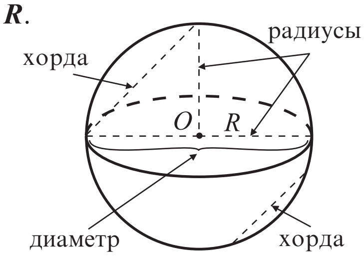



Рис. 26

**2** Как называется геометрическое место точек пространства:

а) расположенных на расстоянии меньшем, чем $R$, от точки $O$;

б) расположенных на расстоянии большем, чем $R$, от точки $O$?

*Решение*:

а) Множество точек пространства, расположенных на расстоянии меньшем, чем $R$, от точки $O$, называется ***внутренней областью*** сферы $\mathscr{S}(O, R)$.

*Обозначаем*: Int $\mathscr{S}(O, R)$. То есть, $\text{Int}\,\mathscr{S}(O,R) = \{M \mid OM < R\}$.

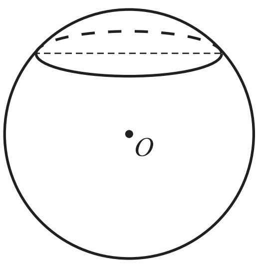



Рис. 27

б) Множество точек пространства, расположенных на расстоянии большем, чем $R$, от точки $O$, то есть множество точек пространства, которые не принадлежат сфере $\mathscr{S}(O, R)$ и ее внутренней области, называется ***внешней областью*** сферы $\mathscr{S}(O, R)$.

*Обозначаем*: Ext $\mathscr{S}(O, R)$. То есть, $\text{Ext}\,\mathscr{S}(O,R) = \{M \mid OM > R\}$.

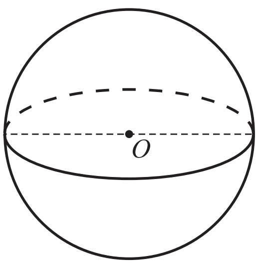



Рис. 28

Сфера вместе с внутренней ее областью называется ***шаром*** или ***сферическим телом***. Следовательно, поверхностью шара является сфера.

Пересечением секущей плоскости и сферы является окружность (рис. 27).

Если центр этой окружности совпадает с центром сферы, то окружность называется ***большой окружностью сферы*** (рис. 28).

## 3.2. Площадь сферы. Объем шара

В XII классе докажем, что:

а) площадь сферы вычисляется по формуле $\mathcal{A} = 4\pi R^2$, где $R$ – радиус сферы;

б) объем шара определяется по формуле $\mathcal{V} = \dfrac{4\pi R^3}{3}$, где $R$ – радиус этого шара.

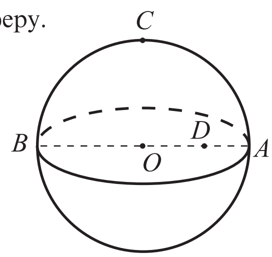
• Какой объем у шара с радиусом 9 см?

## Упражнения и задачи

### Закрепляем знания

**1.** Постройте и обозначьте сферу.

**2.** На рисунке точки $A, B, C$ принадлежат $\mathcal{S}(O, R)$. Среди отрезков $OA$, $OC$, $OB$, $AB$, $BC$, $CA$, $DA$, $DC$, $BD$ укажите:
а) радиусы; б) хорды;
в) диаметр.



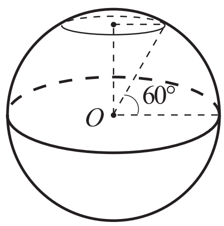

**3.** *Исследуйте!* Пусть $h$ – расстояние от прямой $d$ до центра сферы $\mathcal{S}(O, R)$. Определите взаимное расположение прямой $d$ и сферы, если:
а) $h$ = 8 см, $R$ = 9 см; б) $h$ = 11 см, $R$ = 7 см;
в) $h$ = 10 см, $R$ = 10 см.

**4.** Пусть $d$ – расстояние от плоскости $\alpha$ до центра сферы $\mathcal{S}(O, R)$.
Определите взаимное расположение плоскости $\alpha$ и сферы, если:
а) $d = 5$ см, $R = 2\sqrt{3}$ см;
б) $d = \frac{7}{9}$ см, $R = \frac{5}{8}$ см;
в) $d = 5,(6)$ см, $R = 5\frac{2}{3}$ см.

**5.** *Работайте в парах!* Пусть $d$ – расстояние от центра сферы $\mathcal{S}(O, R)$ до хорды $AB$. Найдите длину хорды, если:
а) $d = 3$ см, $R = 5$ см; б) $d = 5$ см, $R = 13$ см;
в) $d = 2\sqrt{5}$ см, $R = 2\sqrt{6}$ см.

### Формируем способности и применяем

**6.** Радиус земного шара – приблизительно 6400 км. Чему равна длина параллели, широта которой 60° (см. рисунок)?



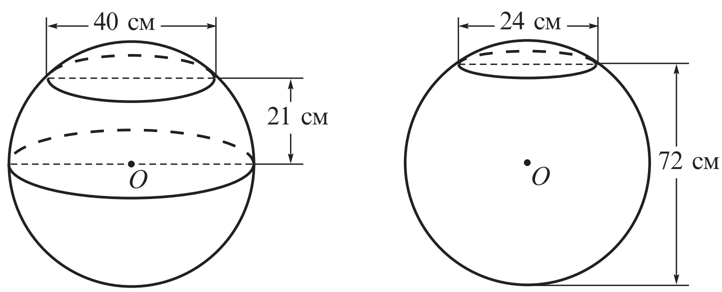

**7.** Площадь большой окружности сферы равна $S$.
Вычислите площадь сферы и объем шара, ограниченного этой сферой, если:
а) $S = 36\pi$ м$^2$; б) $S = 1\frac{32}{49}\pi$ м$^2$; в) $S = 27\pi$ м$^2$.

**8.** *Работайте в парах!* Дано: $\mathcal{S}(O, R)$ и $d$ – расстояние от плоскости $\alpha$ до центра $O$.
Вычислите площадь круга, полученного при пересечении шара плоскостью $\alpha$, если:
а) $R$ = 15 см, $d$ = 12 см;
б) $R = 8\sqrt{3}$ см, $d = 2\sqrt{3}$ см;
в) $R = d = 10$ см.

**9.** Решите задачу, предложенную в начале параграфа.

### Развиваем способности и творим

**10.** Используя данные рисунка, найдите площадь сферы (точка $O$ – центр сферы):




а) б)

**11.** Площадь сферы равна 387 см$^2$. Найдите площадь сферы, зная, что объем шара, который она ограничивает, в 27 раз меньше объема шара, который ограничивает заданная сфера.

**12.** Площадь сферы равна 20 см$^2$. На каком расстоянии от центра сферы надо провести плоскость сечения, чтобы площадь круга сечения была равна 2,75 см$^2$?

# Упражнения и задачи на повторение

## Закрепляем знания

**1.** Постройте:
а) прямой круговой конус;
б) прямой круговой цилиндр;
в) прямой круговой усеченный конус;
г) сферу.

**2.** Начертите развертку:
а) прямого кругового цилиндра, радиус основания которого равен 2 см, а образующая – 6 см;
б) прямого кругового конуса, радиус основания которого равен 3 см, а образующая – 8 см;
в) прямого кругового усеченного конуса, радиусы основания которого равны 2 см и 3 см, а образующая – 5 см.

**3.** Развертка боковой поверхности прямого кругового цилиндра – прямоугольник с измерениями $2\sqrt{5}$ см и $10\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности и объем цилиндра, зная, что его образующая меньше диаметра его основания.

**4.** Развертка боковой поверхности прямого кругового конуса – круговой сектор 60° и радиуса 9 см. Найдите площадь полной поверхности и объем конуса.

**5.** Найдите радиус круга, площадь которого равна площади полной поверхности прямого кругового цилиндра с радиусом основания 2 см и высотой 7 см.

**6.** Вычислите объем тела, полученного при вращении прямоугольника вокруг его большей стороны, зная, что диагональ прямоугольника равна 5 см, а периметр – 14 см.

**7.** ***Работайте в парах!*** Вычислите объем тела, полученного при вращении прямоугольного треугольника, катеты которого равны $3\frac{1}{3}$ см и $2\sqrt{3}$ см:
а) вокруг большего катета;
б) вокруг гипотенузы.

## Формируем способности и применяем

**8.** Развертка боковой поверхности цилиндра – квадрат с диагональю $\sqrt{72}$ см. Найдите объем цилиндра.

**9.** Высота конуса конгруэнтна диаметру его основания. Найдите отношение площади основания к площади боковой поверхности конуса.

**10.** Найдите площадь боковой поверхности и объем цилиндра, полученного при полном вращении прямоугольника со сторонами 5 см и 7 см вокруг одной из его сторон. Рассмотрите оба случая.

