ОСНОВНОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир

# МАТЕМАТИКА

НОВЫЙ ПОЛНЫЙ

## СПРАВОЧНИК

для подготовки к ОГЭ

100 БАЛЛОВ

УДК 373:512
ББК 22.14я721
М52

**Мерзляк, А.Г.**

М52 Математика : Новый полный справочник для подготовки к ОГЭ / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. — Москва : АСТ, 2017. — 447,[1] с.: ил.

ISBN 978-5-17-096816-9
(Новый полный справочник для подготовки к ОГЭ)
ISBN 978-5-17-096817-6
(Самый популярный справочник для подготовки к ОГЭ)

Справочник содержит материал курса «Математика» в объёме, проверяемом на государственной итоговой аттестации.

Структура книги соответствует современному кодификатору элементов содержания по предмету, на основе которого формируются контрольные измерительные материалы (КИМы) основного государственного экзамена (ОГЭ).

Справочник состоит из двух глав. Первая глава «Арифметика. Алгебра» соответствует содержанию курсов математики 5–6 классов и алгебры 7–9 классов основной школы, вторая глава «Геометрия» — содержанию курса геометрии 7–9 классов.

Помимо теоретического материала в справочнике представлено значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач. Ко всем заданиям в конце пособия даны ответы для самопроверки.

Работа с пособием позволит повторить все основные темы курса математики за 5–9 классы и успешно подготовиться к сдаче ОГЭ.

Справочник адресован выпускникам 9-х классов.

**УДК 373:512**
**ББК 22.14я721**

ISBN 978-5-17-096816-9
(Новый полный справочник для подготовки к ОГЭ)
ISBN 978-5-17-096817-6
(Самый популярный справочник для подготовки к ОГЭ)

# ОГЛАВЛЕНИЕ

**Введение** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

## ГЛАВА I
## АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА

**§ 1. Натуральные числа** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
1.1. Десятичная запись натуральных чисел. . . . 17
1.2. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем . . . . . 18
1.3. Делимость натуральных чисел . . . . . . . . . . 20
1.4. Признаки делимости. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 21
1.5. Простые и составные числа . . . . . . . . . . . . 22
1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное . . . . . . . . . . . . 24
1.7. Деление с остатком . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 26
*Примеры заданий* № 1 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 27

**§ 2. Дроби** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31
2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей . . . . . . . . . . . . . . . 31
2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями. . . . . . . . . . . . . . 34
2.3. Десятичная дробь. Сравнение десятичных дробей . . . . . . . . . . . 35
2.4. Арифметические действия с десятичными дробями . . . . . . . . . . . . . . . . 37
2.5. Нахождение части от целого и целого по его части. . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

2.6. Представление обыкновенной дроби в виде десятичной. Бесконечные периодические десятичные дроби . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 40
2.7. Округление чисел . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 42
*Примеры заданий* № 2 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 43
2.8. Проценты . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
2.9. Нахождение процентов от величины и величины по её процентам . . . . . . . . . . . 48
2.10. Отношение. Процентное отношение . . . . . 49
2.11. Пропорции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50
2.12. Прямая и обратная пропорциональные зависимости . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 52
*Примеры заданий* № 3 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 53
**§ 3. Рациональные числа** . . . . . . . . . . . . . . . . 57
3.1. Целые числа. Рациональные числа . . . . . . . 57
3.2. Координатная прямая . . . . . . . . . . . . . . . . 58
3.3. Модуль числа. Сравнение рациональных чисел . . . . . . . . . 59
3.4. Арифметические действия с рациональными числами . . . . . . . . . . . . 61
*Примеры заданий* № 4 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62
**§ 4. Целые выражения** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 66
4.1. Буквенное выражение (выражение с переменными). Алгебраические выражения . . . . . . . . . . . . 66
4.2. Свойства степени с натуральным показателем . . . . . . . . . . . . . 67
4.3. Одночлен . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 69
4.4. Многочлен. Степень многочлена. Корень многочлена с одной переменной . . . 70
4.5. Сложение, вычитание и умножение многочленов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 72

4.6. Квадрат суммы и квадрат разности. Формула разности квадратов . . . . . . . . . . . . 73
4.7. Формулы суммы кубов и разности кубов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 75
4.8. Разложение многочленов на множители. . . 76
*Примеры заданий* № 5 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 77

**§ 5. Дробные выражения** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 82
5.1. Алгебраические (рациональные) дроби . . . 82
5.2. Тождество. Тождественные преобразования выражений . . . . . . . . . . . . . . . 83
5.3. Основное свойство рациональной дроби. Сокращение дробей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 83
5.4. Действия с алгебраическими дробями. . . . . 85
*Примеры заданий* № 6 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88
5.5. Степень с нулевым и целым отрицательным показателями . . . . . . . . . . . 94
5.6. Стандартный вид числа . . . . . . . . . . . . . . . 95
*Примеры заданий* № 7 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 96

**§ 6. Корень из числа** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
6.1. Квадратный корень. Арифметический квадратный корень . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 99
6.2. Свойства арифметического квадратного корня . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .100
6.3. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .102
6.4. Корень третьей степени . . . . . . . . . . . . . . .104
6.5. Запись корня с помощью степени с дробным показателем. . . . . . . . . . . . . . . .104
6.6. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел. . . . . . . . . . . . . . . .105

6.7. Понятие о множестве. Числовые множества. Множество действительных чисел . . . . . . . 107
*Примеры заданий* № 8 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 109

**§ 7. Уравнения с одной переменной** . . . . . . . . . . 114
7.1. Общие сведения об уравнениях с одной переменной . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 114
7.2. Линейное уравнение с одной переменной . . 117
7.3. Квадратное уравнение . . . . . . . . . . . . . . . . . 118
7.4. Теорема Виета . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 121
7.5. Квадратный трёхчлен. Разложение квадратного трёхчлена на множители . . . . 122
*Примеры заданий* № 9 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 124
7.6. Рациональные уравнения . . . . . . . . . . . . . . . 128
7.7. Метод замены переменной . . . . . . . . . . . . . . 129
*Примеры заданий* № 10 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 131

**§ 8. Функции** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 134
8.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции . . . . . . . . . . . 134
8.2. Способы задания функции . . . . . . . . . . . . . . 135
8.3. График функции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 137
8.4. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции . . . . . . . . 139
8.5. Чтение графиков функций, отображающих реальные процессы . . . . . . . 142
8.6. Линейная функция и её свойства. Прямая пропорциональность . . . . . . . . . . . . 144
8.7. Обратная пропорциональная зависимость. Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, и её свойства . . . 147
*Примеры заданий* № 11 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 149

8.8. Квадратичная функция и её свойства . . . . . 164
8.9. Функция $y = \sqrt{x}$ и её свойства . . . . . . . . . 169
8.10. График функции $y = \sqrt[3]{x}$ . . . . . . . . . . . . 170
8.11. Функция $y = |x|$ и её свойства . . . . . . . . . . 170
8.12. Решение уравнений графическим методом . . . . . . . . . . . . . . . . . . 171
*Примеры заданий* № 12 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 173

**§ 9. Уравнения с двумя переменными** . . . . . . . . 184
9.1. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 184
9.2. Системы уравнений с двумя переменными. Решение систем уравнений графическим методом . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 186
9.3. Методы решения систем двух уравнений с двумя переменными . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 190
*Примеры заданий* № 13 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 194

**§ 10. Текстовые задачи** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 199
10.1. Решение текстовых задач с помощью уравнений . . . . . . . . . . . . . . . . . 199
*Примеры заданий* № 14 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 202
10.2. Решение текстовых задач с помощью систем уравнений. . . . . . . . . . . 206
*Примеры заданий* № 15 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 209
10.3. Решение текстовых задач арифметическим способом . . . . . . . . . . . . 211
*Примеры заданий* № 16 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 213

**§ 11. Неравенства**. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 216
11.1. Числовые неравенства и их свойства. . . . . 216
11.2. Оценка значений числовых выражений с помощью свойств числовых неравенств . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 218

11.3. Общие сведения о неравенствах
с одной переменной . . . . . . . . . . . . . . . . . . 220
11.4. Числовые промежутки . . . . . . . . . . . . . . . . 222
11.5. Линейные неравенства
с одной переменной.
Системы линейных неравенств . . . . . . . . . 223
11.6. Квадратные неравенства . . . . . . . . . . . . . . . 226
*Примеры заданий* № 17 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 228

**§ 12. Числовые последовательности** . . . . . . . . . 234
12.1. Понятие последовательности . . . . . . . . . . . 234
12.2. Способы задания последовательности . . . . 235
12.3. Арифметическая прогрессия . . . . . . . . . . . 238
12.4. Сумма $n$ первых членов
арифметической прогрессии . . . . . . . . . . . . . 239
12.5. Геометрическая прогрессия.
Формула сложных процентов . . . . . . . . . . 240
12.6. Сумма $n$ первых членов
геометрической прогрессии . . . . . . . . . . . . 244
12.7. Сумма бесконечной геометрической
прогрессии, модуль знаменателя которой
меньше единицы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 244
*Примеры заданий* № 18 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 245

**§ 13. Элементы комбинаторики, теории
вероятностей, описательной статистики** . . 249
13.1. Комбинаторные задачи.
Перебор вариантов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 249
13.2. Комбинаторные правила суммы
и произведения . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 251
13.3. Представление данных в виде таблиц,
диаграмм, графиков . . . . . . . . . . . . . . . . . . 253
13.4. Статистика.
Статистические характеристики . . . . . . . . 255
13.5. Частота и вероятность случайного
события . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 257

13.6. Достоверные и невозможные события. Равновозможные события. Классическое определение вероятности . . . . . . . . . . . . . . 259
13.7. Представление о геометрической вероятности . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 261
*Примеры заданий* № 19 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 263

## ГЛАВА II
## ГЕОМЕТРИЯ

**§ 14. Простейшие геометрические фигуры и их свойства** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 273
14.1. Прямая, луч, отрезок. Измерение отрезков . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 273
14.2. Угол. Измерение углов . . . . . . . . . . . . . . . . . 275
14.3. Смежные и вертикальные углы . . . . . . . . . 277
14.4. Перпендикулярные прямые. Угол между пересекающимися прямыми. Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до прямой . . . . . . . . . 277
*Примеры заданий* № 20 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 279
**§ 15. Параллельные прямые** . . . . . . . . . . . . . . . . . 282
15.1. Признаки параллельности прямых . . . . . . 282
15.2. Свойства параллельных прямых . . . . . . . . 283
*Примеры заданий* № 21 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 285
**§ 16. Треугольник** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 287
16.1. Элементы треугольника. Равные треугольники . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 287
16.2. Виды треугольников . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 290
16.3. Признаки равенства треугольников . . . . . 291

16.4. Свойства равнобедренного треугольника . . . 292
16.5. Признаки равнобедренного треугольника. . . 293
16.6. Сумма углов треугольника. Свойство внешнего угла треугольника . . . . . . . . . . . 295
16.7. Неравенство треугольника. Зависимость между величинами сторон и углов треугольника . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 297
16.8. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойства прямоугольного треугольника . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 298
16.9. Терема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках . . . . . . . . . . 301
16.10. Средняя линия треугольника . . . . . . . . . . 302
16.11. Подобные треугольники . . . . . . . . . . . . . . 303
16.12. Признаки подобия треугольников . . . . . . 305
*Примеры заданий* № 22 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 308
16.13. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике . . . . . . . . 314
16.14. Теорема Пифагора . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 314
16.15. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 315
16.16. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180° . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 318
16.17. Теорема косинусов . . . . . . . . . . . . . . . . . . 321
16.18. Теорема синусов . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 322
*Примеры заданий* № 23 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 323
**§ 17. Окружность и круг** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 328
17.1. Понятие о геометрическом месте точек. Примеры ГМТ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 328
17.2. Окружность и круг, их элементы . . . . . . . 329
17.3. Свойства элементов окружности . . . . . . . . 331
17.4. Касательная и секущая к окружности . . . 332

**17.5.** Взаимное расположение двух окружностей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 334
**17.6.** Окружность, описанная около треугольника . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 335
**17.7.** Окружность, вписанная в треугольник . . . 337
**17.8.** Центральные и вписанные углы. Градусная мера дуги окружности . . . . . . . 339
**17.9.** Длина окружности . . . . . . . . . . . . . . . . . 341
*Примеры заданий* № 24 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 342

**§ 18. Многоугольник** . . . . . . . . . . . . . . . . . . 349
**18.1.** Четырёхугольник и его элементы . . . . . . . 349
**18.2.** Параллелограмм и его свойства . . . . . . . . . 351
**18.3.** Признаки параллелограмма . . . . . . . . . . . . 353
**18.4.** Прямоугольник, ромб, квадрат . . . . . . . . . 355
*Примеры заданий* № 25 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 356
**18.5.** Трапеция. Средняя линия трапеции . . . . . 361
**18.6.** Четырёхугольник, вписанный в окружность . . . . . . . . . . . . . . . 364
**18.7.** Четырёхугольник, описанный около окружности . . . . . . . . . . . 365
**18.8.** Сумма углов выпуклого многоугольника . . . 365
**18.9.** Правильные многоугольники. . . . . . . . . . . 366
*Примеры заданий* № 26 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 368

**§ 19. Площадь и объём** . . . . . . . . . . . . . . . . . 374
**19.1.** Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника . . . . . . . . . . . . . 374
**19.2.** Площадь параллелограмма и трапеции. . . 376
**19.3.** Формулы для нахождения площади треугольника . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 377
**19.4.** Площадь круга. Площадь сектора . . . . . . . 379
**19.5.** Формулы объёмов прямоугольного параллелепипеда, куба и шара. . . . . . . . . . 380
*Примеры заданий* № 27 . . . . . . . . . . . . . . . . . . 381

**§ 20. Декартовые координаты на плоскости** . . . 388
20.1. Координатная плоскость . . . . . . . . . . . . . . . 388
20.2. Формула расстояния между двумя точками. Координаты середины отрезка . . 390
20.3. Уравнение фигуры. Уравнение окружности . . . . . . . . . . . . . . . . 391
20.4. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом . . . . . . 393
20.5. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными . . . . . . . . . . . . . 395
*Примеры заданий* № 28 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 396

**§ 21. Векторы на плоскости** . . . . . . . . . . . . . . . . 399
21.1. Понятие вектора. Модуль вектора. Коллинеарные векторы. Равные векторы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 399
21.2. Координаты вектора . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 402
21.3. Сложение и вычитание векторов . . . . . . . . 404
21.4. Умножение вектора на число . . . . . . . . . . . 407
21.5. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам . . . . . . . . . . . . . 408
21.6. Скалярное произведение векторов . . . . . . . 410
*Примеры заданий* № 29 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 412

**§ 22. Геометрические преобразования** . . . . . . . . 416
22.1. Движение фигуры. Параллельный перенос . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 416
22.2. Осевая симметрия . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 418
22.3. Центральная симметрия . . . . . . . . . . . . . . . . 420
22.4. Поворот . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 423
22.5. Гомотетия. Подобие фигур . . . . . . . . . . . . 425
*Примеры заданий* № 30 . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 428

**Ответы к примерам заданий** . . . . . . . . . . . . . . . . 434

# ВВЕДЕНИЕ

На основной государственный экзамен (ОГЭ) по математике выносятся темы, рассматриваемые в курсах математики 5–6 классов, алгебры и геометрии 7–9 классов. Основой подготовки к ОГЭ является организация систематического повторения материала, изученного в 5–9 классах. Существует целый ряд способов реализации этой задачи. Например, можно использовать школьные учебники. Неудобства такого подхода очевидны: во-первых, надо иметь под рукой все школьные учебники по математике соответствующих этапов её изучения; во-вторых, поиск необходимого материала может привести к немалой потере времени. Гораздо удобней использовать пособие, в котором в краткой форме изложены базовые факты: определения, теоремы, формулы, свойства математических объектов и т. п. Именно такую книгу вы держите в руках. Она представляет собой справочник для подготовки к ОГЭ по математике.

Это пособие содержит не только теоретический материал, необходимый для решения вариантов ОГЭ, но и значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач.

Данный справочник выполняет также и свою традиционную роль — позволяет быстро найти нужную информацию: какими свойствами обладает степень с целым показателем, чему равна сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии, как найти дробь от числа, по какой формуле можно вычислить площадь трапеции и т. п.

Справочник состоит из двух глав. Первая глава «Арифметика. Алгебра» соответствует содержанию курсов математики 5–6 классов и алгебры 7–9 классов основной школы, вторая глава «Геометрия» — содержанию курса геометрии 7–9 классов. Каждая из глав разбита на параграфы. Их содержание отвечает кодификатору, на основании которого формируются задания для проведения ОГЭ по математике.

Понятно, что для успешного написания ОГЭ необходимо уметь решать задачи. Поэтому в справочник включён обширный дидактический материал. Каждый параграф содержит одну или две (в зависимости от объёма материала) проверочные работы в рубрике «Примеры заданий». Такое название рубрики связано с тем, что большинство представленных в ней задач аналогичны или близки по содержанию и форме к заданиям, предлагавшимся в разные годы на ОГЭ по математике.

Большинство проверочных работ состоит из двух частей. Задания второй части более сложные. Поэтому советуем приступать к их решению после того, как будут выполнены задания первой части.

Некоторые задания первой части представляют собой задачи, решение которых заключается в выборе одного правильного ответа из четырёх предложенных. Для таких задач в рубрике «Ответы к примерам заданий» указан номер правильного ответа.

Желаем вам успешной сдачи основного государственного экзамена по математике.

# ГЛАВА I

# АРИФМЕТИКА. АЛГЕБРА

# § 1. Натуральные числа

## 1.1. Десятичная запись натуральных чисел

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 и т. д., используемые при счёте предметов, называют **натуральными**.

Все натуральные числа, записанные в порядке возрастания, образуют **ряд натуральных чисел** (или натуральный ряд). Первым числом натурального ряда является число 1, вторым — число 2, третьим — число 3 и т. д.

В натуральном ряде за каждым числом следует ещё одно число, большее предыдущего на единицу. Поэтому в натуральном ряде нет последнего числа. Следовательно, среди натуральных чисел есть наименьшее число — это число 1, но нет наибольшего.

Натуральные числа записывают с помощью специальных знаков, которые называют **цифрами**. Этих цифр десять:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

В записи числа в зависимости от места, занимаемого цифрой, она может обозначать разные числа. Например, в числе 172 цифра 7 обозначает число семьдесят, а в числе 7549 — обозначает число семь тысяч.

Место, занимаемое цифрой в записи числа, называют **разрядом**.

Если считать справа налево, то первое место в записи числа называют **разрядом единиц**, второе —

**разрядом десятков**, третье — **разрядом сотен** и т. д. Например, в числе 7049 имеем 9 единиц разряда единиц, 4 единицы разряда десятков, 0 единиц разряда сотен и 7 единиц разряда тысяч.

Запись натуральных чисел, которой мы пользуемся, называют **десятичной**. Такое название связано с тем, что десять единиц каждого разряда составляют одну единицу следующего старшего разряда.

## 1.2. Арифметические действия над натуральными числами. Степень с натуральным показателем

Если по двум данным числам по некоторому правилу определяют третье число, то этот процесс в математике называют **действием**.

Действия сложения, вычитания, умножения и деления называют **арифметическими действиями**.

В равенстве $a + b = c$ числа $a$ и $b$ называют **слагаемыми**, число $c$ и запись $a + b$ — **суммой**.

В равенстве $a - b = c$ число $a$ называют **уменьшаемым**, число $b$ — **вычитаемым**, число $c$ и запись $a - b$ — **разностью**.

В равенстве $a \cdot b = c$ числа $a$ и $b$ называют **множителями**, а число $c$ и запись $a \cdot b$ — **произведением**.

В равенстве $a : b = c$ число $a$ называют **делимым**, число $b$ — **делителем**, число $c$ и запись $a : b$ — **частным**.

Арифметические действия обладают следующими свойствами.

**1. Переместительное свойство сложения.** От перестановки слагаемых сумма не меняется:

$$a + b = b + a.$$

**2. Сочетательное свойство сложения.** Чтобы к сумме двух чисел прибавить третье число, можно к первому числу прибавить сумму второго и третьего чисел:

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

**3. Переместительное свойство умножения.** От перестановки множителей произведение не меняется:

$$ab=ba.$$

**4. Сочетательное свойство умножения.** Чтобы произведение двух чисел умножить на третье число, можно первое число умножить на произведение второго и третьего чисел:

$$(ab)c=a(bc).$$

**5. Распределительное свойство умножения относительно сложения.** Чтобы число умножить на сумму двух чисел, можно это число умножить на каждое слагаемое и полученные произведения сложить:

$$a(b+c)=ab+ac.$$

**Степенью** числа $a$ с натуральным показателем $n$, бóльшим 1, называют произведение $n$ множителей, каждый из которых равен $a$:

$$a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ множителей}},\text{ где } n>1.$$

Степенью числа $a$ с показателем 1 называют само это число:

$$a^1=a.$$

Например, $3^5=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=243$, $5^3=5\cdot5\cdot5=125$.

Вторую степень числа называют **квадратом числа**. Например, запись $a^2$ читают «$a$ в квадрате». Третью степень числа называют **кубом числа** и запись $a^3$ читают «$a$ в кубе».

Если в числовое выражение входит степень, то сначала выполняют возведение в степень, а потом — остальные действия.

Например, $5 \cdot 2^2 = 5 \cdot 4 = 20$, $5 + 2^2 = 5 + 4 = 9$.

Задача. Вычислите удобным способом:
1) $25 \cdot 867 \cdot 4$; 2) $329 \cdot 754 + 329 \cdot 246$; 3) $125 \cdot 24 \cdot 283$.

Решение. 1) Используем переместительное, а затем сочетательное свойства умножения:
$25 \cdot 867 \cdot 4 = 867 \cdot (25 \cdot 4) = 867 \cdot 100 = 86\,700$.
2) Имеем: $a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$. Тогда:
$329 \cdot 754 + 329 \cdot 246 = 329 \cdot (754 + 246) = 329 \times$
$\times 1000 = 329\,000$.
3) $125 \cdot 24 \cdot 283 = 125 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 283 = (125 \cdot 8) \cdot (3 \cdot 283) =$
$= 1000 \cdot 849 = 849\,000$.

## 1.3. Делимость натуральных чисел

Если натуральное число $a$ делится нацело на натуральное число $b$, то число $a$ называют **кратным числа** $b$, а число $b$ — **делителем числа** $a$.

Например, числа 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30 являются делителями числа 30, а число 30 является кратным каждого из этих чисел.

❶ Если каждое из натуральных чисел $a$ и $b$ делится нацело на число $k$, то и сумма $a + b$ также делится нацело на число $k$.

Например, каждое из чисел 21 и 36 делится нацело на 3. Тогда сумма чисел 21 и 36 также делится нацело на 3.

❶ Если число $a$ делится нацело на число $k$, а число $b$ не делится нацело на число $k$, то сумма $a + b$ также не делится нацело на число $k$.

Например, число 35 делится нацело на число 7, а число 17 на число 7 не делится нацело. Тогда сумма $35 + 17$ также не делится нацело на число 7.

З а д а ч а. Целые числа $x$ и $y$ таковы, что $(6x + 11y)$ делится нацело на 31. Докажите, что $(x + 7y)$ делится нацело на 31.

Р е ш е н и е. Запишем: $x + 7y = 31(x + 2y) - 5(6x + 11y)$. Из условия следует, что $5(6x + 11y)$ делится нацело на 31. Кроме того, $31(x + 2y)$ делится нацело на 31. Тогда рассматриваемая разность $31(x + 2y) - 5(6x + 11y)$ делится нацело на 31.

## 1.4. Признаки делимости

Цифры 0, 2, 4, 6, 8 называют **чётными**, а цифры 1, 3, 5, 7, 9 — **нечётными**.

**Признак делимости на 2.** Если запись натурального числа оканчивается чётной цифрой, то это число делится нацело на 2. Если запись натурального числа оканчивается нечётной цифрой, то это число не делится нацело на 2.

**Признак делимости на 10.** Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0, то это число делится нацело на 10. Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0, то это число не делится нацело на 10.

**Признак делимости на 5.** Если запись натурального числа оканчивается цифрой 0 или 5, то это число делится нацело на 5. Если запись натурального числа оканчивается любой цифрой, отличной от 0 или 5, то это число не делится нацело на 5.

**Признак делимости на 3.** Если сумма цифр числа делится нацело на 3, то и само число делится нацело на 3. Если сумма цифр числа не делится нацело на 3, то и само число не делится нацело на 3.

Например, число 7854 делится нацело на 3, так как сумма его цифр, равная 24, делится нацело на 3. Число 3749 не делится нацело на 3, так как сумма его цифр, равная 23, не делится нацело на 3.

**Признак делимости на 9.** Если сумма цифр числа делится нацело на 9, то и само число делится нацело на 9. Если сумма цифр числа не делится нацело на 9, то и само число не делится нацело на 9.

Задача 1. Докажите, что значение выражения $10^{10} + 2$ делится нацело на 3.

Решение. Значение данного выражения имеет вид 100...02. Сумма цифр этого числа равна 3. Поэтому оно делится нацело на 3.

Задача 2. Запись десятизначного натурального числа состоит из десяти различных цифр. Может ли это число быть степенью числа 2?

Решение. Сумма цифр данного числа равна 45. Следовательно, это число кратно 9. Однако ни одна степень числа 2 не делится нацело на 9. Значит, данное число не может быть степенью числа 2.

## 1.5. Простые и составные числа

Натуральное число называют **простым**, если оно имеет только два натуральных делителя: единицу и само это число.

Например, числа 2, 7, 11, 13 являются простыми.

Число 2 — наименьшее простое число. Это единственное чётное простое число.

Простых чисел бесконечно много.

Натуральное число, имеющее больше двух натуральных делителей, называют **составным**.

Например, числа 6, 15, 49, 1000 являются составными.

Поскольку число 1 имеет только один делитель, его не относят ни к простым, ни к составным.

❶ Любое составное число можно представить в виде произведения простых чисел, т. е. разложить на простые множители.

Например, $10 = 2 \cdot 5$; $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$; $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$; $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$; $200 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$.

❶ Любые два разложения данного числа на простые множители могут отличаться только порядком следования множителей.

Обычно произведение одинаковых множителей в разложении числа на простые множители заменяют степенью. Например, пишут: $18 = 2 \cdot 3^2$; $80 = 2^4 \cdot 5$; $81 = 3^4$; $200 = 2^3 \cdot 5^2$.

З а д а ч а. Разложите на простые множители число 3150.

Р е ш е н и е. 1) 3150 кратно 2, $3150 : 2 = 1575$;
2) 1575 не кратно 2, но кратно 3, $1575 : 3 = 525$;
3) 525 кратно 3, $525 : 3 = 175$;
4) 175 не кратно 3, но кратно 5, $175 : 5 = 35$;
5) 35 кратно 5, $35 : 5 = 7$.

Следовательно, $3150 = 2 \cdot 1575 = 2 \cdot 3 \cdot 525 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 175 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 35 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Результат вычислений можно представить в виде следующей таблицы:

| | |
|---:|:---|
| 3150 | 2 |
| 1575 | 3 |
| 525 | 3 |
| 175 | 5 |
| 35 | 5 |
| 7 | 7 |
| 1 | |

## 1.6. Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное

Наибольшее натуральное число, на которое делится нацело каждое из двух данных натуральных чисел, называют **наибольшим общим делителем** этих чисел.

Наибольший общий делитель чисел $a$ и $b$ обозначают так: НОД $(a; b)$.

Например, НОД $(28; 42) = 14$.

З а д а ч а 1. Найдите НОД (180; 840).

Р е ш е н и е. Представим разложение данных чисел на простые множители в виде произведения степеней. Имеем: $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, $840 = 2^3 \cdot 3^1 \times$ $\times\, 5^1 \cdot 7^1$.

Будем искать НОД по такому правилу.

1) Определим степени, основания которых являются общими простыми делителями данных чисел (в рассматриваемом примере это основания 2, 3, 5).

2) Из каждой пары степеней с одинаковыми основаниями выберем степень с меньшим показателем (в рассматриваемом примере это $2^2$, $3^1$, $5^1$).

**3) Перемножим выбранные степени. Полученное произведение является искомым наибольшим общим делителем.**

Получаем: НОД $(180; 840) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$.

Если наибольший общий делитель двух натуральных чисел равен 1, то их называют **взаимно простыми**.

Например, числа 585 и 616 взаимно простые, поскольку НОД $(585; 616) = 1$.

Если число $a$ — делитель числа $b$, то НОД $(a; b) = a$. Например, НОД $(250; 3000) = 250$.

З а д а ч а 2. Из 156 жёлтых, 234 белых и 390 красных роз составляли букеты. Какое наибольшее количество одинаковых букетов можно составить, если необходимо использовать все цветы?

Р е ш е н и е. Поскольку букеты одинаковые, то роз одного цвета во всех букетах одинаковое количество. Тогда количество букетов является общим делителем чисел 156, 234 и 390. Количество букетов должно быть наибольшим, поэтому искомая величина равна НОД (156; 234; 390).

Имеем: $156 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13$, $234 = 2 \cdot 3^2 \cdot 13$, $390 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$. Отсюда НОД $(156; 234; 390) = 2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$.

О т в е т: 78 букетов.

Наименьшее натуральное число, которое делится нацело на каждое из двух данных натуральных чисел, называют **наименьшим общим кратным** этих чисел.

Наименьшее общее кратное чисел $a$ и $b$ обозначают так: НОК $(a; b)$.

Например, НОК $(4; 6) = 12$.

Задача 3. Найдите НОК (84; 90).

Решение. Имеем: $84 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 7^1$, $90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Будем искать НОК по такому правилу.

1) Выберем степени, основания которых встречаются только в одном из разложений (в рассматриваемом примере это $7^1$ и $5^1$).

2) Из каждой пары степеней с одинаковыми основаниями выберем степень с бо́льшим показателем (в рассматриваемом примере это $2^2$ и $3^2$).

3) Перемножим выбранные степени. Полученное произведение является искомым наименьшим общим кратным.

Получаем: НОК $(84; 90) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 1260$.

Если число $a$ — делитель числа $b$, то НОК $(a; b) = b$. Например, НОК $(250; 3000) = 3000$.

Наименьшее общее кратное взаимно простых чисел равно их произведению.

Например, НОК $(8; 15) = 120$.

## 1.7. Деление с остатком

Если натуральное число $a$ не делится нацело на натуральное число $b$, то можно выполнить **деление с остатком.** Например, при делении числа 47 на 5 в частном получаем 9, а в остатке 2. Пишут: $47 : 5 = 9$ (ост 2) или $47 = 5 \cdot 9 + 2$, и говорят, что число 47 при делении на 5 даёт в остатке число 2.

❶ Для любых натуральных чисел $a$ и $b$ существует единственная пара целых неотрицательных чисел $q$ и $r$ таких, что $a = bq + r$, где $0 \le r < b$.

Число $r$ называют **остатком при делении числа $a$ на число $b$.** Если $r \ne 0$, то число $q$ называют **неполным частным при делении числа $a$ на число $b$.**

Например:

для чисел $a = 92$, $b = 17$ существует пара $q = 5$ и $r = 7$ такая, что $92 = 17 \cdot 5 + 7$;

для чисел $a = 2$, $b = 7$ существует пара $q = 0$ и $r = 2$ такая, что $2 = 7 \cdot 0 + 2$.

Остаток всегда меньше делителя. Например, если делитель равен 3, то остаток может принимать только такие значения: 0, 1 и 2. Отсюда следует, что любое натуральное число $x$ может быть представлено только одним из трёх равенств: $x = 3n$, $x = 3n + 1$, $x = 3n + 2$, где $n$ —натуральное число или 0.

Задача. Известно, что при делении натурального числа $m$ на 18 остаток равен 11. Найдите остаток при делении числа $m$: 1) на 2; 2) на 3; 3) на 6.

Решение. Данное натуральное число $x$ можно представить в виде $x = 18m + 11$.

Имеем:

$x = 18m + 11 = 18m + 10 + 1 = 2(9m + 5) + 1 =$
$= 2t + 1$, где $t$ — натуральное число;

$x = 18m + 11 = 18m + 9 + 2 = 3(6m + 3) + 2 =$
$= 3p + 2$, где $p$ — натуральное число;

$x = 18m + 11 = 18m + 6 + 5 = 6(3m + 1) + 5 =$
$= 6s + 5$, где $s$ — натуральное число.

Следовательно, данное натуральное число при делении на 2 даёт в остатке 1, при делении на 3 даёт в остатке 2 и при делении на 6 даёт в остатке 5.

## Примеры заданий № 1

### Часть 1

1. На уроке физкультуры все 26 учеников класса построились в одну шеренгу. Известно, что Пётр

стоял четырнадцатым, считая слева направо, а Елена — двадцатой, считая справа налево. Сколько учеников стояло между Петром и Еленой?

2. На переменке ученики школы выстроились в очередь в буфет. Ольга стояла впереди Виктора, а между ними было 3 человека. Позади Ольги стояло 6 человек, а перед Виктором — 7 человек. Сколько всего учеников стояло в очереди?
3. Воспитанники детского сада шли парами на прогулку в парк. Полина насчитала перед собой 8 пар детей, а позади себя — 6 пар. Сколько всего детей шло на прогулку?
4. Дома на улице пронумерованы подряд числами от 1 до 25. Сколько раз цифра 2 встречается в нумерации?
5. Какую одну и ту же цифру надо приписать слева и справа к числу 25, чтобы полученное число было кратно 6?
6. Купили несколько ручек по 15 р. за каждую из них и 6 одинаковых тетрадей. Какое из данных чисел может выражать в рублях общую стоимость покупки?

   1) 190 2) 192 3) 193 4) 197
7. Какую цифру надо поставить вместо звёздочки в записи 5*2, чтобы полученное число делилось нацело на 3 и на 4?
8. Какое из данных чисел кратно числу 9?

   1) 998 799 3) 666 666
   2) 199 999 4) 100 009
9. Какую цифру надо поставить вместо звёздочки в записи 111*6, чтобы полученное число делилось нацело на 9 и на 4?
10. Какую цифру надо поставить вместо звёздочки в записи 2344*, чтобы полученное число было кратно 45?

**11.** Сколько простых чисел содержится среди чисел 1, 2, 5, 8, 9, 14, 19, 23, 31, 35, 37, 39, 42, 67, 78, 83, 91, 99?

**12.** Найдите наибольший общий делитель чисел 840 и 784.

**13.** Из 64 белых и 80 красных роз составляют букеты. Какое наибольшее количество одинаковых букетов можно составить, если необходимо использовать все цветы?

**14.** Из 280 мандаринов, 252 пачек печенья и 588 конфет приготовили одинаковые подарки для учеников класса. Сколько в классе учеников, если известно, что их больше 20?

**15.** В саду растут только яблони и вишни. Количество вишен относится к количеству яблонь как 5 : 6. Сколько деревьев растёт в саду, если их общее количество больше 90, но меньше 100?

**16.** В ящике лежат яблоки. Известно, что их можно разложить в 5 рядов, или в 8 рядов, или в 12 рядов так, что в каждом ряду будет поровну яблок. Какое наименьшее количество яблок может быть в этом ящике?

**17.** Какая из данных пар чисел является парой взаимно простых чисел?

| | |
|---|---|
| 1) 7 и 14 | 3) 14 и 35 |
| 2) 14 и 16 | 4) 14 и 27 |

**18.** Найдите наименьшее общее кратное чисел 30 и 100.

**19.** Найдите наименьшее общее кратное чисел 10, 16 и 28.

**20.** Какое наименьшее количество метров ткани должно быть в рулоне, чтобы его можно было продать без остатка отрезами по 8 м, или по 10 м, или по 12 м?

**21.** Два теплохода заходят в порт после каждого рейса. Первый теплоход выполняет рейс за 4 дня, а второй — за 6 дней. Однажды они встретились в порту в среду. Через сколько дней они опять встретятся в порту в среду?

**22.** Зелёный, жёлтый и красный цвета светофора горят последовательно соответственно 50 с, 5 с и 20 с. В некоторый момент времени загорелся зелёный свет. Какой свет будет гореть через 3 мин?

1) зелёный
2) жёлтый
3) красный
4) невозможно определить

**23.** На длинной ленте через каждые 8 см делают отметку красным карандашом, а через каждые 6 см — синим карандашом. На каком расстоянии (в сантиметрах) от начала ленты впервые совпадут красная и синяя отметки?

**24.** Чему равен остаток при делении числа 47 на 3?

**25.** Чему равен остаток при делении числа 1484 на 10?

**26.** Чему равен остаток при делении числа 972 на 9?

**27.** Известно, что при делении натурального числа $m$ на 20 остаток равен 7. Найдите остаток при делении числа $3m$ на 5.

**28.** Известно, что при делении натурального числа $m$ на 20 остаток равен 7. Найдите остаток при делении числа $3m$ на 12.

**29.** В каждом купе вагона поезда 4 места. В купе с каким номером едет пассажир, номер места которого 17?

**30.** В каждом подъезде на каждом этаже 9-этажного дома расположено по 8 квартир. Найдите номер этажа, на котором находится квартира № 173.

# § 2. Дроби

## 2.1. Обыкновенная дробь. Основное свойство дроби. Сравнение дробей

**Дробные числа** возникают, когда один предмет (яблоко, арбуз, торт, буханку хлеба, лист бумаги) или единицу измерения (метр, час, килограмм, градус) делят на несколько равных частей.

Половина, четверть, треть, одна сотая, полтора — это примеры дробных чисел.

Дробные числа можно записывать с помощью **обыкновенных дробей**.

Записи вида $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{17}{24}$ являются примерами обыкновенных дробей или короче — дробей.

Обыкновенные дроби записывают с помощью двух натуральных чисел и **черты дроби**.

Число, записанное над чертой, называют **числителем дроби**; число, записанное под чертой, называют **знаменателем дроби**.

Знаменатель дроби показывает, на сколько равных частей разделили нечто целое, а числитель — сколько таких частей взяли.

Дробь, у которой числитель меньше знаменателя, называют **правильной**.

Дробь, у которой числитель больше знаменателя или равен ему, называют **неправильной**.

Например, дроби $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{17}{584}$ — правильные; дроби $\frac{7}{5}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{31}{15}$ — неправильные.

Такие суммы, как $2+\frac{5}{7}$, $4+\frac{1}{5}$, принято записывать короче: $2+\frac{5}{7}=2\frac{5}{7}$, $4+\frac{1}{5}=4\frac{1}{5}$. Число $2\frac{5}{7}$ читают: «две целых пять седьмых».

Число $2\frac{5}{7}$ называют **смешанным числом**. В смешанном числе $2\frac{5}{7}$ натуральное число 2 называют **целой частью** смешанного числа, а дробь $\frac{5}{7}$ — его **дробной частью**. Дробная часть смешанного числа — это правильная дробь.

❗ Чтобы неправильную дробь, числитель которой нацело не делится на знаменатель, преобразовать в смешанное число, надо числитель разделить на знаменатель; полученное неполное частное записать как целую часть смешанного числа, а остаток — как числитель его дробной части.

Если числитель неправильной дроби делится нацело на знаменатель, то эта дробь равна натуральному числу.

Например, $\frac{29}{7} = 4\frac{1}{7}$, $\frac{67}{9} = 7\frac{4}{9}$, $\frac{17}{17} = 1$.

❗ Чтобы преобразовать смешанное число в неправильную дробь, надо целую часть числа умножить на знаменатель дробной части и к полученному произведению прибавить числитель дробной части; эту сумму записать как числитель неправильной дроби, а в знаменатель записать знаменатель дробной части смешанного числа.

Например, $5\frac{4}{9} = \frac{5 \cdot 9 + 4}{9} = \frac{49}{9}$.

❗ Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой числитель больше, а меньше та, у которой числитель меньше.

Например, $\frac{5}{9} > \frac{1}{9}$; $\frac{2}{17} < \frac{5}{17}$; $\frac{11}{7} > \frac{5}{7}$.

❶ Все правильные дроби меньше единицы, а неправильные — больше или равны единице.

❶ Каждая неправильная дробь больше любой правильной дроби, а каждая правильная дробь меньше любой неправильной дроби.

Следующее утверждение выражает **основное свойство дроби.**

❶ Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим дробь, равную данной:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}.$$

Если числитель и знаменатель дроби — натуральные числа, то деление числителя и знаменателя на их общий делитель, отличный от 1, называют **сокращением дроби.**

Например, равенство $\frac{35}{14} = \frac{5}{2}$ означает, что дробь $\frac{35}{14}$ сократили на 7.

Дробь, числитель и знаменатель которой — взаимно простые числа, называют **несократимой.**

Например, дробь $\frac{12}{25}$ является несократимой.

С помощью основного свойства дроби любые две дроби можно **привести к общему знаменателю.**

Например, приведём дроби $\frac{3}{4}$ и $\frac{5}{6}$ к общему знаменателю. Имеем: $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$ (здесь числитель и знаменатель дроби умножили на число 3, которое называют **дополнительным множителем**); $\frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10}{12}$ (дополнительный множитель 2).

❗ Чтобы привести дроби к **наименьшему общему знаменателю**, надо:

1) найти НОК знаменателей данных дробей;

2) найти дополнительные множители для каждой из дробей, разделив общий знаменатель на знаменатели данных дробей;

3) умножить числитель и знаменатель каждой дроби на её дополнительный множитель.

Например,

$$\frac{7}{8}^{\backslash 3} = \frac{21}{24}, \frac{11}{12}^{\backslash 2} = \frac{22}{24}.$$

❗ Чтобы сравнить две дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, а затем применить правило сравнения дробей с равными знаменателями.

Например, поскольку $\frac{21}{24} < \frac{22}{24}$, то $\frac{7}{8} < \frac{11}{12}$.

## 2.2. Арифметические действия с обыкновенными дробями

Следующие равенства выражают правила сложения и вычитания дробей с одинаковыми знаменателями:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

❗ Чтобы сложить (вычесть) две дроби с разными знаменателями, надо привести их к общему знаменателю, а затем применить правило сложения (вычитания) дробей с равными знаменателями.

Например, $\frac{3}{8}^{\backslash 3} + \frac{1}{6}^{\backslash 4} = \frac{9}{24} + \frac{4}{24} = \frac{9+4}{24} = \frac{13}{24}$.

❶ Произведением двух дробей является дробь, числитель которой равен произведению числителей, а знаменатель — произведению знаменателей:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Например, $\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{21}$.

Два числа, произведение которых равно 1, называют **взаимно обратными.**

Например, числа $\frac{4}{9}$ и $\frac{9}{4}$ являются взаимно обратными.

❶ Чтобы разделить одну дробь на другую, надо делимое умножить на число, обратное делителю:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Например, $\frac{6}{35} : \frac{2}{5} = \frac{6}{35} \cdot \frac{5}{2} = \frac{3}{7}$.

З а д а ч а. Выполните действие: $5\frac{1}{6} - 2\frac{4}{9}$.

Р е ш е н и е. $5\frac{1}{6} - 2\frac{4}{9} = 5\frac{3}{18} - 2\frac{8}{18} = 4\frac{21}{18} - 2\frac{8}{18} = 2\frac{13}{18}$.

## 2.3. Десятичная дробь. Сравнение десятичных дробей

Для дробей, знаменатели которых являются степенями числа 10, используют «одноэтажную» форму записи.

Например, $\frac{7}{10} = 0{,}7$ (запись 0,7 читают: «нуль целых семь десятых»); $\frac{12}{100} = 0{,}12$ (запись 0,12 читают: «ноль целых двенадцать сотых»); $2\frac{973}{1000} = 2{,}973$ (запись 2,973 читают: «две целых девятьсот семьдесят три тысячных»); $\frac{43}{10} = 4\frac{3}{10} = 4{,}3$ (запись 4,3 читают: «четыре целых три десятых»); $\frac{3}{100} = 0{,}03$ (запись 0,03 читают: «ноль целых три сотых»); $2\frac{508}{10\,000} = 2{,}0508$ (запись 2,0508 читают: «две целых пятьсот восемь десятитысячных»).

Такую форму записи дробей называют **десятичной**. Дроби, записанные в такой форме, называют **десятичными дробями**.

В записи десятичной дроби запятая отделяет целую часть числа от дробной. Считают, что целая часть правильной дроби равна 0. Запись дробной части десятичной дроби содержит столько цифр, сколько нулей в записи знаменателя соответствующей обыкновенной дроби.

Например, $6\frac{3}{1000} = 6{,}003$; $\frac{17}{1000} = 0{,}017$; $3\frac{527}{1000} = 3{,}527$.

В десятичной записи натурального числа единица младшего разряда в 10 раз меньше единицы соседнего старшего разряда. Таким же свойством обладает и запись десятичных дробей. Поэтому сразу после запятой идёт **разряд десятых**, далее — **разряд сотых**, затем — **разряд тысячных** и т. д.

❶ Если к десятичной дроби справа приписать любое количество нулей, то получится дробь, равная данной.

Например, $0{,}3 = 0{,}30 = 0{,}300$.

❶ Значение дроби, оканчивающейся нулями, не изменится, если последние нули в её записи отбросить.

❶ Из двух десятичных дробей больше та, у которой целая часть больше.

❶ Чтобы сравнить две десятичные дроби с равными целыми частями и различным количеством цифр после запятой, надо с помощью приписывания нулей справа уравнять количество цифр в дробных частях, после чего сравнить полученные дроби.

З а д а ч а. Запишите несколько чисел, каждое из которых больше 2,35, но меньше 2,36.
Р е ш е н и е. Имеем: $2{,}35 = 2{,}350$; $2{,}36 = 2{,}360$. Следовательно, числами, удовлетворяющими условию, будут, например: 2,351; 2,352; 2,353. Учитывая, что $2{,}35 = 2{,}3500$ и $2{,}36 = 2{,}3600$, можем указать ещё несколько искомых чисел: 2,3501; 2,3576; 2,3598 и т. д.

## 2.4. Арифметические действия с десятичными дробями

❶ Чтобы сложить две десятичные дроби, надо уравнять в слагаемых (если в этом есть необходимость) количество цифр после запятой, записать слагаемые друг под другом так, чтобы разряд оказался под соответствующим разрядом, запятая под запятой, сложить полученные числа так, как складывают натуральные числа, а затем поставить в полученной сумме запятую под запятыми в слагаемых.

$$
\begin{array}{r}
+\begin{array}{r} 7,60 \\ 11,35 \end{array} \\
\hline
18,95
\end{array}
$$

Чтобы из одной десятичной дроби вычесть другую, надо уравнять в уменьшаемом и вычитаемом (если в этом есть необходимость) количество цифр после запятой, записать вычитаемое под уменьшаемым так, чтобы разряд оказался под соответствующим разрядом, запятая под запятой, произвести вычитание так, как вычитают натуральные числа, а затем поставить в полученной разности запятую под запятыми в уменьшаемом и вычитаемом.

$$
\begin{array}{r}
-\begin{array}{r} 0,800 \\ 0,593 \end{array} \\
\hline
0,207
\end{array}
$$

Чтобы перемножить две десятичные дроби, надо перемножить их как натуральные числа, не обращая внимания на запятые, а в полученном произведении отделить запятой справа столько цифр, сколько их было после запятых в обоих множителях вместе.

$$
\begin{array}{r}
\times\begin{array}{r} 1,23 \\ 4,5 \end{array} \\
\hline
615 \\
492\phantom{0} \\
\hline
5,535
\end{array}
$$

❶ Чтобы разделить десятичную дробь на десятичную, надо перенести в делимом и в делителе запятые вправо на столько цифр, сколько их содержится после запятой в делителе, и выполнить деление на натуральное число.

Например, $0{,}4352 : 0{,}17 = 43{,}52 : 17$. Теперь выполним деление «уголком». При этом запятую в частном следует поставить непосредственно перед тем, как будет использована первая цифра после запятой в делимом:

$$\begin{array}{r|l} -\,43{,}52 & 17 \\ \cline{2-2} 34\phantom{,52} & 2{,}56 \\ \cline{1-1} -\,95\phantom{2} & \\ 85\phantom{2} & \\ \cline{1-1} -\,102 & \\ 102 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

## 2.5. Нахождение части от целого и целого по его части

Рассмотрим такую задачу. На приусадебном участке растёт 36 деревьев. Из них $\frac{7}{9}$ составляют вишни. Сколько вишен растёт на участке?

Здесь надо найти число, если известно, что оно составляет $\frac{7}{9}$ от числа 36. Подобные задачи называют **задачами на нахождение дроби от числа (части от целого).**

❶ Чтобы найти дробь от числа, можно число умножить на эту дробь.

Имеем: $36 \cdot \frac{7}{9} = 4 \cdot 7 = 28$. Следовательно, в саду растёт 28 вишен.

Рассмотрим такую задачу. На приусадебном участке растёт 28 вишен, что составляет $\frac{7}{9}$ количества всех деревьев, растущих в саду. Сколько всего деревьев растёт на участке?

Здесь надо найти число, если известно, что $\frac{7}{9}$ этого числа равно 28. Подобные задачи называют **задачами на нахождение числа по заданному значению его дроби (целого по его части).**

❗ Чтобы найти число по заданному значению его дроби, можно данное значение разделить на эту дробь.

Имеем: $28 : \frac{7}{9} = 4 \cdot 9 = 36$. Следовательно, в саду растёт 36 деревьев.

## 2.6. Представление обыкновенной дроби в виде десятичной. Бесконечные периодические десятичные дроби

❗ Несократимую дробь $\frac{a}{b}$ можно преобразовать в конечную десятичную только тогда, когда разложение знаменателя $b$ на простые множители не содержит чисел, отличных от 2 и 5. Чтобы преобразовать обыкновенную дробь в десятичную, можно её числитель разделить на знаменатель.

Преобразуем, например, дробь $\frac{3}{16}$ в десятичную. Имеем: $\frac{3}{16} = 3 : 16$. Теперь выполним деление «уголком»:

$$\begin{array}{r|l}
3 & 16 \\ \cline{2-2}
-30 & 0{,}1875 \\
16 & \\ \hline
-140 & \\
128 & \\ \hline
-120 & \\
112 & \\ \hline
-80 & \\
80 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

В силу сформулированного выше свойства дробь $\frac{5}{11}$ преобразовать в конечную десятичную нельзя. Выполним деление «уголком» числа 5 на число 11:

$$\begin{array}{r|l}
5 & 11 \\ \cline{2-2}
-50 & 0{,}4545\ \ldots \\
44 & \\ \hline
-60 & \\
55 & \\ \hline
-50 & \\
44 & \\ \hline
-60 & \\
55 & \\ \hline
5 &
\end{array}$$

Это деление можно продолжать бесконечно. Частное имеет вид 0,454545... . В этой записи точки означают, что цифры 4 и 5, стоящие рядом, **периодически** повторяются бесконечно много раз.

Число 0,454545... называют **бесконечной периодической десятичной дробью**, или периодической дробью.

Полученную периодическую дробь принято записывать так: 0,(45), и читать: «нуль целых и сорок пять в периоде». Группу цифр (45) называют **периодом** дроби 0,(45).

Можно записать: $\frac{5}{11} = 0{,}454545 \ldots = 0{,}(45)$.

❶ При делении натурального числа на натуральное число можно получить один из трёх результатов: натуральное число, конечную десятичную дробь или бесконечную периодическую десятичную дробь.

## 2.7. Округление чисел

❶ Для того чтобы десятичную дробь округлить до единиц, десятых, сотых и т. д., надо все следующие за этим разрядом цифры отбросить; если при этом первая из отбрасываемых цифр равна 0, 1, 2, 3 или 4, то последняя из оставшихся цифр не изменяется; если же первая из отбрасываемых цифр равна 5, 6, 7, 8 или 9, то последняя из оставшихся цифр увеличивается на единицу.

Например:

$0{,}12 \approx 0{,}1$ (округление до десятых);

$3{,}85741 \approx 3{,}86$ (округление до сотых);

$1{,}004483 \approx 1{,}004$ (округление до тысячных).

❶ При округлении натуральных чисел до какого-либо разряда вместо всех следующих за ним цифр младших разрядов пишут нули. При этом если первая из цифр, следовавших за этим разрядом, была равной 0, 1, 2, 3 или 4, то цифра в данном разряде не изменяется; если первая из цифр, следовавших за этим разрядом, была равной 5, 6, 7, 8 или 9, то цифра в данном разряде увеличивается на единицу.

Например:

$234 \approx 230$ (округление до десятков);

$8763 \approx 8800$ (округление до сотен);

$984 \approx 1000$ (округление до сотен);

$965\,348 \approx 970\,000$ (округление до десятков тысяч).

Округлять можно и бесконечные периодические десятичные дроби, «отсекая» в определенном месте «бесконечный хвост».

Например:

$0,(6) = 0,6|66... \approx 0,7$ (округление до десятых);

$1,3(4) = 1,34|44... \approx 1,34$ (округление до сотых);

$2,(17) = 2,171|717... \approx 2,172$ (округление до тысячных).

## Примеры заданий № 2

### Часть 1

1. Деревянное бревно распилили на два бревна, длины которых относятся как 3 : 7. Какую часть исходного бревна составляет меньшее из полученных брёвен?

2. Укажите неверное равенство.

   1) $\frac{3}{8} = \frac{9}{24}$ 3) $\frac{42}{49} = \frac{6}{7}$

   2) $\frac{72}{90} = \frac{8}{9}$ 4) $\frac{4}{5} = \frac{16}{20}$

3. Укажите среди данных дробей наибольшую.

   1) $\frac{7}{8}$ 2) $\frac{66}{77}$ 3) $\frac{555}{666}$ 4) $\frac{4444}{5555}$

4. Какое наибольшее натуральное число удовлетворяет неравенству $n < \frac{94}{15}$?

5. В корзинке лежали яблоки и груши. Съели половину яблок и треть груш. Какое из утверждений верно?

   1) осталась половина фруктов
   2) осталась треть фруктов
   3) осталось больше половины фруктов
   4) осталось меньше половины фруктов

**6.** Укажите верное неравенство.

1) $\frac{17}{24} < \frac{2}{3}$ 2) $0,(6) > \frac{3}{7}$ 3) $\frac{3}{4} > \frac{5}{6}$ 4) $\frac{19}{21} > \frac{3}{2}$

**7.** Найдите значение выражения $\left(2\frac{1}{4} + 3\frac{2}{3}\right) \cdot 18$.

**8.** Найдите значение выражения $\left(\frac{13}{19} - \frac{15}{38}\right) \cdot 9\frac{1}{2}$.

**9.** Найдите значение выражения $4 \cdot 1\frac{1}{2} + 1\frac{23}{25} : \frac{3}{20}$.

**10.** Вычислите значение выражения

$\left(6\frac{2}{7} - 3\frac{1}{3} + 1\frac{1}{9} - 2\frac{10}{21}\right) \cdot 2\frac{13}{25}$.

**11.** Бассейн можно наполнить за 3 ч, а слить из него воду — за 5 ч. Сколько часов потребуется на наполнение бассейна, если не закрывать сливное отверстие?

**12.** Расстояние между двумя городами легковой автомобиль проезжает за 2 ч, а грузовой — за 3 ч. Через сколько часов после начала движения они встретятся, если будут выезжать одновременно из этих городов навстречу друг другу?

**13.** Первый рабочий изготавливает одну деталь за 2 мин, а второй рабочий такую же деталь — за 3 мин. За сколько минут они вместе изготовят 30 таких деталей?

**14.** Теплоход проходит расстояние между двумя пристанями по течению реки за 4 ч, а против течения — за 6 ч. За сколько часов проплывёт это расстояние плот?

**15.** В таблице приведены нормативы по бегу на 60 м для учениц 9 класса. Оцените результат ученицы, пробежавшей эту дистанцию за 9,65 с.

| Оценка | «5» | «4» | «3» |
|---|---|---|---|
| Время, с | 9,4 | 10,0 | 10,5 |

1) оценка «5»
3) оценка «3»
2) оценка «4»
4) норматив не выполнен

16. Чему равна половина одной сотой?

17. Найдите значение выражения $\frac{4}{100} + \frac{7}{1000}$.

18. Чему равна сумма 3,4 т + 700 кг? Ответ запишите в тоннах.

19. Масса полного ведра с водой равна 12,5 кг. Когда из ведра вылили половину воды, то масса ведра с оставшейся водой стала равной 6,5 кг. Сколько килограммов составляет масса пустого ведра?

20. Какое наименьшее количество банок ёмкостью 0,3 л требуется, чтобы разлить в них 5 л варенья?

21. Найдите значение выражения $\frac{27}{22,5 \cdot 0,6}$.

22. Найдите значение выражения $\frac{0,8}{1-\frac{1}{9}}$.

23. Найдите значение выражения $0,2432 : 0,4 - 0,18 \cdot 0,02$.

24. Грузовой автомобиль за один рейс может перевезти не более 1,5 т груза. Масса каждого контейнера, в который упакован груз, — 400 кг. Какое наименьшее количество автомобилей необходимо, чтобы перевезти 5,6 т груза?

25. У мальчика было 56 тетрадей, из них $\frac{4}{7}$ составляли тетради в клеточку. Сколько у него было тетрадей в клеточку?

**26.** Яблони составляют $\frac{7}{24}$ деревьев, растущих в саду, вишни — $\frac{9}{17}$ оставшихся деревьев, а груши — остальные. Каких деревьев в саду наибольшее количество?

1) яблонь
2) вишен
3) груш
4) определить невозможно

**27.** Пётр поймал 6 рыб и ещё $\frac{3}{5}$ улова. Сколько рыб поймал Пётр?

**28.** Масса детали на $\frac{5}{6}$ кг больше $\frac{5}{6}$ своей массы. Сколько килограммов составляет масса детали?

**29.** В бочку налили 28 л воды, что составляет $\frac{4}{7}$ её объёма. Сколько литров воды помещается в бочку?

**30.** За первый день трёхдневной гонки велосипедисты проехали $\frac{4}{15}$ всего маршрута, за второй — $\frac{2}{5}$ всего маршрута, а за третий — 90 км. Сколько километров проехали велосипедисты за 3 дня?

**31.** За 2 дня рабочий изготовил некоторое количество деталей. За первый день он изготовил $\frac{9}{16}$ всех деталей, а за второй — на 9 деталей меньше, чем за первый. Сколько деталей изготовил рабочий за 2 дня?

**32.** Округлите число 18,486 до десятых.

**33.** Высоту ящика измерили в миллиметрах. Округлив результат до сантиметров, получили 15 см. Какой может быть высота ящика в миллиметрах?

1) 156 мм 2) 146 мм 3) 155 мм 4) 144 мм

**34.** Какую из данных дробей нельзя записать в виде конечной десятичной дроби?

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{6}$ 4) $\frac{1}{16}$

**35.** Какое из следующих чисел заключено между числами $\frac{15}{13}$ и $\frac{14}{11}$?

1) 1,1 2) 1,2 3) 1,3 4) 1,4

### 2.8. Проценты

На практике люди часто пользуются сотыми частями величин. Например, сотая часть гектара — 1 ар (1 сотка), сотая часть века — 1 год, сотая часть рубля — 1 копейка, сотая часть метра — 1 сантиметр.

Для сотой части величины или числа придумали специальное название — один **процент** (от латинского *pro centum* — на сто) — и обозначение 1%.

❶ Чтобы найти 1% от величины, надо её значение разделить на 100.

Например, 1% от 300 кг равен 3 кг.

Если 1% составляет $\frac{1}{100}$ величины, то, например, 3% составляют $\frac{3}{100}$ величины.