**11.** Шарик радиусом 6 см и куб со стороной 9 см изготовлены из одного и того же материала. Сравните массы этих тел.

**12.** ***Работайте в парах!*** Равносторонний треугольник вращают вокруг его оси симметрии. Найдите объем полученного тела, если площадь треугольника – $16\sqrt{3}$ см$^2$.

**13.** Найдите радиус основания прямого кругового цилиндра, если площадь его полной поверхности равна $13\pi$ см$^2$, а образующая $1\frac{1}{4}$ см.

**14.** Найдите радиус основания прямого кругового конуса, если площадь его полной поверхности равна $98\pi$ см$^2$, а образующая 7 см.

**15.** ***Исследуйте!*** Шарик радиуса 10 см поместили в сосуд цилиндрической формы, радиус основания которого равен 12 см. В сосуд налили 1 л воды. Будет ли шар покрыт водой?

**16.** Дан ромб, диагонали которого равны 6 см и $6\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного при полном вращении ромба вокруг одной из его сторон.

**17.** ***Исследуйте!*** Какое тело имеет больший объем: шар радиуса 10 см или правильный тетраэдр, ребро которого равно 15 см?

## Развиваем способности и творим

**18.** Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно $3\sqrt{3}$ см. Найдите площадь полной поверхности и объем конуса, если угол между образующей и плоскостью основания конуса равен 60°.

**19.** Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно $6\frac{1}{2}$ см. Найдите площадь полной поверхности и объем конуса, если угол между образующей и высотой конуса равен 60°.

**20.** Площадь боковой поверхности конуса в 4 раза больше площади его основания. Найдите величину центрального угла кругового сектора, который является разверткой боковой поверхности конуса.

**21.** Сфера вписана в конус. Значение отношения площади основания конуса к площади сферы равно 0,75. Найдите величину угла между образующей и плоскостью основания конуса.

**22.** Равносторонний треугольник вращают вокруг одной из его сторон. Найдите объем полученного тела, если сторона треугольника равна $a$.

**23*.** Найдите радиус большего основания прямого кругового усеченного конуса, если площадь его полной поверхности равна $506\pi$ см$^2$, площадь боковой поверхности – $273\pi$ см$^2$, а радиус меньшего основания – 8 см.

**24*.** Дана трапеция $ABCD$ с бóльшим основанием $AB$, у которой $m(\angle A)=90°$, $AD = 8$ см, $AB = 8$ см, $DC = 2$ см. Найдите объем тела, полученного при вращении трапеции вокруг:
а) стороны $AB$; б) меньшего основания.

**25.** *Работайте в группах!* **Проект:** *Круглые тела в архитектуре города/села.*

## Итоговый тест

*Время выполнения работы: 45 минут*

### Вариант I

**1.** Дан прямой круговой цилиндр с образующей 5,5 см и радиусом основания 2 см.
а) Нарисуйте развертку данного цилиндра.
б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
в) Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
г) Найдите объем цилиндра.

**2.** Металлический прямой круговой конус имеет образующую длиной 5 см, а диаметр его основания равен 8 см.
а) Найдите высоту конуса.
б) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
в) Найдите объем конуса.
г) Данный конус переплавили в шарики одинакового размера, радиус каждого из которых 1 см. Сколько шариков получилось?

**3.** Площадь поверхности мяча $400\pi$ см$^2$.
а) Можно ли поместить этот мяч в коробку в форме куба с ребром 15 см? Объясните ответ.
б) Мяч находился на расстоянии 2 м от стены. Ребенок толкнул мяч к стене. Мяч покатился по прямой, сделав ровно 3 оборота, и остановился. На каком расстоянии от стены остановился мяч? (При расчётах примите $\pi \approx 3{,}14$.)

**4.** Деталь имеет форму фигуры, полученной при вращении прямоугольного треугольника (длина катетов – 8 см и 6 см) вокруг гипотенузы.
Найдите объем этой детали.

### Вариант II

**1.** Дан прямой круговой цилиндр с высотой 6 см и радиусом основания 3 см.
а) Нарисуйте развертку данного цилиндра.
б) Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
в) Найдите площадь полной поверхности цилиндра.
г) Найдите объем цилиндра.

**2.** Прямой круговой конус имеет высоту 12 см, а диаметр его основания – 10 см.
а) Найдите образующую конуса.
б) Найдите площадь боковой поверхности конуса.
в) Найдите объем конуса.
г) Металлический шар радиусом 15 см переплавили в одинаковые конусы указанных выше размеров. Сколько конусов получили?

**3.** Площадь поверхности шарика для пинг-понга составляет $36\pi$ см$^2$.
а) Можно ли положить этот шарик в коробку в форме куба с ребром 4 см? Объясните ответ.
б) Шарик находился на краю стола. Его подтолкнули, и он покатился по прямой к противоположной точке теннисного стола. Сделал ровно 5 оборотов и остановился. На каком расстоянии от противоположного края стола остановился шарик, если длина теннисного стола 2,74 м?
(При расчётах примите $\pi \approx 3{,}14$.)

**4.** Деталь имеет форму фигуры, полученной при вращении прямоугольного треугольника с гипотенузой длиной 10 см и острым углом 60° вокруг гипотенузы. Найдите объем этой детали.

# Ответы и указания

## Алгебра

### Глава 1. Множество действительных чисел. Повторение и дополнения

**§ 1.** **3.** а) 0,875, не является периодическим; в) 4,(851), период равен 851. **4.** а), в), д) Простые периодические десятичные числа; б), г), е) смешанные периодические десятичные числа. **7.** 10 орехов; 120 орехов. **8.** г) $x_1 = 5$, $x_2 = -2$ – рациональные числа; е) $x_1 = 5 - 3\sqrt{3}$, $x_2 = 5 + 3\sqrt{3}$ – иррациональные числа. **9.** б) $\frac{29}{9}$; в) $\frac{557}{90}$; г) $\frac{2\,817}{550}$; д) $\frac{9\,301}{370}$. **10.** а) $1+\sqrt{7} > 2\sqrt{3}$; г) $-\frac{1}{3} = -0,(3)$. **11.** б) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; в) 1; г) $11 - 6\sqrt{2}$. **12.** в) $\{x \in \mathbb{R} \mid (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)\}$. **15.** 25 кг. **16.** 1 кг. **19.** б) $S = \varnothing$; в) $S = \{-1;\ 4\}$. **20.** а) $S = \{0;\ 0,5\}$; б) *Указание.* $|2+x| = |5x-3| \Leftrightarrow (2+x)^2 = (5x-3)^2$.

**§ 2.** **1.** а) $6\sqrt{2}+5\sqrt{6}-9,5$; б) $11,6-21\sqrt{2}$. **2.** в) $2,828 < 2\sqrt{2} < 2,829$; г) $6,708 < 3\sqrt{5} < 6,709$. **3.** в) $3-\sqrt{2} < 1,7$; г) $1+\sqrt{3} < 2+\sqrt{2}$. **5.** При варке овощей теряется 33% витамина С. **6.** $\approx 170$ г масла, $\approx 130$ г сахара, 200 г шоколада, 4 яйца, 2 ложки муки. **10.** б) Например, $4+(4+\sqrt{5})$; $10-(2-\sqrt{5})$; $4(2+0,25\sqrt{5})$; $\frac{8\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$. **11.** 100 раз. **12.** 0,5 и –1. **14.** 373,45 лея. **15.** а) $8-2\sqrt{15}$; г) $38+12\sqrt{10}$. **16.** б) $11\sqrt{2}-9\sqrt{3}$; г) $26+15\sqrt{3}$. **17.** б) $\approx -5,689$; г) $\approx 2,466$. **18.** $16+8\sqrt{5}$. **19.** 36%. **21.** а) $2\sqrt{13}+3\sqrt{3}+120\sqrt{2}-186$. **24.** $185^2 - 15^2$.

**§ 3.** **2.** а) $a \in [2;\ +\infty)$; б) $a \in (-\infty;\ 0]$; в) $a \in (-1;\ +\infty)$. **3.** а) $\sqrt{12}$; б) $-\sqrt{3a^2}$; в) $\sqrt{b(b-1)^2}$. **4.** а) $4\sqrt{3}$; б) $7\sqrt{2}$; в) $a^2\sqrt{5}$; г) $(2-a)\sqrt{7}$. **6.** а) 27; б) $\frac{1}{25}$; в) $7\frac{4}{11}$; г) $\frac{1}{16}$. **7.** а) $10a^2$; б) $\frac{1}{4}x$; в) $4b^6$; г) $1000y^{-6}$. **8.** а) 10; б) $\frac{4}{3}$. **9.** а) $\frac{\sqrt{21}}{9}$; б) $\frac{3\sqrt{10}}{25}$; в) $\sqrt{3}-1$; д) $4\sqrt{5}-9$. **10.** а) –12; б) 60; в) $9+5\sqrt{3}$; г) 11. **11.** а) $x-\sqrt{5}$; б) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; в) $-\sqrt{2}$; г) $2-\sqrt{7}$. **12.** а) $\frac{1}{9}$; б) 5; в) $40\frac{1}{2}$; г) 9; д) –0,9999; е) $\frac{1}{2}$. **13.** а) 210; б) 30; в) 1500; г) 0,4. **17.** а) 23 см²; б) 6 см². **18.** а) 500; б) 0,07; в) 4000; г) 0,009. **19.** а) 38; б) $4(\sqrt{5}-1)$. **20.** а) И; б) И; в) Л; г) И. **21.** а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{4}{49}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{2}{5}$. **22.** а) $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{10}$; в) $-\sqrt{2}$.

***Упражнения и задачи на повторение.*** **1.** б) $35-7\sqrt{3}+5\sqrt{2}-4\sqrt{6}$. **3.** а) $\sqrt{7} < \sqrt{10}$; б) $\sqrt{63} > \sqrt{54}$; в) $\sqrt{23} < \sqrt{103}$. **4.** б) $3\sqrt{7}$; в) $3\sqrt{2}-2$; г) $\sqrt{66}-8$. **7.** б) $c^{-10}$; г) $\frac{1}{3x^5}$. **8.** 10, 1 и 9. **9.** 50,8 лея. **10.** г) Например, $3\sqrt{13}+4\sqrt{13}$; $8\sqrt{13}-\sqrt{13}$; $2\sqrt{13}\cdot 3,5$; $\frac{91}{\sqrt{13}}$. **11.** б) $11+4\sqrt{7}$; г) $200+80\sqrt{5}$. **13.** а) $3\sqrt{3}-1$; в) $14-6\sqrt{5}$. **14.** а) $S=\{-1;\ 4\}$; б) $S=\{0;\ 0,5\}$; в) $S=\{-2;\ 2\}$. **15.** а) $5-2\sqrt{3} < 2+\sqrt{2}$; б) $6+\sqrt{7} < 4\sqrt{7}$. **17.** а) $6\frac{7}{9}$; б) $15\frac{25}{99}$; в) $3\frac{43}{198}$; г) $\frac{557}{4500}$. **18.** а) $-4x$; г) $-2x^2y^3\sqrt{2}$. **20.** 80 см. **21.** 50 лет и 14 лет. **22.** а) 4; б) 4; в) 3; г) 16; д) 3. **26.** а) 1; б) 2. **29.** *Указание.* а), б), г) Сделайте подстановку $|x| = t$; в) сделайте подстановку $|3-x| = t$. **31.** *Указание.* Исследуйте случаи $a>0$, $a<0$, $a=0$.

### Глава 2. Алгебраические отношения

**§1.** **1.** а) 0; б) 14; в) –1; г) $-\frac{4}{9}$. **2.** а) 14; б) –25; в) –30,25; г) $2\frac{35}{36}$. **6.** а) 1; б) 1; в) $\frac{5}{6}$; г) 1,3. **7.** а) 5; б) $\frac{8}{3}$; в) –9; г) 0,8. **8.** а) $\mathbb{R}\setminus\{4\}$; б) $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$; в) $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$; г) $\mathbb{R}\setminus\left\{13\frac{1}{3}\right\}$; д) $\mathbb{R}\setminus\{\pm 3\}$; е) $\mathbb{R}\setminus\{\pm 0,6\}$. **9.** а) 2,8; б) –3,2; в) $7\frac{7}{15}$; г) $\frac{8}{35}$. **10.** а) $F(0) < F(1)$; б) $F(-2) < F(-1)$; в) $F(0,5) > F(-0,5)$; г) $F(10) < F(-10)$. **11.** а) $F(-1)$, $F(-2)$, $F(-3)$, $F(3)$, $F(2)$, $F(1)$; б) $F(0,5)$, $F(-4)$, $F(4)$, $F(-0,5)$. **12.** а) –5; 1; 3; 9; б) –2; 2; 4; 8; в) –11; –5; –3; –1; 1; 7; г) –14; –12; –11; –9; –8; –6. **13.** а) $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\}$; б) $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; в) $\mathbb{R}\setminus\{\sqrt{2}\}$; г) $\mathbb{R}\setminus\{x, y \in \mathbb{R} \mid x \neq y\}$. **14.** а) $-\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{5}$; в) –3; г) $-\frac{1}{1+\sqrt{2}} = 1-\sqrt{2}$.

**§2.** **6.** а) $\frac{x^2}{2y}$; б) $\frac{-x^2}{3y^2}$; в) $\frac{x^2}{2x+y}$; г) $\frac{3x+2y}{7y}$. **7.** а) $\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{8,4}{11,2} = \frac{-16,8}{-22,4}$; б) $\frac{5}{8} = \frac{11}{17,6} = \frac{8}{12,8} = \frac{-32}{-51,2} = \frac{-17,5}{-28}$. **8.** а) $\frac{x-1}{xy} = \frac{x^2-x}{x^2y} = \frac{xy-y}{xy^2} = \frac{0,5x^3-0,5x^2+x-1}{0,5x^3y+xy}$; б) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} = \frac{-7x-7y}{7y-7x} = \frac{3y^2-3x^2}{-3(x-y)^2}$. **10.** а) $\frac{3}{x+2}$; б) $\frac{2(a-b)}{a+b}$; в) $\frac{-x-y}{x}$; г) $\frac{4(b-2x)}{b+2x}$. **11.** 80. **12.** 9.

**§3.** **1.** а) 1; б) $\frac{6}{7}$; в) $-\frac{2}{47}$; г) $-\frac{7}{39}$. **2.** а) $1\frac{3}{8}$; б) $-\frac{11}{30}$; в) $\frac{16}{45}$; г) $1\frac{17}{48}$; д) $-1\frac{17}{84}$. **3.** а) $\frac{13}{xy}$; б) $\frac{a+b}{a-b}$; в) $\frac{4x}{x^2+1}$; г) $-3y$. **4.** а) $\frac{a^2+b^2}{ab}$; б) $\frac{6+2y}{xy}$; в) $\frac{2ax}{x^2-a^2}$; г) $\frac{4-x^2}{2x(x+1)}$. **5.** а) $\frac{36}{85}$; б) $-\frac{63}{80}$; в) $-\frac{3}{11}$; г) $\frac{1}{6}$. **6.** а) $\frac{3x^2}{y^3}$; б) $\frac{10x^3y^2}{y^2-1}$; в) $\frac{4(x^2-1)}{(x-2)^2}$; г) $\frac{8}{7x}$. **7.** а) $2\frac{3}{4}$; б) $-1\frac{1}{4}$; в) $-\frac{3}{4}$; г) $\frac{4}{7}$. **8.** а) $\frac{4y}{3x}$; б) $\frac{b+ay}{ax-b}$; в) $\frac{3x^2}{7x-5}$; г) $\frac{25-x^2}{4y}$. **9.** а) $\frac{ab}{y}$; б) $\frac{1-x}{x+2}$; в) –1; г) $\frac{8x}{y}$. **10.** а) $\frac{36}{49}$; б) $-\frac{27}{125}$; в) $\frac{256}{625}$; г) $\frac{3^8 5^6}{2^{10}}$. **11.** а) $\frac{x^3y^3}{27a^3}$; б) $\frac{x^2(x+y)^2}{(x-y)^2}$; в) $\frac{x^6a^3}{y^{15}b^9}$; г) $\frac{4(x-1)^2}{(3a+b)^2}$. **12.** а) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$; б) $\frac{-x-2}{(x+1)^2}$; в) $\frac{-3x}{a(x+y)}$. **13.** а) $\frac{2x}{x+y}$; б) $\frac{2xy}{x+y}$. **14.** а) $\frac{5}{4\sqrt{2}+1}=\frac{20\sqrt{2}-5}{31}$; б) $\frac{17}{1-8\sqrt{5}}=\frac{17(1+8\sqrt{5})}{319}$.

**§4.** **1.** В. **2.** а) $x^2+3x$; б) 2; в) $\frac{m}{m+1}$. **3.** а) И; б) И; в) Л. **4.** а) $-\frac{x+2}{x(x-1)}$; б) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$; в) $\frac{1}{x-2}$. **5.** а) Нет; б) $x=0$. **6.** Не являются. **7.** а) $\frac{x+2}{x^3}$; б) $\frac{3(a-b)}{ab}$. **9.** а) $\frac{2t-3}{2t+1}$; б) $\frac{a}{a-6}$; в) $\frac{3a+b}{3a-b}$; г) $\frac{2}{t+2}$. **11.** $S=\{-1; 0; 1\}$. **12.** а) $E(x)=x-1-\frac{1}{x+4}$; б) $a=1, b=-1, c=-1$.