Так, 3% от 1 км составляют $\frac{3}{100}$ километра, т. е. 30 м.

100% величины составляют $\frac{100}{100}$ величины, т. е. 100% величины — это вся сама величина.

Любое количество процентов можно записать в виде десятичной дроби или натурального числа. Для этого нужно число, стоящее перед знаком %, разделить на 100.

Например, $23\% = 0{,}23$; $80\% = 0{,}80 = 0{,}8$; $300\% = 3$.

Также можно выполнить обратное преобразование, т. е. записать десятичную дробь или натуральное число в процентах. Для этого нужно число умножить на 100 и к результату приписать знак %.

Например, $1{,}4 = 140\%$, $0{,}02 = 2\%$, $7 = 700\%$.

## 2.9. Нахождение процентов от величины и величины по её процентам

Задача 1. Клубника содержит в среднем 6% сахара. Сколько килограммов сахара содержится в 15 кг клубники?

Решение. Запишем 6% в виде десятичной дроби: $6\% = 0{,}06$. Тогда:

$15 \cdot 0{,}06 = 0{,}9$ (кг) — количество сахара в 15 кг клубники.

Ответ: 0,9 кг.

Решив эту задачу, мы выяснили, сколько составляют 6% от числа 15. Поэтому такую задачу называют **задачей на нахождение процентов от числа.**

❗ Чтобы найти проценты от числа, можно представить проценты в виде дроби и умножить число на эту дробь.

Задача 2. В бочку налили 84 л воды. Каков объём этой бочки, если оказалось, что заполнено 70% её объёма?

Решение. Запишем 70% в виде десятичной дроби: $70\% = 0{,}7$. Следовательно, 84 л составляет 0,7 объёма всей бочки. Имеем:

$84 : 0{,}7 = 120$ (л) — объём бочки.

Ответ: 120 л.

В этой задаче мы нашли число 120, зная, что число 84 составляет от искомого числа 70%. Поэтому такую задачу называют **задачей на нахождение числа по его процентам.**

❗ Чтобы найти число по его процентам, надо представить проценты в виде дроби и разделить значение процентов на эту дробь.

## 2.10. Отношение. Процентное отношение

Частное двух чисел $a$ и $b$, отличных от нуля, называют **отношением** чисел $a$ и $b$ или отношением числа $a$ к числу $b$.

Например,

$16 : 4$ — отношение числа 16 к числу 4;

$\frac{2}{3} : \frac{1}{7}$ — отношение числа $\frac{2}{3}$ к числу $\frac{1}{7}$.

Отношение чисел $a$ и $b$ можно записать двумя способами: $\frac{a}{b}$ или $a : b$.

**Основное свойство отношения** выражается следующим правилом: отношение не изменится, если его члены умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Например,

$\frac{1,2}{2,5} = \frac{1,2 \cdot 10}{2,5 \cdot 10} = \frac{12}{25}$; $\frac{2}{3} : \frac{7}{9} = \left(\frac{2}{3} \cdot 9\right) : \left(\frac{7}{9} \cdot 9\right) = 6 : 7$;

$1\frac{1}{2} : 0,25 = \left(1\frac{1}{2} \cdot 4\right) : (0,25 \cdot 4) = 6 : 1$.

Эти примеры иллюстрируют следующее: отношение дробных чисел можно заменить отношением натуральных чисел.

❶ Отношение чисел $a$ и $b$ показывает, во сколько раз число $a$ больше числа $b$, или какую часть число $a$ составляет от числа $b$.

Примеры использования отношений:

- скорость — отношение длины пройденного пути ко времени, за которое пройден этот путь;
- цена — отношение стоимости товара к количеству единиц его измерения (килограммов, литров, метров, коробок и др.);
- плотность — отношение массы вещества к её объёму;
- производительность труда — отношение объёма выполненной работы ко времени, за которое была выполнена эта работа.

**Процентное отношение двух чисел** — это их отношение, выраженное в процентах. Оно показывает, сколько процентов одно число составляет от другого.

Например, если в классе учатся 12 девочек и 20 мальчиков, то процентное отношение количества девочек к количеству мальчиков равно $\frac{12}{20} \cdot 100 =$ $= 60\ (\%)$. Оно показывает, что количество девочек составляет 60% от количества мальчиков.

❶ Чтобы найти процентное отношение двух чисел, надо их отношение умножить на 100 и к результату дописать знак процента.

## 2.11. Пропорции

Равенство двух отношений называют **пропорцией**.

В буквенном виде пропорцию можно записать так:

$$a : b = c : d \text{ или } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Приведённые записи читают так: «отношение $a$ к $b$ равно отношению $c$ к $d$», или «$a$ относится к $b$ как $c$ относится к $d$».

Числа $a$ и $d$ называют **крайними членами пропорции**, а числа $b$ и $c$ — **средними членами пропорции**.

❶ Произведение крайних членов пропорции равно произведению её средних членов.

Это означает, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $ad = bc$.

Это свойство называют **основным свойством пропорции.**

Верно и такое утверждение.

❶ Если $a$, $b$, $c$ и $d$ — числа, отличные от нуля, и $ad = bc$, то отношения $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны и могут образовать пропорцию $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Задача. Сколько стоит 3,2 м ткани, если за 4,2 м этой ткани заплатили 630 р.?

Решение. Пусть 3,2 м ткани стоят $x$ р. Запишем кратко условие задачи в следующем виде:

$$3{,}2 \text{ м} - x \text{ р.};$$
$$4{,}2 \text{ м} - 630 \text{ р.}$$

Отношения $\frac{x}{3,2}$ и $\frac{630}{4,2}$ равны, поскольку каждое из них показывает, сколько стоит 1 м данной ткани.

Тогда $\frac{x}{3,2} = \frac{630}{4,2}$.

Отсюда $x = \frac{3,2 \cdot 630}{4,2} = \frac{3,2 \cdot 30}{0,2} = 16 \cdot 30 = 480$.

Ответ: 480 р.

## 2.12. Прямая и обратная пропорциональные зависимости

Две переменные величины называют **прямо пропорциональными**, если при увеличении (уменьшении) одной из них в несколько раз другая увеличивается (уменьшается) во столько же раз.

Так, величины $P$ — периметр квадрата и $a$ — длина его стороны прямо пропорциональны. Можно также сказать, что величина $P$ прямо пропорциональна величине $a$ или зависимость между величинами $P$ и $a$ является прямой пропорциональностью.

❗ Если две переменные величины прямо пропорциональны, то отношение соответствующих значений этих величин равно одному и тому же для данных величин числу.

Так, в рассмотренном примере для величин $P$ и $a$ это число равно 4.

Две переменные величины называют **обратно пропорциональными**, если при увеличении (уменьшении) одной из этих величин в несколько раз другая уменьшается (увеличивается) во столько же раз.

Пусть стороны прямоугольника равны $a$ см и $b$ см, а его площадь — 24 см$^2$. Величины $a$ и $b$ обратно пропорциональны. Действительно, если одну из сторон прямоугольника увеличить (уменьшить) в несколько раз, то чтобы площадь его не изменилась, другую сторону надо уменьшить (увеличить) во столько же раз.

❗ Если две переменные величины обратно пропорциональны, то произведение соответствующих значений этих величин равно одному и тому же для данных величин числу.

**Задача.** Для перевозки груза необходимо 20 самосвалов грузоподъёмностью 3 т. Сколько нужно самосвалов грузоподъёмностью 5 т, чтобы перевезти этот груз?

**Решение.** Во сколько раз увеличивается грузоподъёмность одного самосвала, во столько же раз может быть уменьшено их количество при условии, что масса перевозимого груза не изменяется. Поэтому грузоподъёмность одного самосвала и количество самосвалов являются обратно пропорциональными величинами. Грузоподъёмность одного самосвала увеличилась в $5 : 3 = \frac{5}{3}$ раза. Тогда количество самосвалов должно уменьшиться во столько же раз, т. е. в $\frac{5}{3}$ раза. Имеем: $20 : \frac{5}{3} = 20 \cdot \frac{3}{5} = 12$ (самосвалов).

**Ответ:** 12 самосвалов.

## Примеры заданий № 3

### Часть 1

1. На представлении в цирке $\frac{16}{25}$ всех зрителей составляли дети. Сколько процентов всех зрителей составляли дети?
2. После уценки новая цена шкафа составила 0,62 старой. На сколько процентов уменьшилась цена шкафа в результате уценки?
3. В супермаркете проводится акция. Коробка конфет некоторого вида стоит 360 р. При покупке двух таких коробок на вторую коробку предо-

ставляется скидка в размере $45\%$. Сколько рублей придётся заплатить за покупку двух коробок конфет в период действия акции?

4. Положительное число $a$ увеличили на $500\%$. Во сколько раз полученное число больше числа $a$?
5. Банк начисляет на срочный вклад $8\%$ годовых. Вкладчик положил на счёт 14 000 р. Сколько рублей будет на этом счёте через год, если никаких операций, кроме начисления процентов, со счётом проводиться не будет?
6. В сплаве меди с оловом $45\%$ составляет медь. Сколько килограммов меди содержит отливок такого сплава массой 18 кг?
7. Стоимость проезда в электропоезде от станции $A$ до станции $B$ составляет 125 р. Школьникам предоставляется скидка $50\%$. Сколько рублей будет стоить проезд для группы, состоящей из 23 школьников и 2 учителей?
8. В саду растут яблони и вишни, причём яблони составляют $52\%$ всех деревьев. Вишен растёт на 8 деревьев меньше, чем яблонь. Сколько деревьев растёт в саду?
9. Товар на распродаже уценили на $16\%$, при этом он стал стоить 1260 р. Сколько рублей стоил товар до распродажи?
10. Цену товара дважды повышали на $20\%$. На сколько процентов увеличилась его цена по сравнению с первоначальной?
11. После двух последовательных снижений цены, первое из которых было на $20\%$, а второе — на $10\%$, стул стал стоить 1080 р. Сколько рублей составляла первоначальная цена стула?
12. Цену на некоторый товар сначала снизили на $10\%$, затем ещё на $25\%$, а через некоторое вре-

мя повысили на 20%. Как изменилась первоначальная цена товара?

1) уменьшилась на 15%
2) увеличилась на 10%
3) уменьшилась на 19%
4) увеличилась на 12%

13. Автобусы составляют 60% всех единиц транспорта, имеющегося в автопарке, грузовые автомобили — 70% остальных единиц транспорта. Ещё в автопарке имеется 18 легковых автомобилей. Сколько всего единиц транспорта в автопарке?

14. Единица измерения какой величины является отношением единиц измерения двух других величин?

1) масса
2) длина
3) скорость
4) время

15. Для приготовления тефтелей взяли мясной фарш и рис в отношении 13 : 7. Сколько процентов массы тефтелей составляет масса риса?

16. Товар стоил 140 р. Через некоторое время его цена увеличилась на 35 р. На сколько процентов повысилась цена товара?

17. Сколько процентов часа составляют 24 мин?

18. Каково процентное содержание соли в растворе, если 400 г раствора содержат 36 г соли?

19. К 8 кг 60-процентного раствора соли долили 4 кг воды. Каким после этого стало процентное содержание соли в растворе?

20. Чему равен неизвестный член пропорции

$\frac{x}{18} = \frac{13}{45}$?

**21.** Решите уравнение $\frac{6}{11} = \frac{9}{2x-1}$.

**22.** Из 80 кг свежих слив получают 28 кг сушёных. Сколько килограммов свежих слив надо взять, чтобы получить 42 кг сушёных?

**23.** Расстояние между пунктами $A$ и $B$ на местности равно 420 км, а на карте — 5,6 см. Сколько километров составляет расстояние между пунктами $C$ и $D$ на местности, если расстояние между ними на этой карте равно 3,6 см?

**24.** За некоторое время рабочий изготовил 36 деталей. Сколько деталей он изготовит за время, в 1,5 раза большее, если будет работать с той же производительностью труда?

**25.** Известно, что 5 кг яблок стоят столько, сколько 4 кг груш. Сколько килограммов груш можно купить вместо 35 кг яблок?

**26.** Мотоциклист проезжает расстояние между двумя городами за 3,5 ч с определённой скоростью. За сколько часов он проедет это расстояние, если увеличит свою скорость в 1,4 раза?

**27.** Маша идёт от дома до школы 9 мин, а её брат Кирилл добегает до школы и без остановки возвращается назад за 12 мин. Во сколько раз скорость, с которой бегает Кирилл, больше скорости, с которой ходит Маша?

1) в $\frac{3}{2}$ раза

2) в $\frac{7}{4}$ раза

3) в $\frac{5}{4}$ раза

4) в $\frac{4}{3}$ раза

# § 3. Рациональные числа

## 3.1. Целые числа. Рациональные числа

Все натуральные числа, противоположные им числа и число 0 называют **целыми числами**.

Например, $-77$, $0$, $12$ — целые числа, а $\frac{1}{3}$; $2{,}6$; $-\frac{18}{5}$ не являются целыми, их называют **дробными числами**.

Целые и дробные числа вместе образуют **рациональные числа**. Например, $1$; $2$; $-10$; $\frac{1}{2}$; $0$; $-2{,}9$; $-\frac{3}{2}$; $5{,}(34)$ — рациональные числа.

❶ Каждое рациональное число можно представить в виде отношения $\frac{m}{n}$, где $m$ — целое число, а $n$ — натуральное.

Например, $5 = \frac{5}{1}$, $-3 = \frac{-3}{1}$, $0{,}2 = \frac{1}{5}$, $0 = \frac{0}{7}$, $-5{,}3 = \frac{-53}{10}$.

❶ Каждое рациональное число можно представить в виде конечной десятичной дроби или в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Для дроби $\frac{m}{n}$ такое представление можно получить, выполнив деление числа $m$ на число $n$.

Например, $\frac{5}{8} = 0{,}625$, $\frac{5}{11} = 0{,}454545... = 0{,}(45)$.

Число $\frac{5}{8}$ записано в виде конечной десятичной дроби, а число $\frac{5}{11}$ — в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Любую конечную десятичную дробь и любое целое число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

Например,

$0{,}625 = 0{,}6250000... = 0{,}625(0)$;

$2 = 2{,}000... = 2{,}(0)$.

❶ Следовательно, каждое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

❶ Справедливо и такое утверждение: каждая бесконечная периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа.

## 3.2. Координатная прямая

Прямую, на которой выбрали начало отсчёта, единичный отрезок и направление, называют **координатной прямой**.

Например, на рисунке 3.1 изображена координатная прямая с началом отсчёта в точке $O$ и единичным отрезком $OM$.

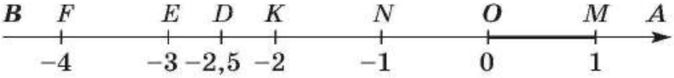



Рис. 3.1

На рисунке 3.1 точка $N$ изображает число $-1$, которое называют **координатой** точки $N$ и записывают $N(-1)$. Аналогично записывают $O(0)$, $M(1)$, $K(-2)$,

$D(-2{,}5)$, $E(-3)$, $F(-4)$. Луч $OA$ задаёт **положительное направление** на координатной прямой $AB$, а луч $OB$ — **отрицательное направление**. Положительное направление указывают стрелкой.

### 3.3. Модуль числа. Сравнение рациональных чисел

**Модулем числа** $a$ называют расстояние от точки, изображающей число $a$ на координатной прямой, до начала отсчёта.

Модуль числа $a$ обозначают так: $|a|$.

❶ Из определения модуля следует, что

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geqslant 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}$$

Следовательно, чтобы найти модуль числа (или, как ещё говорят, «раскрыть модуль»), надо знать знак числа.

Например, $|\pi - 3| = \pi - 3$, так как $\pi > 3$.

$|\pi - 4| = 4 - \pi$, так как $\pi < 4$.

$|x^2 + 1| = x^2 + 1$, так как $x^2 + 1 > 0$ при любом значении $x$.

> Задача. Раскройте модуль $|2x - 1|$.
>
> Решение. Из определения модуля числа следует, что
>
> $$|2x - 1| = \begin{cases} 2x - 1, \text{ если } x \geqslant \frac{1}{2}, \\ 1 - 2x, \text{ если } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

❶ **Свойства модуля:**

1) модуль произвольного числа $a$ принимает только неотрицательные значения, т. е. $|a| \geqslant 0$;

2) модули противоположных чисел равны, т. е. $|a| = |-a|$;

3) если $|a| = |b|$, то $a = b$ или $a = -b$;

4) если $|a| = b$, то $b \geqslant 0$ и $a = b$ или $a = -b$;

5) если $b \geqslant 0$ и $a = b$ или $a = -b$, то $|a| = b$;

6) $|ab| = |a||b|$;

7) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Расстояние между точками $A(a)$ и $B(b)$ координатной прямой равно $|a - b|$ (рис. 3.2).

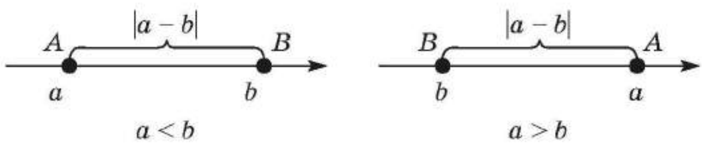



Рис. 3.2

На координатной прямой из двух чисел большее число расположено правее меньшего.


Рис. 3.3

Например, точка $A(2)$ расположена правее, чем точка $B(-7)$ (рис. 3.3). Поэтому $2 > -7$.

❗ Любое положительное число больше любого отрицательного числа.

Из двух отрицательных чисел меньше то, модуль которого больше.

Любое отрицательное число меньше нуля, любое положительное число больше нуля.

## 3.4. Арифметические действия с рациональными числами

❶ Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо:

1) найти модули слагаемых;

2) из большего модуля вычесть меньший модуль;

3) перед полученным числом поставить знак слагаемого с бо́льшим модулем.

Например, $6 + (-2) = 4$; $-6 + 3{,}5 = -2{,}5$; $-2{,}5 + 6 = 3{,}5$.

❶ Чтобы сложить два отрицательных числа, надо:

1) найти модули слагаемых;

2) сложить модули слагаемых;

3) перед полученным числом поставить знак «−».

Например, $-3{,}5 + (-1) = -4{,}5$; $-5 + (-3{,}5) = -8{,}5$.

Сумма двух противоположных чисел равна нулю.

Например, $-3 + 3 = 0$; $3 + (-3) = 0$.

❶ Чтобы найти разность двух чисел, надо к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

Например, $-9 - 11 = -9 + (-11) = -20$; $-3{,}7 - (-2{,}2) = -3{,}7 + 2{,}2 = -1{,}5$.

❶ Для любых рациональных чисел $a$, $b$ и $c$ справедливы равенства:

$a + b = b + a$ — переместительное свойство сложения;

$(a + b) + c = a + (b + c)$ — сочетательное свойство сложения.

Например,

$$-2{,}5 + (-3) = -5{,}5 \text{ и } -3 + (-2{,}5) = -5{,}5;$$

$$(-2 + 1{,}7) + 1{,}3 = -0{,}3 + 1{,}3 = 1 \text{ и } -2 + (1{,}7 + 1{,}3) = -2 + 3 = 1.$$

❶ Чтобы умножить два числа с разными знаками, надо умножить их модули и перед полученным произведением поставить знак «−».

❶ Чтобы умножить два отрицательных числа, надо умножить их модули.

Например, $-1{,}4 \cdot (-5) = |-1{,}4| \cdot |-5| = 1{,}4 \cdot 5 = 7$.

❶ Чтобы разделить два числа с разными знаками, надо разделить модуль делимого на модуль делителя и поставить перед полученным числом знак «−».

Например, $\frac{1}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{2}$.

❶ Чтобы разделить два отрицательных числа, надо разделить модуль делимого на модуль делителя.

Например, $-0{,}16 : (-0{,}4) = 0{,}4$.

❶ Если числа $a$ и $b$ имеют одинаковые знаки, то произведение $ab$ положительно. И наоборот, если произведение $ab$ положительно, то числа $a$ и $b$ имеют одинаковые знаки.

❶ Если числа $a$ и $b$ имеют разные знаки, то произведение $ab$ отрицательно. И наоборот, если произведение $ab$ отрицательно, то числа $a$ и $b$ имеют разные знаки.

❶ Если хотя бы одно из чисел $a$ или $b$ равно нулю, то произведение $ab$ равно нулю. И наоборот, если произведение $ab$ равно нулю, то хотя бы одно из чисел $a$ или $b$ равно нулю.

## Примеры заданий № 4

### Часть 1

1. Укажите неверное утверждение.
   1) $-7$ — целое число
   2) $-7$ — неположительное число
   3) $-7$ — рациональное число
   4) $-7$ — неотрицательное число

**2.** На координатной прямой отметили число $a$ (рис. 3.4).

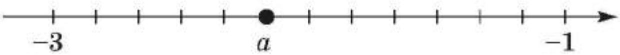



Рис. 3.4

Какое число обозначили буквой $a$?

1) $-1\frac{2}{3}$ 2) $-1\frac{5}{6}$ 3) $-2$ 4) $-2\frac{1}{6}$

**3.** На координатной прямой (рис. 3.5) точки $A$, $B$, $C$ и $D$ соответствуют числам $-0{,}46$; $-0{,}23$; $-0{,}205$; $-0{,}018$.

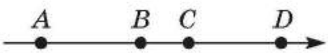



Рис. 3.5

Какая точка соответствует числу $-0{,}205$?

1) $A$ 2) $B$ 3) $C$ 4) $D$

**4.** Укажите пару противоположных чисел.

1) 5 и $\frac{1}{5}$ 2) 5 и 0,5 3) 5 и $-5$ 4) 5 и $-\frac{1}{5}$

**5.** Сколько целых чисел расположено на координатной прямой между числами $-72$ и 52?

**6.** Какое из чисел имеет наименьший модуль?

1) 0 2) $-1$ 3) 0,001 4) $-0{,}0001$

**7.** Чему равно значение выражения $|-8| + |8|$?

**8.** Число $a$ меньше своего модуля. Укажите верное утверждение.

1) $a$ — неотрицательное число
2) $a$ — положительное число
3) $a = 0$
4) $a$ — отрицательное число

**9.** Решите уравнение $||x| - 8| = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, запишите в ответ произведение корней.

**10.** Укажите верное неравенство.

1) $3,1 < -3,8$ 3) $-6,4 > -6,5$
2) $-1,5 < -2$ 4) $-2,9 > -2,7$

**11.** Найдите сумму всех целых чисел, расположенных на координатной прямой между числами $-43,7$ и $40,2$.

**12.** Найдите значение выражения $2,64 + (-7,36) + (-4,64) + 7,36$.

**13.** Найдите значение выражения $-7,2 - a$, если $a = -3\frac{1}{4}$.

**14.** На координатной прямой отмечено число $a$ (рис. 3.6).

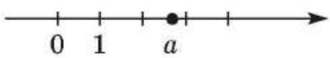



Рис. 3.6

Какое из приведённых утверждений является неверным?

1) $3 - a > 0$ 3) $a - 4 > 0$
2) $a - 5 < 0$ 4) $-2 + a > 0$

**15.** На координатной прямой отмечены числа $a$, $b$ и $c$ (рис. 3.7).

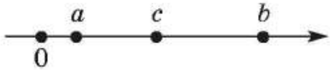



Рис. 3.7

Какая из разностей $a - c$, $b - a$, $c - b$ положительна?

1) $a - c$ 3) $c - b$
2) $b - a$ 4) ни одна из них

**16.** Из последовательности чисел −9, −7, − 6, 2, 3, 5 выбрали два числа и нашли их произведение. Какое наибольшее значение может принимать это произведение?

**17.** На координатной прямой отмечены числа $a$ и $b$ (рис. 3.8).


Рис. 3.8

Какое из приведённых утверждений для этих чисел является верным?

1) $ab > 0$
2) $a^2b^3 > 0$
3) $a - b > 0$
4) $a + b > 0$

**18.** Найдите значение выражения $0{,}8 \cdot (-10)^2 - 90$.

**19.** Найдите значение выражения $\left(\frac{1}{7}\right)^2 \cdot (-7) - 20 \cdot \frac{1}{7}$.

**20.** Найдите значение выражения $\left(\frac{8}{19} - \frac{17}{38}\right) \cdot \left(-3\frac{4}{5}\right)$.

**21.** Известно, что $a > 0$, $c < 0$. Сравните с нулём значение выражения $a^3c^4$.

1) $a^3c^4 < 0$
2) $a^3c^4 > 0$
3) $a^3c^4 = 0$
4) сравнить невозможно

**22.** Решите уравнение $x\,(x + 3{,}4)(1{,}4 - x) = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, запишите в ответ его меньший корень.

**23.** Найдите значение выражения $-0{,}5a \cdot 20b$, если $a = -2\frac{1}{3}$, $b = -1\frac{1}{14}$.

**24.** Найдите значение выражения

$$-3\frac{3}{14}\cdot 6{,}3-6{,}3\cdot\left(-1\frac{10}{21}\right)+6{,}3\cdot 1\frac{1}{6}.$$

**25.** Значение какого из выражений будет наибольшим, если $a$ — отрицательное число?

1) $3-a$ 2) $a-3$ 3) $3a$ 4) $3:a$

**26.** Известно, что число $a$ — положительное, а число $b$ — отрицательное. Значение какого из данных выражений наибольшее?

1) $\frac{a^2}{b^2}$ 2) $-\frac{a}{b^2}$ 3) $\frac{a^2}{b}$ 4) $\frac{b}{a}$

**27.** Вычислите значение выражения $4{,}2:(-0{,}6)+1{,}2$.

**28.** Вычислите значение выражения $(-2{,}16-4{,}24):(-16)$.

**29.** Найдите значение выражения

$$4\frac{3}{5}-3\frac{3}{23}\cdot\left(-11\frac{4}{9}-(-3{,}6):\frac{9}{35}\right).$$

## § 4. Целые выражения

### 4.1. Буквенное выражение (выражение с переменными). Алгебраические выражения

Записывая формулы и составляя уравнения, нам приходится обозначать числа буквами, конструируя **буквенные выражения.**

Например, записи $a^2$, $(x+y)^2$, $2(a+b)$, $\frac{x-y+z}{2}$, $abc$, $\frac{m}{n}$ являются буквенными выражениями.

Выражение, составленное из одной буквы, также считают буквенным выражением.

Если в буквенное выражение вместо букв подставить числа, то получим числовое выражение.

Поскольку буквы можно заменять различными числами, то эти буквы называют **переменными**, а само буквенное выражение — **выражением с переменными** (или с переменной, если она одна).

Рассмотрим выражение $2x + 3$. Если переменную $x$ заменить, например, числом $\frac{1}{2}$, то получим числовое выражение $2 \cdot \frac{1}{2} + 3$. При этом говорят, что $\frac{1}{2}$ — **значение переменной** $x$, а число 4 — значение выражения $2x + 3$ при $x = \frac{1}{2}$.

Числовые выражения и выражения с переменными называют **алгебраическими выражениями.**

## 4.2. Свойства степени с натуральным показателем

1. Для любого числа $a$ и любых натуральных чисел $m$ и $n$ справедливо равенство:

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

Тождество $a^m a^n = a^{m+n}$ выражает **основное свойство степени**.

Аналогичное свойство имеет место для произведения трёх и более степеней. Например,

$$3^2 \cdot 3^3 \cdot 3^7 = (3^2 \cdot 3^3) \cdot 3^7 = 3^{2+3} \cdot 3^7 = 3^{(2+3)+7} =$$
$$= 3^{2+3+7} = 3^{12}.$$

2. Для любого числа $a$, отличного от нуля, и любых натуральных чисел $m$ и $n$ таких, что $m > n$, справедливо равенство:

$$a^m : a^n = a^{m \quad n}.$$

**3.** Для любого числа $a$ и любых натуральных чисел $m$ и $n$ справедливо равенство:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

**4.** Для любых чисел $a$ и $b$ и любого натурального числа $n$ справедливо равенство:

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Аналогичное свойство имеет место и для произведения трёх и более множителей. Например, $(abc)^n = ((ab) \cdot c)^n = (ab)^n \cdot c^n = a^n b^n c^n$.

Задача 1. Какой цифрой оканчивается значение выражения $2^{100}$?

Решение. Имеем: $2^{100} = (2^4)^{25} = 16^{25}$.

Если число оканчивается цифрой 6, то любая его степень оканчивается цифрой 6.

Ответ: 6.

Задача 2. Сравните значения выражений:

1) $(-11)^{14} \cdot (-11)^3$ и $(-11)^{16}$;

2) $(-12)^{19}$ и $(-12)^{15}$;

3) $5^{30}$ и $9^{20}$;

4) $16^3$ и $65^2$.

Решение. 1) Имеем: $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 = (-11)^{17} < 0$, $(-11)^{16} > 0$.

Следовательно, $(-11)^{14} \cdot (-11)^3 < (-11)^{16}$.

2) Так как $|(-12)^{19}| > |(-12)^{15}|$, а сравниваемые числа отрицательные, то $(-12)^{19} < (-12)^{15}$.

3) Так как $5^{30} = (5^3)^{10} = 125^{10}$ и $9^{20} = (9^2)^{10} = 81^{10}$, то $5^{30} > 9^{20}$.

4) Имеем: $16^3 = (4^2)^3 = (4^3)^2 = 64^2$. Следовательно, $16^3 < 65^2$.

### 4.3. Одночлен

Алгебраическое выражение, представляющее собой произведение чисел, переменных и их степеней, называют **одночленом.**

Например, выражения $2b$; $\frac{1}{3}xy^2$; $-ab$; $m^3 \cdot 3k^5$; $(3{,}14)^2pq^3 \cdot (-7)r^2t^4$ являются примерами одночленов.

❗ Одночленами также считают все числа, любые переменные и их степени.

Одночлен, который содержит только один числовой множитель, отличный от нуля, стоящий на первом месте, и все остальные множители которого являются степенями с различными основаниями, называют **одночленом стандартного вида.**

Примеры одночленов стандартного вида:

$$-\frac{1}{8}xy; 2{,}8a^3; 7x^2yz^3t^5.$$

❗ К одночленам стандартного вида также относят числа, отличные от нуля, переменные и их степени. Так, $-2$; $3^2$; $x$; $b^3$ — одночлены стандартного вида.

Число 0, а также одночлены, тождественно равные нулю, например $0x^2$, $0ab$ и т. д., называют **нуль-одночленами.** Их не относят к одночленам стандартного вида.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называют **коэффициентом одночлена.**

Например, коэффициенты одночленов $-3a^2bc$ и $0{,}07x$ соответственно равны $-3$ и $0{,}07$.

Рассмотрим одночлены $\frac{2}{3}x^3yz$ и $-2zx^3y$. У них одинаковые буквенные части. Такие одночлены называют **подобными.** К подобным одночленам также относят и числа. Например, 7 и −5 — подобные одночлены.

**Степенью одночлена** называют сумму показателей степеней всех переменных, входящих в него. Степень одночлена, который является числом, отличным от нуля, считают равной нулю.

❗ Считают, что нуль-одночлен степени не имеет.

Например, степень одночлена $-3{,}8m^2xy^7$ равна 10, а степени одночленов $x^3$ и 9 равны соответственно 3 и 0.

Задача 1. Преобразуйте выражение $0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2$ в одночлен стандартного вида.

Решение. Имеем: $0{,}2a^2b^4 \cdot (-5a^3b)^2 = 0{,}2a^2b^4 \times$ $\times (-5)^2 \cdot (a^3)^2b^2 = 0{,}2a^2b^4 \cdot 25a^6b^2 = 0{,}2 \cdot 25a^2a^6b^4b^2 =$ $= 5a^8b^6$.

Задача 2. Значения переменных $a$ и $b$ таковы, что $4a^3b^4 = 7$. Найдите значение выражения $-\frac{2}{7}a^6b^8$.

Решение. Имеем:

$$-\frac{2}{7}a^6b^8 = -\frac{1}{56} \cdot 16a^6b^8 = -\frac{1}{56} \cdot (4a^3b^4)^2 = -\frac{1}{56} \cdot 7^2 =$$

$$= -\frac{1}{56} \cdot 49 = -\frac{7}{8}.$$

### 4.4. Многочлен. Степень многочлена. Корень многочлена с одной переменной

Алгебраическое выражение, которое является суммой нескольких одночленов, называют **многочленом.**

Примеры многочленов: $7xy + y - 11$; $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$; $3a - a + b$; $11x - 2x$.

Одночлены, из которых составлен многочлен, называют **членами многочлена**. Так, членами многочлена $7xy + y - 11$ являются одночлены $7xy$; $y$; $-11$.

Многочлен, состоящий из двух членов, называют **двучленом**, а из трёх членов — **трёхчленом**. Договорились рассматривать одночлен как частный случай многочлена. Считают, что такой многочлен состоит из одного члена.

Если среди одночленов, составляющих многочлен, есть подобные, то их называют **подобными членами многочлена**. Например, в многочлене $\underline{7a^2b} - \underline{\underline{3a}} + \underline{\underline{\underline{4}}} - \underline{a^2b} - \underline{\underline{\underline{1}}} + \underline{\underline{a}} + b$ подобные члены подчёркнуты одинаковым количеством чёрточек.

Используя правило приведения подобных слагаемых (чтобы привести подобные слагаемые, надо сложить их коэффициенты и полученный результат умножить на общую буквенную часть), упростим этот многочлен:

$$7a^2b - 3a + 4 - a^2b - 1 + a + b = 6a^2b - 2a + b + 3.$$

Такое упрощение называют **приведением подобных членов многочлена**.

Многочлен, состоящий из одночленов стандартного вида, среди которых нет подобных, называют **многочленом стандартного вида**.

Многочлены $xy^2 + x^2y$; $2a^2b$; $5$ являются примерами многочленов стандартного вида.

**Степенью многочлена стандартного вида** называют наибольшую из степеней одночленов, из которых этот многочлен составлен.

Приведём примеры:

- степень многочлена $3x^2 - xy + 5y^2$ равна двум;
- степень многочлена $3x^4y^2$ равна шести;
- степень многочлена 3 равна нулю.

Число 0, а также многочлены, тождественно равные нулю (например, $0a + 0b$, $x - x$ и т. п.), называют **нуль-многочленами.** Их не относят к многочленам стандартного вида.

❶ Считают, что нуль-многочлен степени не имеет.

**Корнем многочлена с одной переменной** называют значение переменной, при котором значение многочлена равно нулю.

Например, число $-1$ является корнем многочлена $2x^3 - 5x^2 - 6x + 1$.

## 4.5. Сложение, вычитание и умножение многочленов

❶ Чтобы сложить многочлены, надо записать последовательно все их члены с их знаками и привести подобные члены, если они есть.

Например,

$$(3xy^2 + 5x^2y^2 - 7xy + x + 11) +$$
$$+ (-2xy^2 + x^2y^2 + 2xy + y - 2) =$$
$$= \underline{3xy^2} + \underline{\underline{5x^2y^2}} - \underline{\underline{\underline{7xy}}} + x + \underline{11} - \underline{2xy^2} + \underline{\underline{x^2y^2}} + \underline{\underline{\underline{2xy}}} + y - \underline{2} =$$
$$= xy^2 + 6x^2y^2 - 5xy + x + y + 9.$$

❶ Чтобы вычесть из одного многочлена другой, надо записать уменьшаемое, а затем записать последовательно все члены вычитаемого с противоположными знаками и привести подобные слагаемые, если они есть.

Например,

$$(3xy^2+5x^2y^2-7xy+x+11)-$$
$$-(-2xy^2+x^2y^2+2xy+y-2)=$$
$$=\underline{3xy^2}+\underline{\underline{5x^2y^2}}-\underline{\underline{\underline{7xy}}}+x+\underline{11}+\underline{2xy^2}-\underline{\underline{x^2y^2}}-\underline{\underline{\underline{2xy}}}-y+\underline{2}=$$
$$=5xy^2+4x^2y^2-9xy+x-y+13.$$

❗ Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Например,

$$2x\,(3x+2y-5)=$$
$$=2x\cdot 3x+2x\cdot 2y-2x\cdot 5=6x^2+4xy-10x.$$

❗ Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и полученные произведения сложить.

> З а д а ч а. Представьте в виде многочлена выражение $(a+2)(a-5)(a+3)$.
>
> Р е ш е н и е. $(a+2)(a-5)(a+3)=$
> $=(a^2-5a+2a-10)(a+3)=(a^2-3a-10)(a+3)=$
> $=a^3+3a^2-3a^2-9a-10a-30=a^3-19a-30.$

### 4.6. Квадрат суммы и квадрат разности. Формула разности квадратов

**Квадрат суммы двух выражений** равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Это тождество называют **формулой квадрата суммы двух выражений.**

**Квадрат разности двух выражений** равен квадрату первого выражения минус удвоенное произведение первого и второго выражений плюс квадрат второго выражения:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Это тождество называют **формулой квадрата разности двух выражений.**

**Разность квадратов двух выражений** равна произведению разности этих выражений и их суммы:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Это тождество называют **формулой разности квадратов.**

Задача 1. Выполните умножение многочленов:
1) $(2a - 5b)(2a + 5b)$;
2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2)$;
3) $(-4mn - p)(4mn - p)$.

Решение. 1) $(2a - 5b)(2a + 5b) = (2a)^2 - (5b)^2 = 4a^2 - 25b^2$.

2) $(y^2 + 3x^4)(3x^4 - y^2) = (3x^4 + y^2)(3x^4 - y^2) = (3x^4)^2 - (y^2)^2 = 9x^8 - y^4$.

3) $(-4mn - p)(4mn - p) = (-p - 4mn)(-p + 4mn) = (-p)^2 - (4mn)^2 = p^2 - 16m^2n^2$.

Задача 2. Докажите, что выражение $x^2 - 4x + 5$ принимает положительные значения при любых значениях $x$. Какое наименьшее значение принимает выражение и при каком значении $x$?

Решение. Преобразуем данное выражение:

$$x^2 - 4x + 5 = x^2 - 4x + 4 + 1 = (x-2)^2 + 1.$$

**Представление выражения в виде суммы, одним из слагаемых которой является квадрат (в нашем примере это $(x-2)^2$), называют выделением полного квадрата из этого выражения.**

**Так как $(x-2)^2 \geqslant 0$ при любых значениях $x$, то выражение $(x-2)^2+1$ принимает только положительные значения. Также понятно, что $(x-2)^2+1 \geqslant 1$. Отсюда наименьшее значение, равное 1, данное выражение принимает при $x=2$.**

## 4.7. Формулы суммы кубов и разности кубов

Многочлен $a^2-ab+b^2$ называют **неполным квадратом разности.**

**Сумма кубов двух выражений** равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

Это тождество называют **формулой суммы кубов.**

Многочлен $a^2+ab+b^2$ называют **неполным квадратом суммы.**

**Разность кубов двух выражений** равна произведению разности этих выражений и неполного квадрата их суммы:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Это тождество называют **формулой разности кубов.**

З а д а ч а 1. Упростите выражение $(4y-1)(16y^2+4y+1)$ и найдите его значение при $y=\frac{1}{2}$.

Решение. Имеем: $(4y - 1)(16y^2 + 4y + 1) =$
$= (4y)^3 - 1 = 64y^3 - 1.$

При $y = \frac{1}{2}$:

$$64y^3 - 1 = 64 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1 = 64 \cdot \frac{1}{8} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Задача 2. Докажите, что значение выражения $25^3 - 1$ делится нацело на 24.

Решение. Применив формулу разности кубов, получим:

$25^3 - 1 = (25 - 1)(25^2 + 25 + 1) = 24\,(25^2 + 26).$

Данное выражение представлено в виде произведения, один из множителей которого равен 24, а другой — натуральное число. Следовательно, значение этого выражения делится нацело на 24.

### 4.8. Разложение многочленов на множители

Представление многочлена в виде произведения нескольких многочленов называют **разложением многочлена на множители**.

1. Вынесение общего множителя за скобки.

В основе этого приёма лежит распределительное свойство умножения: $ac + bc = c(a + b)$.

Задача 1. Представьте в виде произведения многочленов выражение $x\,(c - d) + y\,(d - c)$.

Решение. Имеем:

$x\,(c - d) + y\,(d - c) = x\,(c - d) + y \cdot (-1) \cdot (c - d) =$
$= x\,(c - d) - y\,(c - d) = (c - d)(x - y).$

2. Метод группировки.

Задача 2. Разложите на множители многочлен $ax + bx + ay + by$.

**Решение.** Имеем: $ax + bx + ay + by = (ax + bx) + (ay + by) = x(a + b) + y(a + b)$.
Мы получили выражение, в котором оба слагаемых имеют множитель $(a + b)$. Вынесем его за скобки:
$$x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y).$$

Исходный многочлен удалось разложить на множители благодаря тому, что мы выгодным способом объединили в группы его члены. Поэтому описанный приём называют **методом группировки**.

3. Применение известных формул.

**Задача 3.** Разложите на множители:
$x^2 + 4xy + 4y^2 - 16$.
**Решение.** Имеем:
$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 16 = (x^2 + 4xy + 4y^2) - 16 =$$
$$= (x + 2y)^2 - 16 = (x + 2y - 4)(x + 2y + 4).$$

**Задача 4.** Представьте в виде произведения выражение $(m - 4)^3 + 216$.
**Решение.** Применив формулу суммы кубов, получим:
$$(m - 4)^3 + 216 = (m - 4)^3 + 6^3 =$$
$$= (m - 4 + 6)((m - 4)^2 - 6(m - 4) + 36) =$$
$$= (m + 2)(m^2 - 8m + 16 - 6m + 24 + 36) =$$
$$= (m + 2)(m^2 - 14m + 76).$$

## Примеры заданий № 5

### Часть 1

1. Вычислите значение выражения $\frac{1}{5}m + \frac{1}{3}n$, если $m = 35$, $n = -18$.

**2.** Найдите значение выражения

$(4{,}8-5{,}1)^3 : \left(-1\frac{1}{2}\right)^2$.

**3.** Укажите количество неверных утверждений.

1) $0 < (-4{,}2)^2$ 3) $(-7)^{11} > (-6)^4$

2) $\left(-1\frac{1}{17}\right)^3 < 0$ 4) $8^8 > (-8)^8$

**4.** Укажите выражение, которое принимает только отрицательные значения.

1) $x^4-6$ 3) $-x^4+6$

2) $-x^4-6$ 4) $-(x+6)^4$

**5.** Какое из данных ниже равенств является тождеством?

1) $a^4 \cdot a^5 = a^{20}$ 3) $a^6b^6 = (ab)^{12}$

2) $a^{16} : a^2 = a^8$ 4) $(a^3)^3 \cdot a^3 = a^{12}$

**6.** Какое из данных ниже выражений при любых значениях $n$ равно произведению $81 \cdot 3^n$?

1) $3^{4n}$ 2) $3^{n+4}$ 3) $243^n$ 4) $243^{n+1}$

**7.** Какое из данных ниже выражений тождественно равно выражению $(m^3)^8 : m^6$?

1) $m^{18}$ 2) $m^4$ 3) $m^5$ 4) $m^{30}$

**8.** Чему равны 20% от числа $5^5$?

**9.** Чему равно значение выражения $27^4 : 3^{10}$?

**10.** Найдите значение выражения $\frac{4^5 \cdot 16^6}{8^{10}}$.

**11.** Найдите значение выражения $\frac{45^3}{75^2}$.

**12.** Какому одночлену тождественно равно выражение $4a^2b^3 \cdot 0{,}5ab^2$?

1) $2a^3b^6$ 2) $2a^2b^6$ 3) $2a^2b^5$ 4) $2a^3b^5$

**13.** Какое из данных ниже выражений является квадратом одночлена $5a^5b^2$?

1) $10a^{10}b^4$ 2) $25a^{10}b^4$ 3) $10a^{25}b^4$ 4) $25a^{25}b^4$

**14.** Известно, что $2a^2b^3 = 3$. Найдите значение выражения $15a^4b^6$.

**15.** Какому из данных ниже одночленов тождественно равно выражение $(-6a^2b^3)^6 \cdot \left(-\frac{1}{6}a^5b^4\right)^3$?

1) $216a^{27}b^{16}$ 3) $36a^{16}b^{16}$

2) $-216a^{27}b^{30}$ 4) $-36a^{27}b^{30}$

**16.** Какому из приведённых ниже выражений тождественно равно выражение $(3a + 5) - (2 - a)$?

1) $2a + 3$ 2) $4a + 3$ 3) $4a + 7$ 4) $2a + 7$

**17.** Укажите многочлен стандартного вида, тождественно равный выражению $(12xy - 2y^2 + 6x^2) - (-3x^2 - 2y^2 + 8xy)$.

1) $3x^2 + 20xy - 4y^2$ 3) $9x^2 + 20xy$

2) $9x^2 + 4xy$ 4) $3x^2 + 4xy - 4y^2$

**18.** Укажите многочлен стандартного вида, тождественно равный выражению $a(a + 2b) - b(3a - 4b)$.

1) $a^2 - ab + 4b^2$ 3) $a^2 - 5ab + 4b^2$

2) $a^2 - ab - 4b^2$ 4) $a^2 + ab - 4b^2$

**19.** Чему равно значение выражения $3a^2 - 12a - 2$, если $a^2 - 4a + 2 = 6$?

**20.** Решите уравнение $(x - 6)(x + 2) - x^2 = 8$.

**21.** Какое из выражений не является одночленом?

1) $5mn^4$ 3) $5n^4$

2) $5m$ 4) $5 - n^4$

**22.** Найдите значение выражения
$(x + 7)(x - 3) - (x - 6)(x + 2)$, если $x = -1{,}5$.

**23.** Какое из данных ниже выражений является квадратом двучлена?

1) $a^2 + 4b^2$ 3) $a^2 + 4b^2 + 2ab$

2) $a^2 - 4b^2$ 4) $a^2 + 4b^2 - 4ab$

**24.** Найдите значение выражения $(7 - b)^2 - b\,(b + 4)$ при $b = -\frac{1}{9}$.

**25.** Найдите корень уравнения $(x - 8)^2 = (11 - x)^2$.

**26.** Остаток при делении некоторого натурального числа на 9 равен 4. Чему равен остаток при делении на 9 квадрата этого числа?

**27.** Сравните числа $a$ и $b$, если $(a + b)^2 = 4ab$.

1) $a < b$ 3) $a = b$

2) $a > b$ 4) сравнить невозможно

**28.** Укажите одночлен, которым надо заменить звёздочку в записи $16m^2 + 24mn + *$, чтобы полученный трёхчлен можно было представить в виде квадрата двучлена.

1) $3n$ 2) $3n^2$ 3) $9n^2$ 4) $9n$

**29.** Найдите значение выражения $(a - 2)^2 + 2(a - 2) \times$ $\times (2a + 3) + (2a + 3)^2$, если $a = -\frac{1}{3}$.

**30.** Укажите произведение многочленов, тождественно равное выражению $0{,}16a^4 - 9b^6$.

1) $(0{,}04a^2 - 3b^3)(0{,}04a^2 + 3b^3)$

2) $(0{,}4a^2 - 3b^3)(0{,}4a^2 + 3b^3)$

3) $(0{,}4a^2 - 3b^3)^2$

4) $(0{,}04a - 3b)(0{,}04a + 3b)$

**31.** Какому многочлену тождественно равно выражение $(m - 3)(m + 3) - m(m + 2)$?

1) $-2m - 9$ 2) $9 - 2m$ 3) $2m - 9$ 4) $2m + 9$

**32.** Какому выражению тождественно равно выражение $(x-4)^2-(x-5)(x+5)$?

1) $-9$
2) $41$
3) $-8x-9$
4) $-8x+41$

**33.** Найдите значение выражения

$(5a+2)(25a^2-10a+4)$, если $a=\frac{1}{5}$.

**34.** Решите уравнение $4y^2-3y=0$. Если уравнение имеет более одного корня, запишите в ответ его меньший корень.

**35.** Укажите произведение, тождественно равное многочлену $c^3+c^2-3c-3$.

1) $(c^2+1)(c-3)$
2) $(c^2-3)(c+1)$
3) $c(c^2-3)$
4) $(c^2+3)(c-1)$

**36.** Найдите значение выражения

$4\frac{5}{6}\cdot 5\frac{4}{9}-1\frac{1}{6}\cdot 4\frac{1}{7}+6\frac{5}{9}\cdot 4\frac{5}{6}-7\frac{6}{7}\cdot 1\frac{1}{6}$.

## Часть 2

**37.** Известно, что $x^2+y^2=6$, $xy=2$. Чему равно значение выражения $x^4+x^2y^2+y^4$?

**38.** Известно, что $4x^6-y^4=8$, $x^3y^2=3$. Чему равно значение выражения $16x^{12}+y^8-4x^6y^4$?

**39.** Известно, что $2a+b=-2$. Найдите значение выражения $4a^2-8a+b^2+4ab-4b$.

**40.** Известно, что $x+y=6$, $xy=4$. Найдите значение выражения $x^3+y^3$.

# § 5. Дробные выражения

## 5.1. Алгебраические (рациональные) дроби

**Дробные выражения** характеризуются тем, что содержат деление на выражение с переменными.

Примеры дробных выражений:

$$2x + \frac{a}{b};\ (x - y) : (x + y);\ \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}};\ \frac{5}{x}.$$

Целые и дробные выражения называют **рациональными выражениями.**

**Допустимыми значениями переменных,** входящих в рациональное выражение, называют все значения переменных, при которых это выражение имеет смысл.

Например, в выражении $2 + \frac{a+2}{a-1}$ допустимыми значениями переменной $a$ являются все числа, кроме 1.

❶ Допустимыми значениями переменных, входящих в целое выражение, являются все числа.

Отдельным видом рационального выражения является **рациональная дробь.** Это дробь, числитель и знаменатель которой — многочлены. Так, рациональные выражения

$$\frac{x}{7};\ \frac{x^2 - 2xy}{x + y};\ \frac{12}{a};\ \frac{a + b}{5}$$

являются примерами рациональных дробей.

Рациональная дробь может быть как целым выражением, так и дробным.

Знаменатель рациональной дроби не может быть нулевым многочленом.

❶ Допустимыми значениями переменных, входящих в рациональную дробь, являются все те значения переменных, при которых значение знаменателя дроби не равно нулю.

## 5.2. Тождество. Тождественные преобразования выражений

Выражения, соответствующие значения которых равны при любых допустимых значениях входящих в них переменных, называют **тождественно равными**.

Равенство, которое выполняется при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют **тождеством**.

Например, равенство $\frac{a-2}{a-2}=1$ является тождеством, так как оно выполняется при всех допустимых значениях $a$, т. е. при всех $a$, кроме $a=2$.

Замену одного выражения другим, тождественно равным ему, называют **тождественным преобразованием выражения**.

Для доказательства тождеств используют приёмы:

- тождественно преобразуют одну из частей данного равенства, получая другую часть;
- тождественно преобразуют каждую из частей данного равенства, получая одно и то же выражение;
- показывают, что разность левой и правой частей данного равенства тождественно равна нулю.

## 5.3. Основное свойство рациональной дроби. Сокращение дробей

❶ Если числитель и знаменатель рациональной дроби умножить на один и тот же ненулевой многочлен, то получим дробь, тождественно равную данной.

Это свойство называют **основным свойством рациональной дроби** и записывают:

$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C}$, где $A$, $B$ и $C$ — многочлены, причём многочлены $B$ и $C$ ненулевые.

В соответствии с этим свойством выражение $\frac{A \cdot C}{B \cdot C}$ можно заменить на тождественно равную дробь $\frac{A}{B}$. Такое тождественное преобразование называют **сокращением дроби** на множитель $C$.

Из основного свойства дроби следует, что

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} \text{ и } \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}.$$

Каждую из дробей $\frac{-A}{B}$ и $\frac{A}{-B}$ можно записать в виде выражения $-\frac{A}{B}$, т. е.

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}.$$

Задача 1. Сократите дробь $\frac{4a-20}{5a-a^2}$.

Решение. $\frac{4a-20}{5a-a^2} = \frac{4(a-5)}{a(5-a)} = \frac{4(a-5)}{-a(a-5)} = -\frac{4}{a}$.

Задача 2. Приведите дробь $\frac{a^2}{5bc^3}$ к знаменателю $15ab^3c^5$.

Решение. Так как $15ab^3c^5 = 5bc^3 \cdot 3ab^2c^2$, то новый знаменатель отличается от знаменателя данной дроби множителем $3ab^2c^2$. Следовательно, числитель и знаменатель данной дроби надо умножить на **дополнительный множитель** $3ab^2c^2$. Имеем:

$$\frac{a^2}{5bc^3} = \frac{a^2}{5bc^3} \cdot \frac{3ab^2c^2}{3ab^2c^2} = \frac{3a^3b^2c^2}{15ab^3c^5}.$$

## 5.4. Действия с алгебраическими дробями

❗ Чтобы сложить рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить тем же.

❗ Чтобы вычесть рациональные дроби с одинаковыми знаменателями, нужно из числителя первой дроби вычесть числитель второй дроби, а знаменатель оставить тем же.

З а д а ч а 1. Выполните вычитание

$$\frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a}.$$

Р е ш е н и е. $\frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{1-2a} = \frac{4}{2a-1} - \frac{2a-3}{-(2a-1)} =$
$= \frac{4}{2a-1} + \frac{2a-3}{2a-1} = \frac{4+2a-3}{2a-1} = \frac{2a+1}{2a-1}$.

Применяя основное свойство рациональной дроби, можно сложение и вычитание дробей с разными знаменателями свести к сложению и вычитанию дробей с одинаковыми знаменателями.

З а д а ч а 2. Упростите выражение:

1) $\frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n}$; 2) $\frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15}$.

Решение. 1) $\frac{10n+14}{n^2-49} + \frac{6}{7-n} = \frac{10n+14}{(n-7)(n+7)} -$

$- \frac{6^{\backslash n+7}}{n-7} = \frac{10n+14-6(n+7)}{(n-7)(n+7)} = \frac{10n+14-6n-42}{(n-7)(n+7)} =$

$= \frac{4n-28}{(n-7)(n+7)} = \frac{4(n-7)}{(n-7)(n+7)} = \frac{4}{n+7}.$

2) $\frac{2a}{25-10a+a^2} - \frac{1}{3a-15} = \frac{2a}{(5-a)^2} - \frac{1}{3(a-5)} =$

$= \frac{2a^{\backslash 3}}{(a-5)^2} - \frac{1^{\backslash a-5}}{3(a-5)} = \frac{6a-a+5}{3(a-5)^2} = \frac{5a+5}{3(a-5)^2}.$

❗ Произведением двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителей данных дробей, а знаменатель — произведению их знаменателей.

❗ Частным двух рациональных дробей является рациональная дробь, числитель которой равен произведению числителя делимого и знаменателя делителя, а знаменатель — произведению знаменателя делимого и числителя делителя.

❗ Чтобы возвести рациональную дробь в натуральную степень, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель. Первый результат записать как числитель, а второй — как знаменатель дроби:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}, \text{ где } n \text{ — натуральное число.}$$

Задача 3. Выполните деление:

$$\frac{a^2+2ab}{a+9} : \frac{a^2-4b^2}{3a+27}.$$

**Решение.** $\dfrac{a^2+2ab}{a+9} : \dfrac{a^2-4b^2}{3a+27} = \dfrac{a(a+2b)}{a+9} \times$

$\times \dfrac{3(a+9)}{(a-2b)(a+2b)} = \dfrac{3a}{a-2b}$.

**Задача 4.** Упростите выражение

$$\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}.$$

**Решение.** 1) $\dfrac{3a}{a-2}-\dfrac{6a}{a^2-4a+4}=\dfrac{3a^{\backslash a-2}}{a-2}-\dfrac{6a}{(a-2)^2}=$

$=\dfrac{3a^2-6a-6a}{(a-2)^2}=\dfrac{3a^2-12a}{(a-2)^2}$;

2) $\dfrac{3a^2-12a}{(a-2)^2}:\dfrac{a-4}{a^2-4}=\dfrac{3a^2-12a}{(a-2)^2}\cdot\dfrac{a^2-4}{a-4}=$

$=\dfrac{3a(a-4)}{(a-2)^2}\cdot\dfrac{(a-2)(a+2)}{a-4}=\dfrac{3a(a+2)}{a-2}=\dfrac{3a^2+6a}{a-2}$;

3) $\dfrac{3a^2+6a}{a-2}-\dfrac{2a^2+8a}{a-2}=\dfrac{3a^2+6a-2a^2-8a}{a-2}=$

$=\dfrac{a^2-2a}{a-2}=\dfrac{a(a-2)}{a-2}=a$.

**Ответ:** $a$.

Преобразование рационального выражения можно выполнять не по отдельным действиям, а «цепочкой».

**Задача 5.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения $\dfrac{3a}{a-3}+\dfrac{a+5}{18-6a}\cdot\dfrac{54a}{5a+a^2}$ не зависит от значения $a$.

**Решение.** $\frac{3a}{a-3} + \frac{a+5}{18-6a} \cdot \frac{54a}{5a+a^2} = \frac{3a}{a-3} +$

$+ \frac{a+5}{6(3-a)} \cdot \frac{54a}{a(5+a)} = \frac{3a}{a-3} + \frac{9}{3-a} = \frac{3a}{a-3} - \frac{9}{a-3} =$

$= \frac{3a-9}{a-3} = \frac{3(a-3)}{a-3} = 3.$

Следовательно, при всех допустимых значениях $a$ значение данного выражения равно 3.

## Примеры заданий № 6

### Часть 1

**1.** Среди данных рациональных выражений укажите целое.

1) $\frac{b}{b-7}$

2) $\frac{b+3}{b-7}$

3) $\frac{b+3}{7}$

4) ни одно из данных выражений не является целым

**2.** Какое из приведённых выражений имеет смысл при любом значении $x$?

1) $\frac{x-2}{x^2+9}$ 2) $\frac{x-2}{x+9}$ 3) $\frac{x-2}{x-9}$ 4) $\frac{x-2}{x^2-9}$

**3.** При каких значениях $x$ не имеет смысла выражение $\frac{x-5}{x^2-4x}$?

1) −2; 0; 2 3) 0; 4

2) 0; 4; 5 4) 0; 5

**4.** Сократите дробь $\frac{4a^3b^{10}}{8a^9b^2}$.

1) $\frac{b^8}{2a^6}$ 2) $\frac{b^5}{2a^3}$ 3) $\frac{1}{2}a^6b^8$ 4) $\frac{1}{2}a^3b^5$

**5.** Сократите дробь $\frac{6x^2-3xy}{3xy}$.

1) $6x^2-1$ 2) $\frac{3x-y}{y}$ 3) $\frac{2x-y}{y}$ 4) $\frac{2y-x}{y}$

**6.** Найдите значение выражения $\frac{a^2-49}{2a-14}$, если $a=2{,}5$.

**7.** Найдите значение выражения $\frac{a}{a^2-64}+\frac{8}{64-a^2}$, если $a=12$.

**8.** Сумма чисел $a$ и $b$, отличных от нуля, равна их произведению. Чему равно значение выражения $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$?