***Упражнения и задачи на повторение.*** **2.** а) 5; б) 4,5; в) 5; г) 2,6. **5.** а) $\frac{3}{x+3}$; б) $\frac{a-b}{a+b}$; в) $\frac{-a}{x+a}$; г) $-\frac{x+2}{x}$. **6.** а) $\frac{y+2x}{x^2y^2}$; б) $\frac{2x+16y}{x^2-4y^2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{-7x-23}{x^2-16}$. **7.** а) $\frac{(x+1)^2}{x-2}$; б) $xy+y^2$; в) $\frac{y}{10ab^2x^2}$; г) $\frac{axy}{z^2}$. **8.** а) $\frac{9x+3}{y}$; б) $-\frac{x}{3x+6}$; в) $-\frac{a^4b^6}{6(x-1)^3}$; г) $\frac{a+3}{2ax}$. **9.** а) $\frac{a-b}{x}$; б) $\frac{1-x}{y+z}$; в) $\frac{x-y}{z-t}$; г) $\frac{y-z}{x}$. **10.** а) $\frac{a^3(x+1)^6}{b^3(x-1)^3}$; б) $\frac{x^8(x-1)^4}{y^{12}(x+1)^8}$; в) $\frac{a^2b^4x^6}{(a-b^2)^4y^8}$; г) $\frac{25(a^2-x)^8}{9y^8x^4}$. **11.** а) $\frac{(ax-b)^2}{a^2}$; б) $\frac{(x-3y)^2}{y^2}$; в) $\frac{x^2-x+2}{x^2-1}$; г) $\frac{6a-3}{4a^2-9}$. **12.** $4\sqrt{5}$. **13.** а) $\frac{a-2}{a+b^2}$; б) $\frac{x+y^2}{x-2}$; в) $\frac{3x+y}{xy}$; г) $\frac{a-b}{4(a+b)}$. **14.** а) 3,6; б) 2,5; в) –3; г) –3. **15.** а) $\frac{4}{x+1}$; б) $-2x$. **16.** $x$ = 1. **17.** $x$ = 0.

## Глава 3. Функции

**§ 1.** **2.** б). **4.** а). **6.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **8.** $f(x)=3x+1$. **9.** *Указание*. Рассмотрите два случая: $p(x)=(8+2\sqrt{3})x$, $p(x)=(8-2\sqrt{3})x$, $x$ – высота трапеции. **10.** а) $D(f)=\mathbb{R}$; б) $D(g)=\mathbb{R}^*$; в) $D(h)=[0; +\infty)$; г) $D(f_1)=\mathbb{R}$. **15.** а) Да; б) нет.

**§ 2.** **4.** а) Функция $f$ – строго возрастающая; в) функция $f$ – строго убывающая. **5.** б), в), г) Во II, IV четвертях. **13.** а) $f(x)=7x-3$; в) $f(x)=x\sqrt{2}-\sqrt{3}$. **18.** а) 1) При $m\in(2; +\infty)$ функция $f$ строго возрастает; 2) при $m\in(-\infty; 2)$ функция $f$ строго убывает. При $m=2$ функция $f$ является постоянной. **20.** $A=2$, $B=10$. **21.** $a$ = –1. **22.** $f(n)=3+0\cdot n$ или $g(n)=4+(-1)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

**§ 3.** **4.** а) $A:(0; +\infty)\to(0; +\infty)$, $A(a)=6a^2$. **6.** а) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=0$. **7.** б), г) Функция $f$ не имеет нулей. **8.** 2) *Указание.* Ось симметрии – это прямая $x=-\frac{b}{2a}$. **10.** б) $E(f)=(-\infty; 2]$; д) $E(f)=[-0{,}25; +\infty)$. **13.** а) $a>0, \Delta<0$; г) $a<0, \Delta=0$. **16.** 1,11 м; 1,78 м; 2 м; 1,78 м; 1,11 м. **18.** а) *Указание*. Можно задать 4 функции. **19.** Площадь меньшего треугольника $A_1(x)=\frac{ax^2}{2h}$; площадь трапеции $A_2(x)=\frac{a(h^2-x^2)}{2h}$. **20.** *Указание*. а) Решите уравнение $-2x^2-x+4=-x+2$, чтобы найти абсциссы точек пересечения. **23.** $m$ = –1. **24.** а) $a\in\mathbb{R}^*_-$; б) $a\in\mathbb{R}^*_+$. **25.** $b=6$, $c=15$.

**§ 4.** **2.** а) 5; –4; $-\sqrt[3]{16}$; 1,5; –1; 0,1; –7. **5.** а), б), г) Функция $f$ не имеет экстремумов; в) $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=1$.

***Упражнения и задачи на повторение.*** **5.** $l=2\pi r$. **6.** а) $y=15-0{,}5x$. **14.** а) $x=0$ – ось симметрии; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=3$; г) $x=\frac{1}{12}$ – ось симметрии; $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=2\frac{23}{24}$. **16.** а) Можно задать 4 функции. **17.** *Указание*. Решите уравнение $f(x)=0$ и вычислите значение $f(0)$. **20.** в) 40 м. **22.** а) *Указание*. Обозначим $2+x=t$, тогда $x=2-t$. Значит, $f(t)=5t-7$. **24.** $b=8$; $c=12$. **29.** а) *Указание*. Запишите функцию $f$ в виде $f(x)=\frac{x^2+2x+1-x}{x^2+2x+1}=1-\frac{x}{(x+1)^2}$; б) *Указание*. Исследуйте функцию $f(x)=1+\frac{x}{(x-1)^2}$. **30.** $m$ = –2.

## Глава 4. Уравнения. Системы уравнений

**§ 1.** **3.** а) $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}\setminus\{5\}$; в) $\mathbb{R}$. **4.** а) $S=\{0{,}5\}$; в) $S=\{-8\}$; е) $S=\left\{-\frac{7}{15}\right\}$. **7.** а) $S=\mathbb{R}$; б) $S=\left\{\frac{7}{8}\right\}$; в) $S=\left\{-\frac{16}{29}\right\}$. **8.** *Указание*. а) $\frac{1}{x-5}=t$; б) $\frac{x+2}{x}=t$; в) $\frac{t}{t+1}=z$; г) $\frac{a+3}{a}=t$. **10.** *Указание*. Закономерность следующая: $z_1\cdot z_2=30$, где $z_1, z_2$ – решения уравнений слева и справа от числа 30. **11.** *Указание*. Закономерность следующая: $x_1^{x_2}=81$, где $x_1, x_2$ – решения уравнений слева и справа от числа 81. **13.** а) $S=\{-2\}$; в) $S=\{6{,}5\}$; г) $S=\left\{-3\frac{1}{3}\right\}$. **14.** а) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; б) $S=\{-4; 4\}$; в) $S=\left\{-1; -\frac{1}{3}\right\}$; г) $S=\left\{-\frac{4}{11}; \frac{8}{9}\right\}$. **15.** а) При $m=3$, $S=\varnothing$; при $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $S=\left\{\frac{10}{m-3}\right\}$; б) при $m=0$, $S=\varnothing$; при $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $S=\left\{\frac{2(2-m)}{3m}\right\}$.

**§ 2.** **2.** а) $S=\{-4; 4\}$; б) $S=\{-5; 5\}$; в) $S=\left\{-\frac{2}{5}; 0\right\}$; г) $S=\varnothing$. **3.** а) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; б) $S=\left\{\frac{2}{5}; 1\right\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\varnothing$. **4.** а) $S=\{1\}$; б) $S=\{2; 6\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\{-2\}$; д) $S=\{-1; 4\}$; е) $S=\varnothing$. **8.** а) $(x-3)(x+1)$; в) $-(x+1)(3x+2)$. **9.** а) $S=\{1\}$; б) $S=\varnothing$. **10.** 1) а) $-\frac{3}{5}$; б) $-1\frac{4}{5}$; в) $3\frac{24}{25}$; г) $-2\frac{1}{5}$. **11.** 5, 20. *Указание*. Применяя соотношения Виета, сведите задачу к уравнению II степени. **12.** 1; 3. **13.** а) $S=\varnothing$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\left\{-\frac{1}{3}; 0\right\}$. **14.** а) $S=\{-2; -1; 1; 2\}$; б) $S=\varnothing$. **15.** а) $S=\{0\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\{0\}$; г) $S=\{-1\}$. **18.** а) $(t-1)(t+1)(t^2+2)$; б) $(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t^2+1)$. **19.** *Указание*. Сгруппируйте множители и сделайте подстановку: а) $x^2-3x=t$; б) $x^2+7x=t$. **20.** а) *Указание*. Поскольку $x^2=|x|^2$, сделайте подстановку $|x|=t$. **22.** а) При $m=0$, $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; при $m=-\frac{9}{4}$, $S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$; при $m\in\left(-2\frac{1}{4}; +\infty\right)\setminus\{0\}$, $S=\left\{\frac{3-\sqrt{9+4m}}{2m}; \frac{3+\sqrt{9+4m}}{2m}\right\}$; при $m\in\left(-\infty; -2\frac{1}{4}\right)$, $S=\varnothing$; б) *Указание*. Исследуйте случаи: 1) $m-2=0$; 2) $m-2\neq 0$.