1) $a+b$ 2) 0 3) 1 4) $ab$

**9.** Известно, что $\frac{a}{b}=3$. Найдите значение выражения $\frac{2a-3b}{a}$.

**10.** Упростите выражение $\frac{a^2-5a}{a+6}-\frac{36-5a}{a+6}$.

1) $\frac{a^2+36}{a+6}$
2) $\frac{a-6}{a+6}$
3) $a+6$
4) $a-6$

**11.** Укажите выражение, тождественно равное разности $\frac{1}{ab-b^2} - \frac{1}{a^2-ab}$.

1) $\frac{1}{ab}$ 2) $\frac{1}{a}$ 3) $\frac{1}{b}$ 4) $\frac{1}{a-b}$

**12.** Найдите значение выражения $\frac{3}{x} - \frac{6}{5x}$, если $x = -3{,}6$.

**13.** Найдите значение выражения $\frac{1}{9m} - \frac{9m+n}{9mn}$, если $m = 10{,}28$, $n = -\frac{1}{3}$.

**14.** Найдите значение выражения $x - \frac{x^2-7y}{x}$, если $x = 140$, $y = -26$.

**15.** Найдите значение выражения $\frac{8}{2b-b^2} - \frac{4}{b}$, если $b = -14$.

**16.** Укажите выражение, тождественно равное произведению $24m^3n^2 \cdot \frac{n^4}{8m^6}$.

1) $\frac{3n^6}{m^3}$ 2) $\frac{3n^8}{m^2}$ 3) $\frac{16n^6}{m^3}$ 4) $\frac{16n^8}{m^2}$

**17.** Укажите выражение, тождественно равное произведению $\frac{k^2+4k+4}{k-3} \cdot \frac{k-3}{k^2-4}$.

1) 1 2) −1 3) $\frac{k-2}{k+2}$ 4) $\frac{k+2}{k-2}$

**18.** Найдите значение выражения $\frac{7m}{m-n} \cdot \frac{mn-n^2}{14m}$, если $m = 24$, $n = 5$.

**19.** Выполните возведение в степень: $\left(-\dfrac{2a^2}{c^3}\right)^5$.

1) $-\dfrac{32a^{10}}{c^{15}}$ 2) $-\dfrac{10a^7}{c^8}$ 3) $\dfrac{10a^{10}}{c^{15}}$ 4) $\dfrac{32a^7}{c^8}$

**20.** Укажите выражение, тождественно равное частному $\dfrac{28a}{c^3} : (4a^2c)$.

1) $\dfrac{7}{a^2c^4}$ 2) $\dfrac{7}{ac^2}$ 3) $\dfrac{7}{a^2c^3}$ 4) $\dfrac{7}{ac^4}$

**21.** Найдите значение выражения $\dfrac{a^2-b^2}{b} : \dfrac{ab+b^2}{b}$, если $a = 1{,}5$, $b = -0{,}3$.

**22.** Найдите значение выражения $\dfrac{5xy^2}{x^2-36y^2} : \dfrac{xy}{x-6y}$, если $x = 6$, $y = -1{,}2$.

**23.** Найдите значение выражения $(c+8) : \dfrac{c^2+16c+64}{c-8}$, если $c = 12$.

**24.** Найдите значение выражения $\dfrac{a-7b}{a} : \dfrac{ab-7b^2}{a^2}$, если $a = 28$, $b = 35$.

**25.** Найдите значение выражения $\left(\dfrac{1}{5a}-\dfrac{1}{7a}\right) \cdot \dfrac{a^2}{4}$, если $a = -8{,}4$.

**26.** Найдите значение выражения $\left(\dfrac{2m+7n}{2m^2-7mn}-\dfrac{1}{m}\right) : \dfrac{n}{7n-2m}$, если $m = -2{,}8$, $n = 3{,}46$.

**27.** Найдите значение выражения

$$(c^3 - 400c)\left(\frac{1}{c+20} - \frac{1}{c-20}\right), \text{ если } c = -1{,}5.$$

**28.** Найдите значение выражения $\frac{5a}{3b} - \frac{25a^2 - 9b^2}{15ab} + \frac{5a - 3b}{5a}$, если $a = 64$, $b = -17$.

**29.** Найдите значение выражения $\frac{25a^2 - b^2}{5ab} : \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{5a}\right)$, если $a = 2\frac{3}{11}$, $b = 2\frac{4}{11}$.

## Часть 2

**30.** Сократите дробь $\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}{(x+3)(x-2)}$.

**31.** Сократите дробь $\frac{a^2 - 36}{ab - 6b + 30 - 5a}$.

**32.** Найдите значение выражения $\frac{p(a)}{p(14-a)}$, если $p(a) = \frac{a(14-a)}{a-7}$.

**33.** Найдите значение выражения $\frac{p(a)}{p\left(\frac{1}{a}\right)}$, если

$$p(a) = \left(a + \frac{12}{a}\right)\left(12a + \frac{1}{a}\right).$$

**34.** Упростите выражение $\frac{a-6}{a^2 + 3a} - \frac{a-3}{a} + \frac{a}{a+3}$.

**35.** Упростите выражение

$$\left(\frac{x}{x^2 - 8x + 16} - \frac{x+6}{x^2 - 16}\right) : \frac{x+12}{x^2 - 16}.$$

**36.** Упростите выражение $\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}\right):\frac{4x}{x^2-1}$.

**37.** Упростите выражение $\left(\frac{7}{x-3}-x-3\right)\cdot\frac{3-x}{x^2+8x+16}$.

**38.** Упростите выражение $\frac{5b}{b-3}-\frac{b+6}{2b-6}\cdot\frac{90}{b^2+6b}$.

**39.** Упростите выражение $\left(\frac{a+3}{a^2-1}-\frac{1}{a^2+a}\right):\frac{3a+3}{a^2-a}$.

**40.** Упростите выражение

$$\left(\frac{2x-1}{x^2+2x+4}+\frac{1}{x-2}+\frac{9x+6}{x^3-8}\right)\cdot\frac{x^2-4}{9}.$$

**41.** Известно, что $2x-\frac{1}{x}=8$. Найдите значение выражения $4x^2+\frac{1}{x^2}$.

**42.** Найдите значение выражения $29a-13b+27$, если $\frac{3a+5b+6}{8a-2b+7}=4$.

**43.** Упростите выражение

$$\frac{2c+5}{c-4}-\frac{9}{(c-4)^2}:\frac{9}{c^2-16}-\frac{5c-15}{c-4}.$$

**44.** Докажите тождество

$$\left(\frac{2a}{a+3}-\frac{4a}{a^2+6a+9}\right):\frac{a+1}{a^2-9}-\frac{a^2-9a}{a+3}=a.$$

**45.** Докажите, что при всех допустимых значениях переменной значение выражения

$\frac{a}{a+2}-\left(\frac{a}{a^2-4}+\frac{a}{a^2-4a+4}\right):\frac{2a}{(2-a)^2}$ не зависит от значения $a$.

## 5.5. Степень с нулевым и целым отрицательным показателями

❗ Для любого числа $a$, не равного нулю, и натурального числа $n$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Например, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-4)^{-2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$, $(0,3)^{-1} = \frac{1}{0,3} = \frac{10}{3}$.

❗ Для любого числа $a$, не равного нулю, $a^0 = 1$.

Например, $5^0 = 1$, $(-17)^0 = 1$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^0 = 1$, $\pi^0 = 1$.

❗ Выражение $0^n$ при целых $n$, меньших или равных нулю, не имеет смысла.

**Степень с целым показателем обладает следующими свойствами.**

1. Для любого $a \neq 0$ и любых целых $m$ и $n$ выполняются равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$
$$a^m : a^n = a^{m-n};$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

2. Для любых $a \neq 0$ и $b \neq 0$ и любого целого $n$ выполняются равенства:

$$(ab)^n = a^n b^n;$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

**Задача 1.** Найдите значение выражения

$$\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8}\cdot\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\right)^{-5}.$$

**Решение.** $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-8}\cdot\left(\left(\frac{5}{6}\right)^{3}\right)^{-5}=\left(\frac{36}{25}\right)^{-8}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-15}=$

$$=\left(\left(\frac{6}{5}\right)^{2}\right)^{-8}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{-15}=\left(\frac{6}{5}\right)^{-16}\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{15}=\left(\frac{6}{5}\right)^{-1}=\frac{5}{6}.$$

**Задача 2.** Представьте выражение

$(a-b)^{-2}(a^{-2}-b^{-2})$ в виде рациональной дроби.

**Решение.** $(a-b)^{\ 2}(a^{\ 2}-b^{\ 2})=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)=$

$$=\frac{1}{(a-b)^2}\cdot\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{1}{(b-a)^2}\cdot\frac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2}=$$

$$=\frac{b+a}{a^2b^2(b-a)}=\frac{b+a}{a^2b^3-a^3b^2}.$$

## 5.6. Стандартный вид числа

**Стандартным видом числа** называют его запись в виде произведения $a\cdot 10^n$, где $1\leqslant a<10$ и $n$ — целое число.

Число $n$ называют **порядком числа**, записанного в стандартном виде.

**Задача.** Запишите в стандартном виде число и укажите его порядок: 1) 564 000 000; 2) 0,0036.

**Решение.** 1) $564\,000\,000=5{,}64\cdot 100\,000\,000=$
$=5{,}64\cdot 10^8$. Порядок числа равен 8.

2) $0{,}0036=3{,}6\cdot 0{,}001=3{,}6\cdot\frac{1}{1000}=3{,}6\cdot\frac{1}{10^3}=$

$=3{,}6\cdot 10^{-3}$. Порядок числа равен $-3$.

## Примеры заданий № 7

### Часть 1

**1.** В какое из следующих выражений можно преобразовать выражение $\frac{1}{a^4} \cdot \frac{1}{a^2}$?

1) $a^{-6}$ 2) $a^{-8}$ 3) $a^6$ 4) $a^8$

**2.** Сравните значения выражений $0{,}6^{-6}$ и $(-0{,}6)^6$.

1) $0{,}6^{-6} = (-0{,}6)^6$ 3) $0{,}6^{-6} > (-0{,}6)^6$

2) $0{,}6^{-6} < (-0{,}6)^6$ 4) сравнить невозможно

**3.** Какое из данных выражений при любых целых значениях $n$ равно степени $3^{4-n}$?

1) $(3^4)^{-n}$ 2) $3^4 - 3^n$ 3) $\frac{3^4}{3^n}$ 4) $\frac{3^4}{3^{-n}}$

**4.** Найдите значение выражения $\frac{7^{-4} \cdot 7^{-7}}{7^{-9}}$.

1) 49 2) $-49$ 3) $\frac{1}{49}$ 4) $-\frac{1}{49}$

**5.** В какое из следующих выражений можно преобразовать дробь $\frac{(a^{-3})^{-5}}{a^{-4}}$?

1) $a^{11}$ 2) $a^{19}$ 3) $a^4$ 4) $a^{-4}$

**6.** В какое из следующих выражений можно преобразовать выражение $(m^4)^{-6} \cdot m^8$?

1) $m^6$ 2) $m^{-32}$ 3) $m^{18}$ 4) $m^{-16}$

**7.** В какое из следующих выражений можно преобразовать дробь $\frac{(3x)^2 \cdot x^{-11}}{x^{-12} \cdot 2x^3}$?

1) 1,5 2) $1{,}5x^{14}$ 3) 4,5 4) $4{,}5x^{-18}$

8. Чему равно значение выражения $5^{-5} : 25^{-2}$?

9. Найдите значение выражения $\frac{1}{8}m^{-2}n^{3} \cdot 40m^{3}n^{-4}$

при $m = \frac{1}{6}$, $n = \frac{1}{12}$.

10. Найдите значение выражения $\frac{0{,}1^{-3} \cdot 0{,}01^{5}}{1000^{-2}}$.

11. Найдите значение выражения $\frac{21^{5} \cdot 3^{-8}}{63^{-2} \cdot 7^{7}}$.

12. Укажите стандартный вид числа 0,00032.

1) $0{,}32 \cdot 10^{-3}$ 3) $3{,}2 \cdot 10^{-5}$

2) $32 \cdot 10^{-5}$ 4) $3{,}2 \cdot 10^{-4}$

13. Площадь территории Красноярского края составляет 2340 тыс. км$^2$. Как записывают эту величину в стандартном виде?

1) $2{,}34 \cdot 10^{3}$ км$^2$

2) $2{,}34 \cdot 10^{4}$ км$^2$

3) $2{,}34 \cdot 10^{5}$ км$^2$

4) $2{,}34 \cdot 10^{6}$ км$^2$

14. Расстояние от Юпитера до Солнца составляет 778,1 млн км. Как записывают эту величину в стандартном виде?

1) $7{,}781 \cdot 10^{7}$ км

2) $7{,}781 \cdot 10^{8}$ км

3) $77{,}81 \cdot 10^{7}$ км

4) $77{,}81 \cdot 10^{8}$ км

15. Укажите порядок числа 0,0046.

1) $-3$ 2) 3 3) 4 4) $-4$

16. Порядок числа $b$ равен $-5$. Определите порядок числа $1000b$.

**17.** В таблице приведены запасы некоторых веществ в минеральных ресурсах мира. Запасы какого из этих веществ наибольшие?

| **Вещество** | Алюминий | Марганец | Олово | Цинк |
|---|---|---|---|---|
| **Запасы, т** | $1{,}1 \cdot 10^9$ | $6{,}35 \cdot 10^8$ | $4{,}76 \cdot 10^6$ | $1{,}12 \cdot 10^8$ |

1) алюминий 2) марганец 3) олово 4) цинк

**18.** В таблице приведены массы атомов некоторых химических элементов. Масса атома какого из этих элементов наименьшая?

| **Элемент** | Азот | Гелий | Золото | Медь |
|---|---|---|---|---|
| **Масса атома, кг** | $2{,}32 \times 10^{-26}$ | $6{,}64 \times 10^{-27}$ | $3{,}27 \times 10^{-25}$ | $1{,}05 \times 10^{-25}$ |

1) азот 2) гелий 3) золото 4) медь

**19.** Найдите значение выражения

$(4{,}3 \cdot 10^{\;2}) \cdot (6 \cdot 10^{\;3})$.

**20.** Чему равна площадь квадрата со стороной $3{,}5 \cdot 10^{-2}$ м?

1) $12{,}25 \cdot 10^{-2}$ м$^2$ 3) $1{,}225 \cdot 10^{-3}$ м$^2$

2) $1{,}225 \cdot 10^{-4}$ м$^2$ 4) $12{,}25 \cdot 10^{-5}$ м$^2$

**21.** Укажите стандартный вид значения частного $(1{,}3 \cdot 10^{-6}) : (6{,}5 \cdot 10^{-2})$.

1) $2 \cdot 10^{-4}$ 2) $2 \cdot 10^{-5}$ 3) $5 \cdot 10^{-4}$ 4) $5 \cdot 10^{-5}$

## Часть 2

**22.** Представьте в виде дроби выражение

$(x^{-2} + y^{-2})(x^2 + y^2)^{-1}$.

**23.** Упростите выражение $1\dfrac{9}{16}a^6b^{-9} \cdot \left(1\dfrac{1}{4}ab^{-3}\right)^{-3}$.

**24.** Преобразуйте выражение $\left(\frac{a^{-6}}{b^{5}}\right)^{-2} \cdot (a^{-4}b)^{4}$ так, чтобы оно не содержало степеней с отрицательным показателем.

**25.** Сократите дробь $\frac{24^{n}}{2^{3n-2} \cdot 3^{n-1}}$.

# § 6. Корень из числа

## 6.1. Квадратный корень. Арифметический квадратный корень

**Квадратным корнем** из числа $a$ называют число, квадрат которого равен $a$.

Например, квадратными корнями из числа 9 являются числа 3 и $-3$; квадратными корнями из числа $\frac{25}{4}$ являются числа $\frac{5}{2}$ и $-\frac{5}{2}$.

Квадратным корнем из числа 0 является число 0.

**Арифметическим квадратным корнем** из числа $a$ называют неотрицательное число, квадрат которого равен $a$.

Арифметический квадратный корень из числа $a$ обозначают $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{\phantom{a}}$ называют **знаком квадратного корня** или **радикалом** (от латинского слова *radix* — корень).

Запись $\sqrt{a}$ читают «квадратный корень из $a$», опуская при чтении слово «арифметический».

Выражение, которое стоит под знаком радикала, называют **подкоренным выражением**. Например, в записи $\sqrt{b-5}$ двучлен $b-5$ является подкоренным выражением. Из определения арифметического квадратного корня следует, что подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения.

Действие нахождения арифметического квадратного корня из числа называют **извлечением квадратного корня**.

Например, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$, $\sqrt{0} = 0$.

Для любого неотрицательного числа $a$ справедливо, что $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $(\sqrt{a})^2 = a$.

Например, $(\sqrt{4})^2 = 4$, $(\sqrt{2})^2 = 2$, $(\sqrt{5{,}2})^2 = 5{,}2$.

## 6.2. Свойства арифметического квадратного корня

1. Для любого действительного числа $a$ выполняется равенство

$$\sqrt{a^2} = |a|.$$

2. Для любых действительного числа $a$ и натурального числа $n$ выполняется равенство

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|.$$

3. Для любых действительных чисел $a$ и $b$ таких, что $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

4. Для любых действительных чисел $a$ и $b$ таких, что $a \geqslant 0$ и $b > 0$, выполняется равенство

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Преобразуем выражение $\sqrt{48}$. Имеем:

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}.$$

Выражение $\sqrt{48}$ мы представили в виде произведения рационального числа 4 и иррационального числа $\sqrt{3}$. Такое преобразование называют **вынесением множителя из-под знака корня.** В данном случае был вынесен из-под корня множитель 4.

Рассмотрим выполненное преобразование в обратном порядке:

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48}.$$

Такое преобразование называют **внесением множителя под знак корня.** В данном случае был внесён под корень множитель 4.

Задача 1. Вынесите множитель из-под знака корня: 1) $\sqrt{72a^8}$; 2) $\sqrt{b^{35}}$; 3) $\sqrt{-b^{35}}$; 4) $\sqrt{a^2b^3}$, если $a < 0$.

Решение. 1) $\sqrt{72a^8} = \sqrt{36a^8 \cdot 2} = 6|a^4|\sqrt{2} = 6a^4\sqrt{2}$.

2) Поскольку подкоренное выражение должно быть неотрицательным, то из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда

$$\sqrt{b^{35}} = \sqrt{b^{34}b} = |b^{17}|\sqrt{b} = b^{17}\sqrt{b}.$$

3) Из условия следует, что $b \leqslant 0$. Тогда

$$\sqrt{-b^{35}} = \sqrt{b^{34} \cdot (-b)} = |b^{17}|\sqrt{-b} = -b^{17}\sqrt{-b}.$$

4) Поскольку подкоренное выражение должно быть неотрицательным, а $a \neq 0$, то из условия следует, что $b \geqslant 0$. Тогда $\sqrt{a^2b^3} = \sqrt{a^2b^2b} = |a| \cdot |b|\sqrt{b} = -ab\sqrt{b}$.

Задача 2. Внесите множитель под знак корня: 1) $-2\sqrt{7}$; 2) $a\sqrt{7}$.

Решение. 1) $-2\sqrt{7} = -\sqrt{4}\cdot\sqrt{7} = -\sqrt{28}$.

2) Если $a \geqslant 0$, то $a\sqrt{7} = \sqrt{a^2}\cdot\sqrt{7} = \sqrt{7a^2}$;

если $a < 0$, то $a\sqrt{7} = -\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{7} = -\sqrt{7a^2}$.

## 6.3. Тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни

Задача 1. Упростите выражение:

1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a}$;

2) $(7 - 3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10} + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{5})$.

Решение. 1) $\sqrt{54a} + \sqrt{24a} - \sqrt{600a} = \sqrt{9\cdot 6a} + \sqrt{4\cdot 6a} - \sqrt{100\cdot 6a} = 3\sqrt{6a} + 2\sqrt{6a} - 10\sqrt{6a} = \sqrt{6a}(3 + 2 - 10) = \sqrt{6a}\cdot(-5) = -5\sqrt{6a}$.

2) Применяя формулы сокращённого умножения (квадрат двучлена и произведение суммы и разности двух выражений), получаем:

$$(7-3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{10}+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{5}) =$$
$$= 7^2 - 2\cdot 7\cdot 3\sqrt{2} + (3\sqrt{2})^2 - ((\sqrt{10})^2 - (\sqrt{5})^2) =$$
$$= 49 - 42\sqrt{2} + 18 - (10-5) = 62 - 42\sqrt{2}.$$

Задача 2. Разложите на множители выражение: 1) $a^2 - 2$; 2) $b - 4$, если $b \geqslant 0$; 3) $9c - 6\sqrt{5c} + 5$; 4) $a + \sqrt{a}$; 5) $\sqrt{3} + 6$; 6) $\sqrt{35} - \sqrt{15}$.

Решение. 1) Представив данное выражение в виде разности квадратов, получаем:

$$a^2 - 2 = a^2 - (\sqrt{2})^2 = (a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2}).$$

2) Поскольку по условию $b \geqslant 0$, то $b - 4 =$
$= (\sqrt{b})^2 - 4 = (\sqrt{b} - 2)(\sqrt{b} + 2)$.

3) Применим формулу квадрата разности:
$9c - 6\sqrt{5c} + 5 = (3\sqrt{c})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{c} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 =$
$= (3\sqrt{c} - \sqrt{5})^2$.

4) $a + \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 + \sqrt{a} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)$.

5) $\sqrt{3} + 6 = \sqrt{3} + 2 \cdot (\sqrt{3})^2 = \sqrt{3}(1 + 2\sqrt{3})$.

6) $\sqrt{35} - \sqrt{15} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5}(\sqrt{7} - \sqrt{3})$.

**Задача 3.** Сократите дробь: 1) $\dfrac{b-1}{\sqrt{b}+1}$; 2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$;
3) $\dfrac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b}$, если $a > 0$, $b > 0$.

**Решение.** 1) Разложив числитель данной дроби на множители, получаем:

$$\frac{b-1}{\sqrt{b}+1} = \frac{(\sqrt{b})^2 - 1}{\sqrt{b}+1} = \frac{(\sqrt{b}-1)(\sqrt{b}+1)}{\sqrt{b}+1} = \sqrt{b} - 1.$$

2) $\dfrac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{(\sqrt{2})^2 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-3)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 3.$

3) Поскольку по условию $a > 0$ и $b > 0$, то числитель и знаменатель данной дроби можно разложить на множители. Имеем:

$$\frac{a-b}{a-2\sqrt{ab}+b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2} = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}.$$

**Задача 4.** Докажите тождество

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right) \cdot \left(\sqrt{a} - \frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) = \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Решение.

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\frac{2\sqrt{ab}}{b-a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})+2\sqrt{ab}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}\times$$

$$\times\left(\sqrt{a}-\frac{\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)=\frac{a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}}{a-b}\times$$

$$\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\frac{(a+2\sqrt{ab}+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}=$$

$$=\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})}=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

## 6.4. Корень третьей степени

**Корнем третьей степени (кубическим корнем)** из числа $a$ называют число, куб которого равен $a$.

Кубический корень из числа $a$ обозначают $\sqrt[3]{a}$.

Например,

$\sqrt[3]{8}=2$, так как $2^3=8$;

$\sqrt[3]{125}=5$, так как $5^3=125$;

$\sqrt[3]{0}=0$, так как $0^3=0$;

$\sqrt[3]{-27}=-3$, так как $(-3)^3=-27$.

## 6.5. Запись корня с помощью степени с дробным показателем

**Степенью положительного числа** $a$ **с рациональным показателем** $r$, представленным в виде

$\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$, $n > 1$, называют число $\sqrt[n]{a^m}$, т. е.

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Например, $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2}$; $3^{-\frac{1}{3}} = 3^{\frac{-1}{3}} = \sqrt[3]{3^{-1}}$; $0{,}4^{0,5} = 0{,}4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0{,}4}$.

Степень с основанием, равным нулю, определяют только для положительного рационального показателя:

$0^{\frac{m}{n}} = 0$, где $m \in N$, $n \in N$.

Например, запись $0^{-\frac{1}{2}}$ не имеет смысла.

В определениях не идёт речи о степени $a^{\frac{m}{n}}$ для $a < 0$, например выражение $(-2)^{\frac{1}{3}}$ осталось неопределённым.

## 6.6. Понятие об иррациональном числе. Десятичные приближения иррациональных чисел

Установлено, что

$\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242097...$ .

Число $\sqrt{2}$ представлено в виде **бесконечной непериодической десятичной дроби**. Это число не является рациональным, поскольку любое рациональное число представляется в виде конечной десятичной дроби или бесконечной периодической десятичной дроби. Число $\sqrt{2}$ — это пример иррационального числа.

Число $\pi$, равное отношению длины окружности к диаметру, также является иррациональным:

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288\ldots.$$

Иррациональные числа возникают не только в результате извлечения квадратных корней. Их можно конструировать, строя бесконечные непериодические десятичные дроби.

Например, число $0{,}101001000100001000000\ldots$ (после запятой записываются последовательно степени числа 10) является иррациональным. Действительно, если предположить, что рассматриваемая десятичная дробь имеет период, состоящий из $n$ цифр, то с некоторого места этот период будет полностью состоять из нулей, т. е. начиная с этого места в записи не должно быть ни одной единицы, что противоречит конструкции числа.

Для нахождения длины окружности и площади круга, используют **приближённое значение числа $\pi$** ($\pi \approx 3{,}14$). Аналогично при решении практических задач, где необходимо выполнить действия с действительными числами, эти числа заменяют их приближёнными значениями. Например, для числа $\sqrt{2}$ пользуются такими приближёнными равенствами: $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ или $\sqrt{2} \approx 1{,}415$. Первое из них называют приближённым значением числа $\sqrt{2}$ **по недостатку** с точностью до $0{,}001$, второе — приближённым значением числа $\sqrt{2}$ **по избытку** с точностью до $0{,}001$.

## 6.7. Понятие о множестве. Числовые множества. Множество действительных чисел

Часто в повседневной жизни объединённые по некоторому признаку объекты мы называем группой, объединением, коллекцией, совокупностью и т. п. Для этих слов в математике существует синоним — **множество**.

Приведём несколько примеров множеств:

- множество учеников вашей школы;
- множество городских округов Алтайского края.

Отдельным важнейшим множествам присвоены общепринятые названия и обозначения:

- множество точек плоскости — **геометрическая фигура**;
- множество точек, обладающих заданным свойством, — **геометрическое место точек (ГМТ)**;
- множество натуральных чисел, которое обозначают буквой $N$;
- множество целых чисел, которое обозначают буквой $Z$;
- множество рациональных чисел, которое обозначают буквой $Q$.

Если элемент $a$ принадлежит множеству $A$, то пишут: $a \in A$ (читают: «$a$ принадлежит множеству $A$»). Если элемент $b$ не принадлежит множеству $A$, то пишут: $b \notin A$ (читают: «$b$ не принадлежит множеству $A$»).

Например, $12 \in N$; $-3 \notin N$; $\frac{2}{3} \in Q$; $\frac{2}{3} \notin Z$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют **пустым** и обозначают символом $\varnothing$.

Например, множество корней уравнения $\sqrt{x} = -1$ является пустым.

Два множества $A$ и $B$ называют **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. каждый элемент множества $A$ принадлежит множеству $B$ и, наоборот, каждый элемент множества $B$ принадлежит множеству $A$.

Если множества $A$ и $B$ равны, то пишут $A = B$.

Множество $B$ называют **подмножеством** множества $A$, если каждый элемент множества $B$ является элементом множества $A$. Это записывают так: $B \subset A$ или $A \supset B$ (читают: «множество $B$ — подмножество множества $A$» или «множество $A$ содержит множество $B$»).

Например, $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z}$; $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q}$; $\boldsymbol{Q} \supset \boldsymbol{N}$.

Для иллюстрации соотношений между множествами пользуются схемами, которые называют **диаграммами Эйлера**.

На рисунке 6.1 изображены множество $A$ (больший круг) и множество $B$ (меньший круг, полностью содержащийся в большем). Эта схема означает, что $B \subset A$.

На рисунке 6.2 с помощью диаграмм Эйлера показано соотношение между множествами $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$ и $\boldsymbol{Q}$.

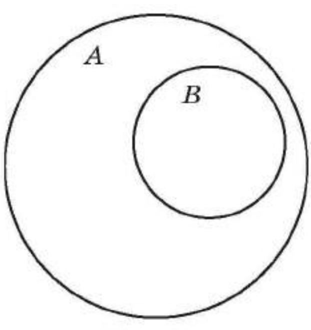


Рис. 6.1

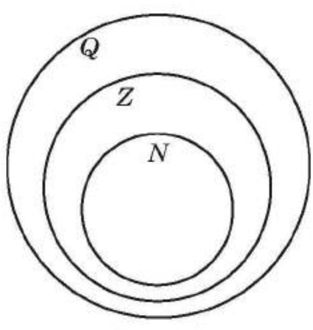


Рис. 6.2

Все рациональные и иррациональные числа вместе образуют **множество действительных чисел**, которое обозначают буквой $\boldsymbol{R}$.

Таким образом, между числовыми множествами выполняется соотношение: $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{Q} \subset \boldsymbol{R}$.

Над действительными числами можно выполнять четыре арифметических действия (кроме деления на нуль), в результате получим действительное число. Эти действия обладают такими свойствами:

$a + b = b + a$ — переместительное свойство сложения;

$ab = ba$ — переместительное свойство умножения;

$(a + b) + c = a + (b + c)$ — сочетательное свойство сложения;

$(ab)\,c = a(bc)$ — сочетательное свойство умножения;

$a\,(b + c) = ab + ac$ — распределительное свойство умножения.

Положительные действительные числа можно сравнивать, используя правила сравнения десятичных дробей, т. е. сравнивая цифры в соответствующих разрядах. Например, $7{,}853126... < 7{,}853211...$ .

❗ Любое положительное действительное число больше нуля и любого отрицательного действительного числа. Любое отрицательное действительное число меньше нуля. Из двух отрицательных действительных чисел больше то, у которого модуль меньше.

## Примеры заданий № 8

### Часть 1

**1.** При каком значении $y$ верно равенство $\sqrt{y} = 0{,}4$?

1) 0,4 2) 1,6 3) 0,16 4) 0,04

**2.** Укажите неверное равенство.

1) $\sqrt{4900} = 70$ 3) $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$

2) $\sqrt{0{,}04} = 0{,}02$ 4) $\sqrt{400} = 20$

**3.** Какое из чисел $\sqrt{0{,}81}$, $\sqrt{8{,}1}$, $\sqrt{81}$ является иррациональным?

1) $\sqrt{0{,}81}$ 3) $\sqrt{81}$

2) $\sqrt{8{,}1}$ 4) все эти числа иррациональные

**4.** Чему равно значение выражения $\left(\frac{1}{3}\sqrt{27}\right)^2$?

**5.** Вычислите значение выражения $\frac{b^2}{4}$ при $b = 2\sqrt{5}$.

1) $\sqrt{5}$ 2) 5 3) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 4) $\frac{5}{2}$

**6.** Найдите значение выражения $\sqrt{5^2 \cdot 2^6}$.

**7.** При каких значениях $a$ и $b$ выполняется равенство $\sqrt{-ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-b}$?

1) $a > 0,\ b > 0$ 3) $a < 0,\ b < 0$

2) $a \leqslant 0,\ b > 0$ 4) $a \geqslant 0,\ b \leqslant 0$

**8.** Чему равно значение выражения $\sqrt{36 \cdot 0{,}49}$?

1) 420 2) 42 3) 4,2 4) 0,42

**9.** Найдите значение выражения $\sqrt{3 \cdot 7^2} \cdot \sqrt{3 \cdot 5^4}$.

**10.** Найдите значение выражения $\sqrt{60 \cdot 8 \cdot 72}$.

1) $48\sqrt{15}$ 3) $144\sqrt{5}$

2) $24\sqrt{30}$ 4) $240\sqrt{3}$

**11.** Найдите значение выражения $\sqrt{40 \cdot 80} \cdot \sqrt{20}$.

1) $80\sqrt{30}$ 2) $80\sqrt{10}$ 3) 80 4) $800\sqrt{10}$

**12.** Чему равно значение выражения $\dfrac{\sqrt{192}}{\sqrt{3}}$?

**13.** Чему равно значение выражения $\dfrac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$?

**14.** Упростите выражение $\sqrt{9y}+\sqrt{16y}-\sqrt{36y}$.

1) $13y$ 2) $y$ 3) $13\sqrt{y}$ 4) $\sqrt{y}$

**15.** Упростите выражение $12\sqrt{2}-\sqrt{32}$.

1) $6\sqrt{2}$ 2) $8\sqrt{2}$ 3) $4\sqrt{2}$ 4) $12\sqrt{2}$

**16.** Найдите значение выражения $(\sqrt{23}+2)^2$.

1) 25 3) $25 + 4\sqrt{23}$

2) 27 4) $27 + 4\sqrt{23}$

**17.** Найдите значение выражения $(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})$.

1) 4 2) −2 3) 14 4) 8

**18.** Значение какого из данных ниже выражений является рациональным числом?

1) $\sqrt{13}\cdot\sqrt{11}$ 3) $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{32}}$

2) $(\sqrt{13}+\sqrt{11})(\sqrt{13}-\sqrt{11})$ 4) $\sqrt{48}-\sqrt{32}$

**19.** Чему равно значение выражения

$(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+\sqrt{24}$?

1) 1 2) 5 3) $5 - 2\sqrt{6}$ 4) $5 + 2\sqrt{6}$

**20.** Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$.

1) $2\sqrt{3}$ 3) $6\sqrt{3}$

2) $3\sqrt{3}$ 4) $\sqrt{3}$

**21.** Сократите дробь $\frac{a-9}{\sqrt{a}+3}$.

1) $\sqrt{a}-3$ 2) $\sqrt{a}+3$ 3) $a+3$ 4) $a-3$

**22.** Сократите дробь $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$.

1) $\sqrt{15}-1$ 3) $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

2) $\sqrt{3}-1$ 4) $\sqrt{10}-1$

**23.** Значение какого из данных ниже выражений является наименьшим?

1) $\sqrt{19}$ 2) $3\sqrt{2}$ 3) $\frac{\sqrt{34}}{\sqrt{2}}$ 4) $(\sqrt{5})^2$

**24.** В каком случае числа $3\sqrt{3}$, $4\sqrt{2}$ и 5 расположены в порядке возрастания?

1) $3\sqrt{3}$; $4\sqrt{2}$; 5 3) 5; $3\sqrt{3}$; $4\sqrt{2}$

2) $4\sqrt{2}$; $3\sqrt{3}$; 5 4) $3\sqrt{3}$; 5; $4\sqrt{2}$

**25.** Какое из данных чисел принадлежит промежутку [5; 6]?

1) $\sqrt{7}$ 2) $\sqrt{29}$ 3) $\sqrt{37}$ 4) $2\sqrt{6}$

**26.** Между какими числами заключено число $\sqrt{74}$?

1) 8 и 9 2) 7 и 8 3) 73 и 75 4) 9 и 10

**27.** На координатной прямой отмечены точки $A$, $B$, $C$ и $D$ (рис. 6.3). Одна из них соответствует числу $\sqrt{58}$. Какая это точка?

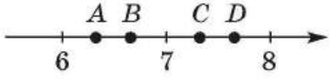



Рис. 6.3

1) $A$ 2) $B$ 3) $C$ 4) $D$

## Часть 2

**28.** Найдите значение выражения

$(3\sqrt{6}+2\sqrt{8}-\sqrt{32})\sqrt{2}-\sqrt{108}$.

**29.** Найдите значение выражения $a^2-2a\sqrt{5}-3$ при $a=\sqrt{5}+3$.

**30.** Найдите значение выражения

$(3-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)^2$.

**31.** Чему равно значение выражения

$(\sqrt{3}+1)^2-(2+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})$?

**32.** Найдите значение выражения $(7-4\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^2$.

**33.** Упростите выражение $\sqrt{49-14a+a^2}$, если $a>7$.

**34.** Найдите значение выражения

$\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2}-\sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$.

**35.** Упростите выражение $\sqrt{(a+b)^2}-\sqrt{9b^2}$, если $a<0$ и $b<0$.

**36.** Упростите выражение $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}-\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

**37.** Найдите значение выражения

$(\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}})^2$.

**38.** Найдите значение выражения $\dfrac{25a-36b}{5\sqrt{a}+6\sqrt{b}}+\sqrt{b}$,

если $\sqrt{a}-\sqrt{b}=8$.

**39.** Найдите значение выражения

$\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{30}+3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{30}+3}+1}$.

**40.** Вычислите сумму $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{11}}+$

$+\frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{15}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{27}+\sqrt{31}}$.

**41.** Упростите выражение

$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}:\left(\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}-\frac{\sqrt{b}+\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)$.

**42.** Упростите выражение $\left(\frac{\sqrt{m}-2}{\sqrt{m}+2}+\frac{8\sqrt{m}}{m-4}\right):\frac{\sqrt{m}+2}{m-2\sqrt{m}}$.

**43.** Найдите значение выражения

$\sqrt{19+6\sqrt{10}}-\sqrt{19-6\sqrt{10}}$.

**44.** Какое из чисел больше: $3+\sqrt{5}$ или $\sqrt{8}+\sqrt{6}$?

**45.** Какое из чисел меньше: $\sqrt{26}+\sqrt{24}$ или 10?

## § 7. Уравнения с одной переменной

### 7.1. Общие сведения об уравнениях с одной переменной

Пусть заданы две функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ и поставлена задача найти множество значений аргумента $x$, при которых значения функций $f$ и $g$ равны. В таком случае говорят, что надо решить уравнение $f(x)=g(x)$.

**Корнем уравнения** называют значение переменной, обращающее уравнение в верное числовое равенство.

**Решить уравнение** — это значит найти множество его корней.

**Областью определения уравнения** $f(x) = g(x)$ называют множество значений переменной $x$, при которых имеют смысл обе части уравнения.

Например:

- областью определения линейного уравнения, то есть уравнения вида $ax = b$, является множество $\boldsymbol{R}$;
- областью определения уравнения $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 0$ является множество всех действительных чисел, кроме числа $-2$.

Несмотря на то, что уравнение $x^2 = -2$ не имеет корней, его областью определения является множество $\boldsymbol{R}$.

Уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называют **равносильными**, если множества их корней равны.

Например, уравнения $x^2 = 4$ и $|x| = 2$ являются равносильными.

Множество корней каждого из уравнений $x^2 = -5$ и $|x| = -3$ является пустым, то есть множества корней этих уравнений равны. Следовательно, по определению, эти уравнения являются равносильными.

❶ Если к обеим частям данного уравнения прибавить (или из обеих частей вычесть) одно и то же число, то получим уравнение, равносильное данному.

❶ Если какое-либо слагаемое перенести из одной части уравнения в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим уравнение, равносильное данному.

❶ Если обе части уравнения умножить (разделить) на одно и то же отличное от нуля число, то получим уравнение, равносильное данному.

Если множество корней уравнения $f_2(x) = g_2(x)$ содержит множество корней уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, то уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ называют **следствием уравнения** $f_1(x) = g_1(x)$.

Например, уравнение $x^2 = 25$ является следствием уравнения $\frac{1}{x-5} + x^2 = 25 + \frac{1}{x-5}$.

На рисунке 7.1 определение уравнения-следствия проиллюстрировано с помощью диаграммы Эйлера.


Рис. 7.1

Те из корней уравнения-следствия, которые не являются корнями данного уравнения, называют **посторонними корнями** данного уравнения.

Например, уравнение $\left(x - \frac{1}{2}\right)(x + 2) = 0$ является следствием уравнения $2x - 1 = 0$. Уравнение-следствие имеет два корня: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -2$, а данное уравнение имеет один корень $x = \frac{1}{2}$. В этом случае корень $x = -2$ — посторонний корень данного уравнения $2x - 1 = 0$.

Так как пустое множество является подмножеством любого множества, то следствием уравнения, не имеющего корней, является любое уравнение с той же переменной. Например, следствием уравнения $x^2 = -5$ является уравнение $4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47$.

## 7.2. Линейное уравнение с одной переменной

Уравнение вида $ax = b$, где $x$ — переменная, $a$ и $b$ — некоторые числа, называют **линейным уравнением с одной переменной.**

Примеры линейных уравнений: $\frac{1}{2}x = 7$; $-0{,}4x = 2{,}8$; $-x = 0$.

Если $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения $ax = b$ на $a$, получим $x = \frac{b}{a}$. Отсюда следует: если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень, равный $\frac{b}{a}$.

Если же $a = 0$, то линейное уравнение приобретает такой вид: $0x = b$. Здесь возможны два случая: $b = 0$ или $b \neq 0$.

В первом случае получаем уравнение $0x = 0$. Отсюда, если $a = 0$ и $b = 0$, то уравнение $ax = b$ имеет бесконечно много корней: любое число является его корнем.

Во втором случае, когда $b \neq 0$, при любом значении $x$ получим неверное равенство $0x = b$. Отсюда, если $a = 0$ и $b \neq 0$, то уравнение $ax = b$ корней не имеет.

Следующая таблица подытоживает приведённые рассуждения.

<table>
<tr><td rowspan="2">Уравнение<br>$ax = b$</td><td>$a \neq 0$</td><td>$a = 0, b = 0$</td><td>$a = 0, b \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$x = \frac{b}{a}$</td><td>$x$ — любое число</td><td>корней нет</td></tr>
</table>

### 7.3. Квадратное уравнение

**Квадратным уравнением** называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $x$ — переменная, $a$, $b$, $c$ — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Числа $a$, $b$ и $c$ называют **коэффициентами квадратного уравнения**. Число $a$ называют **первым** или **старшим коэффициентом**, число $b$ — **вторым коэффициентом**, число $c$ — **свободным членом.**

Например, квадратное уравнение $-2x^2 + 5x + 3 = 0$ имеет следующие коэффициенты: $a = -2$, $b = 5$, $c = 3$.

Квадратное уравнение, первый коэффициент которого равен 1, называют **приведённым.**

Например, $x^2 + \sqrt{2}\,x - 1 = 0$; $x^2 - 4 = 0$; $x^2 + 3x = 0$ — это приведённые квадратные уравнения.

Если в квадратном уравнении $ax^2 + bx + c = 0$ хотя бы один из коэффициентов $b$ или $c$ равен нулю, то такое уравнение называют **неполным квадратным уравнением.**

Существует три вида неполных квадратных уравнений.

1. При $b = c = 0$ имеем: $ax^2 = 0$.

2. При $c = 0$ и $b \neq 0$ имеем: $ax^2 + bx = 0$.

3. При $b = 0$ и $c \neq 0$ имеем: $ax^2 + c = 0$.

Связь между корнями неполного квадратного уравнения и его коэффициентами показана в следующей таблице:

| **Значения коэффициентов $b$ и $c$** | **Уравнение** | **Корни** |
|---|---|---|
| $b = c = 0$ | $ax^2 = 0$ | $x = 0$ |
| $b \neq 0,\ c = 0$ | $ax^2 + bx = 0$ | $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$ |
| $b = 0,\ -\frac{c}{a} < 0$ | $ax^2 + c = 0$ | корней нет |
| $b = 0,\ -\frac{c}{a} > 0$ | $ax^2 + c = 0$ | $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}},\ x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$ |

Число $D = b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$.

❶ Если $D < 0$, то квадратное уравнение корней не имеет.

❶ Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет один корень $x = -\frac{b}{2a}$.

❶ Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня $x_1$ и $x_2$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a},\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Применяют также краткую форму записи: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. Эту запись называют **формулой корней квадратного уравнения** $ax^2 + bx + c = 0$.

Если второй коэффициент квадратного уравнения представить в виде $2k$, то можно пользоваться другой формулой, которая во многих случаях облегчает вычисления:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a}, \text{ где } D_1 = k^2 - ac.$$

**Задача 1.** Решите уравнение:
1) $x^2 + 5x - 3 = 0$; 2) $5x^2 - 16x + 3 = 0$; 3) $x^2 - 6x + 11 = 0$; 4) $-0{,}5x^2 + 2x - 2 = 0$.

**Решение.** 1) $D = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 = 37$.

Уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}$, $x_2 = \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}$.

Ответ: $\frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

2) Представим данное уравнение в виде $5x^2 + 2 \cdot (-8)\,x + 3 = 0$ и применим формулу для уравнения вида $ax^2 + 2kx + c = 0$:

$D_1 = (-8)^2 - 5 \cdot 3 = 49$;

$x_1 = \frac{8 - 7}{5} = \frac{1}{5}$; $x_2 = \frac{8 + 7}{5} = 3$.

Ответ: $\frac{1}{5}$; 3.

3) $D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 36 - 44 = -8 < 0$.
Следовательно, уравнение не имеет корней.
Ответ: корней нет.

4) $D = 2^2 - 4 \cdot (-0{,}5) \cdot (-2) = 4 - 4 = 0$.
Следовательно, данное уравнение имеет один корень:

$x = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{-1} = 2$.

Ответ: 2.

### 7.4. Теорема Виета

**Теорема Виета.** Если $x_1$ и $x_2$ — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Теорема Виета справедлива и тогда, когда $D = 0$. В этом случае считают, что $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$.

❶ Если $x_1$ и $x_2$ — корни приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -b,$$
$$x_1 x_2 = c,$$

т. е. сумма корней приведённого квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену.

**Теорема, обратная теореме Виета.** Если числа $\alpha$ и $\beta$ таковы, что $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ и $\alpha\beta = \frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

❶ Если числа $\alpha$ и $\beta$ таковы, что $\alpha + \beta = -b$ и $\alpha\beta = c$, то эти числа являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2 + bx + c = 0$.

Задача 1. Известно, что $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $2x^2 - 3x - 9 = 0$. Не решая уравнение, найдите значение выражения $\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}$.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$, $x_1 x_2 = -\frac{9}{2}$.

Тогда имеем: $\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1} = \frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{3}{2} : \left(-\frac{9}{2}\right) = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Задача 2. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корни которого равны $\frac{6-\sqrt{7}}{2}$ и $\frac{6+\sqrt{7}}{2}$.

Решение. Пусть $x_1 = \frac{6-\sqrt{7}}{2}$ и $x_1 = \frac{6+\sqrt{7}}{2}$. Тогда $x_1+x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} + \frac{6+\sqrt{7}}{2} = 6$; $x_1x_2 = \frac{6-\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{6+\sqrt{7}}{2} = \frac{36-7}{4} = \frac{29}{4}$.

Следовательно, по теореме, обратной теореме Виета, числа $x_1$ и $x_2$ являются корнями уравнения $x^2 - 6x + \frac{29}{4} = 0$. Отсюда находим искомое уравнение $4x^2 - 24x + 29 = 0$.

### 7.5. Квадратный трёхчлен. Разложение квадратного трёхчлена на множители

**Квадратным трёхчленом** называют многочлен вида $ax^2+bx+c$, где $x$ — переменная, $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа, причём $a \neq 0$.

Примеры многочленов, являющихся квадратными трёхчленами:

$$2x^2-3x+5;\ x^2+7x;\ x^2-5;\ 3x^2.$$

**Корнем квадратного трёхчлена** называют значение переменной, при котором значение квадратного трёхчлена равно нулю.

Например, число 2 является корнем квадратного трёхчлена $x^2 - 6x + 8$.

Чтобы найти корни квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, надо решить соответствующее квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Число $D = b^2 - 4ac$ называют **дискриминантом квадратного трёхчлена** $ax^2 + bx + c$.

❶ Если $D < 0$, то квадратный трёхчлен корней не имеет; если $D = 0$, то квадратный трёхчлен имеет один корень; если $D > 0$ — то имеются два корня.

❶ Если дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, то данный трёхчлен можно разложить на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где $x_1$ и $x_2$ — корни квадратного трёхчлена.

❶ Если дискриминант квадратного трёхчлена отрицателен, то данный трёхчлен нельзя разложить на линейные множители.

З а д а ч а. Сократите дробь $\frac{6a^2 - a - 1}{9a^2 - 1}$.

Р е ш е н и е. Разложим на множители квадратный трёхчлен, являющийся числителем данной дроби:

$$6a^2 - a - 1 = 0;$$

$$a_1 = -\frac{1}{3};\ a_2 = \frac{1}{2};$$

$$6a^2 - a - 1 = 6\left(a + \frac{1}{3}\right)\left(a - \frac{1}{2}\right) = 3\left(a + \frac{1}{3}\right) \cdot 2\left(a - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= (3a + 1)(2a - 1).$$

Тогда имеем:

$$\frac{6a^2-a-1}{9a^2-1}=\frac{(3a+1)(2a-1)}{(3a+1)(3a-1)}=\frac{2a-1}{3a-1}.$$

О т в е т: $\frac{2a-1}{3a-1}$.

## Примеры заданий № 9

### Часть 1

**1.** Какое из приведённых ниже уравнений имеет ровно два корня?

1) $|x-2|=3$ 3) $2x-8=7$
2) $0x=0$ 4) $2(x-3)=0$

**2.** Найдите корень уравнения $-4-3x=2x-6$.

**3.** Найдите корень уравнения $x-\frac{x}{13}=\frac{24}{13}$.

**4.** Решите уравнение $2(4x-3)-(2x-8)=6x+5$.

1) 3 3) $x$ — любое число
2) −3 4) нет корней

**5.** Решите уравнение $4x-2(2-x^2)=x^2+5x-(3-x^2)$.

1) −1 3) $x$ — любое число
2) 1 4) нет корней

**6.** Решите уравнение $3(1-2x)-(-7x+2)=1+x$.

1) 0 3) $x$ — любое число
2) −2 4) нет корней

**7.** Найдите корень уравнения $6(x+4)=-15$.

**8.** Найдите корень уравнения $\frac{9}{x+5}=-\frac{3}{4}$.

**9.** Решите уравнение $(-x-9)(2x+7)=0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший корень.

**10.** При каком значении $x$ значения выражений $x-8$ и $4x+7$ равны?

**11.** Решите уравнение $3(-10 - 3x) = -3x + 12$.

**12.** Решите уравнение $(3x + 1)^2 + (x - 7)^2 = 10x^2$.

**13.** Решите уравнение $(x - 10)^2 = (x + 7)^2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите произведение корней.

**14.** Решите уравнение $-\frac{5}{7}x^2 + 35 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший корень.

**15.** Решите уравнение $27x - \frac{1}{3}x^2 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший корень.

**16.** Решите уравнение $-5x^2 + 4 = 4 - 10x$.

1) 0 2) 2 3) 0; 2 4) корней нет

**17.** Какое из данных уравнений имеет два корня?

1) $x^2 - 4x + 8 = 0$
3) $5x^2 - 2x + 0{,}2 = 0$
2) $3x^2 - 4x - 1 = 0$
4) $2x^2 + 9x + 15 = 0$

**18.** При каком значении $c$ уравнение $6x^2 - 6x + c = 0$ имеет один корень?

**19.** Решите уравнение $x^2 + 16 = 10x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите модуль разности корней.

**20.** Решите уравнение $5x^2 + 9x + 4 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший корень.

**21.** Решите уравнение $3x^2 + x + 29 = (x + 5)^2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший корень.

**22.** Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни $-7$ и $9$. Найдите $q$.

**23.** Уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни $-3$ и $17$. Найдите $p$.

**24.** Чему равно произведение корней уравнения $x^2 - 10x + 3 = 0$?

1) 10 2) 3 3) −10 4) −3

**25.** Чему равна сумма корней уравнения $x^2 - 21x - 10 = 0$?

1) 21 2) −21 3) 10 4) −10

**26.** Разложите на множители многочлен $6x^2 + 7x - 5$.

1) $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{5}{3}\right)$

2) $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{3}\right)$

3) $(2x - 1)(3x + 5)$

4) $(2x + 1)(3x - 5)$

**27.** Квадратный трёхчлен разложен на множители: $5x^2 - 23x - 10 = 5(x - 5)(x - a)$. Найдите значение $a$.

## Часть 2

**28.** При каких значениях $b$ уравнение $3x^2 - bx + 12 = 0$ имеет один корень?

**29.** Решите уравнение $x^2 - 12x + \frac{10}{x+3} = 45 + \frac{10}{x+3}$.

**30.** Решите уравнение $x^2 - 7x + \sqrt{2-x} = \sqrt{2-x} + 8$.

**31.** Решите уравнение $x|x| - 6x - 5 = 0$.

**32.** Решите уравнение $x^2 + 4\sqrt{x^2} - 32 = 0$.

**33.** Решите уравнение $(x^2 - 4)^2 + (x^2 + x - 2)^2 = 0$.

**34.** Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 2x - 8} + |x^2 - 3x - 10| = 0$.

**35.** Сократите дробь $\frac{4a^2 + a - 3}{a^2 - 1}$.

**36.** Сократите дробь $\dfrac{a^2-12a+36}{2a^2-11a-6}$.

**37.** Сократите дробь $\dfrac{a^3-27}{5a^2-16a+3}$.

**38.** При каком значении $a$ разложение на линейные множители трёхчлена $2x^2 + ax - 3$ содержит множитель $2x - 3$?

**39.** Известно, что $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $4x^2 - 5x - 13 = 0$. Найдите значение выражения $x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2$.

**40.** Известно, что $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $2x^2 - 3x - 7 = 0$. Найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2$.

**41.** Известно, что $x_1$ и $x_2$ — корни уравнения $x^2 - 10x + 12 = 0$. Найдите значение выражения $\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_1}{x_2}$.

**42.** Число $-3$ является корнем уравнения $2x^2 + 3x + a = 0$. Найдите другой корень уравнения и значение $a$.

**43.** Корни $x_1$ и $x_2$ уравнения $x^2 + 6x + c = 0$ удовлетворяют условию $3x_1 - 2x_2 = 17$. Найдите значение $c$.

**44.** Составьте квадратное уравнение, корни которого равны $7 - \sqrt{5}$ и $7 + \sqrt{5}$.

**45.** Составьте квадратное уравнение, корни которого больше соответствующих корней уравнения $x^2 + 4x - 9 = 0$ на единицу.

### 7.6. Рациональные уравнения

Уравнение, левая и правая части которого являются рациональными выражениями, называют **рациональным.**

Рассмотрим рациональное уравнение вида $\frac{A}{B} = 0,$ где $A$ и $B$ — многочлены.

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда её числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля. Поэтому, чтобы решить уравнение вида $\frac{A}{B} = 0,$ нужно потребовать одновременного выполнения двух условий: $A = 0$ и $B \neq 0$.

❶ Это значит, что при решении уравнений указанного вида следует руководствоваться таким правилом:

- решить уравнение $A = 0$;
- проверить, какие из найденных корней удовлетворяют условию $B \neq 0$;
- корни, удовлетворяющие условию $B \neq 0$, включить в ответ.

Таким образом, решение уравнения вида $\frac{A}{B} = 0$ сводится к решению уравнения $A = 0$ и проверке условия $B \neq 0$. В таких случаях говорят, что уравнение $\frac{A}{B} = 0$ равносильно системе $\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0. \end{cases}$

З а д а ч а. Решите уравнение

$$\frac{3x+5}{6x+3} + \frac{1}{4x^2-1} = \frac{x}{2x-1}.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\frac{3x+5}{3(2x+1)} + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} - \frac{x}{2x-1} = 0;$$

$$\frac{4x-2}{3(2x-1)(2x+1)} = 0.$$

Полученное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4x - 2 = 0, \\ 3(2x-1)(2x+1) \neq 0. \end{cases}$$

Перепишем эту систему так: $\begin{cases} 4x - 2 = 0, \\ x \neq 0{,}5, \\ x \neq -0{,}5. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x = 0{,}5, \\ x \neq 0{,}5, \\ x \neq -0{,}5. \end{cases}$

Следовательно, исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: корней нет.

## 7.7. Метод замены переменной

Задача 1. Решите уравнение $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Решение. Обозначим $x^2 = t$. Тогда $x^4 = t^2$. Получим квадратное уравнение с переменной $t$:

$$t^2 - 13t + 36 = 0.$$

Решая это уравнение, находим: $t_1 = 4$, $t_2 = 9$.

Поскольку $t = x^2$, то решение исходного уравнения сводится к решению двух уравнений:

$$x^2 = 4 \text{ и } x^2 = 9.$$

Отсюда $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$.

Ответ: $\pm 2$, $\pm 3$.

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $x$ — переменная, $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют **биквадратным уравнением**.

Заменой $x^2 = t$ биквадратное уравнение сводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$. Такой способ решения уравнений называют **методом замены переменной**.

Метод замены переменной можно использовать не только при решении биквадратных уравнений.

Задача 2. Решите уравнение
$(2x-1)^4+(2x-1)^2-2=0.$

Решение. Выполним замену $(2x-1)^2=t$. Исходное уравнение сводится к квадратному уравнению

$$t^2+t-2=0.$$

Отсюда $t_1=-2$, $t_2=1$.

Теперь надо решить следующие два уравнения:

$$(2x-1)^2=-2 \text{ и } (2x-1)^2=1.$$

Первое из них корней не имеет. Из второго уравнения получаем: $2x-1=-1$ или $2x-1=1$.
Отсюда $x_1=0$, $x_2=1$.

Ответ: 0; 1.

Задача 3. Решите уравнение $6x+5\sqrt{x}+1=0$.

Решение. Пусть $\sqrt{x}=t$. Тогда $x=t^2$. Имеем: $6t^2+5t+1=0$. Отсюда $t_1=-\frac{1}{3}$, $t_2=-\frac{1}{2}$.

Получаем два уравнения:

$$\sqrt{x}=-\frac{1}{3};\ \sqrt{x}=-\frac{1}{2}.$$

Так как $\sqrt{x}\geqslant 0$, то эти уравнения корней не имеют, а следовательно, и исходное уравнение корней не имеет.

Ответ: корней нет.

Задача 4. Решите уравнение

$$\frac{x^2-3x-6}{x}-\frac{8x}{x^2-3x-6}=-2.$$

**Решение.** Пусть $\frac{x^2-3x-6}{x}=t$. Тогда

$\frac{8x}{x^2-3x-6}=\frac{8}{t}$. Получаем уравнение $t-\frac{8}{t}=-2$,

равносильное системе $\begin{cases} t^2+2t-8=0, \\ t\neq 0. \end{cases}$

Отсюда $t_1=-4$, $t_2=2$.

Теперь решение исходного уравнения сводится к решению двух уравнений:

1) $\frac{x^2-3x-6}{x}=-4$;

2) $\frac{x^2-3x-6}{x}=2$.

Решив эти уравнения, получим ответ.

**Ответ:** $-3$; $-1$; $2$; $6$.

## Примеры заданий № 10

### Часть 1

**1.** Решите уравнение $\frac{x^2-25}{x-5}=0$.

1) 5
2) −5
3) −5; 5
4) корней нет

**2.** Решите уравнение $\frac{x-10}{x^2-100}=0$.

1) 10
2) −10
3) −10; 10
4) корней нет

**3.** Решите уравнение $\frac{9}{x-5}=\frac{5}{x-9}$.

**4.** Решите уравнение $\frac{x-4}{x+11} = -2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший корень.

**5.** Решите уравнение $x - \frac{18}{x} = 3$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший корень.

**6.** Решите уравнение $\frac{3x^2-10x+3}{x^2-9} = 1$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший корень.

**7.** Решите уравнение $\frac{x^2-6x}{x+2} = \frac{16}{x+2}$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший корень.

**8.** Решите уравнение $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

1) 4; 25
2) 2; 5
3) −2; 2; −5; 5
4) корней нет

**9.** Решите уравнение $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите больший корень.

### Часть 2

**10.** Решите уравнение $\frac{x}{x+4} + \frac{x+4}{x-4} = \frac{32}{x^2-16}$.

**11.** Решите уравнение $\frac{2}{x-5} + \frac{5}{x-2} = 2$.

**12.** Решите уравнение $\frac{4x-4}{x}+\frac{x^2+4}{x^2+x}=\frac{6+x}{x+1}$.

**13.** Решите уравнение $\frac{4}{x^2-10x+25}-\frac{10}{x^2-25}=\frac{1}{x+5}$.

**14.** Решите уравнение
$(x-3)(x-8)(9-x)=(x-1)(x-3)(x-8)$.

**15.** Решите уравнение $x^3=x^2+42x$.

**16.** Решите уравнение $x^3+2x^2=36x+72$.

**17.** Решите уравнение $(x-2)(x^2+6x+9)=14(x+3)$.

**18.** Решите уравнение $x^4=(4x-21)^2$.

**19.** Решите уравнение $(x+10)^3=100(x+10)$.

**20.** Решите уравнение $(2x+6)^2(x-4)=(2x+6)(x-4)^2$.

**21.** Решите уравнение $x^6=(3x-2)^3$.

**22.** Решите уравнение $(x-5)^4+2(x-5)^2-8=0$.

**23.** Решите уравнение $(x^2-3x-1)(x^2-3x-3)=15$.

**24.** Решите уравнение
$(x^2-4x-2)^2+3x^2-12x-46=0$.

**25.** Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-4=0$.

**26.** Решите уравнение $\frac{1}{(x-6)^2}-\frac{3}{x-6}-10=0$.

**27.** Решите уравнение $\frac{3x-2}{x+2}+\frac{4(x+2)}{3x-2}=5$.

**28.** Решите уравнение $\frac{x^2+5x+3}{3}-\frac{4}{3x^2+15x+9}=1$.

**29.** Решите уравнение $\frac{x^2-4x+10}{x}+\frac{7x}{x^2-4x+10}=8$.

**30.** Решите уравнение $\frac{4}{x^2+2x-8}-\frac{3}{x^2+2x-3}=\frac{1}{2}$.

# § 8. Функции

## 8.1. Понятие функции. Область определения и область значений функции

В повседневной жизни нам часто приходится наблюдать процессы, в которых изменение одной величины (независимой переменной) влечёт за собой изменение другой величины (зависимой переменной).

❶ Пусть $X$ — множество значений независимой переменной, $Y$ — множество значений зависимой переменной. **Функция** — это правило, с помощью которого по каждому значению независимой переменной из множества $X$ можно найти единственное значение зависимой переменной из множества $Y$.

Другими словами: **функция** — это правило, которое каждому элементу множества $X$ ставит в соответствие единственный элемент множества $Y$.

Например, пусть $X$ — множество учащихся вашего класса, $Y$ — множество, элементами которого являются дни недели. Каждому учащемуся поставим в соответствие день недели, в который он родился. Описанное правило позволяет по каждому элементу множества $X$ найти единственный элемент множества $Y$. Следовательно, это правило является функцией.

Обычно независимую переменную обозначают буквой $x$, зависимую — буквой $y$, функцию (правило) — буквой $f$. Если переменная $y$ функционально зависит от переменной $x$, то эту зависимость обозначают так: $y = f(x)$ (читают: «игрек равен эф от икс»).

Независимую переменную ещё называют **аргументом функции**.

Все значения аргумента образуют множество, которое называют **областью определения функции.** Так, в приведённом выше примере областью определения функции является множество учащихся класса.

Значение зависимой переменной ещё называют **значением функции**. Значение функции $f$, которое соответствует значению $x_0$ аргумента $x$, обозначают $f(x_0)$. Например, $f(7)$ — это значение функции при $x = 7$.

Запись $f(a) = b$ означает, что значению $a$ аргумента соответствует значение $b$ функции.

Все значения зависимой переменной образуют множество, которое называют **областью значений функции**. Так, в приведённом выше примере областью значений функции является множество дней недели.

## 8.2. Способы задания функции

Функцию считают заданной, если указаны её область определения и правило, с помощью которого можно по каждому значению независимой переменной найти значение зависимой переменной.

Функцию можно задать одним из следующих способов:

- описательно;
- с помощью формулы;
- с помощью таблицы;
- графически.

Вам не раз приходилось формулировать различные правила. Поскольку функция — это правило, то её можно задать словами. Такой способ задания функции называют **описательным**.

Рассмотрим такой пример. Пусть независимая переменная принимает любые значения. Значения зависимой переменной находим по следующему правилу: каждое значение независимой переменной умножим на два и из полученного произведения вычтем единицу. Очевидно, что таким способом значение зависимой переменной находится однозначно. Следовательно, мы задали некоторую функцию $f$, областью определения которой является множество действительных чисел. Например, $f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$, $f(-13{,}4) = (-13{,}4) \cdot 2 - 1 = -27{,}8$ и т. п.

Рассмотрим самый распространённый способ задания функции: задание функции **с помощью формулы.**

Если в рассмотренном выше примере независимую переменную обозначить буквой $x$, а зависимую — буквой $y$, указать область определения — множество действительных чисел, то формула $y = 2x - 1$ задаёт вышеописанную функцию.

❗ Если функция задана формулой и при этом не указана область определения, то считают, что областью определения функции является область определения выражения, входящего в формулу. Например, если функция задана формулой $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$, то её областью определения является область определения выражения $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$, т. е. промежуток $(1; +\infty)$.

Рассмотрим функцию $f(x) = x - 2x^2$, областью определения которой является множество $\left\{-1; 0; \frac{1}{2}; 1; 3\right\}$.

Имеем:

$$f(-1) = -3; f(0) = 0; f\left(\frac{1}{2}\right) = 0; f(1) = -1; f(3) = -15.$$

Полученные результаты занесём в таблицу:

| $x$ | $-1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-3$ | $0$ | $0$ | $-1$ | $-15$ |

Множество чисел, записанных в первой строке этой таблицы, является областью определения данной функции $f$. Таблица позволяет по указанному значению аргумента найти соответствующее значение функции. Следовательно, эта таблица — ещё один способ задания функции $f$. Его называют **табличным.**

Этот способ удобно использовать в тех случаях, когда область определения функции представляет собой множество, состоящее из нескольких чисел.

## 8.3. График функции

**Графиком функции** $f$ называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты — соответствующим значениям функции $f$.

❶ Если какая-то фигура является графиком функции $f$, то выполняются два условия:

1) если $x_0$ — некоторое значение аргумента, а $f(x_0)$ — соответствующее значение функции, то точка с координатами $(x_0; f(x_0))$ обязательно принадлежит графику;

2) если $(x_0; y_0)$ — координаты произвольно выбранной точки графика, то $x_0$ и $y_0$ — соответствующие значения независимой и зависимой переменных функции $f$, т. е. $y_0 = f(x_0)$.

Графиком функции не обязательно является линия. На рисунке 8.1 изображён график функции, заданной таблицей:

| $x$ | 1 | $-2$ |
|---|---|---|
| $y$ | 3 | 0 |

Он состоит из двух точек.

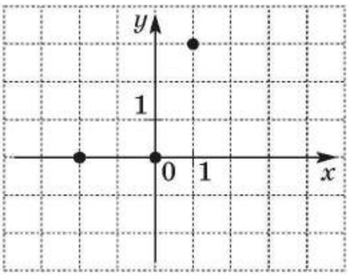



Рис. 8.1

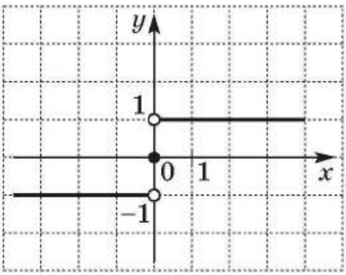



Рис. 8.2

Рассмотрим пример построения графика функции, заданной описательно.

Область определения данной функции — множество действительных чисел. Для каждого положительного аргумента значение функции равно 1; для каждого отрицательного аргумента значение функции равно −1; если аргумент равен нулю, то значение функции равно нулю.

График этой функции изображён на рисунке 8.2. Он состоит из трёх частей: точки $O(0; 0)$ и двух лучей, у каждого из которых «выколото» начало.

Не всякая фигура, изображённая на координатной плоскости, может являться графиком функции. Например, окружность не может являться графиком функции, потому что по заданному значению переменной $x$ не всегда однозначно находится значение переменной $y$ (рис. 8.3).

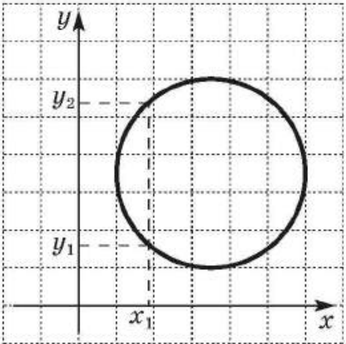



Рис. 8.3

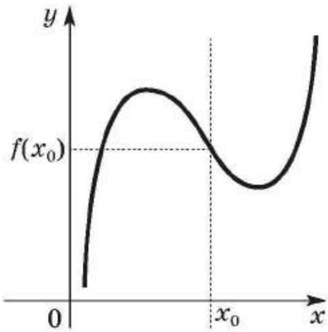



Рис. 8.4

❶ Фигура, изображённая на координатной плоскости, может являться графиком функции, если любая прямая, перпендикулярная оси абсцисс, имеет с этой фигурой не более одной общей точки. Пусть $X$ — множество абсцисс точек такой фигуры. Можно говорить, что эта фигура задаёт функцию с областью определения $X$. Такой способ задания функции называют **графическим**.

Если функция $f$ задана графически, то значение функции по заданному значению $x_0$ аргумента можно найти по следующему правилу: через точку $(x_0; 0)$ провести прямую, перпендикулярную оси абсцисс, а затем найти ординату точки пересечения этой прямой с графиком. Найденная ордината равна $f(x_0)$ (рис. 8.4).

## 8.4. Нули функции. Промежутки знакопостоянства. Возрастание и убывание функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

На рисунке 8.5 изображён график некоторой функции $y = f(x)$.

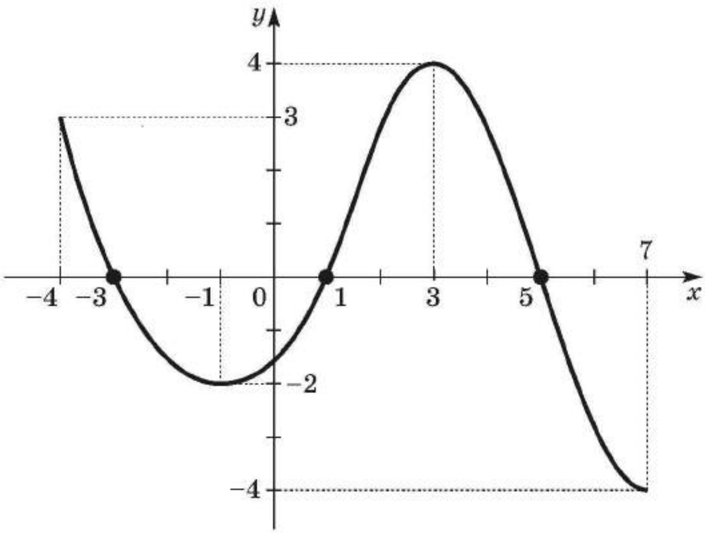



Рис. 8.5

Её областью определения является промежуток $[-4; 7]$, а областью значений — промежуток $[-4; 4]$.

Значение аргумента, при котором значение функции равно нулю, называют **нулём функции**.

Так, числа $-3$, 1, 5 являются нулями данной функции $f$.

Для нахождения нулей функции $y = f(x)$ надо решить уравнение $f(x) = 0$.

Промежуток, на котором функция принимает значения одного знака, называют **промежутком знакопостоянства функции** $f$.

Например, на промежутках $[-4; -3)$ и $(1; 5)$ данная функция $f$ принимает положительные значения, а на промежутках $(-3; 1)$ и $(5; 7]$ — отрицательные (рис. 8.5).

Для нахождения промежутков знакопостоянства функции $y = f(x)$ надо решить каждое из неравенств $f(x) > 0$ и $f(x) < 0$.

Замечание. При поиске промежутков знакопостоянства функции принято указывать промежутки максимальной длины, на которых функция обладает указанным свойством. Например, промежуток $(-2; -1)$ является промежутком знакопостоянства функции $f$ (рис. 8.5), но в ответ следует включить промежуток $(-3; 1)$, содержащий промежуток $(-2; -1)$.

Функцию $f$ называют **возрастающей на некотором промежутке**, если для любых двух значений аргумента $x_1$ и $x_2$ из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Например, функция $f$ (рис. 8.5) возрастает на промежутке $[-1; 3]$.

Функцию $f$ называют **убывающей на некотором промежутке**, если для любых двух значений аргумента $x_1$ и $x_2$ из этого промежутка таких, что $x_2 > x_1$, выполняется неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Например, функция $f$ (рис. 8.5) убывает на каждом из промежутков $[-4; -1]$ и $[3; 7]$.

Часто используют и такие формулировки.

Функцию называют **возрастающей на некотором промежутке**, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Функцию называют **убывающей на некотором промежутке**, если для любых значений аргумента из этого промежутка большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Если функция возрастает на всей области определения, то её называют **возрастающей**. Если функция убывает на всей области определения, то её называют **убывающей.**

В задачах на поиск промежутков возрастания и убывания функции принято указывать промежутки максимальной длины.

Все значения функции $f$ (рис. 8.5) не превосходят числа 4. Имеем: $f(3) = 4$. Говорят, что число 4 является **наибольшим значением** функции $f$. Все значения этой функции не меньше числа $-4$. Имеем: $f(7) = -4$. Говорят, что число $-4$ является **наименьшим значением** функции $f$.

## 8.5. Чтение графиков функций, отображающих реальные процессы

Рисунок, схема, фотография какого-то объекта или процесса дают о нём наглядное представление. Ту же роль играет для функции её график. Так, изучая график функции, изображённый на рисунке 8.6, можно, например, найти:

1) область определения функции: множество таких чисел $x$, при которых $-3 \leqslant x \leqslant 6$;

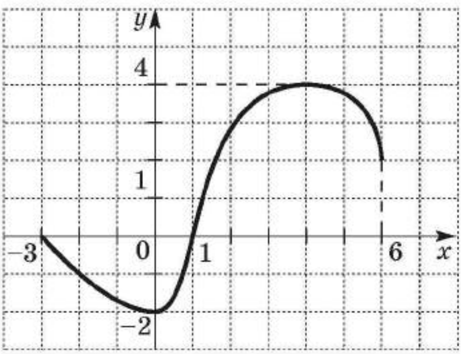



Рис. 8.6

2) область значений функции: множество таких чисел $y$, при которых $-2 \leqslant y \leqslant 4$;

3) значения аргумента, при которых значение функции равно нулю: $x = -3$ или $x = 1$;

4) значения аргумента, при которых функция принимает положительные значения: множество таких чисел $x$, при которых $1 < x \leqslant 6$;

5) значения аргумента, при которых функция принимает отрицательные значения: множество таких чисел $x$, при которых $-3 < x < 1$.

На рисунке 8.7 изображён график изменения температуры раствора во время химического опыта. С помощью этого графика можно, например, установить:

1) какой была начальная температура раствора (ответ: 10 °C);

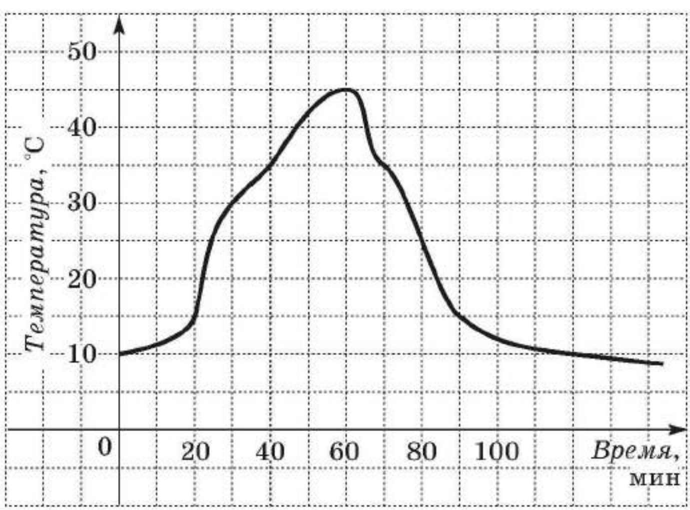



Рис. 8.7

2) какой была температура раствора через 30 мин после начала опыта (ответ: 30 °С); через полтора часа (ответ: 15 °С);

3) какой была самая высокая температура раствора и через сколько минут после начала опыта (ответ: 45 °С через 60 мин);

4) через сколько минут после начала опыта температура раствора была 35 °С (ответ: через 40 мин и через 70 мин).

### 8.6. Линейная функция и её свойства. Прямая пропорциональность

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = kx + b$, где $k$ и $b$ — некоторые числа, $x$ — независимая переменная, называют **линейной**.

Примеры линейных функций: $y = -2x + 1$; $y = 1 - x$; $y = 5x$; $y = 2$.

❶ Областью определения и областью значений линейной функции является множество $\boldsymbol{R}$.

Графиком линейной функции является прямая. Эта прямая не может быть вертикальной, т. е. прямой, перпендикулярной оси абсцисс, так как вертикальная прямая не может служить графиком функции.

❶ Поскольку прямая однозначно задаётся любыми двумя своими точками, то для построения графика линейной функции достаточно выбрать два произвольных значения аргумента и составить таблицу значений функции, имеющую лишь два столбца.

‖ Задача. Постройте график функции $y = -3x + 2$.

Решение. Составим таблицу значений данной функции для двух произвольных значений аргумента:

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 2 | $-1$ |

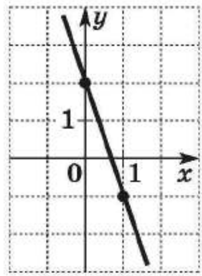


Рис. 8.8

Отметим на координатной плоскости точки (0; 2) и (1; −1) и проведём через них прямую (рис. 8.8). Эта прямая является графиком линейной функции $y = -3x + 2$.

Если $k > 0$, то линейная функция $y = kx + b$ является возрастающей; если $k < 0$, то линейная функция $y = kx + b$ является убывающей. Например, функция $y = -3x + 2$ является убывающей.

Если $k = 0$, то линейная функция принимает вид $y = b$. Эта функция не является ни возрастающей, ни убывающей. Она принимает постоянное значение, равное $b$. Такую функцию называют **стационарной**.

Графиком функции $y = 0$ является ось абсцисс. Графиком функции $y = b$, где $b \neq 0$, является прямая, параллельная оси абсцисс.

Для линейной функции $y = kx + b$ рассмотрим случай, когда $b = 0$ и $k \neq 0$. Тогда формула приобретает вид $y = kx$. Отсюда для всех не равных нулю значений аргумента можно записать, что $\frac{y}{x} = k$. Эта формула показывает, что для функции $y = kx$, $x \neq 0$, отношение соответствующих значений зависимой и независимой переменных остаётся постоянным и равно $k$.

Таким свойством обладает прямая пропорциональная зависимость между величинами. Поэтому линейную функцию, которую задают формулой $y = kx$, где $k \neq 0$, называют **прямой пропорциональностью.**

Функции $y = 2x$; $y = x$; $y = -x$; $y = -\frac{1}{3}x$ — примеры прямых пропорциональностей.

Поскольку прямая пропорциональность — частный случай линейной функции, то её график — прямая. Особенностью является то, что эта прямая при любом $k$ проходит через точку $O(0; 0)$. Действительно, если в формуле $y = kx$ задать $x = 0$, то получим $y = 0$. Поэтому для построения графика прямой пропорциональности достаточно указать какую-нибудь точку графика, отличную от начала координат, и провести прямую через эту точку и точку $O(0; 0)$.

На рисунке 8.9 изображены графики прямых пропорциональностей.

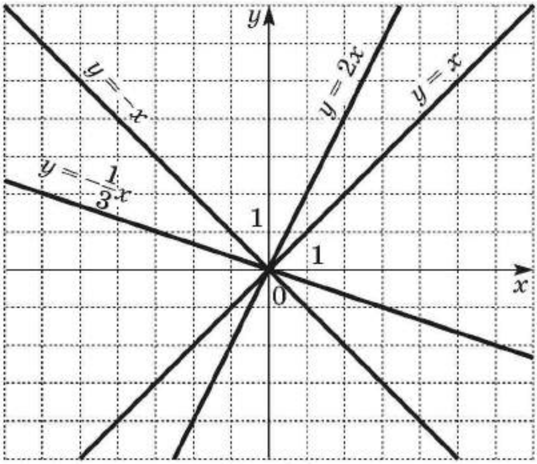



Рис. 8.9

## 8.7. Обратная пропорциональная зависимость. Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, и её свойства

Рассмотрим функциональную зависимость, характеризующуюся тем, что с увеличением (уменьшением) одной величины в несколько раз другая величина уменьшается (увеличивается) во столько же раз. Такую зависимость называют **обратной пропорциональной.** Ей соответствует функция, которую задают формулой $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$. Эту функцию называют **обратной пропорциональностью.**

❶ Областью определения и областью значений обратной пропорциональности является множество $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Фигуру, являющуюся графиком функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, называют **гиперболой.** Гипербола состоит из двух частей — **ветвей гиперболы.** На рисунке 8.10 изображена гипербола $y = \frac{k}{x}$, где $k > 0$; на рисунке 8.11 изображена гипербола $y = \frac{k}{x}$, где $k < 0$.

❶ Если $k > 0$, то ветви гиперболы расположены в I и III четвертях, а если $k < 0$ — то во II и IV четвертях.

С увеличением модуля абсциссы расстояние от точки графика функции до оси абсцисс уменьшается и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю. Действительно, чем больше модуль аргумента, тем меньше модуль соответствующего значения функции.

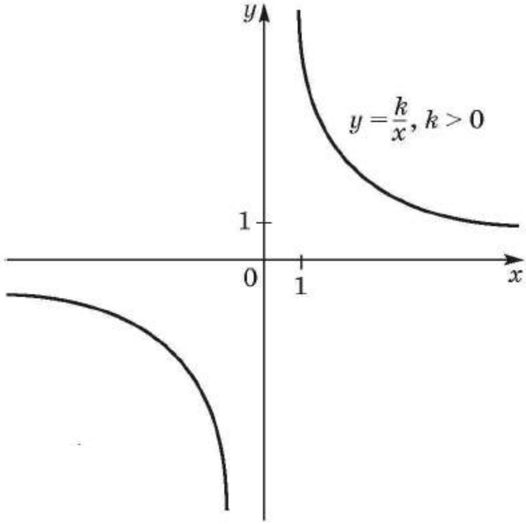



Рис. 8.10

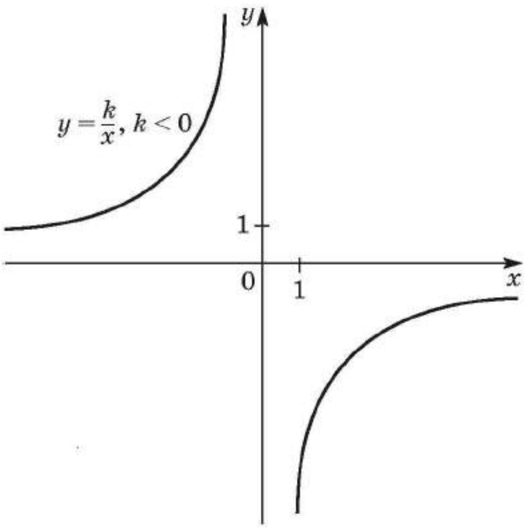



Рис. 8.11

Аналогично с уменьшением модуля абсциссы расстояние от точек графика до оси ординат уменьшается и может стать сколь угодно малым, но никогда не будет равным нулю.

Если $k > 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ (рис. 8.10).

Если $k < 0$, то функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ (рис. 8.11).

## Примеры заданий № 11

### Часть 1

1. Найдите значение функции $y = 2x - 3$ в точке $x_0 = -3$.
2. Функция задана формулой $f(x) = x^2 - 4$. Найдите $f(-3)$.
3. Найдите $f(5)$, если $f(x - 2) = 3^{10 - x}$.
4. Дана функция $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2x - 1, \text{ если } x > 1. \end{cases}$

   Найдите $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
5. При каких значениях $x$ не определена функция $y = \dfrac{5}{x^2 + 4x}$?

   1) $-4; 0$ 2) $0; 4$ 3) $-4; 4$ 4) $-4; 0; 4$
6. Площадь четырёхугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha$, где $d_1$ и $d_2$ — длины

диагоналей четырёхугольника, $\alpha$ — величина угла между диагоналями. Пользуясь этой формулой, найдите длину диагонали $d_1$, если $d_2 = 6$, $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $S = 14,6$.

**7.** Мощность постоянного тока (в ваттах) вычисляют по формуле $P = I^2R$, где $I$ — сила тока (в амперах), $R$ — сопротивление (в омах). Пользуясь этой формулой, найдите сопротивление $R$, если мощность тока равна 15,21 Вт, а сила тока — 1,3 А.

**8.** В баке было 20 л воды. Ежеминутно в него наливается 3 л воды. Укажите формулу, задающую зависимость объёма $V$ воды в баке от времени $t$ его заполнения.

| | |
|---|---|
| 1) $V = 20 + 3t$ | 3) $V = 3(20 + t)$ |
| 2) $V = 20 \cdot 3t$ | 4) $V = 3 \cdot 25 + t$ |

**9.** Класс, в котором 30 учеников, пришёл на экскурсию в музей. Входной билет для одного ученика стоит $a$ р., а для сопровождения экскурсовода надо заплатить дополнительные 600 р. Укажите формулу, задающую зависимость общей стоимости $b$ экскурсии от стоимости входного билета.

| | |
|---|---|
| 1) $b = a + 600$ | 3) $b = 30(a + 600)$ |
| 2) $b = 30a + 600$ | 4) $b = 600a + 30$ |

**10.** График какой из данных функций не проходит через начало координат?

1) $y = 6x$

2) $y = -\frac{x}{6}$

3) $y = \frac{6}{x}$

4) $y = 6x^2$

**11.** Укажите область значений функции, определённой на промежутке $[-2; 2]$, график которой изображён на рисунке 8.12.

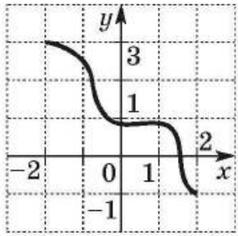



Рис. 8.12

1) $[-1; 3]$
2) $[-2; 2]$
3) $[1; 3]$
4) $[-2; 1]$

**12.** Найдите нули функции $y = x^2 - 4x - 21$.

1) 6; −2
2) −7; 3
3) 7; −3
4) −6; 2

**13.** На рисунке 8.13 изображён график функции $y = f(x)$, определённой на промежутке $[-5; 6]$. Пользуясь рисунком, найдите множество решений неравенства $f(x) < 0$.

1) $(5; 6]$
2) $(-4; 1)$
3) $(-4; 1) \cup (5; 6]$
4) $[-4; 1] \cup [5; 6]$

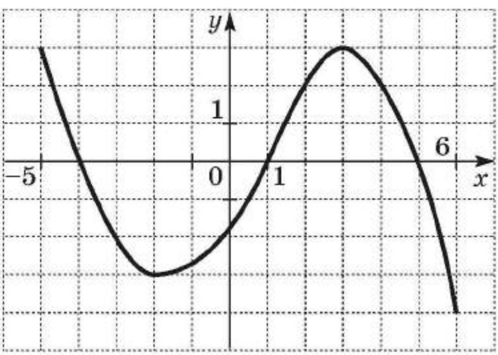



Рис. 8.13

**14.** На рисунке 8.14 изображён график функции, определённой на промежутке $[-7; 7]$. Пользуясь рисунком, укажите промежутки убывания функции.

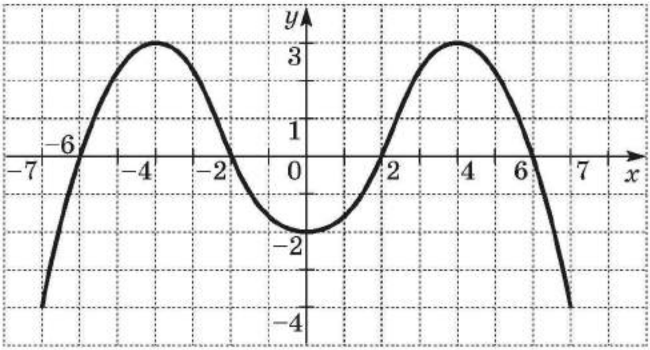



Рис. 8.14

1) $[-7; -4]$; $[0; 4]$
2) $[-4; 0]$; $[4; 7]$;
3) $[-6; -2]$; $[2; 6]$
4) $[-4; 1]$; $[4; 6]$

**15.** На рисунке 8.15 изображён график функции, определённой на промежутке $[-4; 2]$. Пользуясь рисунком, укажите промежутки возрастания этой функции.

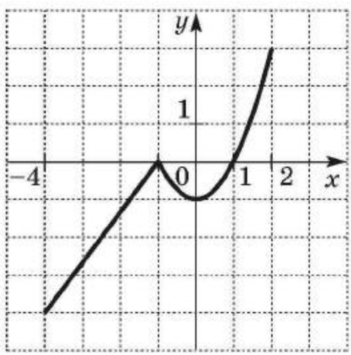



Рис. 8.15

1) $[-4; -1]$, $[0; 2]$
2) $[1; 2]$
3) $[-4; -1]$, $[1; 2]$
4) $[-4; -1]$

**16.** Из одного села в другое в 7:00 отправился пешеход, а в 8:00 выехал велосипедист. На рисунке 8.16 изображены графики их движения. В котором часу велосипедист догнал пешехода?

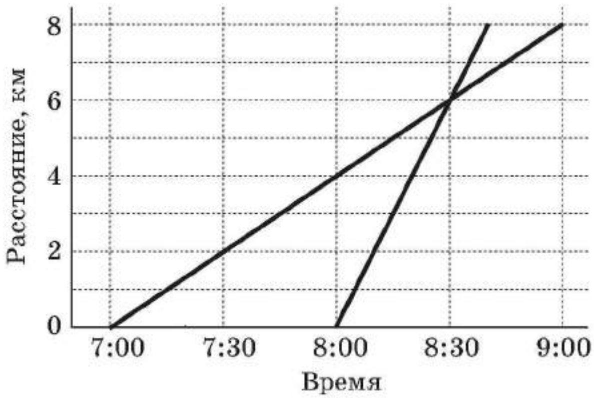
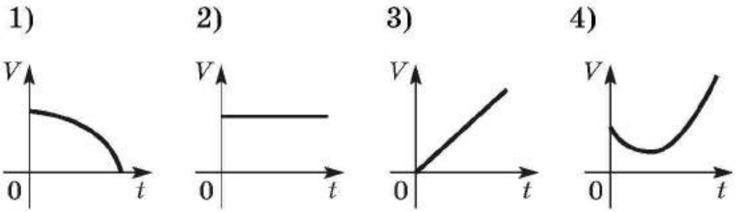



Рис. 8.16

1) 8:00
2) 8:30
3) 9:00
4) 9:30

**17.** Пустой бассейн наполняют водой. Какой из графиков соответствует зависимости объёма $V$ воды в бассейне от времени $t$ его наполнения?



**18.** На рисунке 8.17 изображён график движения мотоциклиста. На каком расстоянии от места старта мотоциклист сделал вторую остановку?

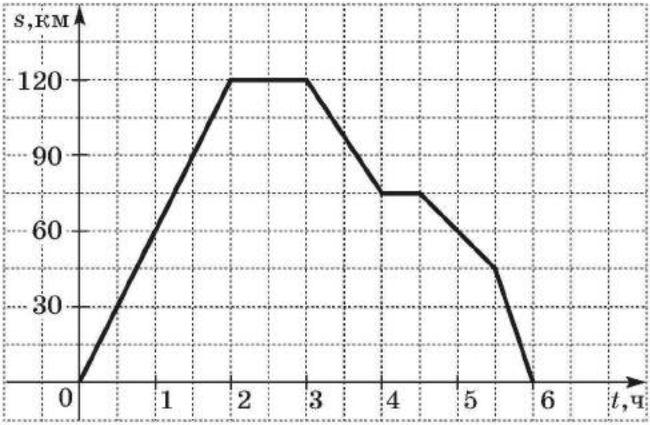



Рис. 8.17

1) 70 км 2) 75 км 3) 80 км 4) 85 км

**19.** Между пристанями $A$ и $B$, расположенными на противоположных берегах озера, курсирует паром. На рисунке 8.18 изображён график движе-

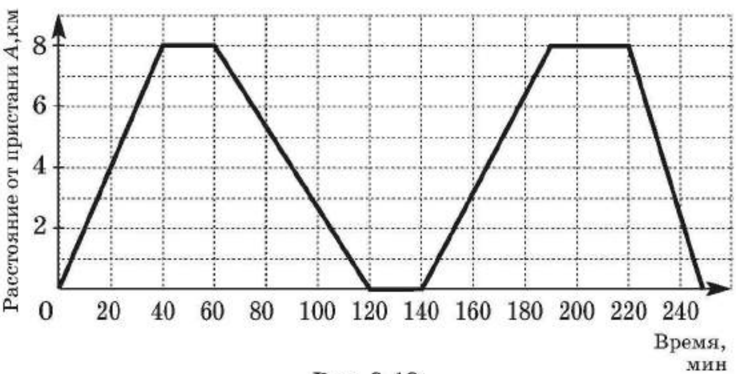



Рис. 8.18

ния парома во время двух первых рейсов от пристани $A$ до пристани $B$ и назад. С какой скоростью совершал паром второй рейс от пристани $A$ до пристани $B$?

1) 12 км/ч
2) 10,4 км/ч
3) 9,6 км/ч
4) 8 км/ч

**20.** После того как вода в чайнике закипела, его выключили. На рисунке 8.19 изображён график изменения температуры воды в чайнике. За какое время температура воды снизилась с 60 °С до 40 °С?

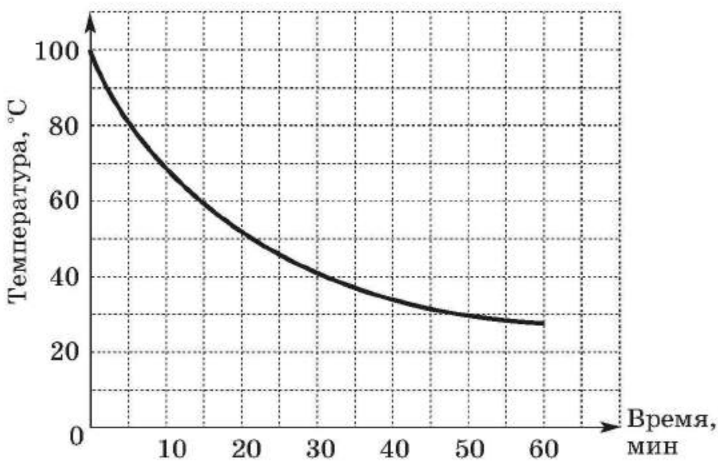



Рис. 8.19

1) 30 мин
2) 25 мин
3) 20 мин
4) 15 мин

**21.** На рисунке 8.20 изображены графики движения велосипедиста (отрезок $OA$) и пешехода (отрезок $OB$). Во сколько раз путь, который проехал велосипедист за 2 ч, больше пути, пройденного за то же время пешеходом?

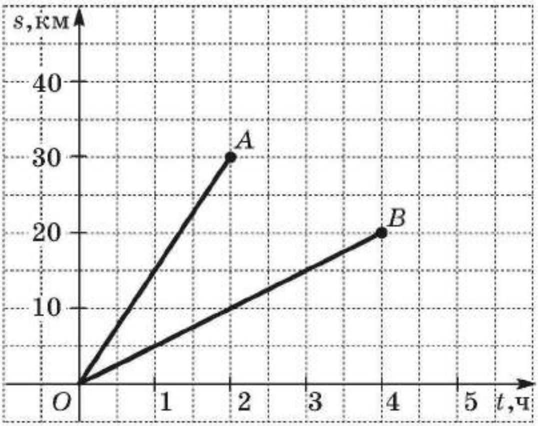
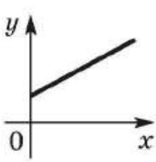
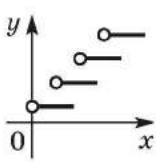


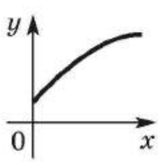

Рис. 8.20

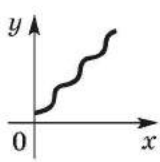
1) в 1,5 раза
2) в 2 раза
3) в 2,5 раза
4) в 3 раза

**22.** Автобус движется по маршруту. Стоимость проезда возрастает на 10 р. через каждые 10 км. Какой график соответствует описанной ситуации ($x$ км — длина маршрута, $y$ р. — стоимость проезда)?

1) 


2) 


3) 


4) 

**23.** На рисунке 8.21 изображён график зависимости объёма воды в цистерне от времени её наполнения. В течение скольких часов цистерна наполнялась водой?

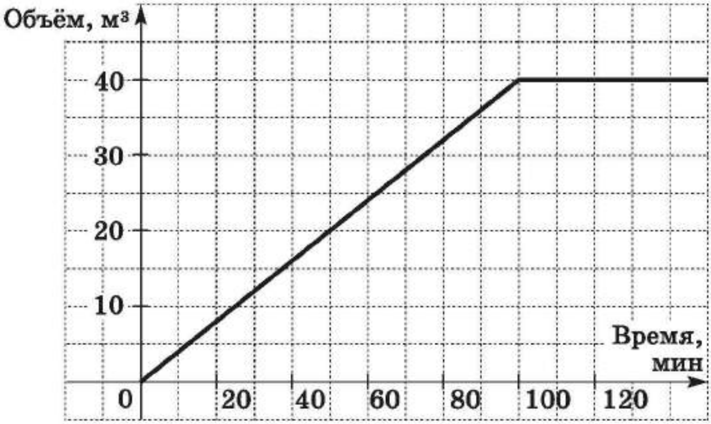



Рис. 8.21

1) 1 ч

2) $1\frac{2}{3}$ ч

3) 2 ч

4) $2\frac{1}{3}$ ч

**24.** На соревнованиях в пятидесятиметровом бассейне команда из 4 пловцов участвовала в эстафете $4 \times 50$ м. На рисунке 8.22 изображён график движения пловцов. Какой была скорость пловца, который быстрее всех проплыл дистанцию?

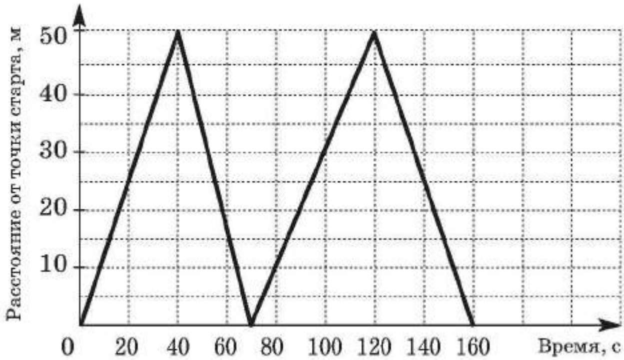



Рис. 8.22

1) 1 м/с 2) $1\frac{1}{4}$ м/с 3) $1\frac{1}{2}$ м/с 4) $1\frac{2}{3}$ м/с

**25.** На рисунке 8.23 изображён график изменения температуры раствора во время химического опыта. За какое время температура раствора возросла с 30 °C до 45 °C?

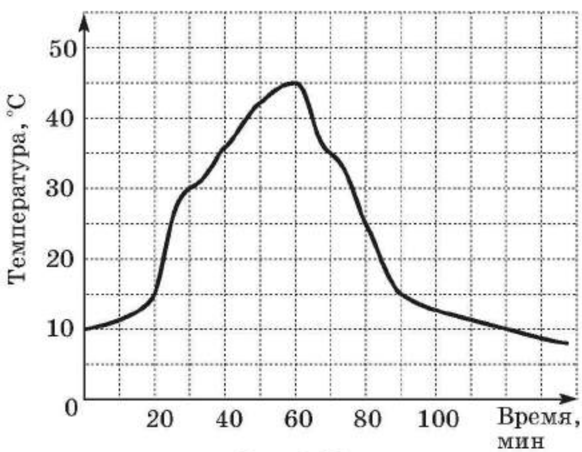



Рис. 8.23

1) 15 мин 2) 20 мин 3) 30 мин 4) 35 мин

**26.** На рисунке 8.24 изображён график изменения температуры воздуха в один мартовский день. В течение скольких часов температура воздуха повышалась?

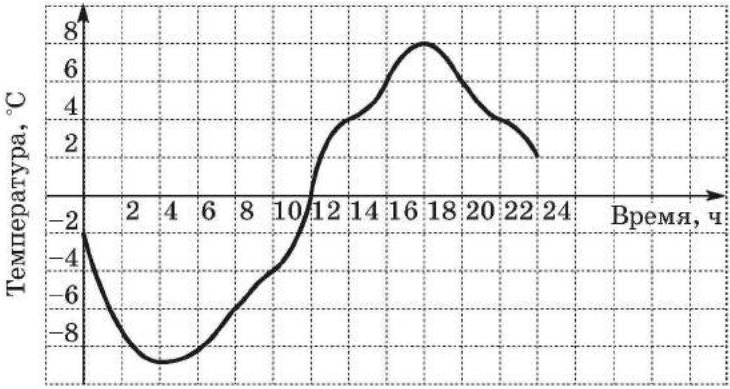



Рис. 8.24

1) 10 ч
2) 12 ч
3) 14 ч
4) 16 ч

**27.** Графиком какой из данных функций является горизонтальная прямая?

1) $y = \frac{1}{9}$
2) $y = \frac{1}{9} - x$
3) $y = \frac{1}{9}x + 1$
4) $y = \frac{1}{9}x$

**28.** Каковы координаты точки пересечения графика функции $y = -3x + 12$ с осью абсцисс?

1) (0; 12)
2) (12; 0)
3) (0; 4)
4) (4; 0)

**29.** График какой функции изображён на рисунке 8.25?

1) $y = -x + 3$
2) $y = 3x$
3) $y = x + 3$
4) $y = \frac{1}{3}x$

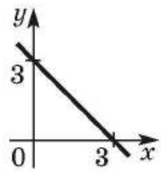


Рис. 8.25

**30.** На рисунке 8.26 изображён график линейной функции $y = kx + b$. Какие знаки имеют коэффициенты $k$ и $b$?

1) $k > 0,\ b > 0$
2) $k < 0,\ b < 0$
3) $k < 0,\ b > 0$
4) $k > 0,\ b < 0$

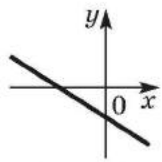
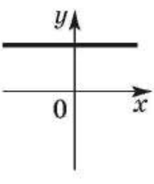


Рис. 8.26

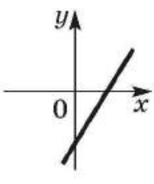
**31.** На рисунке изображены графики функций вида $y = kx + b$. Установите соответствие между графиками функций и коэффициентами $k$ и $b$.

ГРАФИКИ

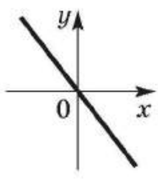
А)




Б)




В)




КОЭФФИЦИЕНТЫ

1) $k > 0,\ b < 0$ 2) $k < 0,\ b = 0$ 3) $k = 0,\ b > 0$

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер:

| А | Б | В |
|---|---|---|
| | | |

**32.** Среди данных функций укажите прямую пропорциональность.

1) $y = 12 + x$ 2) $y = 12$ 3) $y = \dfrac{12}{x}$ 4) $y = 12x$

**33.** Графиком какой из данных функций не является прямая?

1) $y = 3x - 4$

2) $y = \dfrac{x}{3} - 4$

3) $y = -\dfrac{x}{3}$

4) $y = \dfrac{3}{x}$

**34.** Какая из данных линейных функций является убывающей?

1) $y = 5 - 3x$

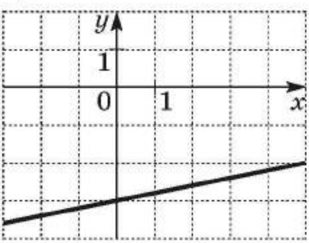
2) $y = \dfrac{5}{9}x$

3) $y = 0{,}3x - 5$

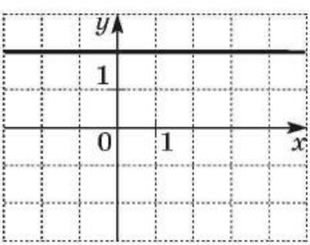
4) $y = 5 + 3x$

**35.** На каком из рисунков изображён график функции $y = 0{,}2x$?

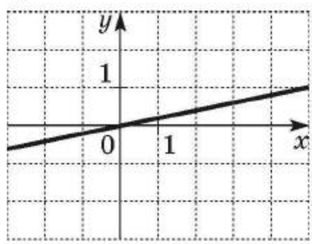
1)



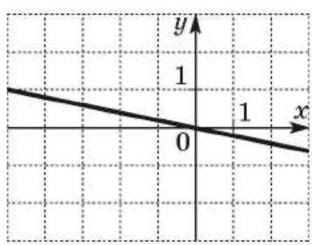

2)




3)




4)



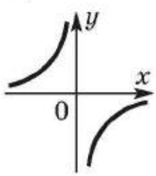
**36.** Графиком какой из функций является гипербола?

1) $y = 2x + 7$ 3) $y = \frac{7}{x}$

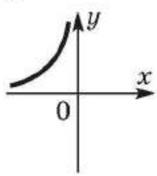
2) $y = x^2 + 7$ 4) $y = \frac{x}{7}$

**37.** На одном из рисунков изображён график функции $y = \frac{4}{x}$. Укажите этот рисунок.

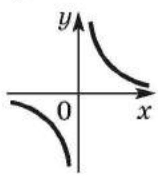
1)



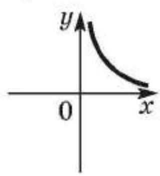

2)




3)




4)




**38.** Определите формулу обратной пропорциональной зависимости, если её графику принадлежит точка $A\ (-3;\ 6)$.

1) $y = -\frac{2}{x}$ 3) $y = -\frac{18}{x}$

2) $y = \frac{2}{x}$ 4) $y = \frac{18}{x}$

**39.** При каком значении $k$ график функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $A\left(\frac{2}{3};\ -6\right)$?

1) $-4$ 3) 9
2) 4 4) такого значения не существует

### Часть 2

**40.** Найдите нули функции $y = x^4 - 6x^2 - 7$.

**41.** График функции $y = kx + b$ проходит через точки $C\ (1;\ 1)$ и $D\ (-2;\ 10)$. Найдите значения $k$ и $b$.

**42.** При каком значении $k$ графики функций $y = kx + 6$ и $y = x^2$ пересекаются в точке, абсцисса которой равна $-3$?

**43.** Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -\dfrac{2}{x}, \text{ если } x \leqslant -1, \\ 1 - x, \text{ если } x > -1. \end{cases}$$

Пользуясь графиком, укажите промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

**44.** Постройте график функции

$$y = \begin{cases} 1{,}5x + 3, \text{ если } x < -1, \\ -2{,}5x - 1, \text{ если } -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x - 8, \text{ если } x > 2 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях $b$ прямая $y = b$ имеет с графиком ровно две общие точки.

**45.** Постройте график функции $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$. Пользуясь графиком, укажите промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

**46.** Постройте график функции $y = \dfrac{2x - 12}{x - 3}$.

**47.** Постройте график функции

$$y = \frac{x^2 + 8x + 16}{x + 4} - \frac{3x - x^2}{x}.$$

**48.** Постройте график функции $y = \dfrac{8x - 8}{x - x^2}$ и определите, при каких значениях $k$ прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

**49.** Постройте график функции $y = \dfrac{x - 3}{x^2 - 3x} - 2$ и определите, при каких значениях $b$ прямая $y = b$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

**50.** Постройте график функции $y = \dfrac{3|x| - 2}{|x| - 1,5x^2}$ и определите, при каких значениях $k$ прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки.

## 8.8. Квадратичная функция и её свойства

Функцию, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где $x$ — независимая переменная, $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют **квадратичной**.

Рассмотрим частный случай квадратичной функции, когда $b = c = 0$. Имеем: $y = ax^2$.

На рисунке 8.27 изображены графики функций $y = ax^2$ при некоторых значениях $a$. Каждый из этих графиков называют **параболой**. Точка (0; 0) является вершиной каждой из этих парабол. Вершина параболы делит её на две симметричных относительно оси ординат фигуры. Эти фигуры называют **ветвями параболы**.

Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ является парабола, равная параболе $y = ax^2$.

❶ Вершина параболы $y = ax^2 + bx + c$ расположена в точке с абсциссой $x = -\dfrac{b}{2a}$.

❶ Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены так же, как и ветви параболы $y = ax^2$: если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

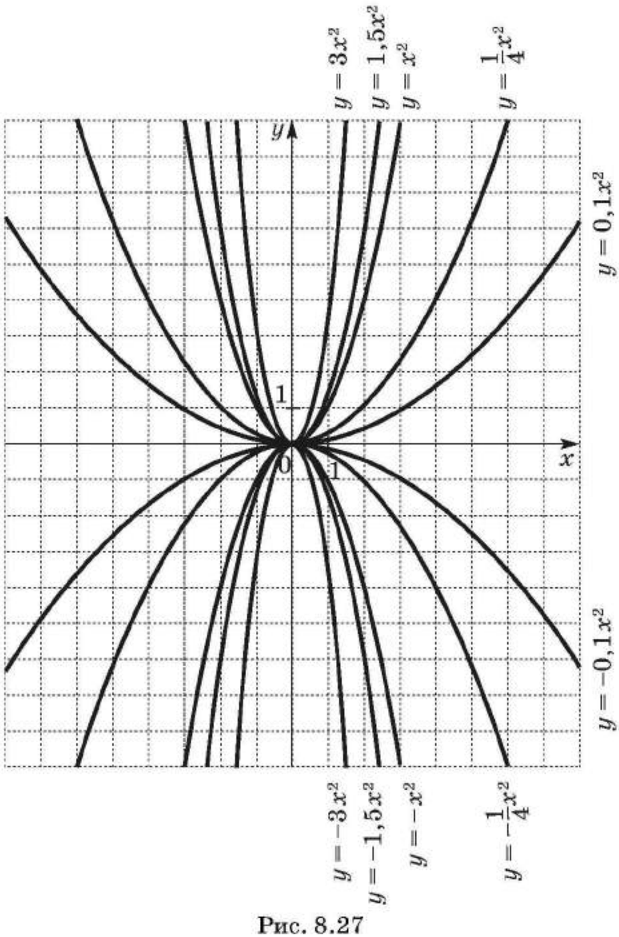



Рис. 8.27

❶ Количество нулей квадратичной функции определяется количеством корней квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$: если $D < 0$, то квадратичная функция нулей не имеет; если $D = 0$, то квадратичная функция имеет один нуль; если $D > 0$, то квадратичная функция имеет два нуля.

Общее представление о графике квадратичной функции дают координаты вершины параболы и направление её ветвей. Это представление будет тем полнее, чем больше точек, принадлежащих графику, мы будем знать.

❗ График квадратичной функции можно построить по такой схеме:

1) найти абсциссу вершины параболы по формуле $x_0 = -\frac{b}{2a}$;

2) найти ординату вершины параболы по формуле[1] $x_0 = \frac{4ac - b^2}{4a} = -\frac{D}{4a}$, где $D$ — дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, и отметить на координатной плоскости вершину параболы;

3) определить направление ветвей параболы;

4) найти координаты ещё нескольких точек, принадлежащих искомому графику (в частности, координаты точек пересечения параболы с осью $y$ и с осью $x$, если они существуют);

5) отметить на координатной плоскости найденные точки и соединить их плавной линией.

> Задача. Постройте график функции $f(x) = x^2 + 4x - 5$. Используя график функции, найдите область её значений, промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, наименьшее и наибольшее значения функции.

---

[1] Формулу $y_0 = -\frac{D}{4a}$ запоминать не обязательно. Достаточно вычислить значение функции $y = ax^2 + bx + c$ в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

Р е ш е н и е. Данная функция является квадратичной функцией $y = ax^2 + bx + c$, где $a = 1$, $b = 4$, $c = -5$. Её графиком является парабола. Поскольку $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх.

Абсцисса вершины параболы $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$,

ордината вершины $y_0 = f(x_0) = f(-2) = 4 - 8 - 5 = -9$.

Следовательно, вершина параболы — точка $(-2; -9)$.

Найдём точки пересечения параболы с осью абсцисс:

$$x^2 + 4x - 5 = 0;$$
$$x_1 = -5,\ x_2 = 1.$$

Следовательно, парабола пересекает ось абсцисс в точках $(-5; 0)$ и $(1; 0)$.

Найдём точку пересечения параболы с осью ординат: $f(0) = -5$. Парабола пересекает ось ординат в точке $(0; -5)$.

Отметим найденные четыре точки параболы на координатной плоскости (рис. 8.28).

Теперь понятно, что удобно найти значения данной функции в точках $-1$, $-3$, $-4$ и, отметив соответствующие точки на координатной плоскости, провести через все найденные точки график данной функции.

Имеем: $f(-3) = f(-1) = -8$; $f(-4) = f(0) = -5$.

Искомый график изображён на рисунке 8.29.

Область значений функции $E(f) = [-9; +\infty)$.

Функция возрастает на промежутке $[-2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; -2]$.

$f(x) > 0$ при $x < -5$ или $x > 1$; $f(x) < 0$ при $-5 < x < 1$.

Наименьшее значение функции равно $-9$, наибольшего значения не существует.

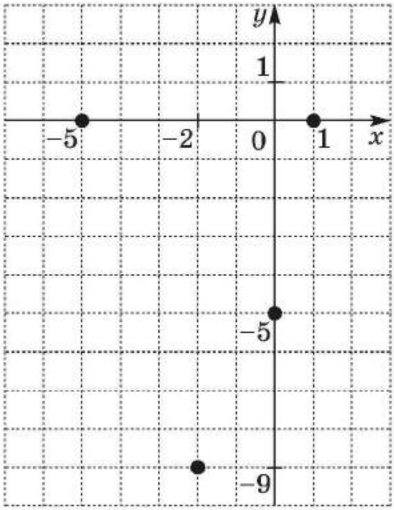



Рис. 8.28

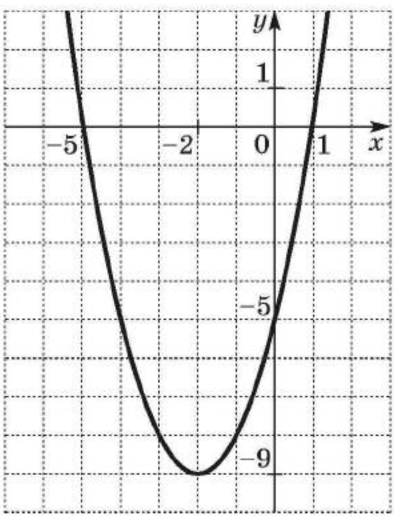



Рис. 8.29

## 8.9. Функция $y = \sqrt{x}$ и её свойства

Если площадь квадрата равна $x$, то его сторону $y$ можно найти по формуле $y = \sqrt{x}$. Изменение площади $x$ квадрата приводит и к изменению его стороны $y$.

Понятно, что каждому значению переменной $x$ соответствует единственное значение переменной $y$. Следовательно, зависимость переменной $y$ от переменной $x$ является функциональной, а формула $y = \sqrt{x}$ задаёт функцию.

Свойства функции $y = \sqrt{x}$ приведены в следующей таблице.

| | |
|---|---|
| Область определения | $[0; +\infty)$ |
| Область значений | $[0; +\infty)$ |
| График | Ветвь параболы |
| Нуль функции | $x = 0$ |
| Возрастание (убывание) | Функция является возрастающей |
| Наибольшее (наименьшее) значение функции | Наименьшее значение функции равно 0 и достигается при $x = 0$. Наибольшего значения функция не имеет |

График функции $y = \sqrt{x}$ изображён на рисунке 8.30.

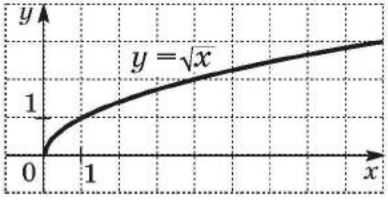



Рис. 8.30

## 8.10. График функции $y = \sqrt[3]{x}$

Если объём куба равен $x$, то его ребро $y$ можно найти по формуле $y = \sqrt[3]{x}$. Изменение объёма $x$ куба приводит и к изменению его ребра $y$.

Каждому значению переменной $x$ соответствует единственное значение переменной $y$. Следовательно, зависимость переменной $y$ от переменной $x$ является функциональной, а формула $y = \sqrt[3]{x}$ задаёт функцию, областью определения и областью значений которой является множество $\boldsymbol{R}$.

График функции $y = \sqrt[3]{x}$ изображён на рисунке 8.31.

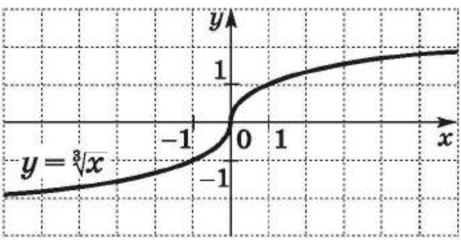



Рис. 8.31

## 8.11. Функция $y = |x|$ и её свойства

Из определения модуля следует, что

$$y = |x| = \begin{cases} x, \text{ если } x \geqslant 0, \\ -x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

❶ Областью определения этой функции является множество $\boldsymbol{R}$. Поскольку модуль числа может принимать любое неотрицательное значение, то областью значений функции $y = |x|$ является множество $[0; +\infty)$.

❶ Наименьшее значение функции равно 0 и достигается при $x = 0$. Наибольшего значения функция не имеет.

График функции изображён на рисунке 8.32.

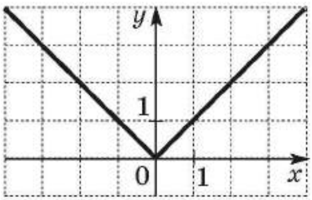



Рис. 8.32

Функция возрастает на промежутке $[0; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 0]$.

## 8.12. Решение уравнений графическим методом

Задача 1. Решите уравнение $\frac{4}{x} = x + 3$.

Решение. Рассмотрим функции $y = \frac{4}{x}$ и $y = x + 3$. Построим в одной системе координат графики этих функций (рис. 8.33). Они пересекаются в двух точках, абсциссы которых равны 1 и $-4$. В точках пересечения графиков функций сами функции принимают равные значения. Следовательно, при найденных абсциссах значения выражений $\frac{4}{x}$ и $x + 3$ равны, т. е. числа 1 и $-4$ являются корнями уравнения $\frac{4}{x} = x + 3$. Проверка это подтверждает.

Ответ: $-4$; 1.