**§ 3.** **2.** а) 1; в) –1. **3.** а) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; б) $S=\{-6\}$; в) $S=\left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$; г) $S=\{3\sqrt{2}\}$. **4.** а) $S=\left\{3\frac{2}{3}\right\}$; б) $S=\left\{-2\frac{2}{3}\right\}$; в) $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$; г) $S=\left\{-\frac{6}{7}\right\}$. **5.** а) $S=\{0\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\{0\}$; г) $S=\{0; 6\}$. **6.** а) $S=\left\{8\frac{5}{8}\right\}$; в) $S=\{0; 12\}$. **7.** а) $S=\left\{0; 3\frac{1}{5}\right\}$; в) $S=\varnothing$. **9.** а) $S=\mathbb{Q}\setminus\{-3\}$; в) $S=\mathbb{Q}\setminus\{4\}$. **10.** в) $S=\varnothing$; г) $S=\{-5\}$. **12.** а) *Указание*. Закономерность следующая: $(x-x_1)(x-x_2)=0$, где $x_1, x_2$ – решения данного уравнения; б) *Указание*. Закономерность следующая: $\frac{x+x_1}{x+x_2}=0$, где $x_1, x_2$ – решения данного уравнения. **14.** $S=\{1\}$. **15.** $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$. **16.** в) $S=\{-5\sqrt{2}; 0; 5\sqrt{2}\}$. *Указание*. ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{-8, -6, 6, 8\}$. Общий знаменатель $(t^2-36)(t^2-64)$. **17.** г) ОДЗ: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 1) При $m-3<0$, $S=\varnothing$; 2) при $m-3=0$ решите уравнение $x+\frac{1}{x}-3=0$; 3) при $m-3>0$ решите уравнения $x+\frac{1}{x}-3=m-3$, $x+\frac{1}{x}-3=-(m-3)$.

**§ 4.** **2.** б) $S=\{(0{,}2; -0{,}6)\}$; г) $S=\left\{\left(11\frac{3}{7}; -1\frac{17}{21}\right)\right\}$. **3.** б) $S=\left\{\left(-\frac{15}{17}; 3\frac{12}{17}\right)\right\}$; г) $S=\left\{\left(1; \frac{1}{2}\right)\right\}$. **6.** а) $S=\{(0; -1)\}$; б) $S=\left\{\left(7\frac{6}{11}; 5\frac{3}{11}\right)\right\}$; в) $S=\{(-1; 2)\}$. **7.** б) $S=\{(-2; 12)\}$; г) $S=\{(1; 2)\}$. **8.** а) $S=\{(2; 1)\}$; б) $S=\varnothing$; в) $S=\{(\sqrt{2}; 4); (-\sqrt{2}; 4)\}$. **9.** 18 км/ч; 24 км/ч. **11.** 2 км/ч. **12.** $a=5$.

**§ 5.** **1.** 1, 11. **2.** 25, 10; –10, –25. **4.** 43 см, 40 см. **6.** 160 км, 120 км. **7.** *Указание*. $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{ba}=10b+a$. **10.** 20 часов, 30 часов. **12.** $\frac{12-2\sqrt{33}}{3}$, $\frac{12+2\sqrt{33}}{3}$. **15.** 25,5 лея, 39 леев. **16.** 7 заданий по 4 пункта и 5 заданий по 5 пунктов. **17.** *Указание*. Составьте уравнение $y^2-x^2=225 \Leftrightarrow (y-x)(y+x)=225$, где $x$ – длина катета, а $y$ – длина гипотенузы. Разложите число 225 на произведение натуральных чисел. *Ответ*: 4 треугольника. **18.** *Указание*. Пусть $x, y\in\mathbb{N}^*$. Решите на множестве $\mathbb{N}^*$ уравнение $(x-y)(x+y)=45$. **19.** 20 машин. **21.** 120 м.

***Упражнения и задачи на повторение.*** **1.** б) $S=\left\{1\frac{4}{11}\right\}$; г) $S=\left\{-13\frac{2}{3}\right\}$. **2.** б) $S=\{0\}$; в) $S=\varnothing$; г) $S=\varnothing$. **4.** б) $S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$; г) $S=\varnothing$. **5.** г) $S=\{(2; 8)\}$. **6.** б) $S=\left\{-1; \frac{2}{3}\right\}$. **7.** 48 двухкомнатных и 16 четырехкомнатных квартир. **9.** 31 лей. **10.** а) $S=\{-2\}$; б) $S=\left\{-\frac{8}{9}\right\}$; в) $S=\{-1; 1\}$; д) $S=\{-2\}$. **12.** *Указание*. Примените теорему Виета.

**13.** а) $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$; б) *Указание*. Сделайте подстановку $(2x-1)^2=t$; в) *Указание*. Сделайте подстановку $(x-2)^2$; г) $(t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2})^2$. **15.** а) $S=\{(-2;\,-1)\}$; в) $S=\{(-16{,}5;\,-49{,}5)\}$. **18.** 28 %. **19.** $\frac{3+15\sqrt{103}}{26}$, $\frac{-15+3\sqrt{103}}{26}$; $\frac{3-15\sqrt{103}}{26}$, $\frac{-15-3\sqrt{103}}{26}$. **20.** б) $-1, 1\frac{1}{3}$; в) $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$. **23.** $-\frac{1}{2}$. **24.** $\left\{-2;\,0;\,1\frac{1}{4}\right\}$. **25.** 6 белых роз, 15 красных роз. **26.** 10 и 45. **27.** 1. **28.** У Даны 60 конфет, у Паулы 30 конфет. **30.** а) $S=\left\{-1;\,-\frac{1}{2};\,1;\,1{,}5\right\}$; б) $S=\{-3;\,-1;\,1\}$; в) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$. **31.** Сыну 12 лет, отцу 39 лет, а маме 33 года.

## Глава 5. Неравенства. Системы неравенств

**§ 1.** **3.** а) $S=(-\infty;\,2)$; б) $S=(-\infty;\,-2)$; в) $S=(-\infty;\,-1]$; г) $S=\left[-\frac{7}{8};\,-\infty\right)$. **4.** а) $S=\{0;\,1;\,2;\,3;\,4\}$; б) $S=\{0;\,1;\,2;\,3;\,4;\,5\}$. **5.** а) $S=\left(-\frac{1}{2};\,3\right)$; б) $S=\varnothing$; в) $S=[2{,}5;\,+\infty)$; г) $S=\left(-\infty;\,\frac{3}{4}\right]$. **8.** 10 натуральных чисел. **11.** Весы покажут между 111 кг и 125 кг. **12.** а) $S=\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$; в) $S=\varnothing$; г) $S=[2{,}5;\,+\infty)$. **13.** а) $x\in[2;\,+\infty)$; б) $x\in\left(-\infty;\,\frac{4}{5}\right)$; в) $x\in(3;\,10]$. **14.** а) $S=(1;\,4)$; в) $S=[-2;\,2]$; г) $S=(-3;\,4)$. **15.** 25 книг. **16.** $x\in(3;\,13)$. **17.** 24 места. **18.** $x\in\left(-\infty;\,-\frac{7}{6}\right]$. **19.** $x\in[1;\,+\infty)$. **20.** б) $S=\left(-\infty;\,-\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{3};\,+\infty\right)$; в) $S=\left(-4;\,-\frac{2}{3}\right)$. **21.** а) $a\in(-\infty;\,2)$; б) $a\in(-\infty;\,3)$. **22.** г) $a\in(-\infty;\,-2)$.