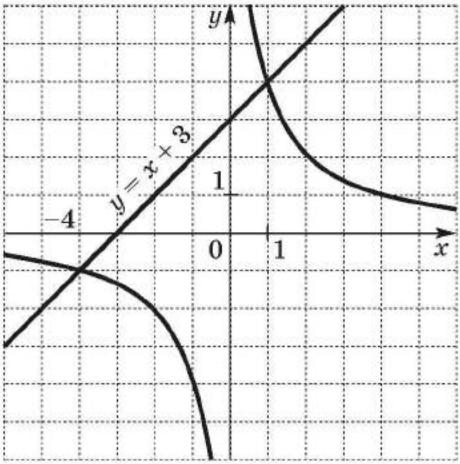



Рис. 8.33

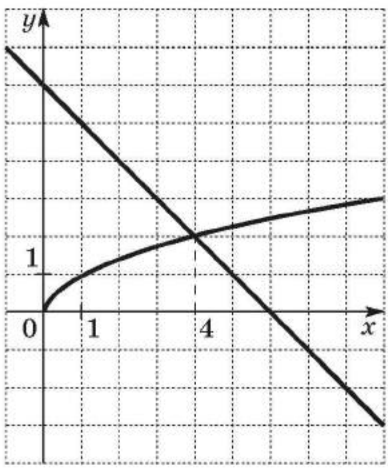



Рис. 8.34

Описанный метод решения уравнений называют **графическим.**

Задача 2. Решите графически уравнение

$$\sqrt{x} = 6 - x.$$

Решение. В одной системе координат построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = 6 - x$ (рис. 8.34). Эти графики пересекаются в точке, абсцисса которой равна 4. Проверка подтверждает, что число 4 является корнем данного уравнения.

Ответ: 4.

## Примеры заданий № 12

### Часть 1

1. Графиком какой из данных функций является парабола?

   1) $y = 3x - 4$
   2) $y = \frac{x}{3}$
   3) $y = \frac{3}{x}$
   4) $y = 3x^2 - 4$

2. Найдите абсциссу вершины параболы $y = 0{,}3x^2 + 6x - 2$.

3. На рисунке 8.35 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ равен $D$. Укажите верное утверждение.

   1) $a > 0,\ c < 0,\ D > 0$
   2) $a < 0,\ c < 0,\ D > 0$
   3) $a > 0,\ c > 0,\ D > 0$
   4) $a < 0,\ c < 0,\ D < 0$

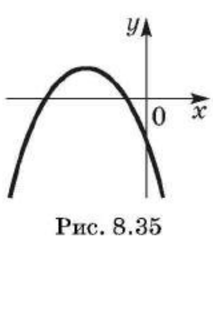


Рис. 8.35

**4.** На рисунке 8.36 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$, $D$ — дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$. Укажите верное утверждение.

1) $a > 0,\ c > 0,\ D > 0$
2) $a < 0,\ c < 0,\ D > 0$
3) $a > 0,\ c > 0,\ D < 0$
4) $a < 0,\ c < 0,\ D < 0$

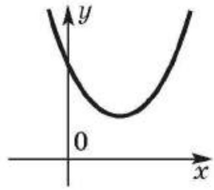
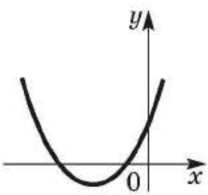



Рис. 8.36

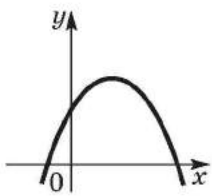
**5.** На рисунках изображены графики квадратичных функций $y = ax^2 + bx + c$. Установите соответствие между графиками функций и знаками коэффициентов $a$ и $c$.

ГРАФИКИ

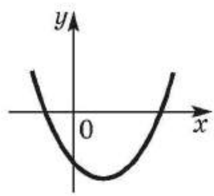
А)




Б)




В)



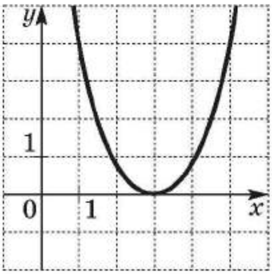

КОЭФФИЦИЕНТЫ

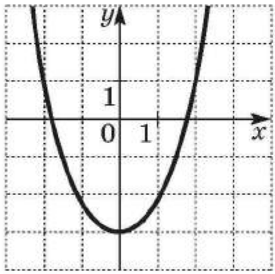
1) $a > 0,\ c > 0$
2) $a > 0,\ c < 0$
3) $a < 0,\ c > 0$

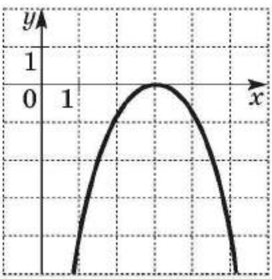
В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер:

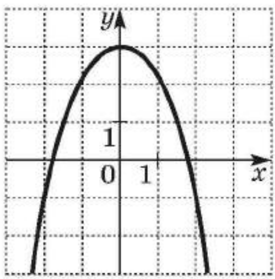
| А | Б | В |
|---|---|---|
| | | |

**6.** На каком из рисунков изображён график функции $y = 3 - x^2$?

1)



3)



2)



4)



**7.** График какой из указанных функций изображён на рисунке 8.37?

1) $y = (x - 2)^2$

2) $y = (x + 2)^2$

3) $y = x^2 - 2$

4) $y = x^2 + 2$

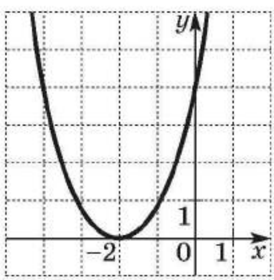



Рис. 8.37

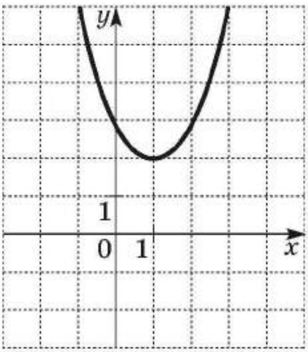
**8.** Установите соответствие между функциями и их графиками.

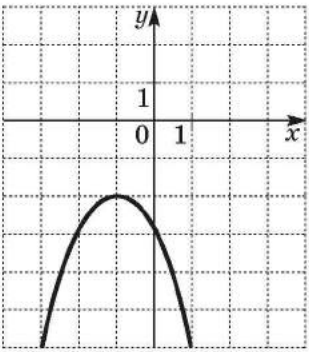
ФУНКЦИИ

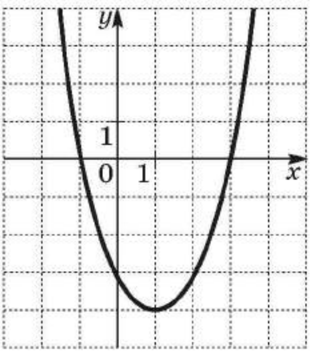
А) $y = x^2 - 2x - 3$ В) $y = -x^2 - 2x - 3$

Б) $y = x^2 - 2x + 3$

ГРАФИКИ

1) 

2) 

3) 

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер:

| А | Б | В |
|---|---|---|
| | | |

**9.** На рисунке 8.38 изображён график функции $y = -x^2 + 2x + 4$. Пользуясь рисунком, укажите область значений этой функции.

1) $(-\infty; +\infty)$
2) $[1; +\infty)$
3) $(-\infty; 1]$
4) $(-\infty; 5]$

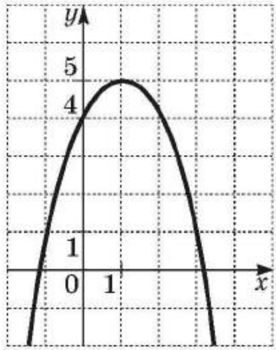


Рис. 8.38

**10.** Областью значений какой из данных функций является промежуток $(-\infty; 4]$?

1) $y = x^2 + 4$
2) $y = 4 - x$
3) $y = 4$
4) $y = 4 - x^2$

**11.** Областью значений какой из данных функций является промежуток вида $[a; +\infty)$, где $a$ — некоторое отличное от нуля число?

1) $y = \sqrt{x}$
2) $y = 3x - 2$
3) $y = |x|$
4) $y = (x + 4)^2 + 6$

**12.** На рисунке 8.39 изображён график функции $y = -x^2 - 2x + 3$. Пользуясь рисунком, укажите промежуток возрастания функции.

1) $(-\infty; -1]$
2) $[-3; 1]$
3) $(-\infty; 4]$
4) $[0; 4]$

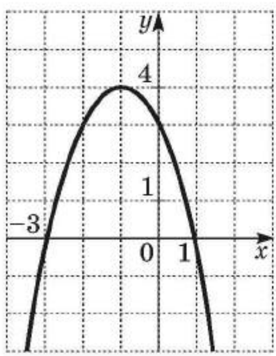


Рис. 8.39

**13.** На рисунке 8.40 изображён график функции $y = x^2 + 4x + 1$. Пользуясь рисунком, найдите промежуток убывания функции.

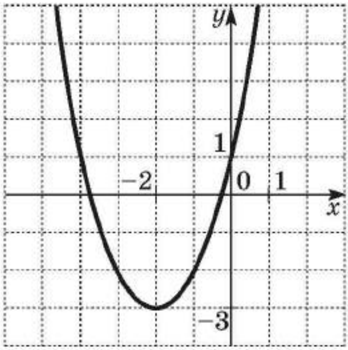



Рис. 8.40

1) $[-3; +\infty)$ 3) $(-\infty; 1]$
2) $[-2; +\infty)$ 4) $(-\infty; -2]$

**14.** Какова область определения функции

$$y = \sqrt{8-2x}\,?$$

1) $(4; +\infty)$ 3) $(-\infty; 4)$
2) $(-\infty; 4]$ 4) $[4; +\infty)$

**15.** Областью определения какой из приведённых функций является промежуток $(9; +\infty)$?

1) $y = \sqrt{x+9}$ 3) $y = \sqrt{x-9}$

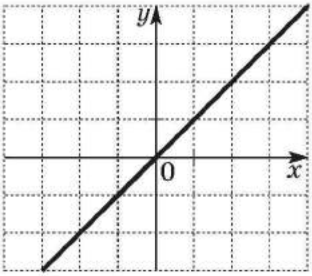
2) $y = \dfrac{9}{\sqrt{x+9}}$ 4) $y = \dfrac{9}{\sqrt{x-9}}$

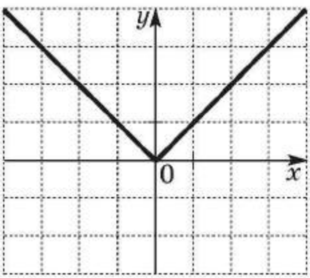
**16.** Область определения какой из данных функций состоит из одного числа?

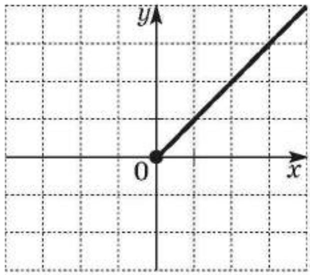
1) $y = \dfrac{1}{x}$ 3) $y = \sqrt{x}$

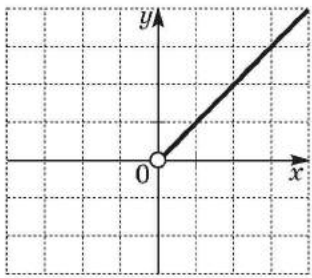
2) $y = \sqrt{-x^2}$ 4) $y = \sqrt{|x|}$

**17.** На каком из рисунков изображён график функции $y = (\sqrt{x})^2$?

1)



2)



3)



4)



**18.** Укажите уравнение, графическое решение которого изображено на рисунке 8.41.

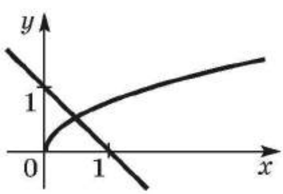



Рис. 8.41

1) $\sqrt{x} = x + 1$

2) $\sqrt{x} = 1 - x$

3) $\sqrt{x} = -x - 1$

4) $\sqrt{x} = x - 1$

## Часть 2

**19.** Найдите область определения функции

$$y = \frac{5}{\sqrt{x^2+3x-10}} + \frac{8}{2x-7}.$$

**20.** Найдите область определения функции

$$y = \frac{4}{\sqrt{3x-15}} + \frac{8}{|x|-6}.$$

**21.** Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{6x-x^2} + \frac{3}{\sqrt{x-3}}.$$

**22.** Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 3$. Пользуясь графиком, найдите:

1) область значений функции;

2) при каких значениях $x$ функция принимает положительные значения.

**23.** Постройте график функции $y = -x^2 - 6x - 8$. Пользуясь графиком, найдите:

1) область значений функции;

2) промежуток возрастания функции.

**24.** Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x+2, \text{ если } x \leqslant -1, \\ x^2, \text{ если } -1 < x < 1, \\ \sqrt{x}, \text{ если } x \geqslant 1. \end{cases}$$

Пользуясь графиком, найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

**25.** Постройте график функции

$$y = \begin{cases} -\dfrac{6}{x}, \text{ если } x < -2, \\ x^2-1, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{6}{x}, \text{ если } x > 2. \end{cases}$$

Пользуясь графиком, найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции.

**26.** Найдите все значения $k$, при которых парабола $y = 12 - x^2$ и прямая $y = kx$ имеют только одну общую точку.

**27.** Какое наименьшее значение принимает функция $y = 4x^2 - 16x + 19$?

**28.** Какое наибольшее значение принимает функция $y = 1 + 18x - 9x^2$?

**29.** При каком значении $c$ наименьшее значение функции $y = 0{,}5x^2 + 4x + c$ равно $-2$?

**30.** При каких значениях $p$ и $q$ график функции $y = x^2 + px + q$ проходит через точки $A\,(1; -4)$ и $B\,(-2; 5)$?

**31.** При каких значениях $a$ и $b$ график функции $y = ax^2 + bx + 1$ проходит через точки $C\,(-1; 3)$ и $D\,(2; 7)$?

**32.** Найдите координаты вершины параболы, проходящей через точки $A\,(0; -7)$, $B\,(1; -2)$ и $C\,(7; -14)$.

**33.** При каких значениях $a$ и $c$ вершина параболы $y = ax^2 - 12x + c$ находится в точке $B\,(-2; 3)$?

**34.** При каких значениях $p$ вершины парабол $y = x^2 - 10px - 3$ и $y = x^2 + 2px - 5p$ расположены в одной полуплоскости относительно оси абсцисс?

**35.** При каких значениях $p$ вершины парабол $y = x^2 + px + 2p$ и $y = -x^2 - 4px - 1$ расположены в разных полуплоскостях относительно оси абсцисс?

**36.** Найдите ординату вершины параболы, фрагмент которой изображён на рисунке 8.42.

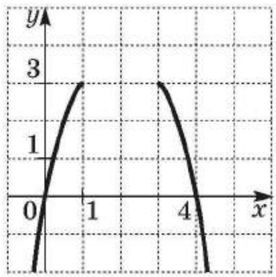



Рис. 8.42

**37.** Постройте график функции $y = \dfrac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x}$.

**38.** Постройте график функции $y = \dfrac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^2 - 4}$.

**39.** Постройте график функции

$y = \begin{cases} x^2 - 4x + 4, \text{ если } x < 3, \\ \dfrac{3}{x}, \text{ если } x \geqslant 3 \end{cases}$ и определите, при

каких значениях $b$ прямая $y = b$ имеет с графиком одну или две общие точки.

**40.** Постройте график функции

$y = \begin{cases} 2x - 2, \text{ если } x < 3, \\ x^2 - 8x + 19, \text{ если } x \geqslant 3 \end{cases}$ и определите, при

каких значениях $b$ прямая $y = b$ имеет с графиком ровно две общие точки.

**41.** Постройте график функции

$y = \begin{cases} \dfrac{8}{x}, \text{ если } |x| > 2, \\ -x^2, \text{ если } |x| \leqslant 2 \end{cases}$ и определите, при каких

значениях $b$ прямая $y = b$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

**42.** Постройте график функции $y = |x^2 + 2x - 8|$. Какое наибольшее количество общих точек может иметь построенный график с прямой, параллельной оси абсцисс?

**43.** Постройте график функции $y = x^2 - 6|x| + 5$. Какое наибольшее количество общих точек может иметь построенный график с прямой, параллельной оси абсцисс?

**44.** Постройте график функции $y = |x^2 - 2|x| - 3|$. Какое наибольшее количество общих точек может иметь построенный график с прямой, параллельной оси абсцисс?

**45.** Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2+1)(x-2)}{x-2}$ и определите, при каких значениях $k$ прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

**46.** Постройте график функции $y = x|x| - 2|x| - 4x$ и определите, при каких значениях $b$ прямая $y = b$ имеет с графиком ровно две общие точки.

**47.** Постройте график функции $y = \dfrac{(0,5x^2 - x)|x|}{x-2}$ и определите, при каких значениях $b$ прямая $y = b$ не имеет с графиком общих точек.

**48.** Постройте график функции $y = x^2 - |4x + 4|$ и определите, при каких значениях $b$ прямая $y = b$ имеет с графиком ровно три общие точки.

**49.** Постройте график функции $y = \dfrac{1}{2}\left(\left|\dfrac{x}{2} - \dfrac{2}{x}\right| + \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}\right)$ и определите, при каких значениях $b$ прямая $y = b$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

**50.** Решите графически уравнение $\sqrt{x} = 3 - 2x$.

**51.** Решите графически уравнение $x + 5 = \dfrac{6}{x}$.

**52.** Решите графически уравнение $\sqrt{x} = \dfrac{8}{x}$.

# § 9. Уравнения с двумя переменными

## 9.1. Решение уравнения с двумя переменными. График уравнения

Выражения $x^2 + y^2$, $\frac{x+y}{x-y}$, $(x-1)(y+2)$, $x - 3y$ являются примерами выражений с двумя переменными $x$ и $y$.

Выражение с переменными $x$ и $y$ обозначают так: $F(x; y)$ (читают: «эф от икс и игрек»).

Равенство $F(x; y) = 0$ является уравнением с двумя переменными $x$ и $y$.

Например, если $F(x; y) = ax + by + c$, то равенство $F(x; y) = 0$ является линейным уравнением с двумя переменными.

Пару чисел $(x_0; y_0)$ называют **решением уравнения** $F(x; y) = 0$, если $F(x_0; y_0) = 0$ — правильное числовое равенство.

**Решить уравнение** $F(x; y) = 0$ — это значит найти множество его решений.

Задача. Решите уравнение $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$.
Решение. Имеем:

$$x^2 - 2x + y^2 + 2y + 2 = 0;$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 = 0;$$
$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = 0.$$

Поскольку $(x-1)^2 \geqslant 0$ и $(y+1)^2 \geqslant 0$, то левая часть уравнения обращается в нуль только при одновременном выполнении условий: $x - 1 = 0$ и $y + 1 = 0$. Отсюда пара чисел $(1; -1)$ — единственное решение данного уравнения.
Ответ: $(1; -1)$.

**Графиком уравнения с двумя переменными** называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых (пары чисел) являются решениями данного уравнения.

Например, графиком уравнения $x^2 + y^2 + 2 = 2x - 2y$ является единственная точка $M(1; -1)$ (рис. 9.1).

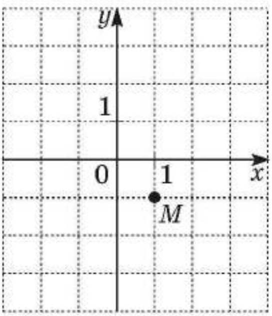



Рис. 9.1

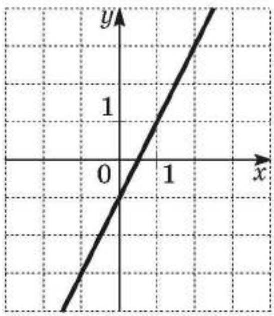



Рис. 9.2

На рисунке 9.2 изображён график функции $y = 2x - 1$. Поскольку формула, задающая линейную функцию, является уравнением с двумя переменными, то также можно сказать, что на рисунке 9.2 изображён график уравнения $y = 2x - 1$.

На рисунке 9.3 изображена гипербола, являющаяся графиком уравнения $xy = 12$. На рисунке 9.4 изображена окружность, являющаяся графиком уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

❶ Если какая-то фигура является графиком уравнения, то выполняются два условия:

1) все решения уравнения являются координатами точек, принадлежащих графику;

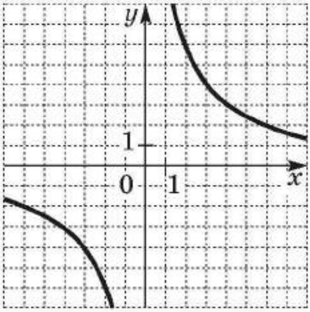



Рис. 9.3

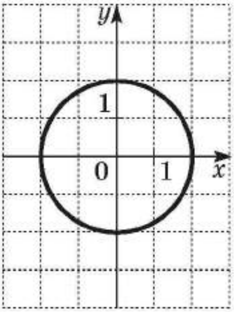



Рис. 9.4

2) координаты любой точки, принадлежащей графику, — это пара чисел, которая является решением данного уравнения.

## 9.2. Системы уравнений с двумя переменными. Решение систем уравнений графическим методом

Если требуется найти все общие решения нескольких уравнений, то говорят, что нужно решить **систему уравнений**.

Систему уравнений записывают с помощью фигурной скобки.

Так, запись

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 4 \end{cases}$$

является примером **системы двух уравнений с двумя переменными.**

**Решением системы уравнений с двумя переменными** называют пару значений переменных, обращающую каждое уравнение в верное равенство.

Например, пара чисел $(-2;\ 0)$ является решением системы $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$

Однако нахождение одного решения не означает, что данная система решена.

**Решить систему уравнений** — значит найти множество её решений.

Пусть стоит задача решить систему уравнений

$$\begin{cases} -6x + 5y = 9, \\ 4x + 3y = 13. \end{cases}$$

На рисунке 9.5 изображены графики уравнений $-6x + 5y = 9$ и $4x + 3y = 13$. Они пересекаются в точке $M\ (1;\ 3)$. Эта точка принадлежит каждому из графиков. Следовательно, пара чисел $(1;\ 3)$ является общим решением данных уравнений.

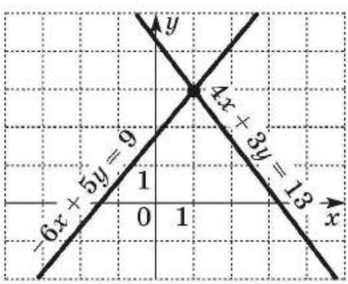



Рис. 9.5

Других общих точек графики уравнений не имеют, а следовательно не имеет других решений и сама система. Вывод: пара чисел $(1;\ 3)$ — единственное решение данной системы.

Описанный метод решения системы уравнений называют **графическим**. Его суть состоит в следующем:

- построить на одной координатной плоскости графики уравнений, входящих в систему;
- найти координаты всех точек пересечения построенных графиков;
- полученные пары чисел и будут искомыми решениями.

Графический метод эффективен в тех случаях, когда требуется определить количество решений системы. Например, на рисунке 9.6 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Эти графики имеют три общие точки. Это позволяет нам утверждать, что система $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x) \end{cases}$ имеет три решения.

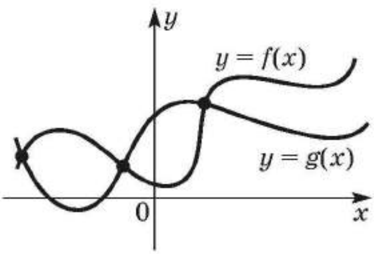



Рис. 9.6

Задача 1. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0. \end{cases}$

Решение. Первое уравнение системы равносильно такому: $y = x^2 - 4x + 3$. Его графиком является парабола, изображённая на рисунке 9.7.

Графиком второго уравнения является прямая, которая пересекает построенную параболу в двух точках: (1; 0) и (4; 3) (рис. 9.7).

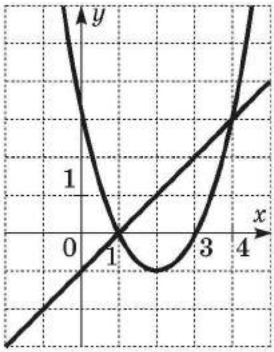


Рис. 9.7

Проверка подтверждает, что пары чисел (1; 0) и (4; 3) действительно являются решениями данной системы.

Ответ: (1; 0), (4; 3).

Задача 2. Определите количество решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = \dfrac{7}{2}. \end{cases}$

Решение. Графиком первого уравнения системы является окружность с центром (0; 0) радиуса 3.

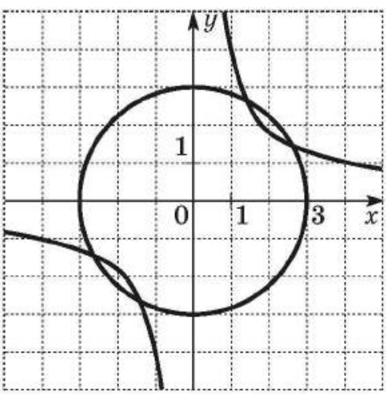


Рис. 9.8

Второе уравнение равносильно такому: $y = \frac{3,5}{x}$.

Графиком этого уравнения является гипербола. Изобразим окружность и гиперболу на одной координатной плоскости (рис. 9.8). Мы видим, что графики пересекаются в четырёх точках. Следовательно, данная система имеет четыре решения.

Ответ: 4 решения.

### 9.3. Методы решения систем двух уравнений с двумя переменными

В пункте 9.2 мы решили графическим методом систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 4x - y + 3 = 0, \\ y - x + 1 = 0. \end{cases}$

Решим эту систему **методом подстановки.**

Выразим переменную $y$ через переменную $x$ во втором уравнении системы:

$$y = x - 1.$$

Подставим в первое уравнение вместо $y$ выражение $x - 1$:

$$x^2 - 4x - (x - 1) + 3 = 0.$$

Получили уравнение с одной переменной. Упростив его, получим квадратное уравнение $x^2 - 5x + 4 = 0$. Отсюда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$.

Значения $y$, которые соответствуют найденным значениям $x$, найдём из уравнения $y = x - 1$. Имеем: $y_1 = 1 - 1 = 0$, $y_2 = 4 - 1 = 3$.

Ответ: (1; 0), (4; 3).

В пункте 9.2 мы графическим методом определили количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ xy = \frac{7}{2}. \end{cases}$$

Решим эту систему **методом сложения.**

Умножим второе уравнение рассматриваемой системы на 2:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ 2xy = 7. \end{cases}$$

Сложим почленно левые и правые части уравнений. Получаем: $x^2 + y^2 + 2xy = 16$. Отсюда $(x + y)^2 = 16$; $x + y = 4$ или $x + y = -4$.

Для решения данной системы достаточно решить две более простые системы.

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 2xy = 7; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x(4 - x) = 7; \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x, \\ 2x^2 - 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Решив второе уравнение этой системы, получим:

$x_1 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_2 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$.

Тогда $y_1 = \frac{4 + \sqrt{2}}{2}$,

$y_2 = \frac{4 - \sqrt{2}}{2}$.

2) $\begin{cases} x + y = -4, \\ 2xy = 7; \end{cases}$

$\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x(-4 - x) = 7; \end{cases}$

$\begin{cases} y = -4 - x, \\ 2x^2 + 8x + 7 = 0. \end{cases}$

Решив второе уравнение этой системы, получим:

$x_3 = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}$, $x_4 = \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}$.

Тогда $y_3 = \frac{-4 + \sqrt{2}}{2}$,

$y_4 = \frac{-4 - \sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2};\ \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2};\ \frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)$,

$\left(\frac{-4-\sqrt{2}}{2};\ \frac{-4+\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{-4+\sqrt{2}}{2};\ \frac{-4-\sqrt{2}}{2}\right)$.

В пункте 7.7 был рассмотрен **метод замены переменных** при решении уравнений. Этот метод применяется и для решения целого ряда систем уравнений.

Задача 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{5}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10. \end{cases}$$

Решение. Пусть $\frac{x+y}{x-y} = t$. Тогда $\frac{x-y}{x+y} = \frac{1}{t}$.

Теперь первое уравнение системы можно записать так:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}.$$

Отсюда $2t^2 - 5t + 2 = 0$; $t_1 = 2$, $t_2 = \frac{1}{2}$.

Для решения исходной системы достаточно решить две более простые системы.

1) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 2x - 2y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{1}{2}, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + 2y = x - y, \\ x^2 + y^2 = 10; \end{cases}$ $\begin{cases} x = -3y, \\ 10y^2 = 10. \end{cases}$

| | |
|---|---|
| Из второго уравнения получаем: $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Тогда $x_1 = 3$, $x_2 = -3$. | Из второго уравнения получаем: $y_3 = 1$, $y_4 = -1$. Тогда $x_3 = -3$, $x_4 = 3$. |

Ответ: (3; 1), (−3; −1), (−3; 1), (3; −1).

Задача 2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 2y + xy = 8, \\ x^2 + y^2 + 3x + 3y = 14. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что данная система не изменится, если заменить $x$ на $y$, а $y$ на $x$. В таких случаях может оказаться эффективной замена $x + y = u$, $xy = v$.

Перепишем данную систему так:

$$\begin{cases} 2(x + y) + xy = 8, \\ (x + y)^2 - 2xy + 3(x + y) = 14. \end{cases}$$

Выполним указанную замену. Получим систему:

$$\begin{cases} 2u + v = 8, \\ u^2 - 2v + 3u = 14. \end{cases}$$

Её можно решить методом подстановки (сделайте это самостоятельно). Получаем:

$$\begin{cases} u = 3, \\ v = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} u = -10, \\ v = 28. \end{cases}$$

Остаётся решить две системы:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 28. \end{cases}$$

Каждую из них можно решить методом подстановки. Однако здесь удобнее воспользоваться теоремой, обратной теореме Виета. Так, для системы $\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases}$ можно считать, что $x$ и $y$ — корни квадратного уравнения $t^2 - 3t + 2 = 0$. Отсюда $t_1 = 1$, $t_2 = 2$. Следовательно, пары чисел (1; 2) и (2; 1) являются решениями этой системы. Используя эту же идею, легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что система $\begin{cases} x + y = -10, \\ xy = 28 \end{cases}$ решений не имеет.

Ответ: (1; 2), (2; 1).

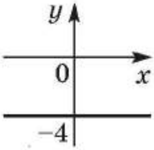
## Примеры заданий № 13

### Часть 1

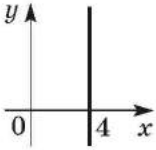
1. Какая из данных пар чисел является решением уравнения $4x - 3y = 1$?
   1) (1; 1) 2) (7; – 9) 3) (2; – 3) 4) (3; 5)
2. Укажите номера верных утверждений.
   1) пара чисел (–1; 0) является решением уравнения $x^2 + y + 1 = 0$
   2) пара чисел (–2; 5) является решением уравнения $6x - 7y = -47$
   3) пара чисел (4; –3) не является решением уравнения $x^2 + y^2 = 26$
   4) уравнение $x^2 + (y - 1)^2 = 0$ не имеет решений
3. Для уравнения $7x - 2y = -16$ найдите значение $x$, соответствующее значению $y$, равному –2,5.
4. Известно, что пара чисел (–3; 2) является решением уравнения $4x + by = 30$. Найдите значение $b$.
5. Через какую из данных точек проходит график уравнения $4x + 5y = 20$?
   1) $A(0; -4)$ 2) $B(1; 3)$ 3) $C(5; 0)$ 4) $D(3; 2)$

**6.** На каком рисунке изображён график уравнения $x + 4 = 0$?

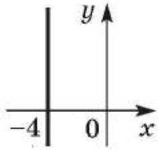
1)



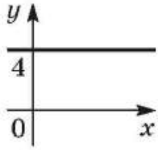

2)




3)




4)



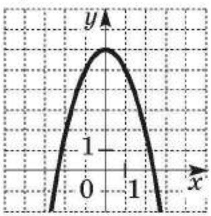

**7.** Установите соответствие между уравнениями и их графиками.

УРАВНЕНИЯ

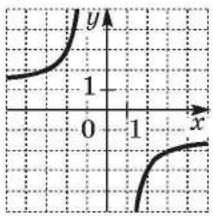
А) $xy = -6$ Б) $x + y = -6$ В) $x^2 + y = 6$

ГРАФИКИ

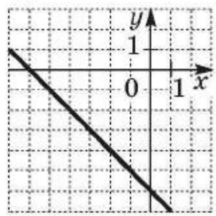
1)




2)




3)




В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер:

| А | Б | В |
|---|---|---|
| | | |

**8.** Каковы координаты точки пересечения графика уравнения $5x - 8y = 80$ с осью ординат?

1) (16; 0) 2) (0; 16) 3) (0; −10) 4) (−10; 0)

**9.** При каком значении $a$ график уравнения $7x - 9y = a + 6$ проходит через начало координат?

**10.** Какая пара чисел является решением системы уравнений $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ 3x + 2y = 23? \end{cases}$

1) (1; 1) 2) (2; 4) 3) (7; 3) 4) (3; 7)

**11.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 4x - 7y = 1, \\ 2x + 7y = 11. \end{cases}$

В ответ запишите сумму чисел, образующих решение системы.

**12.** Решите уравнение $x^2 + 14y - 4x = -y^2 - 53$.

1) (2; −7) 2) (−2; 7) 3) (2; 7) 4) (−2; −7)

### Часть 2

**13.** Постройте график уравнения $|x + y| = 4$.

**14.** Постройте график уравнения $|y + x| = |x - 2|$.

**15.** Постройте график уравнения $\dfrac{y + x^2}{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 0$.

**16.** Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

**17.** Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

**18.** Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ xy = 9. \end{cases}$

**19.** Определите графически количество решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y = 4 - x^2. \end{cases}$

**20.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 3y = -14, \\ \frac{x}{2} + \frac{y-3}{5} = -2{,}5. \end{cases}$

**21.** Решите уравнение $|x^2 + 3y - 22| + x^2 + 10xy + 25y^2 = 0$.

**22.** Постройте график уравнения

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$.

**23.** При каких значениях $a$ система уравнений

$$\begin{cases} 2x + ay = -2, \\ ax + 8y = -4 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

**24.** При каких значениях $a$ система уравнений

$\begin{cases} 3x + ay = 5, \\ ax + 12y = a + 4 \end{cases}$ не имеет решений?

**25.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x^2 - 4x = y, \\ 2x + 8 = y. \end{cases}$

**26.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 5y - x = 4, \\ x^2 + 3y^2 = 4. \end{cases}$

**27.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 3y^2 - xy = 20, \\ x + 3y = -2. \end{cases}$

**28.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x - 2y = 6, \\ x^2 - xy + y^2 = 12. \end{cases}$

**29.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65, \\ xy = 8. \end{cases}$

**30.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 5y^2 = 29, \\ 2x^2 + 10y^2 = 29y. \end{cases}$

**31.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 7y^2 = 22, \\ 10x^2 - 35y^2 = -22x. \end{cases}$$

**32.** Решите систему уравнений $\begin{cases} (5x+3y)^2 = 8y, \\ (5x+3y)^2 = 8x. \end{cases}$

**33.** Решите систему уравнений $\begin{cases} (x-6)(y+2) = 0, \\ \dfrac{y-3}{x+y-9} = 2. \end{cases}$

**34.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 8xy + 16y^2 = 4, \\ xy + 4y^2 = 6. \end{cases}$

**35.** Найдите координаты точек параболы $y = -x^2 + 5x + 5$, у которых сумма абсциссы и ординаты равна 13.

**36.** Найдите координаты точек пересечения прямой $3x - y - 2 = 0$ и параболы $y = 3x^2 + 8x - 4$.

**37.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x^2 - y = 39, \\ 3x^2 + y = 33. \end{cases}$

**38.** Решите систему уравнений $\begin{cases} 2x + 5xy = 14, \\ y - 5xy = -9. \end{cases}$

**39.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x - y + xy = 9, \\ x - y - xy = -1. \end{cases}$

**40.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$

**41.** Решите систему уравнений $\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = 6, \\ 3xy + \dfrac{2x}{y} = 28. \end{cases}$

**42.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+3y}{x-y} - \dfrac{x-y}{x+3y} = \dfrac{24}{5}, \\ 5x + 8y = 18. \end{cases}$$

**43.** Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{x}{y} - \dfrac{2y}{x} = 1, \\ x^2 - 5xy + 2y^2 = 32. \end{cases}$

**44.** Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 17, \\ x + xy + y = 9. \end{cases}$

**45.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - 4xy + y^2 = 1, \\ 3x^2 - 6xy - y^2 = -1. \end{cases}$$

**46.** При каких значениях $a$ система уравнений $\begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет одно решение?

**47.** При каких значениях $a$ система уравнений $\begin{cases} x - y = 4, \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$ имеет два решения?

# § 10. Текстовые задачи

## 10.1. Решение текстовых задач с помощью уравнений

Часто условие задачи представляет собой описание какой-то реальной ситуации. Составленное по этому условию уравнение называют **математической моделью** этой ситуации.

❶ При решении задач на составление уравнений следует пользоваться следующей схемой:

1) по условию задачи составить уравнение (сконструировать математическую модель задачи);

2) решить уравнение, полученное на первом шаге;

3) выяснить, соответствует ли найденный корень смыслу задачи, и дать ответ.

З а д а ч а 1. **Из пункта $A$ выехал велосипедист, а через 45 мин после этого в том же направлении выехал грузовик, догнавший велосипедиста на расстоянии 15 км от пункта $A$. Найдите скорость велосипедиста и скорость грузовика, если скорость грузовика на 18 км/ч больше скорости велосипедиста.**

Р е ш е н и е. Пусть скорость велосипедиста равна $x$ км/ч, тогда скорость грузовика составляет $(x+18)$ км/ч. Велосипедист проезжает 15 км за $\frac{15}{x}$ ч, а грузовик — за $\frac{15}{x+18}$ ч. Поскольку грузовик проехал 15 км на 45 мин, т. е. на $\frac{3}{4}$ ч, быстрее, чем велосипедист, то получаем уравнение $\frac{15}{x}-\frac{15}{x+18}=\frac{3}{4}$.

Решим это уравнение:

$$\frac{15}{x}-\frac{15}{x+18}=\frac{3}{4};$$

$$\frac{5}{x}-\frac{5}{x+18}=\frac{1}{4};$$

$$\frac{20x+360-20x-x^2-18x}{4x(x+18)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2+18x-360=0, \\ x\neq 0, \\ x\neq -18. \end{cases}$$

Решив квадратное уравнение системы, получим: $x=12$ или $x=-30$.

Корень $-30$ не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, скорость велосипедиста равна 12 км/ч, а скорость грузовика составляет $12 + 18 = 30$ (км/ч).

**Ответ:** 12 км/ч, 30 км/ч.

**Задача 2.** Одна бригада работала на ремонте дороги 7 ч, после чего к ней присоединилась вторая бригада. Через 2 ч их совместной работы ремонт был завершён. За сколько часов может отремонтировать дорогу каждая бригада, работая самостоятельно, если первой для этого требуется на 4 ч больше, чем второй?

**Решение.** Пусть первая бригада может самостоятельно отремонтировать дорогу за $x$ ч, тогда второй для этого нужно $(x - 4)$ ч. За 1 ч первая бригада ремонтирует $\frac{1}{x}$ часть дороги, а вторая — $\frac{1}{x-4}$ часть дороги. Первая бригада работала 9 ч и отремонтировала $\frac{9}{x}$ дороги, а вторая бригада работала 2 ч и отремонтировала соответственно $\frac{2}{x-4}$ дороги. Поскольку в результате была отремонтирована вся дорога, то $\frac{9}{x} + \frac{2}{x-4} = 1$.

Полученное уравнение имеет два корня — $x_1 = 12$ и $x_2 = 3$ (убедитесь в этом самостоятельно). Второй корень не удовлетворяет условию задачи, поскольку тогда вторая бригада должна была бы отремонтировать дорогу за $3 - 4 = -1$ (ч), что не имеет смысла.

**Ответ:** 12 ч, 8 ч.

З а д а ч а 3. Водный раствор соли содержал 120 г воды. После того как к раствору добавили 10 г соли, его концентрация увеличилась на 5%. Сколько граммов соли содержал раствор сначала?

Р е ш е н и е. Пусть исходный раствор содержал $x$ г соли. Тогда его масса была равна $(x + 120)$ г, а масса соли составляла $\frac{x}{x+120}$ часть массы всего раствора. После того как к раствору добавили 10 г соли, её масса в растворе составила $(x + 10)$ г, а масса раствора — $(x + 130)$ г. Теперь соль составляет $\frac{x+10}{x+130}$ часть раствора, что на 5%, т. е. на $\frac{1}{20}$, больше, чем $\frac{x}{x+120}$. Отсюда получаем: $\frac{x+10}{x+130} - \frac{x}{x+120} = \frac{1}{20}$.

Полученное уравнение имеет два корня — $x_1 = 30$ и $x_2 = -280$ (убедитесь в этом самостоятельно), из которых второй корень не удовлетворяет условию задачи.

Следовательно, раствор содержал сначала 30 г соли.

О т в е т: 30 г.

## Примеры заданий № 14

### Часть 2

1. Два бегуна стартовали одновременно из одного и того же места круговой трассы в беге на несколько кругов. Спустя один час, когда одному из них

оставалось пробежать 2 км до окончания первого круга, оказалось, что второй бегун уже 6 мин назад прошёл первый круг. Найдите скорость первого бегуна, если она на 4 км/ч меньше скорости второго.

2. Из двух городов, расстояние между которыми 76 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Проехав некоторую часть пути, первый велосипедист сделал остановку на 39 мин, а затем продолжил движение до встречи со вторым велосипедистом. Скорость первого велосипедиста составляет 10 км/ч, а второго — 12 км/ч. Найдите расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи.
3. Мотоциклист проехал 40 км из пункта $A$ в пункт $B$ и вернулся назад. На обратном пути он уменьшил скорость на 10 км/ч по сравнению с первоначальной и затратил на поездку на 20 мин больше, чем на путь из пункта $A$ в пункт $B$. Найдите первоначальную скорость мотоциклиста.
4. Расстояние между городами $A$ и $B$ равно 93 км. Из города $A$ в город $B$ выехал первый велосипедист. Через час навстречу ему из города $B$ выехал второй велосипедист, скорость которого на 3 км/ч больше скорости первого. Велосипедисты встретились на расстоянии 45 км от города $A$. Найдите скорость первого велосипедиста.
5. Из города выехал микроавтобус. Через 10 мин после него из этого города в том же направлении выехал легковой автомобиль, который догнал микроавтобус на расстоянии 40 км от города. Найдите скорость микроавтобуса, если она на 20 км/ч меньше скорости легкового автомобиля.

6. Расстояние от пункта $A$ до пункта $B$ по железной дороге равно 105 км, а по реке — 150 км. Поезд из пункта $A$ выходит на 2 ч позже теплохода и прибывает в пункт $B$ на 15 мин раньше. Найдите скорость поезда, если она на 30 км/ч больше скорости теплохода.
7. Поезд должен был проехать 64 км. Когда он проехал 24 км, то был задержан возле семафора на 12 мин. После этого он увеличил скорость на 10 км/ч и прибыл в пункт назначения с опозданием на 4 мин. Найдите первоначальную скорость поезда.
8. Из пункта $A$ в пункт $B$ выехали одновременно два автомобиля. Первый автомобиль проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй проехал первую половину пути со скоростью 66 км/ч, а вторую половину пути — со скоростью, меньшей скорости первого автомобиля на 5 км/ч. Автомобили прибыли в пункт $B$ одновременно. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 50 км/ч.
9. Катер прошёл 30 км по течению реки и вернулся назад, затратив на весь путь 2 ч 15 мин. Определите скорость течения, если собственная скорость катера равна 27 км/ч.
10. Лодка проплывает 9 км по течению реки и 1 км против течения за то же время, которое требуется плоту, чтобы проплыть 4 км по этой реке. Найдите скорость течения, если собственная скорость лодки составляет 8 км/ч.
11. Моторная лодка прошла 16 км по озеру, а затем 15 км по реке, впадающей в это озеро, за 1 ч. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки составляет 2 км/ч.

**12.** Турист проплыл на моторной лодке 30 км против течения реки и вернулся назад на плоту. Найдите скорость течения реки, если на плоту турист плыл на 3 ч дольше, чем на лодке, а собственная скорость лодки составляет 15 км/ч.

**13.** Расстояние между пристанями $A$ и $B$ равно 63 км. От пристани $A$ к пристани $B$ по течению реки отправился плот, а через 2 ч вслед за ним отправилась моторная лодка, которая, приплыв к пристани $B$, тотчас повернула обратно и возвратилась к пристани $A$. К этому времени плот проплыл 20 км. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

**14.** Для перевозки 60 т груза было заказано некоторое количество грузовых автомобилей. Из-за неисправности двух из них на каждый автомобиль пришлось нагрузить на 1 т больше, чем планировалось. Сколько автомобилей должно было работать на перевозке груза?

**15.** Первый рабочий изготавливает 96 одинаковых деталей на 2 ч быстрее, чем второй 112 таких же деталей. Сколько деталей в час изготавливает первый рабочий, если он делает за час на 2 детали больше, чем второй?

**16.** Первый насос наполнил водой бассейн объёмом 360 м$^3$, а второй — объёмом 480 м$^3$. Первый насос перекачивал ежечасно на 10 м$^3$ воды меньше, чем второй, и работал на 2 ч дольше, чем второй. Сколько кубометров воды перекачивает за час первый насос?

**17.** Два маляра, работая вместе, могут покрасить фасад дома за 16 ч. За сколько часов может выполнить эту работу каждый из них, работая самостоятельно, если одному для этого надо на 24 ч меньше, чем другому?

**18.** Первому рабочему для выполнения задания надо на 2 ч больше, чем второму. Первый рабочий работал 2 ч, а затем его сменил второй. После того как второй рабочий проработал 3 ч, оказалось, что выполнено $\frac{3}{4}$ задания. За сколько часов может выполнить это задание второй рабочий самостоятельно?

**19.** К раствору, содержавшему 20 г соли, добавили 100 г воды, после чего концентрация соли в растворе уменьшилась на 10%. Сколько граммов воды содержал раствор сначала?

**20.** К сплаву меди и цинка, содержавшему 10 кг цинка, добавили 10 кг меди. После этого процентное содержание меди в сплаве увеличилось на 5%. Сколько килограммов меди содержал исходный сплав?

### 10.2. Решение текстовых задач с помощью систем уравнений

З а д а ч а 1. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 18 км, вышли одновременно навстречу друг другу два туриста и встретились через 2 ч. С какой скоростью шёл каждый турист, если для прохождения всего расстояния между пунктами одному из них нужно на 54 мин больше, чем другому?

Р е ш е н и е. Пусть скорость первого туриста равна $x$ км/ч, а второго — $y$ км/ч, $x < y$. До встречи первый турист прошел $2x$ км, а второй — $2y$ км. Вместе они прошли 18 км. Тогда $2x + 2y = 18$.
Расстояние между пунктами первый турист проходит за $\frac{18}{x}$ ч, а второй — за $\frac{18}{y}$ ч. Так как первому

туристу для прохождения этого расстояния нужно на 54 мин $= \frac{54}{60}$ ч $= \frac{9}{10}$ ч больше, чем второму, то $\frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}$.

Получаем систему уравнений $\begin{cases} 2x + 2y = 18, \\ \frac{18}{x} - \frac{18}{y} = \frac{9}{10}. \end{cases}$

Тогда $\begin{cases} x + y = 9, \\ \frac{2}{x} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9 - y, \\ \frac{2}{9-y} - \frac{2}{y} = \frac{1}{10}. \end{cases}$

Решив второе уравнение последней системы, получаем: $y_1 = 5$, $y_2 = -36$. Корень $-36$ не подходит по смыслу задачи. Следовательно, $y = 5$, $x = 4$.

Ответ: 4 км/ч, 5 км/ч.

Задача 2. Два работника могут вместе выполнить производственное задание за 10 дней. После 6 дней совместной работы одного из них перевели на другое задание, а второй продолжал работать. Через 2 дня самостоятельной работы второго оказалось, что сделано $\frac{2}{3}$ всего задания. За сколько дней каждый работник может выполнить это производственное задание, работая самостоятельно?

Решение. Пусть первый работник может выполнить всё задание за $x$ дней, а второй — за $y$ дней. За 1 день первый работник выполняет $\frac{1}{x}$ часть задания, а за 10 дней — $\frac{10}{x}$ часть задания.

Второй работник за 1 день выполняет $\frac{1}{y}$ часть задания, а за 10 дней — $\frac{10}{y}$ часть задания. Так как за 10 дней совместной работы они выполняют всё задание, то $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Первый работник работал 6 дней и выполнил $\frac{6}{x}$ часть задания, а второй работал 8 дней и выполнил $\frac{8}{y}$ часть задания. Так как в результате было выполнено $\frac{2}{3}$ задания, то $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}$.

Получили систему уравнений $\begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1, \\ \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}. \end{cases}$

Сделав замену $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$, решите эту систему самостоятельно. Пара чисел $x = 15$, $y = 30$ является её решением. Следовательно, первый работник может выполнить задание за 15 дней, а второй — за 30 дней.

Ответ: 15 дней, 30 дней.

Задача 3. При делении двузначного числа на произведение его цифр получим неполное частное 5 и остаток 2. Разность этого числа и числа, полученного перестановкой его цифр, равна 36. Найдите это число.

Решение. Пусть искомое число содержит $x$ десятков и $y$ единиц. Тогда оно равно $10x + y$. Так как при делении этого числа на число $xy$ получаем неполное частное 5 и остаток 2, то $10x + y = 5xy + 2$.

Число, полученное перестановкой цифр данного, равно $10y + x$. По условию $(10x + y) - (10y + x) = 36$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 10x + y = 5xy + 2, \\ (10x + y) - (10y + x) = 36, \end{cases}$$

решениями которой являются две пары чисел: $x = 6$; $y = 2$ или $x = 0{,}2$; $y = -3{,}8$. Но вторая пара не подходит по смыслу задачи.
Следовательно, искомое число равно 62.
Ответ: 62.

## Примеры заданий № 15

### Часть 2

1. Имеем два сплава меди и цинка. Первый сплав содержит 9%, а второй — 30% цинка. Сколько надо взять килограммов первого сплава и сколько килограммов второго, чтобы получить сплав массой 300 кг, содержащий 23% цинка?
2. Два тракториста могут вспахать поле, работая вместе, за 6 ч. За сколько часов может вспахать это поле каждый тракторист, работая самостоятельно, если одному из них, для того чтобы вспахать $\frac{2}{5}$ поля, надо на 4 ч больше, чем другому, чтобы вспахать $\frac{1}{5}$ поля?
3. Вкладчик положил в банк деньги на два разных счёта, по одному из которых начисляли 5% годовых, а по другому — 4%, и получил через год по двум вкладам 11 600 р. прибыли. Если бы внесённые на разные счета деньги поменяли

местами, то годовая прибыль составила бы 11 800 р. Сколько всего денег было помещено в банк?

4. За 2 футбольных и 4 волейбольных мяча заплатили 20 000 р. После того как футбольный мяч подешевел на 20%, а волейбольный подорожал на 10%, за один футбольный и один волейбольный мячи заплатили 6500 р. Какой была первоначальная цена каждого мяча?

5. Два автомобиля выехали одновременно из городов $A$ и $B$ навстречу друг другу. Через час они встретились и, не останавливаясь, продолжили двигаться с теми же скоростями. Один из них прибыл в город $B$ на 50 мин позже, чем другой — в город $A$. Найдите скорость каждого автомобиля, если расстояние между городами составляет 100 км.

6. Две бригады работали на сборе яблок. В первый день первая бригада работала 2 ч, а вторая — 3 ч, причём вместе они собрали 23 ц яблок. На следующий день первая бригада за 3 ч собрала на 2 ц больше, чем вторая за 2 ч. Сколько центнеров яблок в час собирала каждая бригада?

7. Из села $A$ в село $B$, расстояние между которыми равно 24 км, выехал первый велосипедист. Через 15 минут после этого из села $B$ в село $A$ выехал второй велосипедист. Они встретились через 1 ч после выезда первого велосипедиста. Найдите скорость каждого велосипедиста, если первый из них проезжает за 2 ч на 6 км меньше, чем второй — за 3 ч.

8. Бассейн можно наполнить водой через две трубы, открыв их одновременно, за 4 ч 48 мин. В течение 7 ч бассейн наполняли водой через первую трубу,

а затем открыли и вторую трубу. Через 2 ч после этого бассейн был наполнен. За сколько часов можно наполнить бассейн через первую трубу?

## 10.3. Решение текстовых задач арифметическим способом

Составление уравнений и их систем — это не единственный способ решения текстовых задач. Также эффективным приёмом является «решение задач по действиям», т. е. арифметическим способом, когда в определённой последовательности находят значения числовых выражений и в конечном итоге получают ответ. Здесь переводом задачи из реальной жизни на математический язык является запись одного или нескольких числовых выражений.

Задача 1. Велосипедист проезжает расстояние между сёлами Солнечное и Счастливое за 2 ч, а пешеход проходит это расстояние за 6 ч. Велосипедист и пешеход одновременно отправились из этих сёл навстречу друг другу. Через сколько часов после начала движения они встретятся?

Решение. Расстояние между сёлами примем за единицу. За 1 ч велосипедист проезжает $\frac{1}{2}$ этого расстояния, а пешеход проходит $\frac{1}{6}$ расстояния.

1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (расстояния) — преодолеют велосипедист и пешеход за 1 ч вместе.

2) $1 : \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$ (ч) — время, за которое велосипедист и пешеход преодолеют всё расстояние.

Таким образом, они встретятся через 1,5 ч.

Ответ: 1,5 ч.

Задача 2. Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие — 12%. Сколько требуется свежих грибов для приготовления 5 кг сухих грибов?

Решение. Пусть масса сухих грибов составляет 100%. Тогда масса сухого вещества в них составляет $100 - 12 = 88$ (%) или 0,88.

1) $5 \cdot 0{,}88 = 4{,}4$ (кг) — сухого вещества содержится как в сушёных, так и в свежих грибах.

Пусть масса свежих грибов составляет 100%. Тогда масса сухого вещества в них составляет $100 - 90 = 10$ (%) или 0,1.

2) $4{,}4 : 0{,}1 = 44$ (кг) — требуется свежих грибов.

Ответ: 44 кг.

Задача 3. Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 72 км/ч, а вторую — со скоростью 48 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение. Пусть длина половины пути равна $s$ км. Тогда первую половину пути автомобиль проехал за $\frac{s}{72}$ ч, а вторую — за $\frac{s}{48}$ ч. Всего он проехал $2s$ км за $\left(\frac{s}{72} + \frac{s}{48}\right)$ ч. Следовательно, его средняя скорость составляет $\frac{2s}{\frac{s}{72} + \frac{s}{48}} = 2 : \left(\frac{1}{72} + \frac{1}{48}\right) =$

$= \frac{2 \cdot 72 \cdot 48}{72 + 48} = 57{,}6$ (км/ч).

Ответ: 57,6 км/ч.

## Примеры заданий № 16

### Часть 1

1. Старые часы отстают каждый час на 20 с. На сколько минут отстанут часы через 24 ч после того, как время на них будет выставлено точно?
2. Велосипедист проехал 20 км со скоростью 10 км/ч и 15 км со скоростью 5 км/ч. Найдите среднюю скорость движения велосипедиста.

   1) 6 км/ч
   2) 7,5 км/ч
   3) 7 км/ч
   4) 9 км/ч
3. Объём бака автомобиля составляет 40 л, а расход топлива на каждые 100 км — 10 л. Какое наименьшее количество раз водителю придётся заехать на заправку, если ему надо проехать 1300 км, а бак в начале движения был заполнен наполовину?

   1) 2 раза
   2) 4 раза
   3) 3 раза
   4) 5 раз
4. Пётр и Дмитрий собрали одинаковое количество марок. После этого Пётр подарил Дмитрию половину своей коллекции. Во сколько раз теперь у Дмитрия больше марок, чем у Петра?

   1) в 2 раза
   2) в 3 раза
   3) в 4 раза
   4) зависит от количества марок
5. Кирилл купил 5 тетрадей, после чего у него осталось 260 р. Для покупки 8 тетрадей ему не хватало 160 р. Сколько рублей стоит одна тетрадь?
6. Сумма возрастов трёх друзей равна 32 годам. Сколько лет будет им вместе через 4 года?

   1) 36 лет
   2) 40 лет
   3) 44 года
   4) 48 лет

7. Моторная лодка проплыла 36 км по течению реки за 3 ч и 36,8 км против течения за 4 ч. Какова скорость течения реки?

   1) 2,8 км/ч  3) 1,8 км/ч
   2) 2 км/ч  4) 1,4 км/ч

8. Между правым и левым берегами реки курсирует паром, который начинает первый рейс в 8:00 от правого берега, а затем каждые 30 мин отправляется в новый рейс от одного берега к другому, перевозя каждый раз не более 75 пассажиров. В котором часу отправится на пароме человек, который занял очередь на правом берегу в 11:50 и был в очереди сто двадцать шестым?

   1) 12:00  2) 12:30  3) 13:00  4) 13:30

9. В олимпиаде по математике каждую школу представляли двое или трое учащихся. Всего в олимпиаде участвовали 60 учащихся из 24 школ. Какое количество школ направили на олимпиаду по 3 учащихся?

10. Принтер печатает одну страницу за 5 с. Сколько страниц можно напечатать на этом принтере за 5,5 мин?

11. Земельный участок площадью 28 га засадили морковью и капустой. Площадь, занятая морковью, относится к площади, занятой капустой, как 2 : 5. Сколько гектаров земли засадили морковью?

## Часть 2

12. Машинист пассажирского поезда, двигавшегося со скоростью 56 км/ч, заметил, что товарный поезд, двигавшийся навстречу со скоростью 34 км/ч, прошёл мимо него за 15 с. Сколько метров составляет длина товарного поезда?

13. Было 300 г 5-процентного раствора соли. Через некоторое время 50 г воды испарили. Сколько процентов составило после этого содержание соли в растворе?
14. Васе надо 40 мин, чтобы добраться до стадиона и вернуться домой, если туда он идёт пешком, а возвращается на автобусе. Если он едет на автобусе в оба конца, то на весь путь тратит 16 мин. Сколько минут ему надо, чтобы пешком добраться до стадиона и вернуться домой?
15. Прокат лодки стоит 80 р. за первый час или его часть. Каждый следующий час проката или его часть стоит 60 р. Василий взял лодку в 9 ч 40 мин, а вернул в 13 ч 15 мин того же дня. Сколько рублей заплатил Василий за прокат лодки?
16. Первые 280 км автомобиль ехал со скоростью 70 км/ч, следующие 216 км — со скоростью 72 км/ч, а последние 80 км — со скоростью 40 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.
17. Первая и вторая бригады, работая вместе, могут отремонтировать дорогу за 6 ч, вторая и третья бригада могут отремонтировать эту дорогу за 12 ч, а первая и третья — за 8 ч. За сколько минут отремонтируют эту дорогу три бригады, работая вместе?
18. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 28 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего параллельно путям со скоростью 4 км/ч в направлении движения поезда, за 90 с. Найдите длину поезда в метрах.
19. Свежие фрукты содержат 80% воды, а высушенные — 30%. Сколько килограммов высушенных фруктов получили из 42 кг свежих фруктов?

# § 11. Неравенства

## 11.1. Числовые неравенства и их свойства

Разность чисел $a$ и $b$ может быть либо положительной, либо отрицательной, либо равной нулю, поэтому *для любых чисел $a$ и $b$ справедливо одно и только одно из таких соотношений: $a > b$, $a < b$, $a = b$.*

Если $a > b$, то точка, изображающая число $a$ на координатной прямой, лежит правее точки, изображающей число $b$ (рис. 11.1).

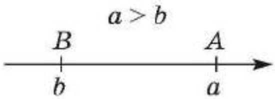


Рис. 11.1

Для высказывания «не больше» используют знак $\leqslant$ (читают: «меньше или равно»), а для высказывания «не меньше» — знак $\geqslant$ (читают: «больше или равно»).