**§ 2.** **3.** а) $S=\left(-\infty;\,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3};\,+\infty\right)$; б) $S=(-\infty;\,-8)\cup(6;\,+\infty)$; в) $S=\left[-\frac{3}{2};\,\frac{1}{4}\right]$; г) $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$; д) $S=\left\{\frac{2}{7}\right\}$; е) $S=\mathbb{R}$; g) $S=(-\infty;\,0)\cup(7;\,+\infty)$; h) $S=\left(-1;\,1\frac{1}{4}\right)$. **4.** а) $S=(-\infty;\,-8)\cup(5;\,+\infty)$; б) $S=[-2;\,0]$; в) $S=(-6;\,5)$; г) $S=(-\infty;\,-4)\cup$ $\cup[-1;\,+\infty)$; д) $S=\left(\frac{1}{3};\,\frac{1}{2}\right]$. **5.** а) $S=(-\infty;\,-2)\cup(1;\,+\infty)$; б) $S=[-5;\,-3]$; г) $S=(-\infty;\,-1]\cup[4{,}5;\,+\infty)$. **7.** а) $S=\left[-1;\,1\frac{1}{2}\right]$; б) $S=\mathbb{R}$; в) $S=(-5;\,4)$; г) $S=\varnothing$. **8.** а) $\left[-1;\,\frac{1}{2}\right]$; б) $(-\infty;\,-4)\cup(0;\,+\infty)$. **9.** а) $S=(-\infty;\,-2)\cup(0;\,3)$; б) $S=(-\infty;\,-5]\cup\left[-\frac{1}{2};\,3\right]$; в) $S=(-\infty;\,1]\cup[2;\,3]$; г) $S=[-2;\,1)\cup[3;\,+\infty)$. **10.** Да, можно вырезать. **11.** а) $S=\left(-\frac{5}{3};\,-\frac{9}{8}\right]$. **12.** а) $x\in[-5;\,1)\cup(1;\,6]$; б) $x\in[-10;\,-6]\cup[7;\,10]$. **13.** а) $S=[1;\,2]\cup[3;\,4]$; б) $S=(-3;\,-1)\cup(-1;\,1)$. **14.** б) $m\in(-\infty;\,-5)$. **15.** б) $a\in\left(0;\,1\frac{1}{4}\right)$.

***Упражнения и задачи на повторение.*** **5.** $-3$. **6.** а) $\left[-\frac{3}{2};\,2\right]$; б) $\left[-\sqrt{3};\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; в) $\left(-\frac{1}{3};\,2\right]$; г) $(-\infty;\,-1]\cup\left(1\frac{1}{3};\,+\infty\right)$. **8.** а) $x=[1;\,+\infty)$. **9.** $x\in(1;\,+\infty)$. **10.** а) $S=(-4;\,-1)$; б) $S=\{8\}$. **11.** $S=\left(\frac{3}{5};\,5\right)$. **12.** $S=(-\infty;\,-6)\cup\{-1\}\cup(2;\,+\infty)$. **13.** Не существует таких значений. **14.** $a\in(-\infty;\,-3]\cup[1;\,+\infty)$.

## Глава 6. Элементы теории вероятностей и математической статистики. Элементы финансовой математики

**§1.** **3.** а) Невозможное; б) случайное; в) невозможное; г) невозможное; д) достоверное; е) невозможное. **4.** а) Событие $A$ более возможно, чем событие $B$; б) событие $A$ менее возможно, чем событие $B$; в) событие $A$ менее возможно, чем событие $B$. **5.** Углы, треугольник. **9.** а) 15 шаров; б) 18 шаров; в) 19 шаров; г) 11 шаров; д) 19 шаров.

**§2.** **1.** а) Один шанс из шести; в) ни одного шанса. **2.** 0,5; 0,5. **3.** а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{5}{6}$; д) 0. **4.** $\frac{1}{15}$. **5.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$. **7.** а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{11}{20}$. **9.** *Указание.* Следует пересчитать простые числа (четные, нечетные) среди первых 90 натуральных чисел. **11.** $\frac{13}{18}$. **12.** $P(b)=\frac{14}{31}$; $P(f)=\frac{17}{31}$. **14.** $P(A)=P(B)=\frac{1}{6}$. **15.** $P=\frac{2}{25}$.

**§4.** **1.** 20 %. **2.** 7 500 леев. **3.** 500 учеников. **4.** 11 840 леев. **5.** 5,5 %. **6.** 7 326 120 леев. **7.** 20 %. **8.** 5 952 лея. **9.** 9 900 леев. **16.** 34 500 д.е. **17.** а) 45 %; б) 2 255 сборников; в) 41,25 %. **22.** а) 25 %; б) 6 592 лея. **23.** 4 000 леев. **25.** *Указание*: 3 месяца = 3 : 12 = 0,25 года; 9 дней = 9 : 360 = 0,025 года. **27.** *Указание*: 3 месяца = 3 : 12 = 0,25 года; $S=14\,127{,}75$ лея, $D$ = 4 127,75 лея.

***Упражнения и задачи на повторение.*** **3.** $P(v)=\frac{1}{3}$; $P(r)=\frac{2}{3}$. **4.** Одна грань желтая и пять граней красные. **6.** 2) а) 15 млн леев; б) 30 %. **7.** 12 %. **8.** 12 000 леев. **9.** б) $\frac{2}{25}$. **10.** 0,98. **11.** $\frac{1}{9}$. **12.** 0,1. **13.** 13 яблок. **16.** 8 %. **17.** 5 000 леев. **18.** 5 месяцев = $\frac{5}{12}$ года; 15 дней = $\frac{15}{360}$ года. **20.** Урна $b$.

# Геометрия

## Глава 1. Окружность

**§ 1.** **4.** а) 8 см; б) 7 см; в) $2\sqrt{10}$ см; г) 2 см. **5.** а) 12 см; б) 5 см; в) 15 см. **6.** а) Секущая; б) секущая; в) касательная; г) секущая; д) не пересекающая окружность. **7.** $r=10$ см, $AC=10\sqrt{3}$ см, $BM=5$ см. **8.** а) 13,7 см; б) 3,(4) см; в) 8 см. **9.** а) Секущая; б) секущая; в) не пересекающая окружность; г) касательная. **10.** а) 3 см; б) 5 см; в) $\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$. **11.** а) 10 см; б) $\frac{\sqrt{15}}{2}$ см. **12.** 60°. **15.** 30°. **16.** 12 см. **17.** а) $M \in \operatorname{Int} \Delta ABC$; б) $M \in \operatorname{Int} \Delta ABC$; в) если $r>2$, то $M \in \operatorname{Int} \Delta ABC$; если $r=2$, то $M \in \mathscr{C}(O, 2)$; если $0<r<2$, то $M \in \operatorname{Ext} \Delta ABC$. **18.** 20 см. **19.** 10 см. **20.** 7 см. **21.** 7,5 см. **22.** $\sqrt{15}$ см. **24.** а) 1; б) 30; в) $\sqrt{x^2+y^2}$. **26.** $(12+\sqrt{11})$ cm. **30.** $3\sqrt{3}$ см. **32.** 20 см или 40 см. **33.** 8 см, 15 см. **34.** 5 см. **38.** 60 см. **39.** $8\sqrt{2}$.

**§ 2.** **2.** а) 45°; б) 90°; в) 125°. **3.** а) $MN=KL$; б) $MN<KL$; в) $MN=KL$. **4.** а) 44°; б) 152°; в) 35°; г) 80°. **5.** а) 120°; б) 72°; в) 36°; г) 30°; д) 30°; е) 15°. **11.** Квадрат. **12.** Прямоугольник. **13.** а) 50°; б) 40°; в) 65°. **14.** 50 минут. **15.** 40°. **16.** 90°, 120°, 60°, 90°. **17.** 180°, 90°, 60°, 30°. **18.** 18,5 см. **19.** а) 3 хорды и 6 дуг. **20.** Величины дуг равны 10°, 30°, 60°, 70°, 80°, 110°. **21.** а) 90°; б) 35°; в) 55°; г) 20°. **22.** а) 120°; б) 150°; в) 24°; г) 210°. **23.** 6 см. **24.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ см. **25.** 80° или 100°. **26.** $20\sqrt{3}$ см. **27.** 17 см. **28.** а) 64°; б) 117°; в) 48°; г) 57°. **33.** 18,75 см. **34.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$ см.

***Упражнения и задачи на повторение.*** **3.** 5 см. **4.** 6 см. **5.** $2\sqrt{13}$ см. **7.** а) 60°; б) 17°; в) 67°. **9.** а) 6 см; б) $4\sqrt{7}$ см. **10.** а) 12 см; б) 0,5 см. **11.** а) 52° или 128°; б) 74°; в) 46°; г) 61°. **12.** а) 30°; б) 150°; в) 270°. **13.** $6\sqrt{3}$ см. **15.** $4\sqrt{2}$ см. **17.** $AM=(3\sqrt{2}+2\sqrt{17})$ см; $BD=2\sqrt{34-3\sqrt{34}}$ см. **18.** 8,125 см. **19.** $3\sqrt{13}$ см.
**20.** а) $\mathrm{m}(\angle A)=115°$, $\mathrm{m}(\angle B)=40°$, $\mathrm{m}(\angle C)=25°$; б) $\mathrm{m}(\angle A)=120°$, $\mathrm{m}(\angle B)=37°$, $\mathrm{m}(\angle C)=23°$.