Если $a < b$ или $a = b$, то верно неравенство $a \leqslant b$.

Если $a > b$ или $a = b$, то верно неравенство $a \geqslant b$.

Например, неравенства $7 \leqslant 7$, $7 \leqslant 15$, $-3 \geqslant -5$ верны. Заметим, что, например, неравенство $7 \leqslant 5$ неверно.

Знаки $<$ и $>$ называют знаками **строгого неравенства**, а знаки $\leqslant$ и $\geqslant$ — знаками **нестрогого неравенства**.

Задача. Докажите неравенство $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, где $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$.

Решение. Рассмотрим разность левой и правой частей данного неравенства. Имеем:

$$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}.$$

Выражение $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$ принимает неотрицательные значения при любых неотрицательных значениях переменных $a$ и $b$. Следовательно, доказываемое неравенство верно.

Неравенства $a > b$ и $c > d$ (или $a < b$ и $c < d$) называют **неравенствами одного знака**, а неравенства $a > b$ и $c < d$ (или $a < b$ и $c > d$) — **неравенствами противоположных знаков**.

Говорят, что неравенства $a + c > b + d$ и $ac > bd$ получены из неравенств $a > b$ и $c > d$ путем соответственно почленного сложения и умножения.

Рассмотрим основные свойства числовых неравенств.

1. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$; если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

2. Если $a > b$ и $c$ — любое число, то $a + c > b + c$; если $a < b$ и $c$ — любое число, то $a + c < b + c$.

❗ Если любое слагаемое перенести из одной части верного неравенства в другую, изменив знак слагаемого на противоположный, то получим верное неравенство.

3. Если $a > b$ и $c$ — положительное число, то $ac > bc$.

Если $a > b$ и $c$ — отрицательное число, то $ac < bc$.

Если $a < b$ и $c$ — положительное число, то $ac < bc$.

Если $a < b$ и $c$ — отрицательное число, то $ac > bc$.

❗ Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получим верное неравенство.

❗ Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получим верное неравенство.

4. Если $a > b$ и $ab > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

5. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$; если $a < b$ и $c < d$, то $a + c < b + d$.

❗ При почленном сложении верных неравенств одного знака результатом является верное неравенство того же знака.

Это свойство справедливо и в случае почленного сложения трёх и более неравенств. Например, если $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$ и $a_3 > b_3$, то $a_1 + a_2 + a_3 > b_1 + b_2 + b_3$.

6. Если $a > b$, $c > d$ и $a$, $b$, $c$, $d$ — положительные числа, то $ac > bd$. Если $a < b$, $c < d$ и $a$, $b$, $c$, $d$ — положительные числа, то $ac < bd$.

❗ При почленном умножении верных неравенств одного знака, у которых левые и правые части — положительные числа, результатом является верное неравенство того же знака.

7. Если $a > b$ и $a$, $b$ — положительные числа, то $a^n > b^n$, где $n$ — натуральное число.

Все рассмотренные свойства неравенств справедливы и в случае нестрогих неравенств.

## 11.2. Оценка значений числовых выражений с помощью свойств числовых неравенств

Если известны значения границ величин, то, используя свойства числовых неравенств, можно найти границы значения выражения, содержащего эти величины, т.е. **оценить** его значение.

Задача. Дано: $6 < a < 8$ и $10 < b < 12$. Оцените значение выражения:

1) $a + b$; 2) $a - b$; 3) $ab$; 4) $\frac{a}{b}$; 5) $3a - \frac{1}{2}b$.

Решение.

1) Выполним почленное сложение неравенств:

$$+\begin{array}{r}6<a<8\\ 10<b<12\\ \hline 16<a+b<20.\end{array}$$

2) Умножив каждую часть неравенства $10 < b < 12$ на $-1$, получим: $-10 > -b > -12$ или $-12 < -b < -10$. Учитывая, что $a - b = a + (-b)$, далее получаем:

$$+\begin{array}{r}6<a<8\\ -12<-b<-10\\ \hline -6<a-b<-2.\end{array}$$

3) Так как $a > 6$ и $b > 10$, то $a$ и $b$ принимают положительные значения. Выполним почленное умножение неравенств:

$$\times\begin{array}{r}6<a<8\\ 10<b<12\\ \hline 60<ab<96.\end{array}$$

4) Так как $10 < b < 12$, то $\frac{1}{10} > \frac{1}{b} > \frac{1}{12}$ или $\frac{1}{12} < \frac{1}{b} < \frac{1}{10}$. Учитывая, что $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, имеем:

$$\times\begin{array}{c}6<a<8\\ \frac{1}{12}<\frac{1}{b}<\frac{1}{10}\\ \hline \frac{1}{2}<\frac{a}{b}<\frac{4}{5}.\end{array}$$

5) Умножим каждую часть неравенства $6 < a < 8$ на 3, а каждую часть неравенства $10 < b < 12$ на $-\frac{1}{2}$.

Получим два верных неравенства: $18 < 3a < 24$ и $-6 < -\frac{1}{2}b < -5$. Сложим полученные неравенства:

$$\begin{array}{r} 18 < 3a < 24 \\ + \quad -6 < -\frac{1}{2}b < -5 \\ \hline 12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19. \end{array}$$

Ответ: 1) $16 < a + b < 20$; 2) $-6 < a - b < -2$; 3) $60 < ab < 96$; 4) $\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < \frac{4}{5}$; 5) $12 < 3a - \frac{1}{2}b < 19$.

## 11.3. Общие сведения о неравенствах с одной переменной

Пусть заданы две функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и поставлена задача найти множество значений аргумента $x$, при которых значения функции $f$ больше (либо меньше) соответствующих значений функции $g$. В таком случае говорят, что надо решить неравенство $f(x) > g(x)$ (либо $f(x) < g(x)$).

**Решением неравенства с одной переменной** называют значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Так, каждое из чисел 15,1; 20; $10\sqrt{3}$ является решением неравенства $14 + 2x > 44$, а число 10 не является его решением.

Решить неравенство означает найти все его решения или доказать, что решений не существует.

Все решения неравенства образуют **множество решений неравенства.** Если неравенство решений не имеет, то множество его решений является пустым.

❶ Можно сказать, что решить неравенство означает найти множество его решений.

Например, в задаче «решите неравенство $x^2 > 0$» ответ будет таким: «все действительные числа, кроме числа 0».

Неравенство $|x| < 0$ решений не имеет, т. е. множеством его решений является пустое множество.

Неравенства называют **равносильными**, если они имеют равные множества решений.

Неравенства $x^2 \leqslant 0$ и $|x| \leqslant 0$ равносильны. Действительно, каждое из них имеет единственное решение $x = 0$.

Неравенства $x^2 > -1$ и $|x| > -2$ равносильны, так как множеством решений каждого из них является множество действительных чисел.

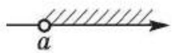
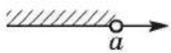
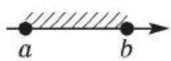
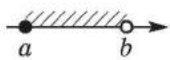
Поскольку каждое из неравенств $\sqrt{x} < -1$ и $0x < -3$ решений не имеет, то они также являются равносильными.

❶ Правила, которые применяют при решении неравенств с одной переменной:

- если какое-либо слагаемое перенести из одной части неравенства в другую, изменив при этом его знак на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному;
- если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же положительное число, то получим неравенство, равносильное данному;
- если обе части неравенства умножить (разделить) на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное данному.

## 11.4. Числовые промежутки

Таблица обозначений и изображений числовых промежутков.

| Неравенство | Промежуток | Изображение | Читают |
|---|---|---|---|
| $x > a$ | $(a; +\infty)$ |  | промежуток от $a$ до плюс бесконечности |
| $x < a$ | $(-\infty; a)$ |  | промежуток от минус бесконечности до $a$ |
| $x \geqslant a$ | $[a; +\infty)$ |  | промежуток от $a$ до плюс бесконечности, включая $a$ |
| $x \leqslant a$ | $(-\infty; a]$ |  | промежуток от минус бесконечности до $a$, включая $a$ |
| $a \leqslant x \leqslant b$ | $[a; b]$ |  | промежуток от $a$ до $b$, включая $a$ и $b$ |
| $a < x < b$ | $(a; b)$ |  | промежуток от $a$ до $b$ |
| $a < x \leqslant b$ | $(a; b]$ |  | промежуток от $a$ до $b$, включая $b$ |
| $a \leqslant x < b$ | $[a; b)$ |  | промежуток от $a$ до $b$, включая $a$ |
| Любое неравенство с одной переменной, верное при всех значениях этой переменной | $(-\infty; +\infty)$ |  | промежуток от минус бесконечности до плюс бесконечности, или вся числовая прямая |

## 11.5. Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств

Неравенства вида $ax > b$, $ax < b$, $ax \geqslant b$, $ax \leqslant b$, где $x$ — переменная, $a$ и $b$ — некоторые числа, называют **линейными неравенствами с одной переменной.**

Задача 1. Решите неравенство $\frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} \leqslant \frac{1}{6}$.

Решение. Запишем цепочку равносильных неравенств:

$$6 \cdot \frac{x-1}{2} + 6 \cdot \frac{x}{3} \leqslant 6 \cdot \frac{1}{6};$$
$$3x - 3 + 2x \leqslant 1;$$
$$5x \leqslant 4;$$
$$x \leqslant \frac{4}{5}.$$

Ответ: $\left(-\infty; \frac{4}{5}\right]$.

Задача 2. Решите неравенство
$3(2x-1) + 7 \geqslant 2(3x+1)$.
Решение. Имеем:

$$6x - 3 + 7 \geqslant 6x + 2;$$
$$6x - 6x \geqslant 2 - 4;$$
$$0x \geqslant -2.$$

Последнее неравенство при любом значении $x$ превращается в верное числовое неравенство $0 \geqslant -2$. Следовательно, искомое множество решений совпадает с множеством всех чисел.
Ответ: $x$ — любое число.
Этот ответ можно записать иначе: $(-\infty; +\infty)$.

Задача 3. Решите неравенство
$4(x-2) - 1 < 2(2x-9)$.

Решение. Имеем:

$$4x - 8 - 1 < 4x - 18;$$
$$4x - 4x < 9 - 18;$$
$$0x < -9.$$

Полученное неравенство при любом значении $x$ превращается в неверное числовое неравенство $0 < -9$.

Ответ: $\varnothing$.

Если требуется найти все общие решения двух или нескольких неравенств, то говорят, что надо **решить систему неравенств**.

Систему неравенств записывают с помощью фигурной скобки. Так, для нахождения области определения функции $y = \sqrt{2x - 1} + \sqrt{5 - x}$ надо решить систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 \geqslant 0, \\ 5 - x \geqslant 0. \end{cases} \qquad (*)$$

**Решением системы неравенств с одной переменной** называют значение переменной, которое обращает каждое неравенство системы в верное числовое неравенство.

Например, числа 2, 3, 4, 5 являются решениями системы (*), а число 7 не является её решением.

Решить систему неравенств — означает найти все её решения или доказать, что решений нет.

Все решения системы неравенств образуют **множество решений системы неравенств**. Если система решений не имеет, то множество её решений является пустым.

❗ Таким образом, можно сказать, что решить систему неравенств означает найти множество её решений.

Например, в задаче «Решите систему неравенств $\begin{cases} 0x \geqslant -1, \\ |x| \geqslant 0 \end{cases}$» ответ будет таким: «множество действительных чисел».

Очевидно, что множество решений системы $\begin{cases} x \leqslant 5, \\ x \geqslant 5 \end{cases}$ состоит из единственного числа 5.

Система $\begin{cases} x > 5, \\ x < 5 \end{cases}$ решений не имеет, т. е. множеством её решений является пустое множество.

Задача 4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 4x - 3 < 1, \\ 3 - x \leqslant 5. \end{cases}$$

Решение. Имеем: $\begin{cases} 4x < 4, \\ -x \leqslant 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x \geqslant -2. \end{cases}$

Рис. 11.2

С помощью координатной прямой найдём пересечение промежутков $(-\infty; 1)$ и $[-2; +\infty)$, являющихся множествами решений неравенств данной системы (рис. 11.2). Искомое пересечение состоит из всех чисел, удовлетворяющих неравенству $-2 \leqslant x < 1$.

Ответ: $[-2; 1)$.

Задача 5. Найдите область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+5}$.

Решение. Искомая область определения — это множество решений системы $\begin{cases} x - 1 > 0, \\ x + 5 \geqslant 0. \end{cases}$

Имеем: $\begin{cases} x > 1, \\ x \geqslant -5. \end{cases}$

Изобразим на координатной прямой пересечение промежутков $(1; +\infty)$ и $[-5; +\infty)$ (рис. 11.3). Этим пересечением является промежуток $(1; +\infty)$.

О т в е т: $(1; +\infty)$.

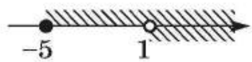
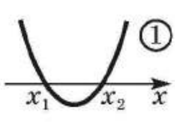
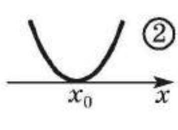
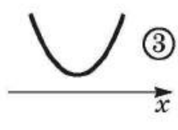
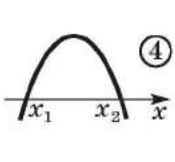
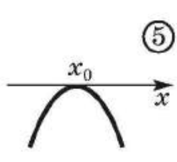
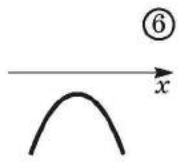



Рис. 11.3

## 11.6. Квадратные неравенства

Неравенства вида $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$, $ax^2 + bx + c \leqslant 0$, где $x$ — переменная, $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа, причём $a \neq 0$, называют **квадратными**.

❗ Схематическое расположение параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков чисел $a$ и $D$ отображено в таблице ($D$ — дискриминант квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$, $x_1$ и $x_2$ — нули функции $y = ax^2 + bx + c$, $x_0$ — абсцисса вершины параболы):

| | $D > 0$ | $D = 0$ | $D < 0$ |
|---|---|---|---|
| $a > 0$ |   |   |   |
| $a < 0$ |   |   |   |

Разъясним, как эту таблицу можно использовать для решения квадратных неравенств.

Пусть, например, надо решить неравенство $ax^2 + bx + c > 0$, где $a < 0$ и $D > 0$. Этим условиям соответствует ячейка ❹ таблицы. Тогда ясно, что ответом будет промежуток $(x_1; x_2)$, на котором график соответствующей квадратичной функции расположен над осью абсцисс.

З а д а ч а 1. Решите неравенство $2x^2 - x - 1 > 0$.

Р е ш е н и е. Для квадратного трёхчлена $2x^2 - x - 1$ имеем: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$. Этим условиям соответствует ячейка ❶ таблицы. Решим уравнение $2x^2 - x - 1 = 0$. Получим $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Тогда схематически график функции $y = 2x^2 - x - 1$ можно изобразить так, как показано на рисунке 11.4.

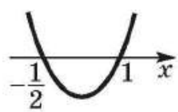


Рис. 11.4

Из рисунка 11.4 видно, что соответствующая квадратичная функция принимает положительные значения на каждом из промежутков $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и $(1; +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

З а д а ч а 2. Решите неравенство $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

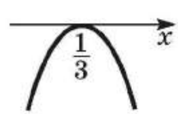


Рис. 11.5

Р е ш е н и е. Имеем: $a = -9$, $D = 0$. Этим условиям соответствует ячейка ❺ таблицы. Устанавливаем, что $x_0 = \frac{1}{3}$. Тогда схематически график функции $y = -9x^2 + 6x - 1$ можно изобразить так, как показано на рисунке 11.5.

Из рисунка 11.5 видно, что решениями неравенства являются все числа, кроме $\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Задача 3. Решите неравенство $3x^2 - x + 1 < 0$.
Решение. Имеем: $a = 3 > 0$, $D = -11 < 0$. Этим условиям соответствует ячейка ❸ таблицы. В данном случае график функции $y = 3x^2 - x + 1$ не имеет точек с отрицательными ординатами.
Ответ: решений нет.

Задача 4. Решите неравенство $0{,}2x^2 + 2x + 5 \leqslant 0$.
Решение. Так как $a = 0{,}2$, $D = 0$, то данному случаю соответствует ячейка ❷ таблицы, причём $x_0 = -5$. Но в этом случае квадратичная функция принимает только неотрицательные значения. Следовательно, данное неравенство имеет единственное решение: $-5$.
Ответ: $-5$.

## Примеры заданий № 17

### Часть 1

**1.** Среди данных чисел укажите решение неравенства $\frac{3}{7} < x < \frac{4}{7}$.

1) $\frac{2}{7}$ 2) $\frac{11}{21}$ 3) $\frac{17}{28}$ 4) $\frac{13}{21}$

**2.** Известно, что $a > b$. Укажите неверное утверждение.

1) $a + 4 > b + 4$
2) $4a > 4b$
3) $-4a < -4b$
4) $a - 4 < b - 4$

**3.** Известно, что $-9 < y < 6$. Оцените значение выражения $\frac{1}{3}y + 2$.

1) $-1 < \frac{1}{3}y + 2 < 4$
2) $-3 < \frac{1}{3}y + 2 < 2$
3) $0 < \frac{1}{3}y + 2 < 4$
4) $-1 < \frac{1}{3}y + 2 < 2$

**4.** Какое из данных неравенств не имеет решений?

1) $0x > -4$
2) $0x < 4$
3) $0x \leqslant 0$
4) $0x > 0$

**5.** Какое из данных неравенств выполняется при всех действительных значениях $x$?

1) $x^2 > 0$
2) $-x^2 \leqslant 0$
3) $x > -x$
4) $x + 1 > 0$

**6.** Укажите неравенство, не имеющее решений.

1) $\frac{x^2-1}{x^2+1} \geqslant 1$
2) $\frac{x^2+1}{x^2} \geqslant 1$
3) $\frac{x^2-1}{x^2-1} \geqslant 1$
4) $\frac{x^2}{x^2+1} \leqslant 1$

**7.** Укажите рисунок, на котором изображено множество решений неравенства $x + 6 > 5x - 4$.

1) 2) 3) 4)


**8.** При каких значениях $a$ выражение $3a + 2$ принимает отрицательные значения?

1) $a > -\frac{3}{2}$
2) $a < -\frac{3}{2}$
3) $a > -\frac{2}{3}$
4) $a < -\frac{2}{3}$

**9.** Укажите множество решений неравенства $9x - 5(2x + 3) \geqslant 20$.

1) $(-\infty; -5]$
2) $[-5; +\infty)$
3) $(-\infty; -35]$
4) $[-35; +\infty)$

**10.** Укажите множество решений неравенства $(\sqrt{10} - 3{,}5)(7 - 3x) > 0$.

1) $\left(\frac{7}{3}; +\infty\right)$
2) $\left(-\frac{7}{3}; +\infty\right)$
3) $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right)$
4) $\left(-\infty; -\frac{7}{3}\right)$

**11.** При каких значениях $x$ значение выражения $6x + 5$ меньше значения выражения $9x - 16$?

1) $x > 7$ 2) $x < 7$ 3) $x > -7$ 4) $x < -7$

**12.** Найдите множество решений неравенства $ax - 3 > 0$, если $a < 0$.

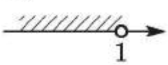
1) $\left(-\infty; -\frac{3}{a}\right)$
2) $\left(-\infty; \frac{3}{a}\right)$
3) $\left(-\frac{3}{a}; +\infty\right)$
4) $\left(\frac{3}{a}; +\infty\right)$

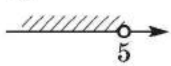
**13.** Решите систему неравенств $\begin{cases} x + 1 < 9, \\ -2x < 6. \end{cases}$

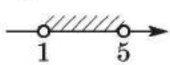
1) $x > -3$
2) $x < 8$
3) $3 < x < 8$
4) $-3 < x < 8$

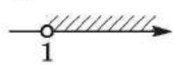
**14.** Укажите рисунок, на котором изображено множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} -30x + 6x < 0, \\ 6 - 2x > 4. \end{cases}$$

1)



2)



3)



4)


**15.** Укажите множество решений системы неравенств $\begin{cases} 4x - 16 > 0, \\ 7 - 3x > -2. \end{cases}$

1) $(3; 4)$ 2) $(4; +\infty)$ 3) $(-\infty; 3)$ 4) $\varnothing$

**16.** Укажите систему неравенств, имеющую единственное решение.

1) $\begin{cases} x \geqslant 4, \\ x \leqslant 5 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x \leqslant 4, \\ x \geqslant 5 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \geqslant 4, \\ x \leqslant 4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x \leqslant 4, \\ x \leqslant 5 \end{cases}$

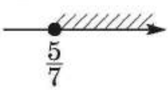
**17.** Найдите наибольшее значение $x$, удовлетворяющее системе неравенств $\begin{cases} 2x + 14 \geqslant 0, \\ x + 6 \leqslant 3. \end{cases}$

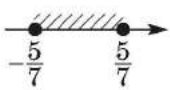
**18.** Укажите неравенство, множество решений которого изображено на рисунке 11.6.

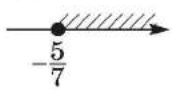
Рис. 11.6

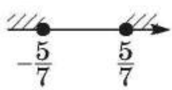
1) $x^2 - 2x > 0$
2) $x^2 - 4 > 0$
3) $x^2 - 2x < 0$
4) $x^2 - 4 < 0$

**19.** Укажите рисунок, на котором изображено множество решений неравенства $49x^2 \geqslant 25$.

1)



2)



3)



4)



**20.** Укажите множество решений неравенства
$20 - x - x^2 > 0$.

1) $(-5; 4)$ 3) $(-4; 5)$
2) $(-\infty; -5) \cup (4; +\infty)$ 4) $(-\infty; -4) \cup (5; +\infty)$

**21.** Укажите неравенство, не имеющее решений.

1) $x^2 - 4x - 11 < 0$
2) $x^2 - 4x - 11 > 0$
3) $x^2 - 4x + 11 < 0$
4) $x^2 - 4x + 11 > 0$

**22.** Укажите множество решений неравенства $2x^2 - 3x + 2 > 0$.

1) $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$ 2) $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$ 3) $(-\infty; \infty)$ 4) $\varnothing$

**23.** Каким является множество решений неравенства $x^2 < x$?

1) $(-\infty; 1]$
2) $(-\infty; 1)$
3) $(-\infty; 0)\cup(1; +\infty)$
4) $(0; 1)$

## Часть 2

**24.** Докажите, что при $a \geqslant -2$ выполняется неравенство $a^3 + 8 \geqslant 2a^2 + 4a$.

**25.** Докажите, что $(a + 4)(a - 8) > 4(2a - 19)$ при всех действительных значениях $a$.

**26.** Докажите, что при всех действительных значениях $a$ и $b$ выполняется неравенство $37a^2 - 12a - 2ab + b^2 + 2 > 0$.

**27.** Докажите, что при всех значениях переменных верно неравенство $a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 \geqslant 4ab$.

**28.** Найдите наибольшее целое решение неравенства $x - \frac{x-1}{2} - \frac{x+3}{4} < 2$.

**29.** Сколько целых решений имеет система неравенств $\begin{cases} 3x + 14 \geqslant 4 - x, \\ \frac{5x-1}{4} - \frac{x-1}{2} \geqslant 3x - 2? \end{cases}$

**30.** Чему равно наименьшее целое решение системы неравенств $\begin{cases} \frac{2x}{5} - \frac{x-1}{3} < 1, \\ 3{,}6x < 1 + 5{,}6x? \end{cases}$

**31.** Сколько целых чисел содержит множество решений неравенства $-3{,}25 \leqslant \frac{1-4x}{4} \leqslant 1{,}25$?

**32.** Найдите наибольшее целое решение неравенства $-2 \leqslant \frac{7-2x}{3} < 5$.

**33.** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} (x+2)(x-4) - (x-5)(x+5) > 11, \\ \frac{3x-4}{5} \geqslant -2. \end{cases}$$

**34.** Решите неравенство $(2x-1)^2 - (x-1)(x+7) \leqslant 5$.

**35.** Решите неравенство $(x-4)^2 < \sqrt{3}\,(x-4)$.

**36.** Решите неравенство $\frac{-25}{(x+6)^2 - 7} \geqslant 0$.

**37.** Решите неравенство $(3x-7)^2 \geqslant (7x-3)^2$.

**38.** Решите неравенство $x^2(-x^2 - 100) \leqslant 100(-x^2 - 100)$.

**39.** Сколько целых решений имеет неравенство $(3x-8)(3x+8) \leqslant 6x - 40$?

**40.** При каких значениях $a$ уравнение $x^2 + 5ax + 5a = 0$ не имеет корней?

**41.** При каких значениях $b$ уравнение $2x^2 - bx + 8 = 0$ имеет два различных корня?

**42.** Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{15-3x}{4+(7-5x)^2} \geqslant 0, \\ 4 - 6x \leqslant 16 - 4x. \end{cases}$

**43.** Решите систему неравенств $\begin{cases} 3 + 5x - 2x^2 > 0, \\ x - 2 \geqslant 0. \end{cases}$

**44.** Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 8(3x + 2) - 6(4x + 2) > 2x, \\ (x - 5)(x + 7) < 0. \end{cases}$$

**45.** Найдите все значения $a$, при которых множество решений системы неравенств $\begin{cases} x^2 - x - 12 < 0, \\ x < a \end{cases}$ содержит ровно три целых числа.

## § 12. Числовые последовательности

### 12.1. Понятие последовательности

Объекты, которые пронумерованы подряд натуральными числами 1, 2, 3, ... , $n$, ... , образуют **последовательности**.

Так, можно говорить о последовательности страниц книги, букв слова, этажей дома и т. д.

Объекты, образующие последовательность, называют **членами последовательности**. Каждый член последовательности имеет свой номер. Например, январь — это **первый член** последовательности месяцев года, число 3 — **второй член** последовательности простых чисел. Вообще, если член последовательности имеет номер $n$, то его называют ***n*-м членом последовательности**.

Если членами последовательности являются числа, то такую последовательность называют **числовой**.

Приведём примеры числовых последовательностей.

1, 2, 3, 4, 5, ... — последовательность натуральных чисел;

2, 4, 6, 8, 10, ... — последовательность чётных чисел;

0,3; 0,33; 0,333; ... — последовательность десятичных приближений дроби $\frac{1}{3}$;

19, 38, 57, 76, 95 — последовательность двузначных чисел, кратных 19;

−1, −2, −3, −4, −5, ... — последовательность отрицательных целых чисел.

Последовательности бывают **конечными** и **бесконечными**. Например, последовательность чётных натуральных чисел — это бесконечная последовательность, а последовательность двузначных чисел, кратных 19, — это конечная последовательность.

Для обозначения членов последовательности используют буквы с индексами:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Индекс указывает порядковый номер члена последовательности. Для обозначения самой последовательности используют запись $(a_n)$. Например, если $(p_n)$ — последовательность простых чисел, то $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11$ и т. д.

## 12.2. Способы задания последовательности

Рассмотрим последовательность, у которой первый член равен 1, а каждый следующий член на 3 больше предыдущего. Такой способ задания последовательности называют **описательным.** Его можно проиллюстрировать с помощью записи с тремя точками, выписав несколько первых членов последовательности в порядке возрастания номеров:

$$1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots .$$

Если последовательность является конечной, то её можно задать с помощью таблицы. Например, следующая таблица задаёт последовательность кубов однозначных натуральных чисел:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_n$ | 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | 216 | 343 | 512 | 729 |

Последовательности можно задавать с помощью **формул**. Например, равенство $x_n = 2^n$, где переменная $n$ принимает все натуральные значения, задаёт последовательность $(x_n)$ натуральных степеней числа 2:

$$2, 4, 8, 16, 32, \ldots .$$

В таких случаях говорят, что последовательность задана с помощью **формулы $n$-го члена последовательности**.

Рассмотрим несколько примеров.

Формула $a_n = 2n - 1$ задаёт последовательность натуральных нечётных чисел:

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots .$$

Формула $y_n = (-1)^n$ задаёт последовательность $(y_n)$, в которой все члены с нечётными номерами равны $-1$, а с чётными номерами равны 1:

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots .$$

Формула $c_n = 7$ задаёт последовательность $(c_n)$, все члены которой равны числу 7:

$$7, 7, 7, 7, 7, \ldots .$$

Рассмотрим равенства $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 3a_n$.

Эти равенства указывают первый член последовательности и правило, с помощью которого по каждому члену последовательности можно найти следующий за ним член:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 3a_1 = 3,$$
$$a_3 = 3a_2 = 9,$$
$$a_4 = 3a_3 = 27$$

и т. д.

Формулу, выражающую член последовательности через один или несколько предыдущих членов, называют **рекуррентной формулой** (от лат. *recurro* — возвращаться). В приведённом примере это формула $a_{n+1} = 3a_n$. Условия, определяющие первый или несколько первых членов, называют **начальными условиями**. В рассматриваемом примере начальное условие — это равенство $a_1 = 1$.

При **рекуррентном способе** задания последовательности первый или несколько первых членов последовательности заданы, а все остальные вычисляют друг за другом.

Задача. Последовательность $(c_n)$ задана формулой $n$-го члена $c_n = 37 - 3n$. Является ли членом этой последовательности число: 1) 19; 2) −7? В случае утвердительного ответа укажите номер этого члена.

Решение. 1) Если число 19 является членом данной последовательности, то существует такое натуральное значение $n$, при котором выполняется равенство $37 - 3n = 19$. Таким значением является $n = 6$. Следовательно, число 19 является шестым членом последовательности $(c_n)$.

2) Имеем: $37 - 3n = -7$; $3n = 44$; $n = 14\frac{2}{3}$. Так как число $14\frac{2}{3}$ не является натуральным, то число −7 не является членом данной последовательности.

## 12.3. Арифметическая прогрессия

**Арифметической прогрессией** называют последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

Примеры арифметических прогрессий:

$$2, 7, 12, 17, 22, 27, \ldots;$$
$$1; 1{,}5; 2; 2{,}5; 3; 3{,}5; \ldots;$$
$$3, 1, -1, -3, -5, -7, \ldots.$$

Число, равное разности последующего и предыдущего членов последовательности называют **разностью арифметической прогрессии** и обозначают буквой $d$ (первой буквой латинского слова *differentia* — разность).

Если $(a_n)$ — арифметическая прогрессия с разностью $d$, то

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots,$$

т. е. для любого натурального $n$ выполняется равенство $a_{n+1} - a_n = d$. Отсюда

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Чтобы задать арифметическую прогрессию, надо указать её первый член и разность. Таким образом, арифметическую прогрессию можно задать рекуррентно:

$$a_1 = a, a_{n+1} = a_n + d.$$

**Формула $n$-го члена арифметической прогрессии** имеет вид:

$$a_n = a_1 + d\,(n - 1).$$

Любой член арифметической прогрессии, кроме первого, равен среднему арифметическому двух соседних с ним членов[1]:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Задача. Докажите, что последовательность $(a_n)$, заданная формулой $n$-го члена $a_n = 9n - 2$, является арифметической прогрессией.

Решение. Рассмотрим разность двух произвольных последовательных членов последовательности:

$$a_{n+1} - a_n = 9(n+1) - 2 - (9n - 2) =$$
$$= 9n + 9 - 2 - 9n + 2 = 9.$$

Следовательно, при любом натуральном $n$ выполняется равенство $a_{n+1} = a_n + 9$, т. е. каждый член данной последовательности, начиная со второго, равен предыдущему члену, к которому прибавлено одно и то же число 9. Таким образом, данная последовательность является арифметической прогрессией.

### 12.4. Сумма *n* первых членов арифметической прогрессии

**Сумму *n* первых членов арифметической прогрессии** вычисляют по формулам:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n,$$

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

[1] Если арифметическая прогрессия является конечной последовательностью, то понятно, что её последний член таким свойством не обладает.

Последней формулой удобно пользоваться тогда, когда заданы первый член и разность прогрессии.

Задача 1. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, кратных 6.

Решение. Данные числа образуют арифметическую прогрессию, первый член которой $a_1 = 102$, а разность $d = 6$. Тогда $a_n = 102 + 6(n - 1) = 6n + 96$. Найдём количество членов этой прогрессии. Так как $a_n < 1000$, то имеем:

$$6n + 96 < 1000;$$
$$6n < 904;$$
$$n < 150\frac{2}{3}.$$

Следовательно, $n = 150$. Тогда искомая сумма $S_{150} = \dfrac{2 \cdot 102 + 6 \cdot (150 - 1)}{2} \cdot 150 = 82\,350.$

Ответ: 82 350.

Задача 2. Сумма семидесяти пяти первых членов арифметической прогрессии равна 450. Найдите тридцать восьмой член прогрессии.

Решение. Пусть первый член прогрессии и её разность равны $a_1$ и $d$ соответственно. Тогда сумма семидесяти пяти первых членов $S_{75} = \dfrac{2a_1 + 74d}{2} \times$ $\times\, 75 = 75\,(a_1 + 37d) = 450$. Отсюда $a_{38} = a_1 + 37d =$ $= 450 : 75 = 6$.

Ответ: 6.

## 12.5. Геометрическая прогрессия. Формула сложных процентов

**Геометрической прогрессией** называют последовательность с отличным от нуля первым членом, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же не равное нулю число.

Примеры геометрических прогрессий:

$1, 3, 9, 27, 81, 243, \dots,$

$2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots,$

$5; -0{,}5; 0{,}05; -0{,}005; 0{,}0005; \dots .$

Число, равное отношению последующего и предыдущего членов последовательности, называют **знаменателем геометрической прогрессии** и обозначают буквой $q$ (первой буквой французского слова *quotient* — частное).

Если $(b_n)$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q$, то

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} = \dots,$$

т. е. для любого натурального $n$ выполняется равенство $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Чтобы задать геометрическую прогрессию, надо указать её первый член и знаменатель. Таким образом, геометрическую прогрессию можно задать рекуррентно:

$$b_1 = b, b_{n+1} = b_nq.$$

**Формула $n$-го члена геометрической прогрессии** имеет вид:

$$b_n = b_1q^{n-1}.$$

**Квадрат любого члена геометрической прогрессии, кроме первого, равен произведению двух соседних с ним членов[1]:**

$$b_n{}^2 = b_{n-1}b_{n+1}.$$

Если все члены геометрической прогрессии $(b_n)$ положительны, то равенство $b_n{}^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ можно переписать так:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}.$$

Каждый член такой последовательности, кроме первого, является средним геометрическим двух соседних с ним членов.

З а д а ч а 1. В геометрической прогрессии $(b_n)$ со знаменателем $q = \frac{1}{3}$ найдите $b_1$, если $b_6 = \frac{5}{81}$.

Р е ш е н и е. Так как $b_6 = b_1q^5$, то $b_1 = b_6 : q^5 = \frac{5}{81} : \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{5}{3^4} \cdot 3^5 = 5 \cdot 3 = 15.$

О т в е т: 15.

З а д а ч а 2. Найдите четвёртый член и знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_3 = 36$, $b_5 = 49$.

Р е ш е н и е. По свойству геометрической прогрессии $b_4{}^2 = b_3b_5$, отсюда $b_4 = \sqrt{b_3b_5} = \sqrt{36 \cdot 49} = 6 \cdot 7 = 42$ или $b_4 = -\sqrt{b_3b_5} = -42$.

---

[1] Если геометрическая прогрессия является конечной последовательностью, то понятно, что её последний член таким свойством не обладает.

Если $b_4 = 42$, то знаменатель прогрессии $q = b_4 : b_3 = = \frac{42}{36} = \frac{7}{6}$; если $b_4 = -42$, то $q = -\frac{7}{6}$.

Ответ: $b_4 = 42$, $q = \frac{7}{6}$ или $b_4 = -42$, $q = -\frac{7}{6}$.

Рассмотрим задачу, которую часто приходится решать банковским работникам, а также тем, кто хранит деньги в банке под проценты.

Пусть вкладчик положил в банк сумму $a_0$ под $p$ % годовых. Какая сумма будет на его счёте через $n$ лет при условии, что вкладчик в течение этого срока не снимает денег со счёта?

В конце первого года первоначальный капитал увеличится на $\frac{a_0 \cdot p}{100}$ и будет равным

$$a_1 = a_0 + \frac{a_0 \cdot p}{100} = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$

т. е. увеличится в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раз.

В конце второго года сумма снова вырастет в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ раз и станет равной

$$a_2 = a_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

Применяя формулу $n$-го члена геометрической прогрессии, можно записать:

$$a_n = a_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Полученную формулу называют **формулой сложных процентов**.

## 12.6. Сумма n первых членов геометрической прогрессии

**Сумму $n$ первых членов геометрической прогрессии** при $q \neq 1$ вычисляют по формуле

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Если $q = 1$, то все члены прогрессии равны первому члену. Тогда $S_n = nb_1$.

Задача. При любом натуральном $n$ сумма $n$ первых членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле $S_n = 10(2^n - 1)$. Найдите первый член и знаменатель этой прогрессии.

Решение. Пусть $b_1$ — первый член данной прогрессии, $q$ — её знаменатель. Тогда $b_1 = S_1 = 10(2 - 1) = 10$; $b_1 + b_2 = S_2 = 10(2^2 - 1) = 30$. Отсюда $b_2 = 30 - b_1 = 20$; $q = \frac{b_2}{b_1} = 2$.

Ответ: $b_1 = 10$, $q = 2$.

## 12.7. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, модуль знаменателя которой меньше единицы

❶ Если дана бесконечная геометрическая прогрессия с первым членом $b_1$ и знаменателем, равным $q$, таким что $|q| < 1$, то её сумму можно вычислить по формуле

$$S = \frac{b_1}{1 - q}.$$

З а д а ч а. Представьте бесконечную десятичную дробь 0,2(54) в виде обыкновенной дроби.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$0{,}2(54) = 0{,}2545454\ldots = 0{,}2 + 0{,}0545454\ldots =$$
$$= 0{,}2 + 0{,}054 + 0{,}00054 + 0{,}0000054 + \ldots .$$

Бесконечную периодическую десятичную дробь 0,0545454... можно рассматривать как сумму бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой равен $b_1 = 0{,}054$, а знаменатель $q = 0{,}01$. Тогда $0{,}0545454\ldots = \dfrac{0{,}054}{1 - 0{,}01} =$

$$= \frac{0{,}054}{0{,}99} = \frac{54}{990} = \frac{3}{55}.$$

Отсюда $0{,}2(54) = 0{,}2 + 0{,}0(54) = 0{,}2 + \dfrac{3}{55} =$

$$= \frac{1}{5} + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}.$$

О т в е т: $\dfrac{14}{55}$.

## Примеры заданий № 18

### Часть 1

1. Последовательность $(a_n)$ задана формулой $n$-го члена $a_n = \dfrac{85}{n+2}$. Сколько членов этой последовательности больше 7?
2. Дана арифметическая прогрессия $(a_n)$, разность которой равна $-4{,}2$, $a_1 = -1{,}8$. Найдите $a_8$.
3. Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии: $-15$, $-11$, $-7$, ... . Найдите 46-й член этой прогрессии.

**4.** Выписаны несколько последовательных членов арифметической прогрессии:
$\ldots, -8, x, -2, 1, \ldots$ .. Найдите $x$.

**5.** Дана арифметическая прогрессия, для которой $a_8 = -9$, $a_{14} = -18$. Найдите разность прогрессии.

**6.** Найдите номер члена арифметической прогрессии 8,1; 8,5; 8,9; ..., равного 12,5.

**7.** Выписаны первые несколько членов арифметической прогрессии: 1, 4, 7, ... . Найдите сумму первых сорока её членов.

**8.** Арифметическая прогрессия $(a_n)$ задана условиями: $a_1 = 27$, $a_{n+1} = a_n - 16$. Найдите сумму первых восьми её членов.

**9.** Найдите знаменатель геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_8 = \frac{24}{25}$, $b_9 = \frac{3}{5}$.

1) $\frac{5}{8}$ 3) $\frac{5}{6}$

2) $\frac{8}{5}$ 4) $\frac{6}{5}$

**10.** Выписаны первые несколько членов геометрической прогрессии: –6; 15; –37,5; ... . Найдите её четвёртый член.

**11.** Выписаны несколько последовательных членов геометрической прогрессии: ..., 5, $x$, 45, –135, ... . Найдите $x$.

**12.** Предприниматель взял в банке кредит в размере 400 000 р. на два года под 20% годовых. Какую сумму (в рублях) он должен будет вернуть банку через 2 года?

**13.** Геометрическая прогрессия $(b_n)$ задана условиями: $b_1 = -8$, $b_{n+1} = -2b_n$. Найдите сумму первых шести её членов.

**14.** Вычислите сумму пяти первых членов геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_5 = 112$, а знаменатель прогрессии $q = 2$.

**15.** Чему равна сумма семи первых членов геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_1 = 6$, $b_6 = 192$?

**16.** Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой $b_1 = 18$, а знаменатель $q = \frac{1}{3}$.

**17.** Чему равен знаменатель бесконечной геометрической прогрессии, первый член которой равен 15, а сумма равна 75?

## Часть 2

**18.** Найдите первый член арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_6 = 17$, $a_{12} = 47$.

**19.** Сколько положительных членов содержит арифметическая прогрессия 40; 37; 34; ...?

**20.** В кинотеатре в каждом следующем ряду на 4 места больше, чем в предыдущем, а всего мест в зале — 640. Сколько рядов в кинотеатре, если в первом ряду 10 мест?

**21.** Чему равна сумма двадцати первых членов арифметической прогрессии $(a_n)$, если $a_5 = -0{,}8$, $a_{11} = -5$?

**22.** Найдите разность арифметической прогрессии, первый член которой равен $-16$, а сумма первых семнадцати членов равна 544.

**23.** Первый член арифметической прогрессии равен $-4$, а её разность равна 2. Сколько надо взять первых членов прогрессии, чтобы их сумма была равной 84?

**24.** Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии $-5{,}2;\ -4{,}8;\ -4{,}4;\ \ldots$ .

**25.** При любом $n$ сумму $n$ первых членов некоторой арифметической прогрессии можно вычислить по формуле $S_n = n^2 + 3n$. Найдите разность этой прогрессии.

**26.** Найдите сумму всех трёхзначных чисел, меньших, чем 250, которые кратны 3.

**27.** Найдите сумму всех трёхзначных чисел, которые кратны 7.

**28.** Какие два числа надо поставить между числами 2,5 и 20, чтобы они вместе с данными числами образовали геометрическую прогрессию?

**29.** В течение года завод дважды увеличивал еженедельный выпуск продукции на одно и то же количество процентов. На сколько процентов увеличивался каждый раз выпуск продукции, если в начале года завод выпускал 1200 изделий еженедельно, а в конце года — 1587 изделий?

**30.** Найдите первый член геометрической прогрессии, состоящей из шести членов, если сумма трёх первых её членов равна 168, а сумма трёх последних равна 21.

**31.** Сумма второго и третьего членов геометрической прогрессии равна 30, а разность четвёртого и второго равна 90. Найдите первый член прогрессии.

**32.** При каком значении $x$ значения выражений $3x - 2$, $x + 2$ и $x + 8$ являются последовательными членами геометрической прогрессии?

**33.** Найдите сумму шести первых членов геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_4 = 24$, а знаменатель $q = -2$.

**34.** Найдите сумму бесконечной геометрической прогрессии $(b_n)$, если $b_3 = 0{,}8$; $b_4 = 0{,}16$.

**35.** Чему равен второй член бесконечной геометрической прогрессии, сумма и знаменатель которой равны 72 и $\frac{1}{3}$ соответственно?

**36.** Запишите в виде обыкновенной дроби число 0,1(7).

**37.** Запишите в виде обыкновенной дроби число 0,3(24).

# § 13. Элементы комбинаторики, теории вероятностей, описательной статистики

## 13.1. Комбинаторные задачи. Перебор вариантов

Задачи, решение которых требует рассмотрения и подсчёта всех возможных случаев, или, как ещё принято говорить, всех возможных **комбинаций**, называют **комбинаторными**.

Задача. Одноклассницы Оля, Валя и Катя дежурят по школе. Сколькими способами классный руководитель может расставить девочек по одной на каждом из трёх этажей школы?

Решение. Предположим, что Олю назначили дежурить на третьем этаже. Тогда на втором этаже может дежурить Валя или Катя, а на первом — соответственно Катя или Валя.

Получаем два варианта (две комбинации) распределения дежурства (девочки обозначены первыми буквами их имён):

| | | |
|---|---|---|
| **3 этаж:** | **О** | **О** |
| **2 этаж:** | **В** | **К** |
| **1 этаж:** | **К** | **В** |

**Пусть теперь дежурной на третьем этаже назначили Валю. Тогда на втором этаже может дежурить Оля или Катя, а на первом — соответственно Катя или Оля.**

**Получаем ещё два варианта распределения дежурства:**

| | | |
|---|---|---|
| **3 этаж:** | **В** | **В** |
| **2 этаж:** | **О** | **К** |
| **1 этаж:** | **К** | **О** |

**И, наконец, предположим, что дежурной на третьем этаже назначили Катю. Получаем ещё два варианта распределения дежурства:**

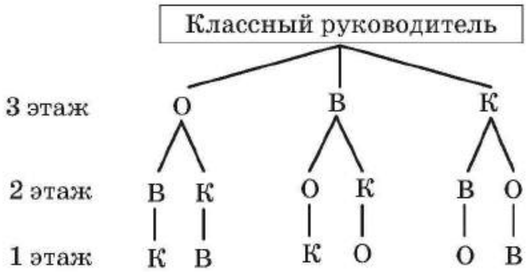
| | | |
|---|---|---|
| **3 этаж:** | **К** | **К** |
| **2 этаж:** | **В** | **О** |
| **1 этаж:** | **О** | **В** |

**Таким образом, получилось 6 вариантов распределения дежурства:**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **3 этаж:** | **О** | **О** | **В** | **В** | **К** | **К** |
| **2 этаж:** | **В** | **К** | **О** | **К** | **В** | **О** |
| **1 этаж:** | **К** | **В** | **К** | **О** | **О** | **В** |

О т в е т: **6** способов.

Решение задачи о распределении дежурства можно проиллюстрировать с помощью такой схемы:




Эта схема позволяет записать шесть комбинаций: ОВК, ОКВ, ВОК, ВКО, КВО, КОВ.

Приведённая схема напоминает перевёрнутое дерево. Поэтому её называют **деревом возможных вариантов**.

## 13.2. Комбинаторные правила суммы и произведения

В основе решения большинства комбинаторных задач лежат два правила: правило суммы и правило произведения.

**Правило суммы.** Если множество $A$ состоит из $m$ элементов, а множество $B$ — из $k$ элементов, причём эти множества не имеют общих элементов, то выбор «$a$ или $b$», где $a \in A$, $b \in B$, можно осуществить $m + k$ способами.

Правило суммы можно обобщить для трёх и более множеств. Например, если множества $A$, $B$ и $C$ состоят соответственно из $m$, $k$ и $n$ элементов, причём ни у каких двух из этих множеств нет общих элементов, то выбор «$a$ или $b$ или $c$», где $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, можно осуществить $m + k + n$ способами.

**Правило произведения.** Если элемент $a$ можно выбрать $m$ способами и после каждого такого выбора элемент $b$ можно выбрать $k$ способами, то выбор «$a$ и $b$» в указанном порядке можно осуществить $mk$ способами.

Правило произведения также можно обобщить. Например, если элемент $a$ можно выбрать $m$ способами, после каждого такого выбора элемент $b$ можно выбрать $k$ способами и после того, как выбраны элементы $a$ и $b$, элемент $c$ можно выбрать $n$ способами, то выбор «$a$ и $b$ и $c$» можно осуществить $mkn$ способами.

Задача 1. Из класса, в котором учатся 28 человек, надо выбрать трёх дежурных по одному на каждый из трёх этажей школы. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Существует 28 способов выбрать дежурного по первому этажу. После того как этот выбор будет сделан, останется 27 учеников, каждый из которых может стать дежурным по второму этажу. После выбора дежурных для первого и второго этажей дежурного по третьему этажу можно выбрать 26 способами.

Таким образом, по правилу произведения количество способов выбора трёх дежурных равно $28 \cdot 27 \cdot 26 = 19\,656$.

Ответ: 19 656 способов.

Задача 2. На рисунке 13.1 показана схема дорог, ведущих из города $A$ в город $B$. Сколькими способами можно проехать из города $A$ в город $B$?

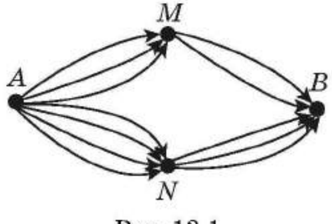


Рис. 13.1

Решение. Воспользовавшись правилом произведения, устанавливаем, что из города $A$ в город $B$ через город $M$ можно попасть $3 \cdot 2 = 6$ способами, а через город $N$ — $4 \cdot 3 = 12$ способами. Тогда по правилу суммы общее количество способов равно $6 + 12 = 18$ способам.
Ответ: 18 способов.

## 13.3. Представление данных в виде таблиц, диаграмм, графиков

Собранную информацию удобно представлять в виде **таблиц**.

Ниже представлена таблица среднегодовых температур воздуха в отдельных городах России.

| Город | Температура, °C | Город | Температура, °C |
|---|---|---|---|
| Екатеринбург | 2,7 | Оренбург | 5,0 |
| Казань | 4,1 | Пермь | 2,3 |
| Краснодар | 11,4 | Тула | 5,2 |
| Мурманск | 0,3 | Хабаровск | 2,2 |
| Нижний Новгород | 4,4 | Челябинск | 2,9 |

Графическое представление статистических данных с помощью геометрических фигур называют **диаграммами**. Так, данные, приведённые выше в таблице, можно подать в виде **столбчатой** диаграммы (рис. 13.2). Здесь высота каждого столбика показывает среднегодовую температуру в соответствующем городе.

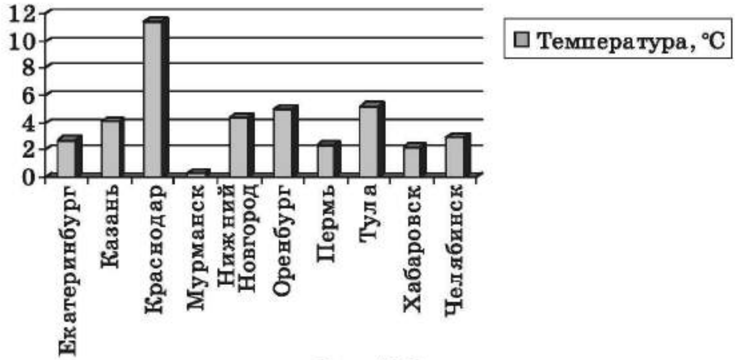



Рис. 13.2

Когда хотят сопоставить части какой-либо величины, то применяют **круговые диаграммы.**

Круговая диаграмма на рисунке 13.3 иллюстрирует соотношение между площадями шести крупнейших государств.

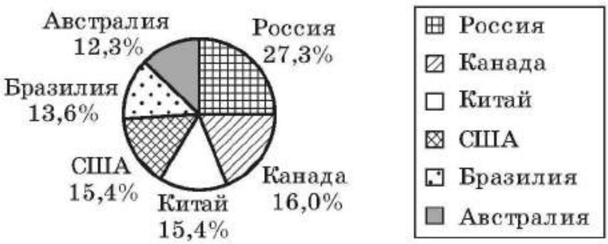



Рис. 13.3

Информацию также можно представлять в виде **графиков.** На рисунке 13.4 изображён график ежегодного процентного роста количества пользователей Интернета в мире в течение 2007–2014 гг.

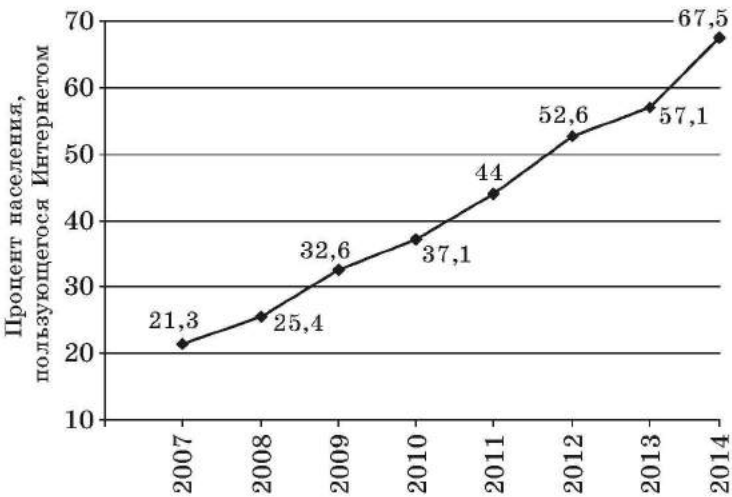



Рис. 13.4

## 13.4. Статистика. Статистические характеристики

**Статистика** (от латинского *status* — состояние) — это наука о сборе, обработке и анализе количественных данных, которые характеризуют массовые явления.

Статистическое исследование состоит из нескольких этапов:

Совокупность объектов, на основании которых проводят исследование, называют **выборкой.**

Если выборка состоит из числовых данных, то разность между наибольшим и наименьшим значениями данных выборки называют **размахом** выборки.

Пусть выборка состоит из числовых данных $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. **Средним значением** этой выборки **(выборочным средним)** называют число $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$.

Рассмотрим выборку, состоящую из таких данных, которые можно сравнивать друг с другом.

Если количество данных нечётно и они упорядочены так, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n-1}$, то **медианой** данной выборки называют $x_n$, т. е. то из данных, которое в списке $x_1$, $x_2$, ..., $x_{2n-1}$ расположено посередине.

Если выборка состоит из чётного количества данных: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n}$, то медианой данной выборки называют любое из данных $x_n$ или $x_{n+1}$, т. е. те два данных, которые расположены посередине в списке $x_1$, $x_2$, ..., $x_{2n}$.

Если исследуемыми данными являются числа, то в случае чётного количества данных $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{2n}$ медианой выборки считают величину $\frac{x_n + x_{n+1}}{2}$.

Пусть выборка состоит из данных $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$. **Модой** данной выборки называют то из данных, которое встречается в списке $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ чаще всего. Если таких частых данных несколько, то каждое из них является модой данной выборки.

З а д а ч а. Найдите размах, среднее значение, медиану и моду выборки 7, 3, 2, 7, 5, 3, 14, 7.

Решение. Расположим числа данной выборки в порядке возрастания: 2, 3, 3, 5, 7, 7, 7, 14.
Размах выборки: $14 - 2 = 12$.
Среднее значение выборки:

$$\bar{x} = \frac{2 + 3 \cdot 2 + 5 + 7 \cdot 3 + 14}{8} = 6.$$

Медиана выборки: $\frac{5 + 7}{2} = 6$.

Мода: 7.

## 13.5. Частота и вероятность случайного события

Результат наблюдения, опыта, эксперимента будем называть **событием.**

**Случайным событием** называют такой результат наблюдения или эксперимента, который при соблюдении данного комплекса условий может произойти, а может и не произойти.

Например, при подбрасывании монеты случайным событием является выпадение герба. Обнаружение письма при проверке почтового ящика также является случайным событием.

В результате многочисленных наблюдений и экспериментов было подмечено, что многие события происходят с той или иной постоянной **частотой**.

**Частотой случайного события** называют величину, вычисляемую по формуле:

$$\text{частота} = \frac{\text{число появлений данного события}}{\text{число проведённых экспериментов}}.$$

Для того чтобы по частоте случайного события можно было оценивать его вероятность, количество испытаний должно быть достаточно большим. Частота случайного события позволяет лишь приближённо оценить вероятность случайного события.

Такую оценку вероятности случайного события называют **статистической.**

Начиная с XVIII в. многие исследователи проводили серии испытаний с подбрасыванием монеты. В таблице приведены результаты некоторых таких испытаний.

| Исследователь | Количество подбрасываний монеты | Количество выпадений герба | Частота выпадения герба |
|---|---|---|---|
| Жорж Бюффон (1707–1788) | 4040 | 2048 | 0,5069 |
| Огастес де Морган (1806–1871) | 4092 | 2048 | 0,5005 |
| Уильям Джевонс (1835–1882) | 20 480 | 10 379 | 0,5068 |
| Всеволод Романовский (1879–1954) | 80 640 | 39 699 | 0,4923 |
| Карл Пирсон (1857–1936) | 24 000 | 12 012 | 0,5005 |
| Уильям Феллер (1906–1970) | 10 000 | 4979 | 0,4979 |

По приведённым данным прослеживается закономерность: при многократном подбрасывании монеты частота появления герба незначительно отклоняется от числа 0,5. Следовательно, можно считать, что вероятность события «выпадение герба» приблизительно равна 0,5.

Вероятность события обозначают буквой $P$ (первой буквой французского слова *probabilité* — вероятность).

Если событие «выпадение герба» обозначить буквой $A$, то

$$P(A) \approx 0,5.$$

## 13.6. Достоверные и невозможные события. Равновозможные события. Классическое определение вероятности

Событие, которое при данном комплексе условий обязательно состоится при любом испытании, называют **достоверным**. Вероятность такого события считают равной 1, т. е.

если $A$ — достоверное событие, то

$$P(A) = 1.$$

Событие, которое при данном комплексе условий не может состояться ни при каком испытании, называют **невозможным**. Вероятность такого события считают равной 0, т. е.

если $A$ — невозможное событие, то

$$P(A) = 0.$$

Задача 1. Пусть в коробке лежат 10 красных шаров. Какова вероятность того, что взятый наугад шар будет красного цвета? жёлтого цвета?

Решение. При заданных условиях любой взятый наугад шар будет красного цвета. Следовательно, событие «взятый наугад шар будет красного цвета» является достоверным и его вероятность равна 1.

Поскольку в коробке нет шаров жёлтого цвета, то взять шар жёлтого цвета нельзя. Следовательно, событие «взятый наугад шар будет жёлтого цвета» является невозможным и его вероятность равна 0.

Рассмотрим эксперимент, в котором однородную монету подбрасывают один раз. В этом опыте можно получить только один из двух результатов (исходов): выпадение числа или выпадение герба, причём ни один из них не имеет преимуществ. Такие результаты называют **равновозможными**, а соответствующие случайные события — **равновероятными**. Считают, что вероятность каждого из событий «выпадение герба» и «выпадение числа» равна $\frac{1}{2}$.

**Если испытание может закончиться одним из $n$ равновозможных результатов, из которых $m$ приводят к наступлению события $A$, то вероятностью события $A$ называют отношение $\frac{m}{n}$.**

Такое определение вероятности называют **классическим**.

З а д а ч а 2. В коробке лежат 15 бильярдных шаров, пронумерованных числами от 1 до 15. Какова вероятность того, что вынутый наугад шар будет иметь номер, кратный 3?

Р е ш е н и е. В этом испытании можно получить один из 15 равновозможных результатов: вынуть шар с номером 1, вынуть шар с номером 2 и т. д. Из них наступлению события «вынутый шар имеет номер, кратный 3» способствуют 5 результатов: вынутый шар имеет номер 3, или 6, или 9, или 12, или 15. Поэтому искомая вероятность равна $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$.

З а д а ч а 3. Подбрасывают одновременно две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?

Р е ш е н и е. Чтобы создать в данном эксперименте комплекс условий, при которых все его результаты станут равновозможными, будем различать монеты, предварительно их пронумеровав. Тогда можно получить четыре равновозможных результата (рис. 13.5).


Рис. 13.5

В первых трёх из этих результатов хотя бы один раз выпал герб. Эти результаты являются благоприятными. Поэтому вероятность того, что при одновременном подбрасывании двух монет хотя бы один раз выпадет герб, равна $\frac{3}{4}$.