## Глава 2. Площади

**7.** а) 7,3 см, 2,5 см; б) $11\sqrt{2}$ см, $5\sqrt{2}$ см; в) $\frac{2}{3}$ см, $\frac{7}{9}$ см; г) 16 см, 2 см. **8.** 17 м. **11.** а) $\mathscr{A}=2\sqrt{110}$ см$^2$; в) $\mathscr{A}=10\sqrt{11}$ см$^2$. **12.** а) $\mathscr{A}_{ABC}=\mathscr{A}_{ABD}=$ 49,5 см$^2$. $\mathscr{A}_{ADC}=\mathscr{A}_{DCB}=36$ см$^2$; б) $\mathscr{A}_{ABC}=\mathscr{A}_{ABD}=87{,}5$ см$^2$; $\mathscr{A}_{ADC}=\mathscr{A}_{DCB}=50$ см$^2$; в) $\mathscr{A}_{ABC}=\mathscr{A}_{ABD}=53{,}25$ см$^2$; $\mathscr{A}_{ADC}=\mathscr{A}_{DCB}=45$ см$^2$; г) $\mathscr{A}_{ABC}=\mathscr{A}_{ABD}=21\sqrt{2}$ см$^2$; $\mathscr{A}_{ADC}=\mathscr{A}_{DCB}=\frac{42\sqrt{2}-49}{2}$ см$^2$. **15.** 81 см$^2$. **16.** 42 см. **17.** 52 см$^2$. **18.** $4\pi$ м$^2$. **19.** а) $24\sqrt{3}$ см$^2$; б) $32\sqrt{2}$ см$^2$; в) $80\sin 36°$ см$^2$. **20.** а) $P=48$ см, $\mathscr{A}=144$ см$^2$; б) $P=36\sqrt{2}$ см, $\mathscr{A}=162$ см$^2$; в) $P=4a$ см, $\mathscr{A}=a^2$ см$^2$; г) $P=2x\sqrt{2}$ см, $\mathscr{A}=\frac{x^2}{2}$ см$^2$. **21.** а) В 9 раз; б) в 49 раз; в) в $n^2$ раз. **22.** а) В 2 раза; б) в $\sqrt{10}$ раза; в) в $(4-\sqrt{11})$ раза. **23.** а) В 4 раза; б) в 25 раз; в) в $\frac{8}{3}$ раза. **24.** 63 см$^2$. **25.** $\frac{63\sqrt{3}}{2}$ см$^2$. **26.** 216 см$^2$. **27.** 68 %. **28.** $(144\sqrt{2}-96)$ см$^2$. **29.** а) 400 г; б) 2100 г. **30.** 48 см$^2$. **31.** 15 см$^2$. **32.** 900 см$^2$. **33.** 13 см. **34.** 70 см$^2$. **35.** $\frac{S(m+2n)}{2(m+n)}$. **36.** $P=128$ см, $\mathscr{A}=480$ см$^2$. **37.** $\frac{135}{2}$ см$^2$. **38.** Высота, проведенная к основанию треугольника $ABC$. **39.** $\pi$ м. **40.** 6 см$^2$. **41.** 294 см$^2$. **42.** 170 см$^2$. **44.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}r^2$.

## Глава 3. Многогранники

**§ 1.** **3.** б). **4.** $\mathscr{A}=54$ см$^2$, $\mathscr{V}=27$ см$^3$. **5.** $\mathscr{V}=64$ см$^3$, $\mathscr{A}=96$ см$^2$. **6.** $\mathscr{A}=24$ см$^2$, $\mathscr{V}=8$ см$^3$. **7.** 27 л. **9.** 150 см$^2$. **10.** 8 см$^3$. **11.** 7,2 кг. **12.** $6\sqrt{3}$ см. **13.** $3(2+\sqrt{3})$ см. **14.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) $4\sqrt{2}$ см. **15.** $\mathscr{A}=1\,536$ см$^2$, $\mathscr{V}=4\,096$ см$^3$.
**§ 2.** **4.** $\mathscr{A}=214$ см$^2$, $\mathscr{V}=210$ см$^3$. **5.** $\mathscr{A}_б=156$ см$^2$, $\mathscr{A}_п=236$ см$^2$, $d=5\sqrt{5}$ см. **6.** 188 см$^2$. **7.** 840 см$^3$. **8.** $\mathscr{A}_б=96$ см$^2$, $\mathscr{A}_п=126$ см$^2$. **9.** $\mathscr{A}_б=126$ см$^2$, $\mathscr{V}=64\sqrt{3}$ см$^3$. **10.** $\mathscr{A}_б=36\sqrt{3}$ см$^2$, $\mathscr{A}_п=44\sqrt{3}$ см$^2$. **11.** 18 см$^2$. **12.** $\mathscr{A}_t=(96+32\sqrt{3})$ см$^2$, $\mathscr{V}=64\sqrt{3}$ см$^3$. **13.** $\frac{45\sqrt{3}}{4}$ см$^3$. **14.** $\mathscr{A}_п=(105+50\sqrt{3})$ см$^2$, $\mathscr{V}=\frac{175\sqrt{3}}{4}$ см$^3$. **15.** $\sqrt{7}$ см. *Указание.* Если $x, y, z$ – размеры параллелепипеда, то $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ длина диагонали. **16.** $\mathscr{A}_б=112$ см$^2$, $\mathscr{A}_п=144$ см$^2$, $\mathscr{V}=112$ см$^3$. **17.** 200 см$^3$. **18.** $\mathscr{A}_б=288$ см$^2$, $\mathscr{A}_п=360$ см$^2$. **19.** $19\sqrt{3}$ кг $\approx 32{,}87$ кг. **20.** $\mathscr{A}_п=290$ см$^2$, $\mathscr{V}=300$ см$^3$. **21.** $\mathscr{A}_б=128$ см$^2$, $\mathscr{A}_п=160$ см$^2$. **22.** $\mathscr{A}_б=90$ см$^2$, $\mathscr{A}_п=(90+27\sqrt{3})$ см$^2$, $\mathscr{V}=\frac{135\sqrt{3}}{2}$ см$^3$. **23.** $180\sqrt{3}$ см$^2$. **24.** $120\sqrt{3}$ см$^3$. **25.** б). **26.** 160 см$^3$. **27.** 400 см$^3$. **28.** 364,5 см$^3$. **29.** 10 см$^2$. **30.** $\mathscr{A}_б=120$ см$^2$, $\mathscr{A}_п=(120+12\sqrt{3})$ см$^2$. **31.** 12 м$^3$. **32.** 1,2 см. **33.** а) $2\sqrt{38}$ см; б) 248 см$^2$. **34.** а) $\mathscr{A}_б=288\sqrt{3}$ см$^2$, $\mathscr{A}_п=32(9\sqrt{3}+2)$ см$^2$, $\mathscr{V}=384\sqrt{3}$ см$^3$; б) 24 см. **35.** $\mathscr{A}_п=(32\sqrt{3}+144)$ см$^2$, $\mathscr{V}=96\sqrt{3}$ см$^3$. **36.** 1 дм$^3$. **37.** 12 мешков. **38.** 13 см. **39.** 6 см.

§ 3. **1.** 45 см$^2$. **2.** $\mathcal{S}_б = 45\sqrt{3}$ см$^2$, $\mathcal{S}_п = 72\sqrt{3}$ см$^2$, $\mathcal{V} = 36\sqrt{3}$ см$^3$. **3.** 18 см$^2$. **4.** $\mathcal{S}_п = (36\sqrt{3}+72)$ см$^2$, $\mathcal{V} = 24\sqrt{3}$ см$^3$. **5.** $63\sqrt{3}$ см$^2$. **6.** б). **7.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ см$^3$. **8.** $\mathcal{S}_б = 60$ см$^2$, $\mathcal{V} = 48$ см$^3$. **9.** $\mathcal{S}_п = 360$ см$^2$, $\mathcal{V} = 400$ см$^3$. **10.** $\mathcal{S}_п = 108$ см$^2$, $\mathcal{V} = 36\sqrt{3}$ см$^3$. **11.** $\mathcal{S}_б = 80$ см$^2$, $\mathcal{S}_п = 144$ см$^2$, $\mathcal{V} = 64$ см$^3$. **12.** $\mathcal{S}_п = (24\sqrt{3}+48)$ см$^2$, $\mathcal{V} = 16\sqrt{3}$ см$^3$. **18.** а) $\mathcal{P} = 24$ м, $\mathcal{S}_б = 144$ м$^2$, $\mathcal{S} = 180$ м$^2$; б) $\mathcal{P} = 52$ м, $\mathcal{S}_б = 520$ м$^2$, $l = 20$ м; в) $a = 9$ м, $\mathcal{P} = 36$ м, $\mathcal{S} = 369$ м$^2$; г) $a = 11$ м, $l = 18$ м, $\mathcal{S} = 517$ м$^2$; д) $a = 8$ м, $\mathcal{P} = 32$ м, $l = 22$ м. **19.** $\mathcal{S}_б = 60\sqrt{2}$ см$^2$. **21.** $32\sqrt{3}$ см$^3$. **22.** $(48\sqrt{3}+96)$ см$^2$. **23.** $\frac{384\sqrt{3}}{3}$ см$^3$. **24.** $\sqrt{5}$. **25.** $\mathcal{S}_б = 150\sqrt{7}$ см$^2$, $\mathcal{V} = 500\sqrt{3}$ см$^3$. **26.** $\mathcal{S}_п = 384$ см$^2$, $\mathcal{V} = 384$ см$^3$. **27.** а) $\mathcal{S}_п = 16\sqrt{3}$ см$^2$, $\mathcal{V} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ см$^3$; б) $\frac{1}{9}$. **28.** $64\sqrt{3}$ см$^2$. **29.** Михаил. **30.** 6 см.