## 13.7. Представление о геометрической вероятности

Рассмотрим такое испытание. В плоской фигуре $U$ с ненулевой площадью $S$ наугад выбирают точку $X$. Какова вероятность того, что точка $X$ будет принадлежать данной фигуре $A \subset U$ с площадью $S_A$ (рис. 13.6)? Обычно считают, что такая вероятность будет равной отношению площади $S_A$ фигуры $A$ к площади $S$ фигуры $U$, т. е.

$$P(A) = \frac{S_A}{S}.$$

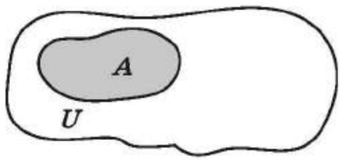



Рис. 13.6

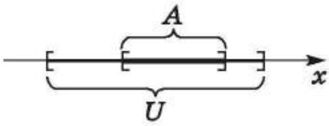



Рис. 13.7

Для опытов с выбором точки на прямой или в пространстве можно записать аналогичные отношения. Например, пусть точку $X$ выбирают наугад на промежутке $U$ длиной $l$ (рис. 13.7). Если промежуток $A$ длиной $l_A$ принадлежит промежутку $U$, то вероятность того, что точка $X$ будет принадлежать промежутку $A$, можно вычислить по формуле

$$P(A) = \frac{l_A}{l}.$$

В опыте с выбором точки из тела $U$ объёма $V$ используют формулу

$$P(A) = \frac{V_A}{V},$$

где $V_A$ — объём тела $A$, являющегося частью тела $U$.

Описанный способ вычисления вероятности случайного события называют **геометрическим определением вероятности**.

Задача. В прямоугольный треугольник с катетами 5 см и 12 см наугад бросают точку. Какова вероятность того, что точка попадёт в круг, вписанный в этот треугольник?

Решение. Площадь треугольника равна $S = \frac{5 \cdot 12}{2} = 30$ (см$^2$). Используя формулу $r = \frac{S}{p}$, вычислим радиус вписанного круга. Имеем $r = 2$ см. Тогда площадь вписанного круга равна $4\pi$ см$^2$.

Следовательно, вероятность того, что наугад выбранная точка попадёт во вписанный круг, составляет $\frac{4\pi}{30} = \frac{2\pi}{15}$.

## Примеры заданий № 19

### Часть 1

1. Имеется 8 разных конвертов и 4 разные марки. Сколькими способами можно выбрать конверт и марку?
2. В меню столовой имеется 3 первых блюда, 6 вторых блюд и 4 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед, содержащий по одному блюду каждого вида?
3. В конкурсе эрудитов участвуют 10 человек. Сколько есть вариантов распределения трёх первых мест?
4. Сколько чётных пятизначных чисел, все цифры которых различны, можно записать, используя цифры 3, 4, 5, 7 и 9?
5. Сколько существует трёхзначных чисел, все цифры которых нечётные и разные?
6. На диаграмме, изображённой на рисунке 13.8, показано распределение количества фруктовых деревьев, растущих в саду. Укажите верное утверждение.

Рис. 13.8

1) яблонь в саду больше, чем вишен
2) вишни составляют более 50% всех деревьев сада
3) черешен и слив вместе больше, чем яблонь

4) яблони составляют более 25% всех деревьев сада

**7.** На диаграмме, изображённой на рисунке 13.9, показано содержание питательных веществ в чёрном шоколаде. Определите по диаграмме, в каких пределах находится содержание жиров.


* к прочему относятся вода, витамины и минеральные вещества

Рис. 13.9

1) 5–10%
2) 10–30%
3) 30–40%
4) 40–60%

**8.** Сколькими способами можно расставить на полке 5 разных книг?

**9.** На диаграмме, изображённой на рисунке 13.10, указано количество пирожных, пирожков, сочников и бутербродов, проданных в школьном буфете за день. Известно, что больше всего было продано пирожков, меньше всего — бутербродов, а пирожных — больше, чем сочников. На сколько больше было продано пирожных, чем бутербродов?

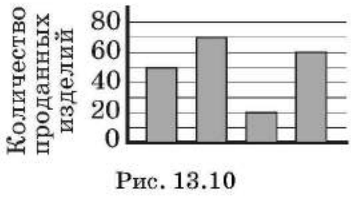



Рис. 13.10

**10.** Чему равно среднее значение выборки 5, 6, 6, 7, 8, 8, 9, 11, 12?

**11.** На графике, изображённом на рисунке 13.11, отражены объёмы продажи ручек в магазине канцтоваров в течение 6 месяцев. Сколько в среднем продавали ручек за один месяц?

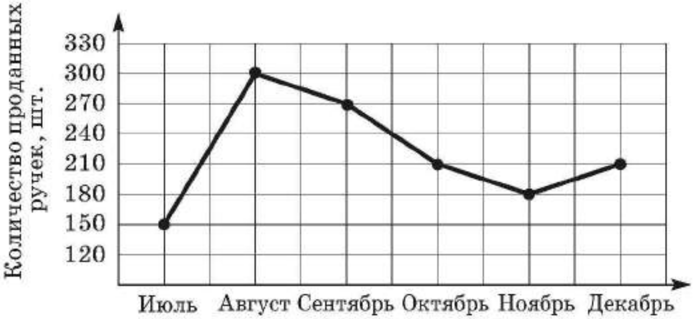



Рис. 13.11

**12.** В выборке, состоящей из 10 чисел, число 4 встречается 5 раз, число 5 — 3 раза, число 6 — 2 раза. Найдите среднее значение этой выборки.

**13.** В таблице приведены данные о посещении художественной выставки в течение недели:

| День недели | Количество посетителей |
|---|---|
| Понедельник | 120 |
| Вторник | 200 |
| Среда | 210 |
| Четверг | 180 |
| Пятница | 300 |
| Суббота | 440 |
| Воскресенье | 410 |

Чему равен размах данной выборки?

**14.** Какова вероятность того, что названное наугад натуральное число окажется положительным?

1) 0 3) $\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{3}$ 4) 1

**15.** В коробке лежат 10 белых и 5 красных шаров. Какое наименьшее количество шаров надо вынуть наугад из коробки, чтобы вероятность того, что среди них обязательно будут 2 белых шара, была равной 1?

**16.** В коробке лежат 42 карандаша, из них 14 карандашей — красные, 16 карандашей — синие, а остальные — зелёные. Какова вероятность того, что наугад взятый карандаш не будет ни красным, ни синим?

1) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{5}{7}$

2) $\frac{8}{21}$ 4) $\frac{2}{7}$

**17.** Вероятность того, что новая шариковая ручка пишет плохо или не пишет, равна 0,06. Виталий купил одну шариковую ручку. Найдите вероятность того, что эта ручка пишет хорошо.

**18.** На подносе лежат одинаковые на вид пирожки: 14 пирожков с вишней, 8 пирожков с яблоком, 13 пирожков со сливой. Наугад берут один пирожок. Найдите вероятность того, что пирожок окажется с вишней.

**19.** На экзамене было 24 билета. Иван не выучил три из них. Найдите вероятность того, что ему попадётся выученный билет.

**20.** В среднем из 120 электрических лампочек, поступивших в продажу, шесть неисправные. Найдите вероятность того, что выбранная наугад в магазине лампочка окажется исправной.

**21.** Какова вероятность того, что при одном подбрасывании игрального кубика выпадет не более 4 очков?

1) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{3}{4}$

2) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{2}$

**22.** Из слова «математика» наугад выбирают одну букву. Какова вероятность того, что выберут букву «а»?

**23.** На 15 карточках записаны натуральные числа от 1 до 15. Какова вероятность того, что число, записанное на наугад выбранной карточке, не делится нацело ни на 3, ни на 5?

1) $\frac{3}{5}$ 3) $\frac{2}{3}$

2) $\frac{8}{15}$ 4) $\frac{7}{15}$

**24.** В магазине канцтоваров имеется в продаже 200 ручек: 46 красных, 56 чёрных, 64 синих, а остальные — зелёные. Найдите вероятность того, что при случайном выборе одной ручки будет выбрана чёрная или зелёная ручка.

**25.** В ящике лежат 36 карточек, пронумерованных числами от 1 до 36. Какова вероятность того, что номер наугад выбранной карточки будет кратным числу 9?

1) $\frac{1}{4}$ 2) $\frac{1}{9}$ 3) $\frac{1}{6}$ 4) $\frac{1}{36}$

**26.** В лотерее разыгрывается 16 денежных и 20 вещевых призов. Всего выпустили 1800 лотерейных билетов. Какова вероятность, купив один билет, не выиграть ни одного приза?

**27.** Учитель изобразил на доске координатную прямую и попросил ученицу отметить наугад на отрезке $[-2; 3]$ точку. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до начала отсчёта будет не больше 1?

**28.** На рисунке 13.12 изображены два квадрата. Сторона большего квадрата равна 10 см, а сторона меньшего — 3 см. Наугад выбирают точку в большем квадрате. Какова вероятность того, что эта точка будет принадлежать и меньшему квадрату?

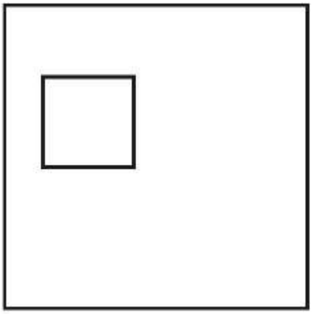


Рис. 13.12

### Часть 2

**29.** Сколько нечётных семизначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы в каждом числе цифры были разными?

**30.** Сколько трёхзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

**31.** Рассматриваются четырёхзначные числа, в записи которых присутствуют две цифры 5, стоящие рядом, и по одному разу каждая из цифр 6 и 0. Сколько существует таких чисел?

**32.** Определите среднее значение и медиану выборки 1, 3, 2, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6.

**33.** По результатам тестирования по алгебре 25 учащихся 9 класса составили таблицу, в которой отобразили количество ошибок, сделанных каждым из учащихся:

| **Количество ошибок** | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| **Количество учащихся** | 5 | 4 | 6 | 8 | 2 |

Найдите моду и среднее значение выборки, постройте соответствующую диаграмму.

**34.** Учащиеся 9 класса проходили тестирование по математике, где оценка выставлялась по 100-балльной шкале. Средняя оценка 10 учащихся составила 81 балл. Какой должна быть средняя оценка остальных 20 учащихся класса, чтобы средняя оценка всего класса была 85 баллов?

**35.** На скамейку в произвольном порядке садятся двое мальчиков и одна девочка. Какова вероятность того, что девочка будет сидеть между двумя мальчиками?

**36.** В ящике лежат четыре карточки, на которых написаны числа 1, 2, 3 и 4. Какова вероятность того, что сумма чисел, записанных на двух наугад вынутых карточках, будет нечётным числом?

**37.** В коробке лежат зелёные и синие шары. Сколько в коробке синих шаров, если зелёных в ней 18, а вероятность того, что выбранный наугад шар окажется синим, равна $\frac{2}{5}$?

**38.** Бросают две монеты. Какова вероятность того, что выпадет один герб и одна цифра?

**39.** Дважды бросают монету. Какова вероятность того, что оба раза выпадет герб?

**40.** В правильном треугольнике со стороной 6 см наугад выбирают точку. Найдите вероятность того, что эта точка будет принадлежать кругу, вписанному в данный треугольник.

# ГЛАВА II

# ГЕОМЕТРИЯ

## § 14. Простейшие геометрические фигуры и их свойства

### 14.1. Прямая, луч, отрезок. Измерение отрезков

❶ Через любые две точки[1] можно провести прямую, и притом только одну.

Прямую обозначают, указывая и называя две любые её точки. Так, прямую, изображённую на рисунке 14.1, обозначают одним из двух способов: $AB$ или $BA$.

Прямые также обозначают одной строчной латинской буквой. На рисунке 14.2 изображены прямые $m$ и $n$.


Рис. 14.1

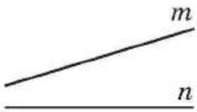



Рис. 14.2

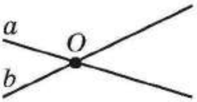



Рис. 14.3

Две прямые, имеющие общую точку, называют **пересекающимися**. На рисунке 14.3 изображены прямые $a$ и $b$, пересекающиеся в точке $O$.

❶ Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.

---

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем иметь в виду, что это разные точки и разные прямые.

Проведём прямую $AB$ и отметим на ней произвольную точку $O$. Эта точка разбивает прямую на две части (рис. 14.4). Каждую из этих частей вместе с точкой $O$ называют **лучом** или **полупрямой**. Точку $O$ называют **началом** луча.

Луч обозначают, указывая две его точки: первой указывают начало луча, второй — любую другую точку, принадлежащую лучу. Так, луч с началом в точке $O$ (рис. 14.5) можно обозначить $OM$ или $ON$.

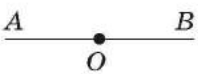


Рис. 14.4

Рис. 14.5

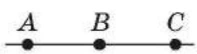


Рис. 14.6

Два луча, имеющие общее начало и лежащие на одной прямой, называют **дополнительными**. Например, на рисунке 14.6 лучи $BC$ и $BA$ — дополнительные.

На рисунке 14.7 изображена прямая $a$, проходящая через точки $A$ и $B$. Эти точки ограничивают часть прямой $a$. Такую часть прямой вместе с точками $A$ и $B$ называют **отрезком**, а точки $A$ и $B$ — **концами** этого отрезка.

Рис. 14.7

Рис. 14.8

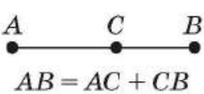


Рис. 14.9

Отрезок обозначают, указывая его концы. На рисунке 14.8 изображён отрезок $MN$.

Два отрезка называют **равными**, если их можно совместить наложением.

Каждый отрезок имеет определённую длину, и для её измерения надо выбрать **единичный отрезок**. В качестве единичного можно выбрать любой отрезок.

На практике чаще всего используют такие единичные отрезки: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

❗ Если точка $C$ является внутренней точкой отрезка $AB$ (рис. 14.9), то отрезок $AB$ равен сумме отрезков $AC$ и $CB$, т. е.

$$AB = AC + CB.$$

### 14.2. Угол. Измерение углов

На рисунке 14.10 изображена фигура, состоящая из двух лучей $OA$ и $OB$, имеющих общее начало. Эта фигура делит плоскость на две части. Каждую из этих частей вместе с лучами $OA$ и $OB$ называют **углом**. Лучи $OA$ и $OB$ называют **сторонами** угла, а точку $O$ — **вершиной** угла.

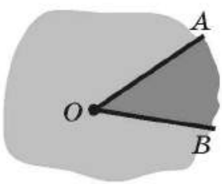



Рис. 14.10

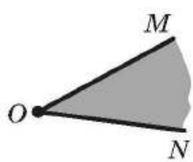



Рис. 14.11

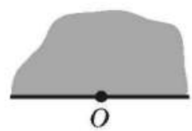



Рис. 14.12

Угол на рисунке 14.11 можно обозначить так: $\angle MON$, или $\angle NOM$, или просто $\angle O$.

Угол, стороны которого являются дополнительными лучами, называют **развёрнутым** (рис. 14.12).

Два угла называют **равными**, если их можно совместить наложением.

**Биссектрисой** угла называют луч с началом в вершине угла, делящий этот угол на два равных угла. На рисунке 14.13 луч $OK$ — биссектриса угла $AOB$, $\angle AOK = \angle KOB$.

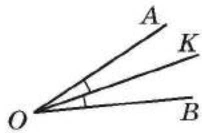



Рис. 14.13


Рис. 14.14

Каждый угол имеет величину и для её измерения нужно выбрать единицу измерения — единичный угол. Разделим развёрнутый угол на 180 равных углов (рис. 14.14). Угол, образованный двумя соседними лучами, принимают за единичный и называют градусом. Записывают: 1°.

Угол, градусная мера которого равна 90°, называют прямым. Угол, градусная мера которого меньше 90°, называют острым. Угол, градусная мера которого больше 90°, но меньше 180°, называют тупым.

На рисунке 14.15 изображены углы каждого из трёх видов.


Рис. 14.15

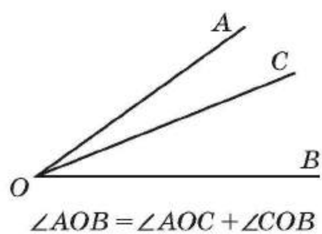



Рис. 14.16

❗ Если луч $OC$ делит угол $AOB$ на два угла $AOC$ и $COB$ (рис. 14.16), то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

### 14.3. Смежные и вертикальные углы

Два угла называют **смежными**, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.

На рисунке 14.17 углы $AOC$ и $BOC$ — смежные.

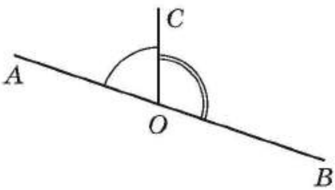



Рис. 14.17

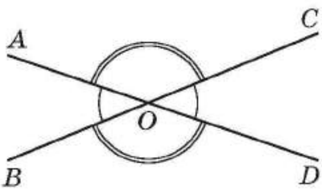



Рис. 14.18

❶ Сумма смежных углов равна 180°. На рисунке 14.17 $\angle AOC + \angle COB = 180°$.

Два угла называют **вертикальными**, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого. На рисунке 14.18 углы $AOB$ и $COD$ — вертикальные, углы $AOC$ и $BOD$ — вертикальные.

❶ Вертикальные углы равны. На рисунке 14.18 $\angle AOB = \angle COD$, $\angle AOC = \angle BOD$.

### 14.4. Перпендикулярные прямые. Угол между пересекающимися прямыми. Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до прямой

Две прямые называют **перпендикулярными**, если при пересечении они образуют прямые углы.

На рисунке 14.19 прямые $a$ и $b$ — перпендикулярные. Пишут: $a \perp b$ или $b \perp a$.

На рисунке 14.20 прямые $AD$ и $BC$ не перпендикулярны. Они при пересечении образовали пару равных острых углов и пару равных тупых углов.

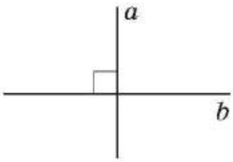



Рис. 14.19

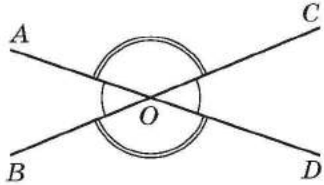



Рис. 14.20

Величину образовавшегося острого угла называют **углом между прямыми** $AD$ и $BC$.

Если прямые перпендикулярны, то считают, что угол между ними равен **90°**.

На рисунке 14.21 изображены прямая $a$ и перпендикулярный ей отрезок $AB$, конец $B$ которого принадлежит прямой $a$. В таком случае говорят, что из точки $A$ на прямую $a$ **опустили перпендикуляр** $AB$. Точку $B$ называют **основанием перпендикуляра** $AB$.

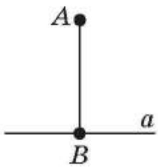



Рис. 14.21

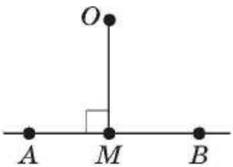



Рис. 14.22

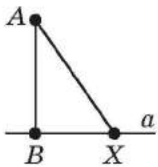



Рис. 14.23

Длину перпендикуляра $AB$ называют **расстоянием от точки $A$ до прямой $a$**. Если точка $A$ принадлежит прямой $a$, то расстояние от точки $A$ до прямой $a$ считают равным нулю.

На рисунке 14.22 изображён перпендикуляр $OM$, опущенный из точки $O$ на прямую $AB$. Точка $M$, его основание, принадлежит отрезку $AB$ (лучу $AB$).

В таких случаях длину этого перпендикуляра также называют **расстоянием** от точки $O$ до отрезка $AB$ (луча $AB$).

Если точка принадлежит отрезку (лучу), то расстояние от этой точки до отрезка (луча) считают равным нулю.

Опустим из точки $A$ на прямую $a$ перпендикуляр $AB$ (рис. 14.23). Пусть $X$ — произвольная точка прямой $a$, отличная от точки $B$. Отрезок $AX$ называют **наклонной**, проведённой из точки $A$ к прямой $a$. Отрезок $BX$ называют **проекцией** наклонной $AX$ на прямую $a$.

❗ Если из одной точки к прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр меньше наклонной. На рисунке 14.23 $AB < AX$.

## Примеры заданий № 20

### Часть 1

**1.** Какие из следующих утверждений верны?

1) через заданную точку плоскости можно провести единственную прямую

2) существуют три прямые, проходящие через одну точку

3) через точку, не принадлежащую данной прямой, можно провести прямую, перпендикулярную этой прямой

4) из точки, не принадлежащей данной прямой, можно провести только две наклонные к этой прямой

(В ответе запишите в порядке возрастания номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.)

2. Точка $M$ принадлежит отрезку $AB$, длина которого равна 28 см. Найдите длину отрезка $AM$, если $AM : MB = 3 : 4$. Ответ дайте в сантиметрах.
3. На прямой последовательно отмечены точки $A$, $B$, $C$ и $D$ так, что $AC = 10$ см, $BC = 4$ см, $BD = 7$ см. Найдите отрезок $AD$. Ответ дайте в сантиметрах.
4. Отрезок длиной 18 см разделили на четыре отрезка. Расстояние между серединами средних отрезков равно 5 см. Найдите расстояние между серединами крайних отрезков. Ответ дайте в сантиметрах.
5. Десять автобусных остановок расположены на прямой улице так, что расстояния между любыми соседними остановками одинаковы. Расстояние между первой и третьей остановками равно 1,2 км. Какое расстояние между первой и последней остановками? Ответ дайте в километрах.
6. Для разметки земельного участка на расстоянии 0,5 м друг от друга вкопали колышки так, чтобы они были расположены на одной прямой. Расстояние между первым и последним колышками составило 12 м. Сколько вкопали колышков?
7. Из вершины прямого угла $AED$, изображённого на рисунке 14.24, проведены два луча $EC$ и $EF$ так, что $\angle AEF = 58°$, $\angle CED = 49°$. Вычислите величину угла $CEF$. Ответ дайте в градусах.

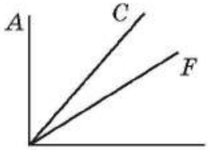


Рис. 14.24

8. Укажите неверное утверждение.
1) смежные углы имеют общую вершину
2) смежные углы имеют общую сторону
3) всегда один из смежных углов острый, а другой — тупой

4) если углы $AOC$ и $COB$ — смежные, то лучи $OA$ и $OB$ — дополнительные

**9.** Луч $KC$ является биссектрисой угла $AKP$, изображённого на рисунке 14.25, $\angle MKC = 128°$. Вычислите градусную меру угла $AKP$.

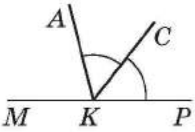


Рис. 14.25

**10.** Углы $DEF$ и $MEF$ смежные, луч $EK$ — биссектриса угла $DEF$, угол $KEF$ в 3 раза меньше угла $MEF$. Найдите градусную меру угла $DEF$.

**11.** Найдите величину угла между биссектрисами двух смежных углов.

1) 60° 3) 90°
2) 120° 4) зависит от величин углов

**12.** Укажите неверное утверждение.

1) вертикальные углы равны
2) если углы равны, то они вертикальные
3) вертикальные углы имеют общую вершину
4) стороны вертикальных углов образуют две пары дополнительных лучей

**13.** Чему равна величина угла между биссектрисами вертикальных углов?

1) 0° 3) 180°
2) 90° 4) зависит от величин углов

**14.** На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \times 1$ отмечены точки $A$, $B$ и $C$ (рис. 14.26). Найдите расстояние от точки $C$ до прямой $AB$.

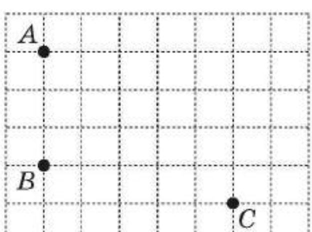


Рис. 14.26

# § 15. Параллельные прямые

## 15.1. Признаки параллельности прямых

Две прямые называют **параллельными**, если они не пересекаются.

На рисунке 15.1 изображены параллельные прямые $a$ и $b$. Пишут $a \parallel b$ (читают: «прямые $a$ и $b$ параллельны» или «прямая $a$ параллельна прямой $b$»).

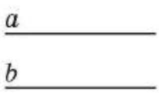



Рис. 15.1

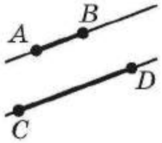



Рис. 15.2

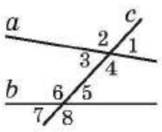



Рис. 15.3

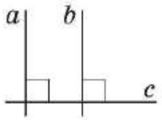



Рис. 15.4

Если два отрезка лежат на параллельных прямых, то их тоже называют параллельными.

На рисунке 15.2 отрезки $AB$ и $CD$ параллельны. Пишут $AB \parallel CD$.

Если две прямые $a$ и $b$ пересечь третьей прямой $c$, то образуется восемь углов (рис. 15.3). Прямую $c$ называют **секущей** прямых $a$ и $b$.

Углы 3 и 6, 4 и 5 называют **односторонними**.

Углы 3 и 5, 4 и 6 называют **накрест лежащими**.

Углы 6 и 2, 5 и 1, 3 и 7, 4 и 8 называют **соответственными**.

**Признаки параллельности прямых.**

1. Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.

На рисунке 15.4 $a \perp c$ и $b \perp c$, поэтому $a \parallel b$.

2. Если накрест лежащие углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

На рисунке 15.5 прямая $c$ является секущей прямых $a$ и $b$, $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $a \parallel b$.

3. Если сумма односторонних углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180°, то прямые параллельны.

На рисунке 15.6 прямая $c$ является секущей прямых $a$ и $b$, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, поэтому $a \parallel b$.

4. Если соответственные углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.

На рисунке 15.7 прямая $c$ является секущей прямых $a$ и $b$, $\angle 1 = \angle 2$, поэтому $a \parallel b$.

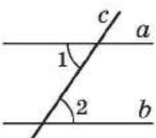


Рис. 15.5

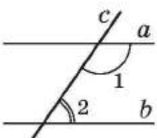


Рис. 15.6

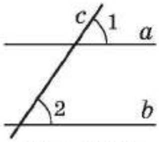


Рис. 15.7

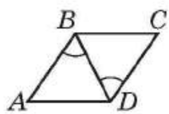


Рис. 15.8

Задача. На рисунке 15.8 $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

Решение. Для треугольников $ABD$ и $CDB$ имеем: $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$ — по условию, отрезок $BD$ — общая сторона. Значит, треугольники $ABD$ и $CDB$ равны по двум сторонам и углу между ними.

Тогда $\angle BDA = = \angle DBC$. Кроме этого, углы $BDA$ и $DBC$ — накрест лежащие при прямых $BC$ и $AD$ и секущей $BD$. Следовательно, $BC \parallel AD$.

## 15.2. Свойства параллельных прямых

1. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

На рисунке 15.9 $b \parallel a$ и $c \parallel a$, поэтому $b \parallel c$.

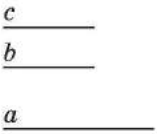



Рис. 15.9

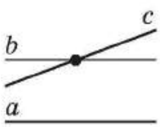



Рис. 15.10

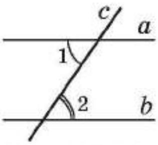



Рис. 15.11

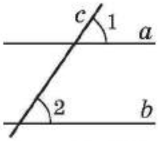



Рис. 15.12

2. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.

На рисунке 15.10 прямые $a$ и $b$ параллельны, прямая $c$ пересекает прямую $b$, поэтому прямая $c$ пересекает и прямую $a$.

3. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны.

На рисунке 15.11 прямые $a$ и $b$ параллельны, прямая $c$ — секущая, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

4. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару соответственных углов, равны.

На рисунке 15.12 прямые $a$ и $b$ параллельны, прямая $c$ — секущая, поэтому $\angle 1 = \angle 2$.

5. Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180°.

На рисунке 15.13 прямые $a$ и $b$ параллельны, прямая $c$ — секущая, поэтому $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

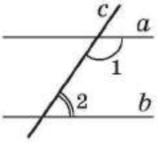



Рис. 15.13

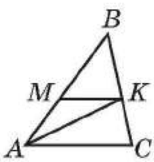



Рис. 15.14

Задача. На рисунке 15.14 отрезок $AK$ — биссектриса треугольника $ABC$, $MK \parallel AC$. Докажите, что треугольник $AMK$ равнобедренный.

Решение. Так как отрезок $AK$ — биссектриса треугольника $ABC$, то $\angle MAK = \angle KAC$.

Углы $KAC$ и $MKA$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых $MK$ и $AC$ и секущей $AK$.

Следовательно, $\angle MAK = \angle MKA$.

## Примеры заданий № 21

### Часть 1

**1.** Укажите верное утверждение.

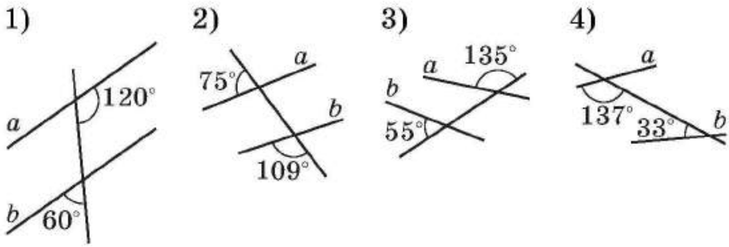
1) через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только один отрезок, параллельный этой прямой

2) через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только один луч, параллельный этой прямой

3) через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит бесконечно много прямых, не параллельных этой прямой

4) через точку, не принадлежащую данной прямой, проходят только две прямые, параллельные этой прямой

**2.** На каком из рисунков прямые $a$ и $b$ параллельны?



**3.** Какие из прямых, изображённых на рисунке 15.15, параллельны?

1) $c$ и $d$ 2) $a$ и $b$ 3) $b$ и $c$ 4) $a$ и $d$

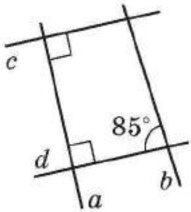



Рис. 15.15

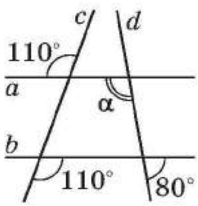



Рис. 15.16

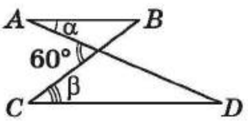



Рис. 15.17

**4.** Чему равен угол α, изображённый на рисунке 15.16? Ответ дайте в градусах.

**5.** Отрезки $AB$ и $CD$, изображённые на рисунке 15.17, параллельны. Чему равна сумма углов α и β? Ответ дайте в градусах.

**6.** На стороне $BA$ угла $ABC$ отметили точку $D$ и через неё провели прямую, параллельную стороне $BC$. Эта прямая пересекла биссектрису угла $ABC$ в точке $E$. Найдите градусную меру угла $BDE$, если $\angle DEB = 24°$.

**7.** На рисунке 15.18 $AB \parallel DE$. Найдите градусную меру угла $CDE$, если $\angle ABC = 150°$, $\angle BCD = 100°$.

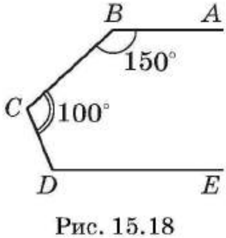



Рис. 15.18

# § 16. Треугольник

## 16.1. Элементы треугольника. Равные треугольники

Рассмотрим три точки $A$, $B$ и $C$, не лежащие на одной прямой. Соединим их отрезками $AB$, $BC$ и $CA$. Полученная фигура ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 16.1. Эту часть плоскости вместе с отрезками $AB$, $BC$ и $CA$ называют **треугольником**. Точки $A$, $B$ и $C$ называют **вершинами**, а отрезки $AB$, $BC$ и $CA$ — **сторонами** треугольника.

Углы $BAC$, $ABC$ и $BCA$ (рис. 16.1) называют **углами треугольника** $ABC$.

**Периметром треугольника** называют сумму длин всех его сторон.

Два треугольника называют **равными**, если их можно совместить наложением.

На рисунке 16.2 изображены равные треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$. Записывают: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Можно записать: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону, называют **высотой треугольника**.

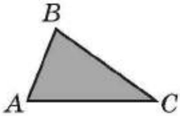


Рис. 16.1

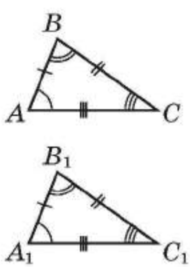


Рис. 16.2

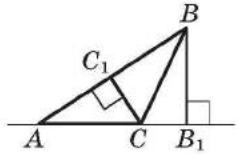


Рис. 16.3

На рисунке 16.3 отрезки $BB_1$ и $CC_1$ — высоты треугольника $ABC$.

❶ Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке (рис. 16.4).

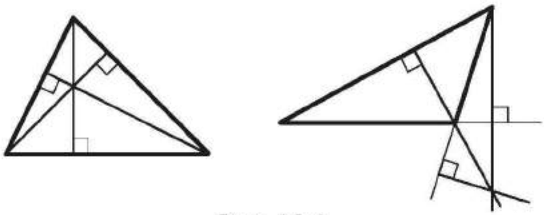


Рис. 16.4

Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называют **медианой треугольника.**

На рисунке 16.5 отрезок $AM$ — медиана треугольника $ABC$.

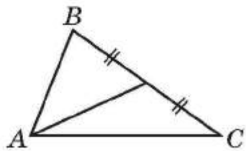



Рис. 16.5

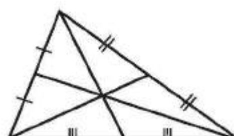


Рис. 16.6

❶ Три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника (рис. 16.6).

Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называют **биссектрисой треугольника**.

На рисунке 16.7 отрезок $BL$ — биссектриса треугольника $ABC$.

**!** Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке (рис. 16.8).

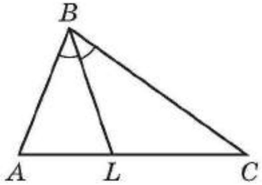



Рис. 16.7

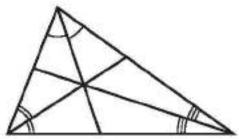


Рис. 16.8

**!** Биссектриса треугольника делит сторону, к которой она проведена, на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам. На рисунке 16.7 отрезок $BL$ — биссектриса треугольника $ABC$, поэтому $\frac{AL}{AB} = \frac{LC}{BC}$.

Задача. В треугольнике $ABC$ стороны $AB$, $BC$ и $AC$ соответственно равны 8 см, 12 см и 15 см. Отрезок $BD$ — биссектриса треугольника $ABC$. Найдите отрезки $AD$ и $DC$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника можно записать: $\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ (рис. 16.9). Кроме того, $AD + DC = 15$ см. Получаем, что $\frac{2}{3}DC + DC = 15$. Отсюда $DC = 9$ см. Тогда $AD = 6$ см.

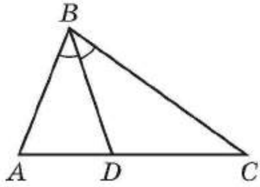
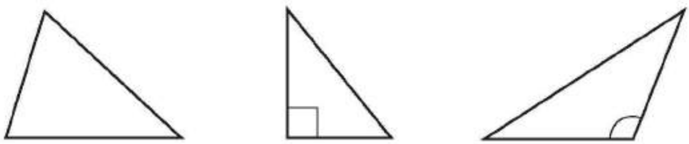



Рис. 16.9

Ответ: 6 см, 9 см.

## 16.2. Виды треугольников

Треугольник, у которого все углы острые, называют **остроугольным.** Треугольник, у которого один из углов прямой, называют **прямоугольным.** Треугольник, у которого один из углов тупой, называют **тупоугольным** (рис. 16.10).



Остроугольный треугольник Прямоугольный треугольник Тупоугольный треугольник

Рис. 16.10

Треугольник, у которого две стороны равны, называют **равнобедренным.**

На рисунке 16.11 изображён равнобедренный треугольник $ABC$, у которого $AB = BC$.

Равные стороны равнобедренного треугольника называют **боковыми** сторонами, а третью сторону — **основанием** равнобедренного треугольника. **Вершиной равнобедренного треугольника** называют общую точку его боковых сторон (точка $B$ на рисунке 16.11).

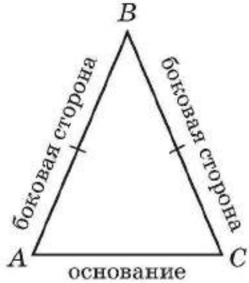



Рис. 16.11

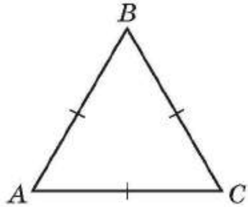



Рис. 16.12

Треугольник, у которого все стороны равны, называют **равносторонним.** На рисунке 16.12 изображён равносторонний треугольник $ABC$.

Если в треугольнике длины всех сторон различны, то такой треугольник называют **разносторонним.**

## 16.3. Признаки равенства треугольников

**Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними**

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

На рисунке 16.13 $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, поэтому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

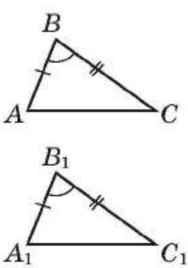


Рис. 16.13

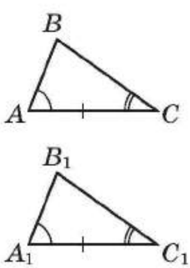


Рис. 16.14

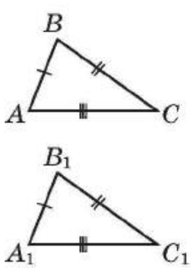


Рис. 16.15

**Второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам**

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

На рисунке 16.14 $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, поэтому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

**Третий признак равенства треугольников: по трём сторонам**

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

На рисунке 16.15 $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, поэтому $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

З а д а ч а. На рисунке 16.16 точка $O$ — середина отрезка $BD$, $\angle ABO = \angle CDO$. Докажите, что $BC = AD$.

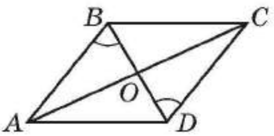



Рис. 16.16

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольники $AOB$ и $COD$. Так как точка $O$ — середина отрезка $BD$, то $BO = OD$. По условию $\angle ABO = \angle CDO$. Углы $AOB$ и $COD$ равны как вертикальные. Следовательно, $\Delta AOB = \Delta COD$ по стороне и двум прилежащим углам.

Отсюда $AB = CD$ как соответственные стороны равных треугольников. Заметим, что $BD$ — общая сторона треугольников $ABD$ и $CDB$. Также по условию $\angle ABD = \angle CDB$. Следовательно, треугольники $ABD$ и $CDB$ равны по двум сторонам и углу между ними.

Отсюда $BC = AD$.

## 16.4. Свойства равнобедренного треугольника

❶ В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) биссектриса, высота и медиана, проведённые из его вершины, совпадают.

❗ В равностороннем треугольнике: 1) все углы равны; 2) биссектриса, высота и медиана, проведённые из одной вершины, совпадают.

❗ В треугольнике против равных сторон лежат равные углы.

Задача. Отрезок $AD$ — медиана равнобедренного треугольника $ABC$, проведённая к основанию. На сторонах $AB$ и $AC$ отмечены соответственно точки $M$ и $K$ так, что $BM = CK$. Докажите равенство треугольников $AMD$ и $AKD$.

Решение. Имеем: $AB = AM + BM$, $AC = AK + CK$ (рис. 16.17).

Так как $AB = AC$ и $BM = CK$, то $AM = AK$.

Углы $BAD$ и $CAD$ равны, поскольку медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является его биссектрисой.

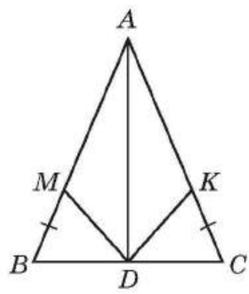


Рис. 16.17

Отрезок $AD$ — общая сторона треугольников $AMD$ и $AKD$.

Следовательно, треугольники $AMD$ и $AKD$ равны по двум сторонам и углу между ними.

## 16.5. Признаки равнобедренного треугольника

1. Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.

На рисунке 16.18 отрезок $BM$ — медиана и высота, поэтому $AB = BC$.

2. Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.

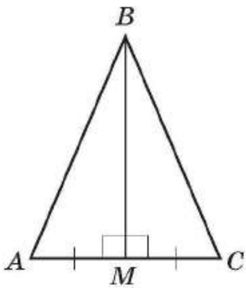



Рис. 16.18

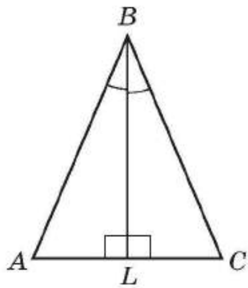



Рис. 16.19

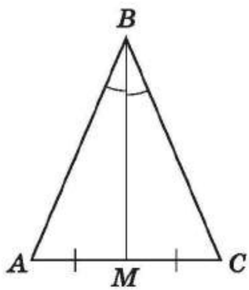



Рис. 16.20

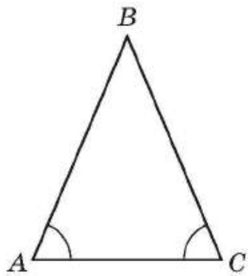



Рис. 16.21

На рисунке 16.19 отрезок $BL$ — биссектриса и высота, поэтому $AB = BC$.

3. Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.

На рисунке 16.20 отрезок $BM$ — медиана и биссектриса, поэтому $AB = BC$.

4. Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.

На рисунке 16.21 $\angle A = \angle C$, поэтому $AB = BC$.

Задача. В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $BM$ (рис. 16.22), $\angle BAK = 70°$, $\angle AKC = 110°$. Докажите, что $BM \perp AK$.

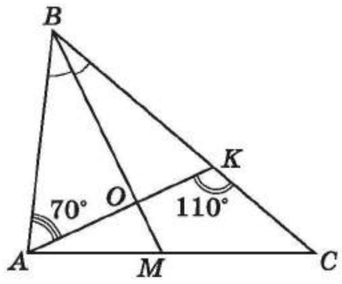



Рис. 16.22

Р е ш е н и е. Так как углы $BKA$ и $AKC$ смежные, то $\angle BKA = 180° - 110° = 70°$. Следовательно, в треугольнике $ABK$ получаем, что $\angle BAK = \angle BKA = 70°$.

Тогда треугольник $ABK$ — равнобедренный с основанием $AK$, и его биссектриса $BO$ ($O$ — точка пересечения $AK$ и $BM$) является также высотой, т. е. $BM \perp AK$.

## 16.6. Сумма углов треугольника. Свойство внешнего угла треугольника

❶ Сумма углов треугольника равна 180°.

❶ Среди углов треугольника хотя бы два угла острые.

**Внешним углом** треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.

На рисунке 16.23 углы 1, 2, 3 являются внешними углами треугольника $ABC$.

❶ Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.

На рисунке 16.23 $\angle 1$ — внешний угол треугольника $ABC$, поэтому $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$.

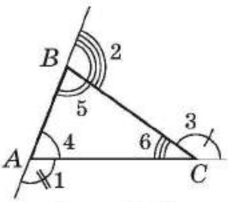


Рис. 16.23

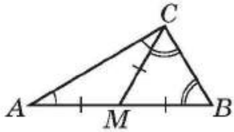


Рис. 16.24

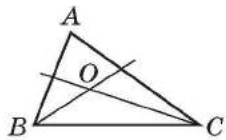


Рис. 16.25

❗ Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.

З а д а ч а 1. Медиана $CM$ треугольника $ABC$ равна половине стороны $AB$. Докажите, что треугольник $ABC$ прямоугольный.

Р е ш е н и е. По условию $AM = CM$ (рис. 16.24). Тогда в треугольнике $AMC$ углы $A$ и $ACM$ равны. Аналогично $BM = CM$, и в треугольнике $BMC$ углы $B$ и $BCM$ равны.

В $\Delta ACB$ имеем: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$. Тогда $\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180°$. Учитывая, что $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, получаем: $2\angle ACB = 180°$; $\angle ACB = 90°$. Следовательно, треугольник $ABC$ прямоугольный.

З а д а ч а 2. В треугольнике $ABC$ известно, что $\angle A = \alpha$. Биссектрисы углов $B$ и $C$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что $\angle BOC = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

Р е ш е н и е. Для треугольника $ABC$ имеем: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Тогда $\angle B + \angle C = 180° - \alpha$. Поскольку лучи $BO$ и $CO$ — биссектрисы соответственно углов $ABC$ и $ACB$ (рис. 16.25), то

$$\angle OBC + \angle OCB = \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Для треугольника $BOC$ имеем: $\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180°$. Тогда $\angle BOC = 180° - (\angle OBC + \angle OCB) = 180° - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = 90° + \frac{\alpha}{2}$.

## 16.7. Неравенство треугольника. Зависимость между величинами сторон и углов треугольника

**Неравенство треугольника:** каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

На рисунке 16.26 изображён треугольник $ABC$. Можно записать: $AB < AC + CB$; $AC < AB + BC$; $BC < BA + AC$.

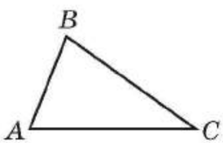



Рис. 16.26

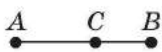



Рис. 16.27

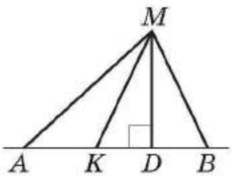



Рис. 16.28

Из неравенства треугольника следует, что:

1) если длина одного из трёх данных отрезков не меньше суммы длин двух других, то эти отрезки не могут служить сторонами треугольника;

2) каждая сторона треугольника больше разности двух других его сторон;

3) если для трёх точек $A$, $B$ и $C$ выполняется равенство $AB = AC + CB$, то точка $C$ является внутренней точкой отрезка $AB$ (рис. 16.27);

4) для любых трёх точек $A$, $B$ и $C$ выполняются неравенства

$$AB \leqslant AC + CB;$$
$$AC \leqslant AB + BC;$$
$$BC \leqslant BA + AC;$$

**5) в треугольнике против большей стороны лежит больший угол и, наоборот, против большего угла лежит бóльшая сторона.**

Задача. Из точки $M$, не принадлежащей прямой $a$, проведены две наклонные $MA$ и $MB$ и перпендикуляр $MD$ (точка $D$ принадлежит отрезку $AB$). Докажите, что если $DA > DB$, то $MA > MB$.

Решение. По условию $DA > DB$ (рис. 16.28). На отрезке $DA$ отметим точку $K$ так, что $DK = DB$. В треугольнике $KMB$ отрезок $MD$ является медианой и высотой. Следовательно, этот треугольник равнобедренный. Тогда угол $MKD$ является острым, а смежный с ним угол $AKM$ — тупой. Поскольку в тупоугольном треугольнике против тупого угла лежит наибольшая сторона, то $MA > MK$. Но $MK = MB$. Следовательно, $MA > MB$.

## 16.8. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Свойства прямоугольного треугольника

**Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету**

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.

**Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам**

Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.

**Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу**

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.

**Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу**

Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого, то такие треугольники равны.

**Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу**

Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.

Рассмотрим некоторые свойства прямоугольного треугольника.

❶ Катет, лежащий против угла, величина которого равна 30°, равен половине гипотенузы.

На рисунке 16.29 $\angle ACB = 90°$, $\angle BAC = 30°$, поэтому $BC = \frac{1}{2}AB$.

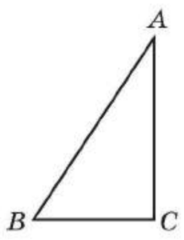



Рис. 16.29

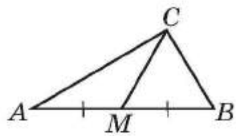



Рис. 16.30

❶ Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.

На рисунке 16.29 $\angle ACB = 90°$, $BC = \frac{1}{2}AB$, поэтому $\angle BAC = 30°$.

❶ Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине.

На рисунке 16.30 отрезок $CM$ — медиана, проведённая к гипотенузе, поэтому $CM = \frac{1}{2}AB$.

Задача. Докажите равенство прямоугольных треугольников по острому углу и биссектрисе, проведённой из вершины этого угла.

Решение. В треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ (рис. 16.31) $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, отрезки $AD$ и $A_1D_1$ — соответственно биссектрисы треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$, $AD = A_1D_1$.

Имеем: $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1$.

Поскольку $AD = A_1D_1$, то прямоугольные треугольники $ACD$ и $A_1C_1D_1$ равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда $AC = A_1C_1$, и так как $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то прямоугольные треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны по катету и прилежащему острому углу.

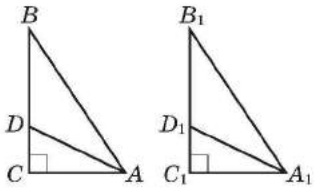



Рис. 16.31

## 16.9. Терема Фалеса. Теорема о пропорциональных отрезках

**Теорема Фалеса.** Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

На рисунке 16.32 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = \ldots$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $A_3B_3 \parallel A_4B_4$, поэтому $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = \ldots$.

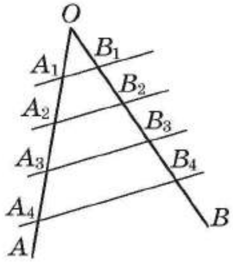


Рис. 16.32

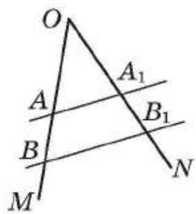


Рис. 16.33

**Теорема о пропорциональных отрезках.** Если параллельные прямые пересекают стороны угла, то отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам, образовавшимся на другой стороне угла.

На рисунке 16.33 стороны угла $MON$ пересечены параллельными прямыми $AA_1$ и $BB_1$, поэтому:

$$1)\ \frac{OA}{OA_1} = \frac{AB}{A_1B_1};\ 2)\ \frac{OA}{OA_1} = \frac{OB}{OB_1};\ 3)\ \frac{OB}{OB_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

Задача. На стороне $BC$ треугольника $ABC$ выбрана точка $N$ так, что $BN : NC = 2 : 3$. В каком отношении медиана $BM$ делит отрезок $AN$?

Решение. Через точку $N$ проведём $NK \parallel BM$, точка $K$ принадлежит стороне $AC$ (рис. 16.34). Имеем: $\frac{MK}{KC} = \frac{BN}{NC} = \frac{2}{3}$; $MK = \frac{2}{3}KC$. Отсюда $MK = \frac{2}{5}MC$. Так как $MC = MA$, то $MK = \frac{2}{5}AM$, т. е. $\frac{AM}{MK} = \frac{5}{2}$. Имеем: $\frac{AO}{ON} = \frac{AM}{MK} = \frac{5}{2}$.

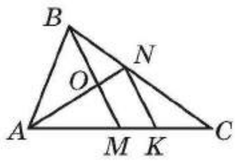


Рис. 16.34

## 16.10. Средняя линия треугольника

**Средней линией треугольника** называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

На рисунке 16.35 отрезки $MN$, $NE$, $EM$ — средние линии треугольника $ABC$.

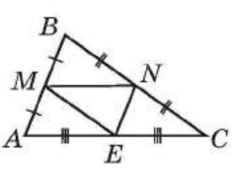


Рис. 16.35

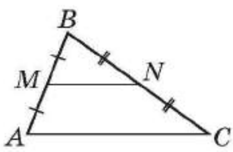


Рис. 16.36

❶ Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, параллельна третьей стороне и равна её половине.

На рисунке 16.36 отрезок $MN$ — средняя линия треугольника $ABC$, поэтому $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

**Задача.** Докажите, что середины сторон четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

**Решение.** В четырёхугольнике $ABCD$ точки $M$, $N$, $K$ и $P$ — середины сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $AD$ соответственно (рис. 16.37).

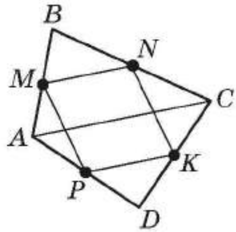


Рис. 16.37

Отрезок $MN$ — средняя линия треугольника $ABC$. По свойству средней линии $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$.

Отрезок $PK$ — средняя линия треугольника $ADC$.

По свойству средней линии $PK \parallel AC$ и $PK = \frac{1}{2}AC$.

Так как $MN \parallel AC$ и $PK \parallel AC$, то $MN \parallel PK$.

Из того, что $MN = \frac{1}{2}AC$ и $PK = \frac{1}{2}AC$, получаем:

$MN = PK = \frac{1}{2}AC$.

Следовательно, в четырёхугольнике $MNKP$ стороны $MN$ и $PK$ равны и параллельны, а значит, четырёхугольник $MNKP$ — параллелограмм.

## 16.11. Подобные треугольники

Два треугольника называют **подобными**, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны соответственным сторонам другого треугольника.

На рисунке 16.38 изображены треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$

и $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$. Эти треугольники подобны. Пишут: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (читают: «треугольник $ABC$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$»).

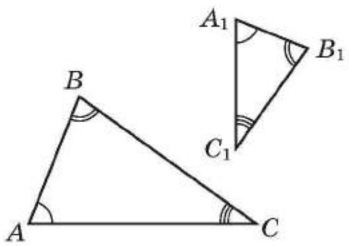



Рис. 16.38

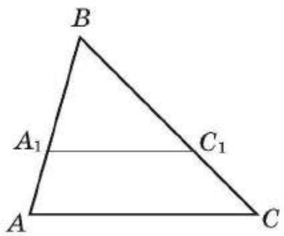



Рис. 16.39

Число $k$, которому равно отношение соответственных сторон, называют **коэффициентом подобия**. Говорят, что треугольник $ABC$ подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ с коэффициентом подобия, равным $k$. Пишут: $\Delta ABC \overset{k}{\sim} \Delta A_1B_1C_1$.

❗ Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от данного треугольника ему подобный.

На рисунке 16.39 отрезок $A_1C_1$ параллелен стороне $AC$, поэтому $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta ABC$.

З а д а ч а. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Р е ш е н и е. Пусть треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику $ABC$ с коэффициентом подобия $k$.

Тогда $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k$, откуда $A_1B_1 = k \cdot AB$; $B_1C_1 = k \cdot BC$; $A_1C_1 = k \cdot AC$.

Обозначим $P_1$ — периметр треугольника $A_1B_1C_1$, $P$ — периметр треугольника $ABC$. Имеем: $P_1 = A_1B_1 + B_1C_1 + A_1C_1 = k \cdot AB + k \cdot BC + k \cdot AC =$ $= k \cdot (AB + BC + AC) = kP$, т. е. $\frac{P_1}{P} = k$.

## 16.12. Признаки подобия треугольников

**Первый признак подобия треугольников: по двум углам**

Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

На рисунке 16.40 $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, поэтому $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

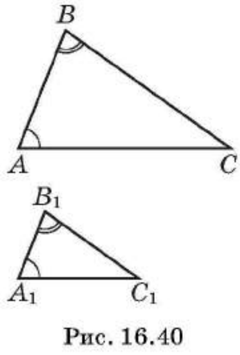



Рис. 16.40

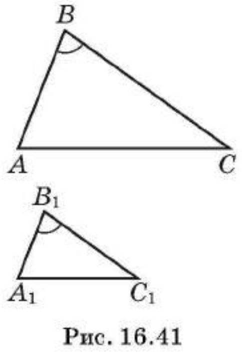



Рис. 16.41

**Второй признак подобия треугольников: по двум сторонам и углу между ними**

Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, образованные этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

На рисунке 16.41 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ и $\angle B = \angle B_1$, поэтому $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

**Третий признак подобия треугольников: по трём сторонам**

Если три стороны одного треугольника пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники подобны.

На рисунке 16.42 $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1}$, поэтому $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

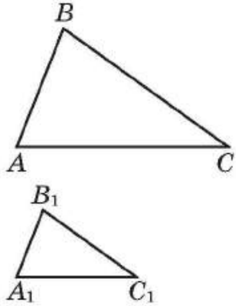



Рис. 16.42

З а д а ч а 1. Средняя линия трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) равна 24 см, а её диагонали пересекаются в точке $O$, $AO : OC = 5 : 3$. Найдите основания трапеции.

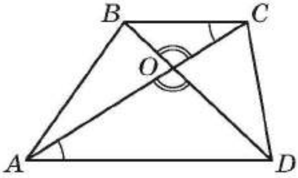



Рис. 16.43

Р е ш е н и е. Рассмотрим треугольники $AOD$ и $COB$ (рис. 16.43). Углы $AOD$ и $BOC$ равны как вертикальные, углы $CAD$ и $ACB$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых $AD$ и $BC$ и секущей $AC$. Следовательно, треугольники $AOD$ и $COB$ подобны по двум углам.

Тогда $\frac{AD}{BC} = \frac{AO}{CO} = \frac{5}{3}$.

Пусть $BC = 3x$ см, тогда $AD = 5x$ см.

Так как средняя линия трапеции равна 24 см, то $BC + AD = 48$ см.

Имеем: $3x + 5x = 48$. Отсюда $x = 6$.

Следовательно, $BC = 18$ см, $AD = 30$ см.

Ответ: 18 см, 30 см.

Задача 2. Докажите, что отрезок, соединяющий основания двух высот остроугольного треугольника, отсекает от данного треугольника ему подобный.

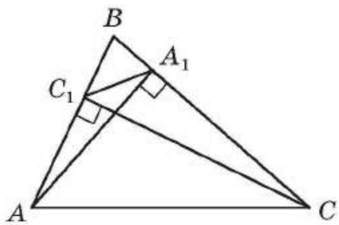



Рис. 16.44

Решение. На рисунке 16.44 отрезки $AA_1$ и $CC_1$ — высоты треугольника $ABC$. Докажем, что $\Delta ABC \sim \Delta A_1BC_1$.

В прямоугольных треугольниках $ABA_1$ и $CBC_1$ острый угол $B$ — общий. Следовательно, треугольники $ABA_1$ и $CBC_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников. Отсюда $\frac{AB}{BC} = \frac{BA_1}{BC_1}$. Тогда $\frac{AB}{BA_1} = \frac{BC}{BC_1}$. Угол $B$ — общий для треугольников $ABC$ и $A_1BC_1$. Следовательно, треугольники $ABC$ и $A_1BC_1$ подобны по второму признаку подобия треугольников.

## Примеры заданий № 22

### Часть 1

1. Сколько пар равных треугольников изображено на рисунке 16.45?

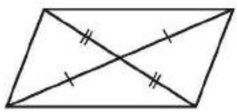


Рис. 16.45

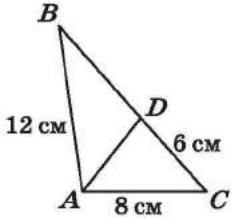



Рис. 16.46

2. Отрезок $AD$ — биссектриса треугольника $ABC$, изображённого на рисунке 16.46. Чему равен периметр треугольника $ABC$? Ответ дайте в сантиметрах.
3. В каком случае можно утверждать, что треугольник является равносторонним?
   1) сторона треугольника в 3 раза меньше его периметра
   2) каждая сторона треугольника в 3 раза меньше его периметра
   3) две высоты треугольника равны
   4) две биссектрисы треугольника равны
4. Укажите количество верных утверждений.
   1) если три угла одного треугольника равны соответственно трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны
   2) если две стороны и угол одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу другого треугольника, то такие треугольники равны

3) если сторона и два угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны

**5.** На рисунке 16.47 изображён равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AC$, периметр которого равен 18 см. Периметр треугольника $ABM$, где точка $M$ — середина отрезка $AC$, равен 12 см. Найдите медиану $BM$. Ответ дайте в сантиметрах.