*Упражнения и задачи на повторение.* **1.** а) 720°; б) 1 080°; в) 1 440°. **2.** $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ см. **3.** $\frac{128\sqrt{2}}{3}$ см$^3$. **4.** $\mathcal{S}_п = 232$ см$^2$, $\mathcal{V} = 224$ см$^3$. **5.** $\mathcal{S}_п = 216$ см$^2$. **6.** $\mathcal{S}_б = 96$ см$^2$, $\mathcal{V} = 32\sqrt{3}$ см$^3$. **7.** $\mathcal{S}_б = 24$ см$^2$, $\mathcal{V} = 12\sqrt{3}$ см$^3$. **8.** а) $\mathcal{S}_п = 648$ см$^2$, $\mathcal{V} = 810$ см$^3$; б) 56,25 см$^2$. **10.** а) $4\sqrt{3}$ см; б) 192 см$^3$. **11.** $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ см. **12.** $h = 3{,}75$ см, $\mathcal{V} = 281{,}25$ см$^3$. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ см$^3$. **14.** 1 224 см$^3$. **15.** 252 см$^2$. **16.** $AB = 4\sqrt{2}$ см, $\mathcal{V} = 128\sqrt{2}$ см$^3$. **17.** 148 см$^2$. **18.** $d = 3\sqrt{11}$ см, $\mathcal{S}_п = 190$ см$^2$. **19.** Четыре диагонали равны $2\sqrt{43}$ см и две равны $4\sqrt{13}$ см, $\mathcal{S}_п = (18\sqrt{3}+288)$ см$^2$, $\mathcal{V} = 432\sqrt{3}$ см$^3$. **20.** $\mathcal{S}_б = 940$ см$^2$, $\mathcal{V} = 4\,200$ см$^3$. **21.** $\mathcal{S}_п = 16\sqrt{3}$ см$^2$, $\mathcal{V} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ см$^3$. **22.** а) $6\sqrt{6}$ см; б) $4\sqrt{3}$ см; в) 288 см$^3$. **23.** $\frac{4\sqrt{11}}{3}$ см. **24.** $\sqrt{3}$ см$^3$.

## Глава 4. Круглые тела

§ 1. **3.** а), в) Да; б) нет. **5.** а) $\mathcal{S}_п = 150\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 250\pi$ см$^3$; б) $\mathcal{S}_п = 6\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 2\pi$ см$^3$; в) $\mathcal{S}_п = 0{,}96\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 0{,}128\pi$ см$^3$. **6.** $\mathcal{S}_п = 130\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 200\pi$ см$^3$. **7.** $96\pi$ см$^3$ или $72\pi$ см$^3$. **8.** а) $\mathcal{S}_п = \left(192\sqrt{3}+\frac{288}{\pi}\right)$ см$^2$, $\mathcal{V} = \frac{1152\sqrt{3}}{\pi}$ см$^3$ или $\mathcal{S}_п = \left(192\sqrt{3}+\frac{96}{\pi}\right)$ см$^2$, $\mathcal{V} = \frac{1152}{\pi}$ см$^3$; б) $\mathcal{S}_п = \left(100+\frac{50}{\pi}\right)$ см$^2$, $\mathcal{V} = \frac{250}{\pi}$ см$^3$; в) $\mathcal{S}_п = \left(\frac{128}{\pi}+\frac{256}{\sqrt{3}}\right)$ см$^2$, $\mathcal{V} = \frac{1\,024}{\pi\sqrt{3}}$ см$^3$ или $\mathcal{S}_п = \left(\frac{128}{3\pi}+\frac{256}{\sqrt{3}}\right)$ см$^2$, $\mathcal{V} = \frac{1\,024}{3\pi}$ см$^3$. **9.** $40\pi$ см$^2$. **10.** а) 60 см$^2$; б) 8 см$^2$; в) $2\sqrt{3}x^2$. **11.** а) $192\pi$ см$^2$; б) $36\sqrt{2}\pi$ см$^2$. **12.** а) 375 кг; б) 60,8 кг. **13.** $66\pi$ см$^2$. **14.** Второй. **15.** $\mathcal{S}_п = 125\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 187{,}5\pi$ см$^3$. **16.** $\mathcal{S}_п = 130\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 200\pi$ см$^3$. **17.** 4 см. **19.** 1350 см$^3$. **20.** $12\sqrt{2}$ см, $\approx 47\,\%$. **21.** 22 гайки, 16% объема стержня составляют отходы. **22.** В 8 раз. **23.** В $2\sqrt{2}$ раза.

§ 2. **5.** $\mathcal{S}_п = 24\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 36\pi$ см$^3$. **6.** $\mathcal{S} = 312\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 480\pi$ см$^3$. **12.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ см. **13.** $2\sqrt{105}$ см$^2$. **14.** $\frac{48}{5}\pi$ см$^3$. **15.** $\mathcal{S}_б = \sqrt{R^4+S^2}\pi$, $\mathcal{V} = \frac{RS\pi}{3}$. **16.** 25 мл. **17.** $\mathcal{S}_б = \frac{h^2}{d^2}\sqrt{d^2\pi S+S^2}$, $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\frac{Sh^3}{d^2}$. **18.** $\mathcal{V} = \frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2+b^2}}$. **19.** $24\pi$ см$^2$. **20.** $125\pi$ см$^3$. **21.** $256\pi$ см$^3$. **22.** $384\pi$ см$^3$. **23.** $1\,056\pi$ см$^3$.

§ 3. **5.** а) 8 см; б) 24 см; в) 4 см. **6.** $6\,400\pi$ км. **7.** а) $\mathcal{S} = 144\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 288\pi$ см$^3$; б) $\mathcal{S} = 6\frac{30}{49}\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 1\frac{286}{343}\pi$ см$^3$; в) $\mathcal{S} = 108\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 108\sqrt{3}\pi$ см$^3$. **8.** а) $81\pi$ см$^2$; б) $180\pi$ см$^2$; в) 0. **9.** Одному мальчику. **10.** а) $3\,364\pi$ см$^2$; б) $5\,476\pi$ см$^2$. **11.** 43 см$^2$. **12.** $\frac{3}{2\sqrt{\pi}}$ см.

*Упражнения и задачи на повторение.*

**3.** $\mathcal{S}_п = \left(20\sqrt{15}+\frac{150}{\pi}\right)$ см$^2$, $\mathcal{V} = \frac{150\sqrt{5}}{\pi}$ см$^3$. **4.** $\mathcal{S}_п = 15{,}75\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = \frac{9\sqrt{35}}{8}\pi$ см$^3$. **5.** 6 см. **6.** 36 см$^3$. **7.** а) $\frac{200\sqrt{3}}{27}\pi$ см$^3$; б) $\frac{100}{3\sqrt{13}}\pi$ см$^3$. **8.** $\frac{54}{\pi}$ см$^3$. **9.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **10.** I случай. $\mathcal{S}_б = 70\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 175\pi$ см$^3$. II случай. $\mathcal{S}_б = 70\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 245\pi$ см$^3$. **11.** Масса шарика больше. **12.** $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ см$^3$. **13.** 2 см. **14.** 7 см. **15.** Нет. **16.** $72\sqrt{3}\pi$ см$^2$. **17.** Сфера. **18.** $\mathcal{S}_п = 108\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = 72\sqrt{3}\pi$ см$^3$. **19.** $\mathcal{S}_п = \left(169+\frac{338\sqrt{3}}{3}\right)\pi$ см$^2$, $\mathcal{V} = \frac{2197\sqrt{3}}{9}\pi$ см$^3$. **20.** 90°. **21.** 60°. **22.** $\frac{\pi a^3}{4}$. **23.** 13 см. **24.** а) $256\pi$ см$^3$; б) $384\pi$ см$^3$.

# Содержание

## Алгебра



## Геометрия