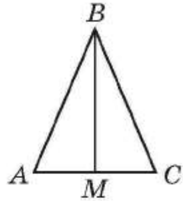



Рис. 16.47

**6.** В треугольнике $ABC$ известно, что $AB = BC$, $\angle ABC = 112°$. Найдите угол $BCA$. Ответ дайте в градусах.

**7.** Углы треугольника относятся как $4:5:9$. Чему равна разность между наибольшим и наименьшим углами треугольника? Ответ дайте в градусах.

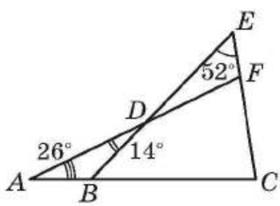



Рис. 16.48

**8.** Чему равна градусная мера угла $C$, изображённого на рисунке 16.48?

**9.** В остроугольном треугольнике $ABC$ высоты, проведённые из вершин $A$ и $C$, пересекаются в точке $O$. Какое из равенств верно?

1) $\angle AOC = 90° - \angle B$

2) $\angle AOC = 180° - \angle B$

3) $\angle AOC = 90° + \angle B$

4) $\angle AOC = 180° - \frac{1}{2}\angle B$

**10.** Какова градусная мера угла $\alpha$, изображённого на рисунке 16.49, если $\beta = 130°$, $\gamma = 100°$?

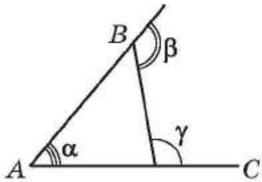



Рис. 16.49

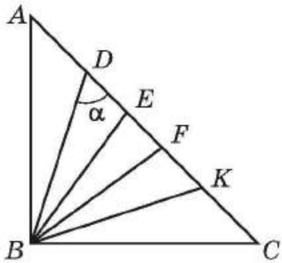



Рис. 16.50

**11.** Треугольник $ABC$, изображённый на рисунке 16.50, — прямоугольный равнобедренный. Лучи $BD$, $BE$, $BF$ и $BK$ делят прямой угол треугольника на 5 равных углов. Какова градусная мера угла $\alpha$?

**12.** В треугольнике $ABC$ известно, что $AB = 3$ см, $BC = 7$ см. Какой может быть длина стороны $AC$?

1) 3 см
2) 4 см
3) 8 см
4) 12 см

**13.** Параллельные прямые $AB$ и $CD$ пересекают стороны угла $O$, изображённого на рисунке 16.51, $OB = 8$ см, $BD = 6$ см, $AC = 12$ см. Найдите отрезок $AO$. Ответ дайте в сантиметрах.

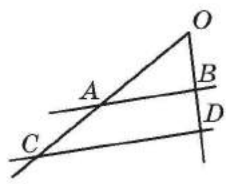



Рис. 16.51

**14.** В треугольнике $DEF$ известно, что $DE = 10$ см, $EF = 14$ см, $DF = 18$ см, точка $M$ — середина стороны $DE$, точка $K$ — середина стороны $EF$. Найдите периметр четырёхугольника $DMKF$.

**15.** Из точки $D$, принадлежащей гипотенузе $AB$ прямоугольного треугольника $ABC$, изображённого на рисунке 16.52, опущен перпендикуляр $DE$ на катет $AC$. Найдите длину этого перпендикуляра. Ответ дайте в сантиметрах.

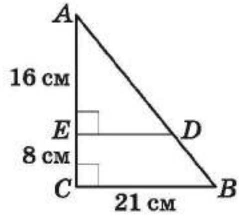
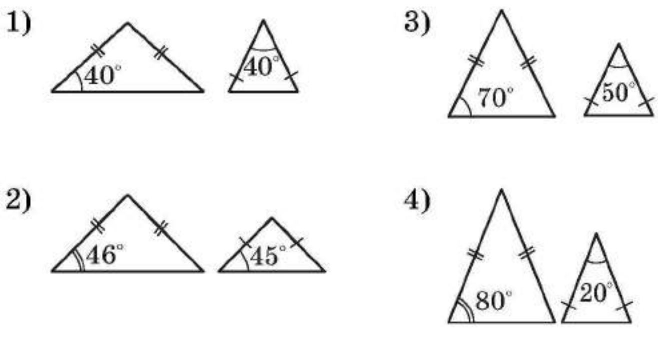


Рис. 16.52

**16.** На каком рисунке изображённые равнобедренные треугольники являются подобными?




**17.** По данным, приведённым на рисунке 16.53, найдите высоту дерева. Ответ дайте в метрах.

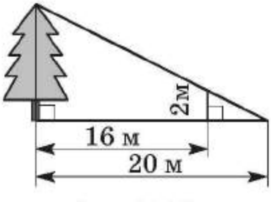


Рис. 16.53

**18.** Стороны треугольника равны 3 см, 5 см и 7 см. Какими могут быть стороны подобного ему треугольника?

1) 6 см, 10 см, 14 см 3) 9 см, 15 см, 20 см
2) 6 см, 8 см, 14 см 4) 9 см, 10 см, 14 см

**19.** Стороны треугольника относятся как $7:6:4$. Найдите бóльшую сторону подобного ему треугольника, меньшая сторона которого равна 12 см. Ответ дайте в сантиметрах.

**20.** В определённый момент времени тень колокольни Иван Великий на территории Московского Кремля равна 20 м 25 см, а длина тени фонарного столба, стоящего около колокольни, — 1 м 50 см. Сколько метров составляет высота колокольни, если высота столба равна 6 м?

**21.** По данным, приведённым на рисунке 16.54, найдите отрезок $CD$ (длины отрезков указаны в сантиметрах).

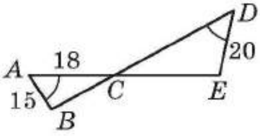


Рис. 16.54

1) 24 см 3) $\frac{50}{3}$ см
2) 13,5 см 4) 36 см

**22.** Основания трапеции равны 8 см и 18 см, а одна из боковых сторон — 5 см. На сколько сантиметров надо продолжить эту сторону, чтобы она пересекла прямую, содержащую другую боковую сторону трапеции?

**23.** В треугольник $ABC$ вписан ромб $AMKP$ так, как показано на рисунке 16.55. Найдите сторону ромба, если $AB = 18$ см, $AC = 12$ см. Ответ дайте в сантиметрах.

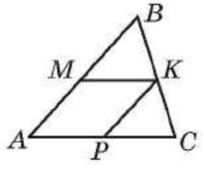


Рис. 16.55

## Часть 2

**24.** Отрезок $AM$ — биссектриса треугольника $ABC$, $AB = 21$ см, $AC = 28$ см, $CM - BM = 5$ см. Найдите сторону $BC$.

**25.** Середина боковой стороны равнобедренного треугольника удалена от его основания на 9 см. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника до его основания.

**26.** На стороне $AB$ треугольника $ABC$ отметили точку $M$ так, что $AM : MB = 4 : 3$. В каком отношении медиана $BK$ треугольника $ABC$ делит отрезок $CM$ ?

**27.** Отрезки $AD$ и $BM$ — соответственно медиана и биссектриса треугольника $ABC$, $AD \perp BM$, $AD = BM = 16$ см. Найдите стороны треугольника $ABC$.

**28.** Продолжения боковых сторон $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $E$. Найдите отрезок $ED$, если $CD = 8$ см, $BC : AD = 3 : 5$.

**29.** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ отметили точку $D$ так, что $\angle ABD = \angle ACB$. Найдите отрезок $AD$, если $AB = 6$ см, $AC = 18$ см.

**30.** Отрезки $AB$ и $CD$ лежат на параллельных прямых, а отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $M$. Найдите отрезок $CM$, если $AB = 17$ см, $CD = 51$ см, $AC = 48$ см.

**31.** Отрезки $AB$ и $CD$ являются хордами окружности. Лучи $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $M$. Докажите, что треугольники $AMC$ и $BMD$ подобны.

**32.** Основания $AD$ и $BC$ трапеции $ABCD$ равны соответственно 96 см и 6 см, $AC = 24$ см. Докажите, что треугольники $ACD$ и $ABC$ подобны.

## 16.13. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике

❶ Квадрат высоты прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равен произведению проекций катетов на гипотенузу.

На рисунке 16.56 отрезок $CD$ — высота прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle ACB = 90°$), поэтому $CD^2 = AD \cdot DB$.

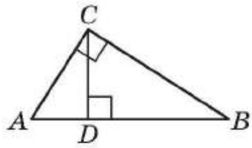


Рис. 16.56

❶ Квадрат катета равен произведению гипотенузы и проекции этого катета на гипотенузу.

На рисунке 16.56 имеем: $AC^2 = AB \cdot AD$, $BC^2 = AB \cdot DB$.

Задача. Отрезок $CM$ — высота прямоугольного треугольника $ABC$, проведённая к гипотенузе $AB$. Известно, что $AM : MB = 1 : 3$ (рис. 16.57). Найдите углы треугольника $ABC$.

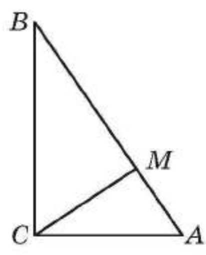


Рис. 16.57

Решение. Пусть $AM = x$, тогда $MB = 3x$. Имеем: $AC^2 = AM \cdot AB$, т. е. $AC^2 = x \cdot 4x$. Отсюда $AC = 2x$. Получили, что в прямоугольном треугольнике $ABC$ катет $AC$ в два раза меньше гипотенузы. Следовательно, $\angle ABC = 30°$, $\angle BAC = 60°$.

## 16.14. Теорема Пифагора

**Теорема Пифагора.** В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

На рисунке 16.58 изображён прямоугольный треугольник $ABC$ ($\angle ACB = 90°$). Имеем: $AB^2 = AC^2 + BC^2$.

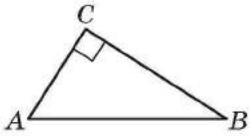


Рис. 16.58

Если в прямоугольном треугольнике длины катетов равны $a$ и $b$, а длина гипотенузы равна $c$, то теорему Пифагора можно выразить следующим равенством:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Задача. Биссектриса $CD$ прямоугольного треугольника $ABC$ делит гипотенузу $AB$ на отрезки $AD$ и $BD$, соответственно равные 40 см и 30 см (рис. 16.59). Найдите катеты треугольника $ABC$.

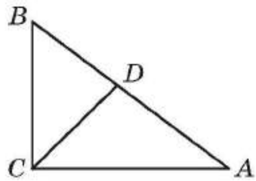


Рис. 16.59

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{4}{3}$. Пусть $AC = 4x$ см, тогда $BC = 3x$ см. По теореме Пифагора можно записать: $AC^2 + BC^2 = AB^2$. Имеем: $16x^2 + 9x^2 = 70^2$. Отсюда $x = 14$. Тогда $AC = 56$ см, $BC = 42$ см.

Ответ: 42 см, 56 см.

## 16.15. Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника

**Синусом** острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Синус угла $A$ обозначают так: $\sin A$ (читают: «синус $A$»).

Для острых углов $A$ и $B$ прямоугольного треугольника $ABC$ (рис. 16.60) имеем:

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \sin B = \frac{AC}{AB}.$$

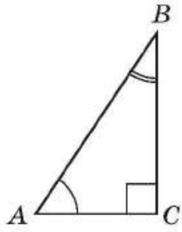



Рис. 16.60

**Косинусом** острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Косинус угла $A$ обозначают так: $\cos A$ (читают: «косинус $A$»).

Для острых углов $A$ и $B$ прямоугольного треугольника $ABC$ (рис. 16.60) имеем:

$$\cos A = \frac{AC}{AB}; \cos B = \frac{BC}{AB}.$$

**Тангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называют отношение противолежащего катета к прилежащему.

Тангенс угла $A$ обозначают так: $\operatorname{tg} A$ (читают: «тангенс $A$»).

Для острых углов $A$ и $B$ прямоугольного треугольника $ABC$ (рис. 16.60) имеем:

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}; \operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}.$$

**Котангенсом** острого угла прямоугольного треугольника называют отношение прилежащего катета к противолежащему.

Котангенс угла $A$ обозначают так: $\operatorname{ctg} A$ (читают: «котангенс $A$»).

Для острых углов $A$ и $B$ прямоугольного треугольника $ABC$ (рис. 16.60) имеем:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{AC}{BC}; \operatorname{ctg} B = \frac{BC}{AC}.$$

Для прямоугольного треугольника, изображённого на рисунке 16.61, имеем:

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\sin\beta = \frac{b}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\cos\beta = \frac{a}{c}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$, $\operatorname{ctg}\beta = \frac{a}{b}$.

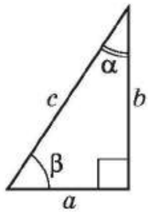


Рис. 16.61

❗ Для острого угла α имеют место такие равенства:

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ - \alpha) &= \sin\alpha,\\ \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos\alpha,\\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha,\\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha.\end{aligned}$$

Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для углов 30°, 45° и 60° приведены в следующей таблице:

| $\alpha$ | 30° | 45° | 60° |
|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

З а д а ч а . Основание $AC$ и высота $BD$ равнобедренного треугольника $ABC$ соответственно равны $2\sqrt{3}$ см и 3 см. Найдите углы треугольника $ABC$.

Решение. Поскольку треугольник $ABC$ равнобедренный, то отрезок $BD$ — его медиана (рис. 16.62). Тогда $DC = \sqrt{3}$ см. Для прямоугольного треугольника $BDC$ можно записать $\operatorname{tg}\angle BCD = \frac{BD}{DC} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Отсюда $\angle BCD = 60°$. Следовательно, треугольник $ABC$ равносторонний и каждый его угол равен $60°$.

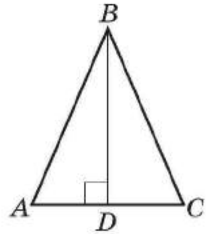


Рис. 16.62

❗ Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы и синуса угла, противолежащего этому катету.

❗ Катет прямоугольного треугольника равен произведению гипотенузы и косинуса угла, прилежащего к этому катету.

❗ Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета и тангенса угла, противолежащего первому катету.

❗ Катет прямоугольного треугольника равен произведению второго катета и котангенса угла, прилежащего к первому катету.

❗ Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на синус противолежащего ему угла.

❗ Гипотенуза прямоугольного треугольника равна частному от деления катета на косинус прилежащего к нему угла.

## 16.16. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла от 0° до 180°

В верхней полуплоскости координатной плоскости рассмотрим полуокружность с центром в начале координат, радиус которой равен 1 (рис. 16.63). Такую полуокружность называют **единичной**.

Будем говорить, что **углу $\alpha$ ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) соответствует точка** $M$ единичной полуокружности, если $\angle MOA = \alpha$, где точки $O$ и $A$ имеют соответственно координаты (0; 0) и (1; 0) (рис. 16.63). Например, на рисунке 16.63 углу, равному 90°, соответствует точка $C$; углу, равному 180°, — точка $B$; углу, равному 0°, — точка $A$.

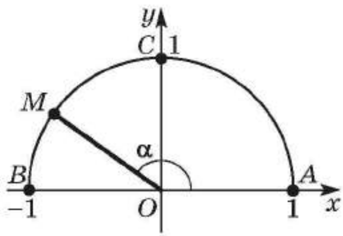



Рис. 16.63

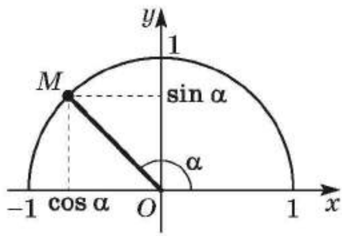



Рис. 16.64

**Косинусом** и **синусом** угла $\alpha$ ($0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$) называют соответственно абсциссу и ординату точки $M$ единичной полуокружности, соответствующей углу $\alpha$ (рис. 16.64).

Например: $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$, $\sin 180° = 0$, $\cos 180° = -1$.

**Тангенсом** угла $\alpha$, где $0° \leqslant \alpha \leqslant 180°$ и $\alpha \neq 90°$, называют отношение $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Поскольку $\cos 90° = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha$ не определён для $\alpha = 90°$.

**Котангенсом** угла $\alpha$, где $0° < \alpha < 180°$, называют отношение $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, т. е.

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Поскольку $\sin 0° = \sin 180° = 0$, то $\operatorname{ctg}\alpha$ не определён для $\alpha = 0°$ и $\alpha = 180°$.

❗ Для угла $\alpha$ $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°)$ имеют место такие равенства:

$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha,$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Последнее равенство называют **основным тригонометрическим тождеством.**

❗ Для угла $\alpha$ $(0° \leqslant \alpha \leqslant 180°,\ \alpha \neq 90°)$ имеет место такое равенство:

$$\operatorname{tg}(180° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

❗ Для угла $\alpha$ $(0° < \alpha < 180°)$ имеет место такое равенство:

$$\operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

❗ Для угла $\alpha$ $(0° < \alpha < 180°,\ \alpha \neq 90°)$ имеет место такое равенство:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Задача. Найдите $\sin 120°$, $\cos 120°$, $\operatorname{tg} 120°$, $\operatorname{ctg} 120°$.

Решение. Имеем: $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 120° = \cos(180° - 60) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$;

$\mathrm{tg}\,120° = \mathrm{tg}\,(180° - 60) = -\mathrm{tg}\,60° = -\sqrt{3}$;

$\mathrm{ctg}\,120° = \mathrm{ctg}\,(180° - 60°) = -\mathrm{ctg}\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

## 16.17. Теорема косинусов

**Теорема косинусов.** Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.

Если длины сторон треугольника обозначить $a$, $b$ и $c$, а угол между сторонами, равными $b$ и $c$, обозначить $\alpha$, то теорему косинусов можно записать в виде следующего равенства:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

❶ Пусть $a$, $b$ и $c$ — длины сторон треугольника $ABC$, причём $a$ — длина его наибольшей стороны. Если $a^2 < b^2 + c^2$, то треугольник остроугольный. Если $a^2 > b^2 + c^2$, то треугольник тупоугольный. Если $a^2 = b^2 + c^2$, то треугольник прямоугольный.

Задача. В треугольнике $ABC$ сторона $AB$ на 4 см больше стороны $BC$, $\angle B = 120°$, $AC = 14$ см. Найдите стороны $AB$ и $BC$.

Решение. По теореме косинусов $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC\cos B$.

Пусть $BC = x$ см, $x > 0$, тогда $AB = (x + 4)$ см.

Имеем:

$$14^2 = (x + 4)^2 + x^2 - 2x\,(x + 4)\cos 120°;$$

$$196 = x^2 + 8x + 16 + x^2 - 2x(x + 4) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right);$$

$$196 = 2x^2 + 8x + 16 + x\,(x + 4);$$

$$3x^2 + 12x - 180 = 0;$$
$$x^2 + 4x - 60 = 0;$$
$$x_1 = 6;\ x_2 = -10.$$

Корень $-10$ не удовлетворяет условию $x > 0$.

Следовательно, $BC = 6$ см, $AB = 10$ см.

Ответ: 10 см, 6 см.

## 16.18. Теорема синусов

**Теорема синусов.** Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Если длины сторон треугольника $ABC$ обозначить $a$, $b$ и $c$, то теорему синусов можно записать в виде следующего равенства:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Задача 1. В треугольнике $ABC$ известно, что $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle B = 45°$. Найдите угол $A$.

Решение. По теореме синусов $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$.

Тогда

$$\sin A = \frac{BC \sin B}{AC} = \frac{1 \cdot \sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \sqrt{2} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Следовательно, угол $A$ острый. Отсюда, учитывая, что $\sin A = \frac{1}{2}$, получаем $\angle A = 30°$.

Ответ: 30°.

Задача 2. В треугольнике $ABC$ известно, что $AC = \sqrt{2}$ см, $BC = 1$ см, $\angle A = 30°$. Найдите угол $B$.

Решение. Имеем: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B}$; $\sin B = \frac{AC \sin A}{BC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как $BC < AC$, то $\angle A < \angle B$. Тогда угол $B$ может быть как острым, так и тупым. Отсюда $\angle B = 45°$ или $\angle B = 180° - 45° = 135°$.

Ответ: 45° или 135°.

## Примеры заданий № 23

### Часть 1

1. Найдите катет прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 27 см, а проекция искомого катета на гипотенузу — 3 см. Ответ дайте в сантиметрах.
2. Точка $H$ является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла $B$ треугольника $ABC$ к гипотенузе $AC$. Найдите отрезок $AC$, если $BH = 7\sqrt{3}$, $AH = 7$.
3. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, если его боковая сторона равна 13 см, а основание — 24 см. Ответ дайте в сантиметрах.
4. На рисунке 16.65 изображены треугольники $ABC$ и $BDC$ такие, что $\angle ABC = \angle BDC = 90°$. Найдите отрезок $AB$.

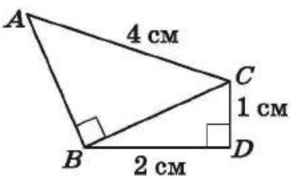


Рис. 16.65

1) $\sqrt{11}$ см 3) 1 см

2) $\sqrt{13}$ см 4) 3 см

**5.** Найдите периметр прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 13 см, а один из катетов на 7 см больше другого. Ответ дайте в сантиметрах.

**6.** Катеты прямоугольного треугольника равны 2 см и $\sqrt{5}$ см. Найдите синус большего острого угла этого треугольника.

1) $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{2}{\sqrt{5}}$

**7.** В треугольнике $ABC$ известно, что $\angle C = 90°$, $AB = 25$ см, $BC = 20$ см. Найдите $\operatorname{tg} B$.

**8.** Катет прямоугольного треугольника равен 12 см, а синус противолежащего ему угла равен 0,4. Найдите гипотенузу треугольника.

1) 4,8 см 2) 30 см 3) 40 см 4) 8 см

**9.** Доску длиной 3 м приставили к стене дома под углом 30° к земле так, что она опирается на подоконник окна первого этажа. На какой высоте находится этот подоконник? Ответ дайте в метрах.

**10.** На рисунке 16.66 изображён прямоугольный треугольник $ABC$ с гипотенузой $AB$, отрезок $CD$ — высота данного треугольника, $\angle B = 30°$, $AD = 2$ см. Чему равна длина отрезка $AC$? Ответ дайте в сантиметрах.

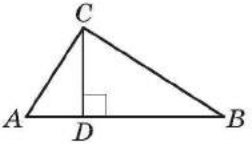


Рис. 16.66

**11.** Из точки $A$, лежащей вне прямой $m$, проведены к этой прямой наклонные $AC$ и $AD$, которые образуют с ней углы 45° и 60° соответственно. Найдите проекцию наклонной $AD$ на прямую $m$, если $AC = 4\sqrt{6}$ см.

**12.** Медиана равностороннего треугольника равна $8\sqrt{3}$. Найдите сторону данного треугольника.

**13.** Укажите неверное утверждение.

1) косинус любого острого угла больше косинуса любого тупого угла

2) косинус угла треугольника может быть равным нулю

3) косинус угла треугольника может быть равным отрицательному числу

4) косинус угла треугольника может быть равным $-1$

**14.** Укажите неверное утверждение.

1) синус угла треугольника может быть равным 1

2) синус угла треугольника может быть равным 0

3) синус любого угла, отличного от прямого, меньше синуса прямого угла

4) косинус развёрнутого угла меньше косинуса любого угла, отличного от развёрнутого

**15.** Чему равен косинус угла, если его синус равен 0?

1) 1 2) $-1$ 3) $-1$ или 1 4) 0

**16.** Какое из неравенств верно?

1) $\sin 130° \cos 100° > 0$ 3) $\sin 130° \cos 100° < 0$

2) $\sin 130° \cos 20° < 0$ 4) $\sin 130° \cos 90° > 0$

**17.** В треугольнике $ABC$ известно, что $AB = 2$ см, $BC = \sqrt{3}$ см, $\angle B = 30°$. Найдите сторону $AC$. Ответ дайте в сантиметрах.

**18.** Два угла треугольника равны 30° и 45°. Найдите сторону, противолежащую углу 30°, если сторона, противолежащая углу 45°, равна $3\sqrt{2}$.

**19.** В треугольнике $ABC$ известно, что $AC = BC$, $AB = 2\sqrt{2}$, $\angle BAC = 30°$, отрезок $AD$ — биссектриса треугольника. Найдите отрезок $AD$.

## Часть 2

**20.** Высота равнобедренного треугольника делит его боковую сторону на отрезки длиной 1 см и 12 см, считая от вершины угла при основании. Найдите основание данного треугольника.

**21.** Основание равнобедренного треугольника относится к его боковой стороне как 6 : 5. Найдите периметр треугольника, если его высота, проведённая к основанию, равна 8 см.

**22.** Из точки к прямой проведены две наклонные, проекции которых на прямую равны 5 см и 9 см. Найдите расстояние от данной точки до этой прямой, если одна из наклонных на 2 см больше другой.

**23.** Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 40 см, а высота, проведённая к основанию, — $4\sqrt{91}$ см. Найдите расстояние между точками пересечения биссектрис углов при основании треугольника с его боковыми сторонами.

**24.** Катеты прямоугольного треугольника равны 18 см и 24 см. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины его меньшего острого угла.

**25.** Высота $AD$ треугольника $ABC$ делит сторону $BC$ на отрезки $BD$ и $CD$ так, что $BD = 15$ см, $CD = 5$ см. Найдите сторону $AC$, если $\angle B = 30°$.

**26.** Высота прямоугольного треугольника с острым углом $\alpha$, проведённая к гипотенузе, равна $h$. Найдите гипотенузу этого треугольника.

**27.** В четырёхугольнике $ABDC$, изображённом на рисунке 16.67, $AB = BD = a$, $\angle A = \angle D = 15°$. Найдите периметр четырёхугольника $ABDC$, если $\angle ACD = 90°$.

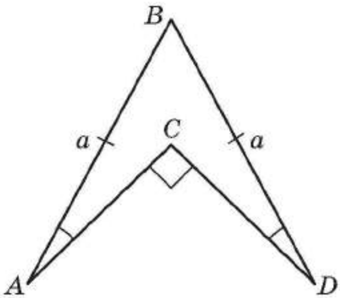


Рис. 16.67

**28.** Две стороны треугольника, угол между которыми равен $60°$, относятся как $5 : 8$, а третья сторона равна 21 см. Найдите неизвестные стороны треугольника.

**29.** Сумма двух сторон треугольника равна 16 см, а угол между ними — $120°$. Найдите меньшую из этих сторон, если третья сторона треугольника равна 14 см.

**30.** В треугольнике $ABC$ известно, что $\angle C = 90°$, $AC = 9$ см, $BC = 12$ см. На стороне $AB$ отметили точку $D$ так, что $AD = 5$ см. Найдите отрезок $CD$.

**31.** Основание и боковая сторона равнобедренного треугольника равны 20 см и 30 см соответственно. Найдите биссектрису треугольника, проведённую из вершины угла при его основании.

# § 17. Окружность и круг

## 17.1. Понятие о геометрическом месте точек. Примеры ГМТ

**Геометрическим местом точек (ГМТ)** называют множество всех точек, обладающих определённым свойством.

❗ Чтобы какое-то множество точек можно было называть геометрическим местом точек, обладающих некоторым свойством, надо доказать две взаимно обратные теоремы:

1) **прямая теорема:** каждая точка данного множества обладает заданным свойством;

2) **обратная теорема:** если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит данному множеству.

Примеры ГМТ:

1. Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудалённых от концов этого отрезка.

П р я м а я т е о р е м а. Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от его концов.

О б р а т н а я т е о р е м а. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка.

2. Биссектриса угла является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудалённых от его сторон.

П р я м а я т е о р е м а. Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.

О б р а т н а я т е о р е м а. Если точка, принадлежащая углу, равноудалена от его сторон, то она лежит на биссектрисе этого угла.

## 17.2. Окружность и круг, их элементы

**Окружностью** называют геометрическое место точек, расстояния от которых до заданной точки равны данному положительному числу.

Заданную точку называют **центром окружности**. На рисунке 17.1 точка $O$ — центр окружности.

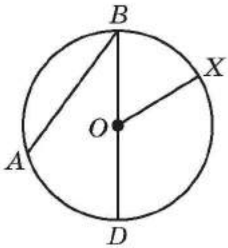



Рис. 17.1

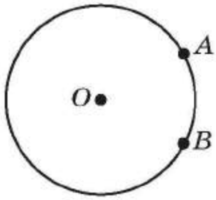



Рис. 17.2

Любой отрезок, соединяющий точку окружности с её центром, называют **радиусом окружности**. Длину этого отрезка также принято называть радиусом. На рисунке 17.1 отрезок $OX$ — радиус. Из определения следует, что все радиусы одной окружности равны.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют **хордой** окружности. На рисунке 17.1 отрезки $AB$ и $BD$ — хорды. Хорду, проходящую через центр окружности, называют **диаметром**. На рисунке 17.1 отрезок $BD$ — диаметр окружности. Очевидно, что $BD = 2OX$, т. е. диаметр окружности в два раза больше её радиуса.

На рисунке 17.2 точки $A$ и $B$ делят окружность на две части. Каждую из этих частей вместе с точками $A$ и $B$ называют **дугой окружности**.

**Кру́гом** называют геометрическое место точек, расстояния от которых до заданной точки не больше данного положительного числа. Заданную точку называют **центром круга.** Радиус окружности, которая ограничивает круг, называют **радиусом круга.**

Из определения круга следует, что окружность, ограничивающая круг, ему принадлежит.

**Хорда** и **диаметр** круга — это хорда и диаметр окружности, ограничивающей круг.

На рисунке 17.3 радиусы $OA$ и $OB$ делят круг на две части. Каждую из этих частей вместе с радиусами $OA$ и $OB$ называют **круговым сектором** или просто **сектором.**

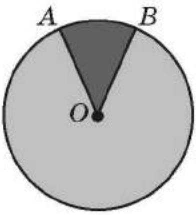



Рис. 17.3

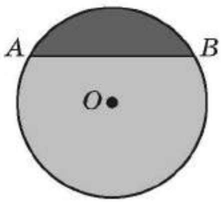



Рис. 17.4

На рисунке 17.4 хорда $AB$ делит круг на две части. Каждую из этих частей вместе с хордой $AB$ называют **круговым сегментом** или просто **сегментом.** Хорду $AB$ при этом называют **основанием сегмента.**

Задача. На продолжении хорды $CD$ окружности с центром $O$ за точку $D$ отметили точку $E$ такую, что отрезок $DE$ равен радиусу окружности. Прямая $OE$ пересекает данную окружность в точках $A$ и $B$ (рис. 17.5). Докажите, что $\angle AOC = 3\angle CEO$.

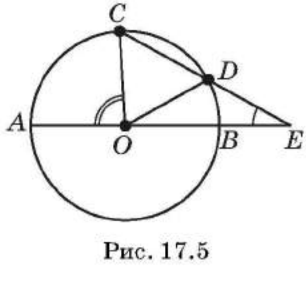



Рис. 17.5

Решение. Пусть $\angle CEO = \alpha$.
Поскольку треугольник $ODE$ равнобедренный, то $\angle DOE = \angle CEO = \alpha$.
Угол $ODC$ — внешний угол треугольника $ODE$. Тогда $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.
Поскольку треугольник $COD$ равнобедренный, то $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.
Угол $AOC$ — внешний угол треугольника $COE$. Тогда $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, т. е. $\angle AOC = 3\angle CEO$.

## 17.3. Свойства элементов окружности

1. Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

На рисунке 17.6 изображена окружность с центром $O$, $M$ — точка пересечения диаметра $CD$ и хорды $AB$, отличной от диаметра окружности, $CD \perp AB$. Поэтому $AM = MB$.

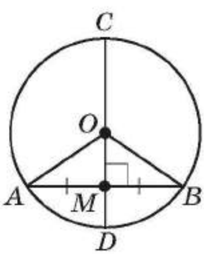


Рис. 17.6

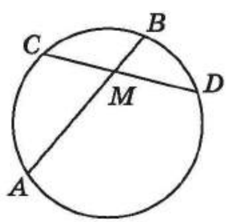


Рис. 17.7

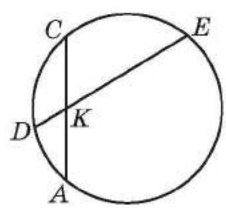


Рис. 17.8

2. Диаметр окружности, делящий хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен этой хорде.

На рисунке 17.6 диаметр $CD$ делит пополам хорду $AB$, отличную от диаметра. Поэтому $CD \perp AB$.

3. **Свойство пересекающихся хорд.** Если хорды $AB$ и $CD$ окружности пересекаются в точке $M$, то $AM \cdot MB = DM \cdot MC$ (рис. 17.7).

Задача. Точка $K$ делит хорду $AC$ окружности пополам, а хорду $DE$ — на отрезки длиной 2 см и 32 см (рис. 17.8). Найдите хорду $AC$.
Решение. Пусть $AK = KC = x$ см. По свойству пересекающихся хорд выполняется равенство $AK \cdot KC = DK \cdot KE$. Отсюда $x^2 = 64$; $x = 8$. Получаем, что $AC = 2x = 16$ (см).
Ответ: 16 см.

## 17.4. Касательная и секущая к окружности

Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют **касательной** к окружности.

На рисунке 17.9 прямая $a$ — касательная к окружности с центром в точке $O$, $A$ — **точка касания**.

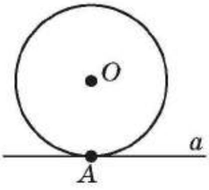


Рис. 17.9

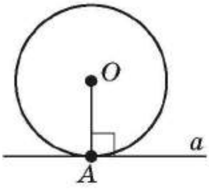


Рис. 17.10

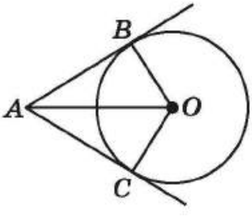


Рис. 17.11

**Свойства касательной**

1. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведённому в точку касания.

На рисунке 17.10 изображена окружность с центром $O$, $A$ — точка касания прямой $a$ и окружности. Поэтому $OA \perp a$.

2. Если через данную точку к окружности проведены две касательные, то отрезки касательных, соединяющих данную точку с точками касания, равны.

На рисунке 17.11 изображена окружность с центром $O$. Прямые $AB$ и $AC$ — касательные, $B$ и $C$ — точки касания. Поэтому $AB = AC$.

**Признак касательной к окружности**

Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведённому в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.

На рисунке 17.10 изображена окружность с центром $O$, отрезок $OA$ — её радиус, точка $A$ принадлежит прямой $a$, $OA \perp a$. Поэтому прямая $a$ — касательная к окружности.

**Свойство касательной и секущей**

Если через точку $A$ к окружности проведены касательная $AM$ ($M$ — точка касания) и прямая (секущая), пересекающая окружность в точках $B$ и $C$, то $AM^2 = AC \cdot AB$ (рис. 17.12).

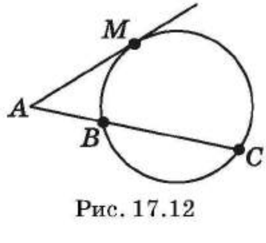


Рис. 17.12

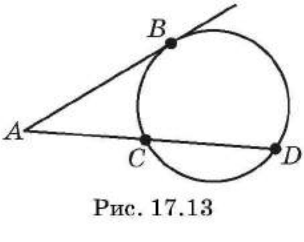


Рис. 17.13

Задача. Через точку $A$, лежащую вне окружности, проведены две прямые, одна из которых касается окружности в точке $B$, а другая пересекает окружность в точках $C$ и $D$ (точка $C$ лежит между точками $A$ и $D$), $AB = 18$ см, $AC : CD = 4 : 5$ (рис. 17.13). Найдите отрезок $AD$.

Решение. Пусть $AC = 4x$ см, тогда $AD = 9x$ см. По свойству касательной и секущей выполняется равенство $AB^2 = AC \cdot AD$. Отсюда $36x^2 = 18^2$, $6x = 18$, $x = 3$. Получаем, что $AD = 9x = 27$ (см).
Ответ: 27 см.

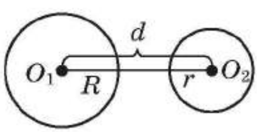
## 17.5. Взаимное расположение двух окружностей

Рассмотрим окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ и радиусами $R$ и $r$ ($R > r$) соответственно. Пусть расстояние между центрами этих окружностей, т. е. длина отрезка $O_1O_2$, равно $d$.

1) Если $d > R + r$, то отрезки, длины которых равны $d$, $R$ и $r$, не могут служить сторонами треугольника. Поэтому данные окружности не имеют общих точек и расположены так, как показано на рисунке 17.14.

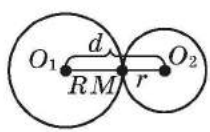
2) Если $d = R + r$, то на отрезке $O_1O_2$ существует такая точка $M$, что $O_1M = R$ и $MO_2 = r$. Тогда данные окружности имеют только одну общую точку $M$ (рис. 17.15). В этом случае говорят, что **окружности касаются внешним образом**.

3) Если $R - r < d < R + r$, то можно построить треугольник, стороны которого равны $d$, $R$ и $r$. Это значит, что данные окружности имеют две общие точки (рис. 17.16).



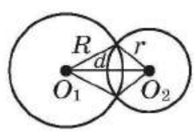

$d > R + r$

Рис. 17.14




$d = R + r$

Рис. 17.15



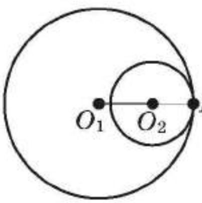

$R - r < d < R + r$

Рис. 17.16

4) Если $d = R - r$, то $R = d + r$. В этом случае на продолжении отрезка $O_1O_2$ за точку $O_2$ существует такая точка $M$, что $O_1O_2 = d$ и $O_2M = r$. Тогда данные окружности имеют только одну общую точку $M$ (рис. 17.17). В этом случае говорят, что **окружности касаются внутренним образом.**

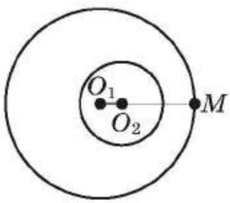
5) Если $d < R - r$, то $R > d + r$. В этом случае на продолжении отрезка $O_1O_2$ за точку $O_2$ существует такая точка $M$, что $O_1M = R$ и $O_2M > r$. Тогда данные окружности не имеют общих точек и окружность меньшего радиуса располагается внутри окружности большего радиуса (рис. 17.18)

6) Если $d = 0$, то центры окружностей совпадают (рис. 17.19). Такие окружности называют **концентрическими.**



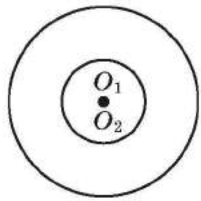

$d = R - r$

Рис. 17.17




$d < R - r$

Рис. 17.18




$d = 0$

Рис. 17.19

## 17.6. Окружность, описанная около треугольника

Окружность называют **описанной около треугольника,** если она проходит через все его вершины.

На рисунке 17.20 изображена окружность, описанная около треугольника. В этом случае также говорят, что **треугольник вписан в окружность.**

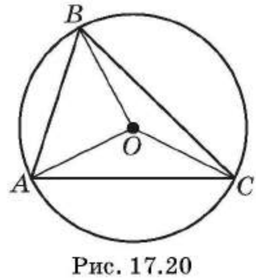


Рис. 17.20

На рисунке 17.20 точка $O$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$. Отрезки $OA$, $OB$ и $OC$ — радиусы этой окружности, поэтому $OA = OB = OC$. Следовательно, центр описанной окружности треугольника равноудалён от всех его вершин.

❶ Около любого треугольника можно описать окружность.

❶ Центр окружности, описанной около треугольника, — это точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника.

❶ Если треугольник остроугольный, то центр его описанной окружности расположен внутри треугольника; если треугольник тупоугольный, то центр его описанной окружности расположен вне треугольника; если треугольник прямоугольный, то центром его описанной окружности является середина гипотенузы.

**Формулы для вычисления радиуса описанной окружности треугольника:**

$R = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$, где $a$ — длина стороны треугольника, $\alpha$ — величина угла, противолежащего этой стороне;

$R = \dfrac{abc}{4S}$, где $a$, $b$ и $c$ — длины сторон треугольника, $S$ — его площадь.

З а д а ч а. Отрезок $BD$ — биссектриса треугольника $ABC$, $\angle B = 30°$, $\angle C = 105°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, если радиус окружности, описанной около треугольника $BDC$, равен $8\sqrt{6}$ см.

Решение. Пусть $R_1$ — радиус окружности, описанной около треугольника $BDC$ (рис. 17.21), $R_1 = 8\sqrt{6}$ см.

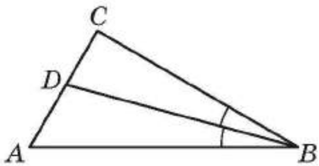



Рис. 17.21

$\angle CBD = \frac{1}{2}\angle ABC = 15°.$

Из $\Delta BDC$: $\angle BDC = 180° - (\angle CBD + \angle C) = 180° - (15° + 105°) = 60°.$

Тогда $\frac{BC}{2\sin\angle BDC} = R_1$, отсюда $BC = 2R_1 \sin\angle BDC = 2 \cdot 8\sqrt{6}\sin 60° = 24\sqrt{2}$ (см).

Из $\Delta ABC$: $\angle A = 180° - (\angle ABC + \angle C) = 180° - (30° + 105°) = 45°.$

Пусть $R$ — искомый радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$. Тогда $R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{24\sqrt{2}}{2\sin 45°} = 24$ (см).

Ответ: 24 см.

## 17.7. Окружность, вписанная в треугольник

Окружность называют **вписанной в треугольник**, если она касается всех его сторон.

На рисунке 17.22 изображена окружность, вписанная в треугольник. В этом случае также говорят, что **треугольник описан около окружности**.

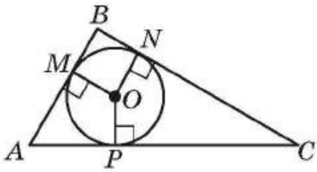



Рис. 17.22

На рисунке 17.22 точка $O$ — центр окружности, вписанной в треугольник $ABC$, отрезки $OM$, $ON$, $OP$ — радиусы, проведённые в точки касания, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Поскольку $OM = ON = OP$, то центр вписанной окружности треугольника равноудалён от всех его сторон.

❶ В любой треугольник можно вписать окружность.

❶ Центр окружности, вписанной в треугольник, — это точка пересечения биссектрис треугольника.

**Формула для вычисления радиуса вписанной окружности треугольника:**

$r = \frac{S}{p}$, где $S$ — площадь треугольника, $p$ — его полупериметр.

Задача. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, можно найти по формуле $r = \frac{a + b - c}{2}$, где $r$ — радиус вписанной окружности, $a$ и $b$ — длины катетов, $c$ — длина гипотенуза.

Решение. В треугольнике $ABC$ имеем: $\angle ABC = 90°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, точка $O$ — центр вписанной окружности, $M$, $E$ и $K$ — точки касания вписанной окружности со сторонами $BC$, $AC$ и $AB$ соответственно (рис. 17.23).

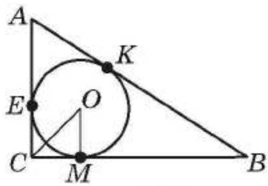


Рис. 17.23

Отрезок $OM$ — радиус окружности, проведённый в точку касания. Тогда $OM \perp BC$.
Так как точка $O$ — центр вписанной окружности, то луч $CO$ — биссектриса угла $ACB$, следовательно, $\angle OCM = 45°$. Тогда треугольник $CMO$ — равнобедренный прямоугольный. Отсюда $CM = OM = r$.
Используя свойство отрезков касательных, проведённых к окружности через одну точку, получаем, что $CE = CM$. Поскольку $CM = r$, то $CE = r$.
Тогда $AK = AE = b - r$, $BK = BM = a - r$.
Так как $AK + BK = AB$, то $b - r + a - r = c$. Отсюда
$2r = a + b - c$; $r = \dfrac{a + b - c}{2}$.

## 17.8. Центральные и вписанные углы. Градусная мера дуги окружности

**Центральным углом окружности** называют угол с вершиной в центре окружности.

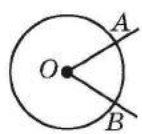


Рис. 17.24

На рисунке 17.24 угол $AOB$ — центральный.

Каждая дуга окружности, как и вся окружность, имеет **градусную меру**. Градусную меру всей окружности считают равной 360°. Если центральный угол $MON$ опирается на дугу $MN$ (рис. 17.25), то градусную меру дуги $MN$ считают равной градусной мере угла $MON$ и записывают $\cup MN = \angle MON$ (читают: «градусная мера дуги $MN$ равна градусной мере угла $MON$»). Градусную меру дуги $MEN$ (рис. 17.25) считают равной $360° - \angle MON$.

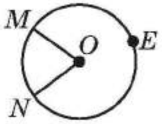



Рис. 17.25

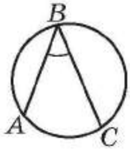



Рис. 17.26

Рис. 17.27

Рис. 17.28

**Вписанным углом окружности** называют угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность.

На рисунке 17.26 угол $ABC$ — вписанный.

❶ Градусная мера вписанного угла равна половине градусной меры дуги, на которую он опирается.

На рисунке 17.26 угол $ABC$ — вписанный, поэтому $\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$.

❶ Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (рис. 17.27).

❶ Вписанный угол, опирающийся на диаметр (полуокружность), — прямой (рис. 17.28).

Задача 1. Хорды $AB$ и $CD$ окружности пересекаются в точке $M$ (рис. 17.29). Докажите, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$.

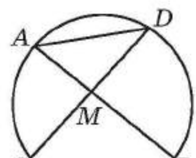



Рис. 17.29

Решение. Угол $AMC$ является внешним для треугольника $AMD$. Тогда $\angle AMC = \angle DAB + \angle ADC = \frac{1}{2} \cup DB + \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup BD)$.

Задача 2. Хорды $AB$ и $CD$ окружности не пересекаются, а прямые $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $M$ (рис. 17.30). Докажите, что $\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup BD)$.

Решение. Угол $ADC$ является внешним для треугольника $ADM$. Тогда $\angle ADC = \angle DAM + \angle AMD$. Отсюда $\angle AMD = \angle ADC - \angle DAM = \frac{1}{2}\cup AC - \frac{1}{2}\cup BD = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup BD)$.

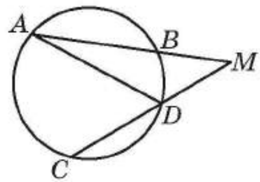


Рис. 17.30

## 17.9. Длина окружности

❶ Для всех окружностей отношение длины окружности к диаметру есть одно и то же число. Это число принято обозначать греческой буквой $\pi$ (читают: «пи»).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$, где $C$ — длина окружности, $R$ — её радиус, получаем формулу для вычисления длины окружности:

$$C = 2\pi R.$$

Число $\pi$ иррациональное, а значит, оно может быть представлено в виде конечной десятичной дроби лишь приближённо. Обычно при решении задач в качестве приближённого значения $\pi$ принимают число 3,14.

Длину $l$ дуги в $n°$ окружности радиуса $R$ вычисляют по формуле

$$l = \frac{\pi R n}{180}.$$

Задача. Длина дуги окружности, радиус которой 25 см, равна $\pi$ см. Найдите градусную меру дуги.

Решение. Из формулы $l = \frac{\pi R n}{180}$ получаем $n = \frac{180 l}{\pi R}$. Следовательно, искомая градусная мера $n^\circ = \left(\frac{180\pi}{\pi \cdot 25}\right)^\circ = 7{,}2^\circ$.

Ответ: 7,2°.

## Примеры заданий № 24

### Часть 1

**1.** Какая фигура является геометрическим местом точек плоскости, равноудалённых от двух данных точек?

1) луч
2) прямая
3) окружность
4) отрезок

**2.** Даны 3 точки, лежащие на одной прямой. Сколько точек содержит геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от данных точек?

1) 1 2) 2 3) бесконечно много 4) ни одной

**3.** Укажите верное утверждение.

1) если две хорды окружности перпендикулярны, то одна из них является диаметром
2) если две хорды окружности точкой пересечения делятся пополам, то они перпендикулярны
3) если касательная к окружности, проведённая через конец хорды, перпендикулярна ей, то эта хорда — диаметр окружности
4) если первая хорда окружности делит вторую хорду пополам, то первая хорда — диаметр окружности

4. Каждая из хорд $AB$ и $BC$ окружности, изображённой на рисунке 17.31, равна 6 см, $\angle ABC = 120°$. Чему равен радиус окружности? Ответ дайте в сантиметрах.
5. Точка $O$ — центр окружности, изображённой на рисунке 17.32, $\angle ABC = 56°$, $\angle OAB = 34°$. Найдите градусную меру угла $OCB$.
6. В окружности, радиус которой равен 10 см, проведена хорда длиной 16 см. Чему равно расстояние от центра окружности до данной хорды? Ответ дайте в сантиметрах.
7. На рисунке 17.33 изображена окружность с центром $O$. Через точку $A$ к этой окружности проведена касательная $AB$ ($B$ — точка касания). Найдите радиус окружности, если расстояние от точки $A$ до точки $B$ равно 15, а расстояние от точки $A$ до центра окружности — 17.
8. Какие из следующих утверждений верны?
   1) точка пересечения двух окружностей равноудалена от центров этих окружностей
   2) через любую точку, лежащую вне окружности, можно провести две касательные к этой окружности
   3) две окружности пересекаются, если радиус одной окружности больше радиуса другой окружности
   4) любые два диаметра окружности равны

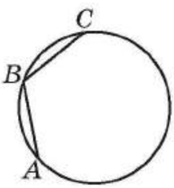



Рис. 17.31

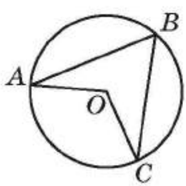



Рис. 17.32

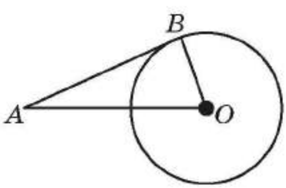



Рис. 17.33

В ответе запишите в порядке возрастания номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

**9.** Через точку $M$ к окружности с центром $O$, изображённой на рисунке 17.34, проведены касательные $MA$ и $MB$, $A$ и $B$ — точки касания, $\angle BAO = 20°$. Найдите градусную меру угла $AMB$.

**10.** Отрезок $AB$ — диаметр окружности, $AB = 24$ см. Точка $A$ удалена от касательной к этой окружности на 4 см. Найдите расстояние от точки $B$ до этой касательной. Ответ дайте в сантиметрах.

**11.** Две окружности пересекаются так, что каждая из них проходит через центр другой окружности. Чему равно отношение радиусов этих окружностей?

1) 1 : 1 3) 1 : $\pi$
2) 1 : 2 4) определить невозможно

**12.** Окружности с центрами $O_1$, $O_2$ и $O_3$ попарно касаются так, как показано на рисунке 17.35. Чему равен периметр треугольника $O_1O_2O_3$, если радиус окружности с центром $O_1$ равен 8?

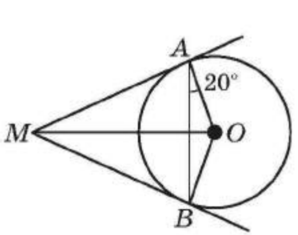


Рис. 17.34

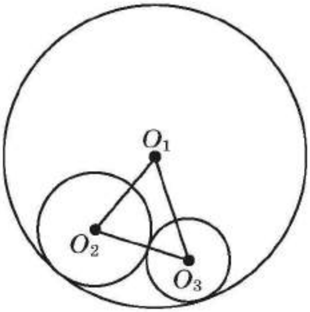


Рис. 17.35

**13.** Две окружности касаются так, как показано на рисунке 17.36. Диаметр одной окружности равен 24, а другой — 16. Чему равно расстояние между центрами этих окружностей?

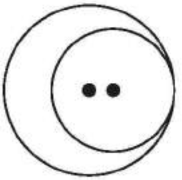


Рис. 17.36

**14.** Что является центром описанной окружности любого треугольника?

1) точка пересечения его высот

2) точка пересечения его медиан

3) точка пересечения его биссектрис

4) точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон

**15.** Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, если $AB = 6\sqrt{3}$ см, $\angle C = 60°$. Ответ дайте в сантиметрах.

**16.** Что является центром вписанной окружности любого треугольника?

1) точка пересечения его высот

2) точка пересечения его медиан

3) точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон

4) точка пересечения его биссектрис

**17.** Чему равен радиус вписанной окружности треугольника, площадь которого равна 48 см$^2$, а периметр равен 24 см? Ответ дайте в сантиметрах.

**18.** Концы хорды окружности делят её на две дуги, градусные меры которых относятся как 4 : 5. Найдите градусную меру меньшей из этих дуг.

**19.** В колесе 24 спицы. Углы между соседними спицами равны. Найдите величину угла (в градусах), который образуют две соседние спицы.

**20.** Какой угол (в градусах) образуют минутная и часовая стрелки в 19:00?

**21.** Какой угол (в градусах) описывает минутная стрелка за 28 мин?

**22.** Точка $O$ — центр окружности, изображённой на рисунке 17.37. Найдите градусную меру угла $AOC$.

**23.** Точка $O$ — центр окружности, изображённой на рисунке 17.38. Чему равна градусная мера угла $AOC$ ?

**24.** На рисунке 17.39 изображены равные прямоугольные треугольники $ABC$ и $ABD$ с общей гипотенузой $AB$, вписанные в окружность. Градусная мера дуги $CD$ равна 100°. Чему равен угол $\alpha$? Ответ дайте в градусах.

**25.** Длина обода первого колеса равна 64 см, а второго — 80 см. Какое наименьшее расстояние должны прокатиться эти колёса, чтобы каждое из них сделало целое количество оборотов? Ответ дайте в метрах.

**26.** Радиус окружности равен 4 см. Найдите длину дуги этой окружности, градусная мера которой составляет 63°.

1) $\frac{7\pi}{5}$ см  2) $\frac{7\pi}{10}$ см  3) $\frac{14\pi}{5}$ см  4) $\frac{9\pi}{10}$ см

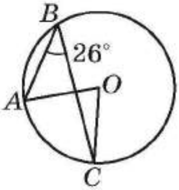



Рис. 17.37

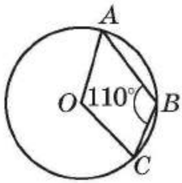



Рис. 17.38

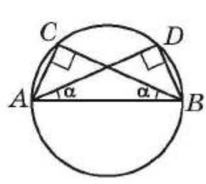



Рис. 17.39

**27.** На рисунке 17.40 изображены четыре окружности, радиус каждой из которых равен $R$. Каждая окружность касается двух других окружностей. Какова длина выделенной линии?

Рис. 17.40

1) $\pi R$
2) $2\pi R$
3) $4\pi R$
4) $6\pi R$

**28.** Найдите градусную меру дуги окружности, длина которой равна $2\pi$ см, если радиус окружности равен 6 см.

### Часть 2

**29.** В угол, величина которого составляет 60°, вписаны две окружности, касающиеся друг друга внешним образом. Найдите радиус меньшей из них, если радиус большей равен 12 см.

**30.** На хорде $AB$ окружности отметили точку $M$. Докажите, что $MA \cdot MB = R^2 - d^2$, где $R$ — радиус окружности, $d$ — расстояние от точки $M$ до центра окружности.

**31.** Окружность, центр которой принадлежит гипотенузе прямоугольного треугольника, касается большего катета и проходит через вершину противолежащего острого угла. Найдите радиус окружности, если катеты равны 5 см и 12 см.

**32.** Две окружности, радиусы которых равны 4 см и 9 см, касаются внешним образом. Найдите расстояние между точками касания данных окружностей с их общей внешней касательной.

**33.** Две окружности с центрами $O_1$ и $O_2$, радиусы которых равны 10 см и 16 см соответственно, касаются внешним образом в точке $C$. Прямая, проходящая через точку $C$, пересекает окружность с центром $O_1$ в точке $A$, а другую окружность — в точке $B$. Найдите хорды $AC$ и $BC$, если $AB = 39$ см.

**34.** На продолжении стороны $AC$ треугольника $ABC$ за точку $C$ отметили точку $D$ так, что $\angle ADB = 30°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника $ABD$, если $\angle ACB = 45°$, а радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, равен $8\sqrt{2}$ см.

**35.** Основание равнобедренного тупоугольного треугольника равно 18 см, а радиус описанной около него окружности — 15 см. Найдите боковую сторону треугольника.

**36.** Биссектриса $AM$ треугольника $ABC$ ($\angle C = 90°$) делит катет $BC$ на отрезки длиной 6 см и 10 см. Найдите радиус окружности, проходящей через точки $A$, $C$ и $M$.

**37.** Стороны треугольника равны 6 см, 25 см и 29 см. Найдите радиус вписанной окружности данного треугольника.

**38.** Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит его гипотенузу на отрезки 8 см и 12 см. Найдите периметр треугольника.

**39.** Катеты прямоугольного треугольника равны 6 см и 8 см. Найдите расстояние от вершины меньшего острого угла треугольника до центра вписанной окружности.

**40.** Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 18 см, а радиус вписанной в него окружности — 8 см. Найдите периметр данного треугольника.

**41.** Одна из сторон треугольника равна 30 см, а другая сторона делится точкой касания вписанной окружности на отрезки длиной 12 см и 14 см, считая от конца неизвестной стороны. Найдите радиус вписанной окружности.

**42.** Окружность, вписанная в треугольник $ABC$, касается стороны $AB$ в точке $D$, $BD = 1$ см, $AD = 5$ см, $\angle ABC = 120°$. Найдите отрезок $CD$.

**43.** Основание равнобедренного треугольника равно 40 см, а высота, проведённая к нему, — 15 см. Найдите расстояние между точками касания окружности, вписанной в треугольник, с его боковыми сторонами.

**44.** Перпендикуляр, опущенный из точки окружности на её диаметр, делит диаметр на два отрезка, один из которых на 27 см больше другого. Найдите длину окружности, если длина перпендикуляра равна 18 см.

# § 18. Многоугольник

## 18.1. Четырёхугольник и его элементы

Рассмотрим фигуру, состоящую из четырёх точек $A$, $B$, $C$, $D$ и четырёх отрезков $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ таких, что никакие два соседних отрезка не лежат на одной прямой и никакие два несоседних отрезка не имеют общих точек (рис. 18.1). Фигура, образованная этими отрезками, ограничивает часть плоскости, выделенной на рисунке 18.2. Эту часть плоскости вместе с отрезками $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ называют **четырёхугольником**. Точки $A$, $B$, $C$ и $D$ называют **вершинами** четырёхугольника, а отрезки $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ — **сторонами** четырёхугольника.

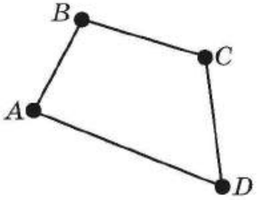



Рис. 18.1

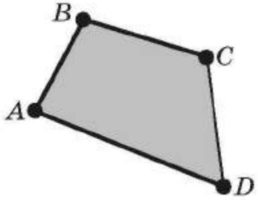



Рис. 18.2

Сумму длин всех сторон четырёхугольника называют **периметром** четырёхугольника.

Отрезок, соединяющий противолежащие вершины четырёхугольника, называют **диагональю**. На рисунке 18.3 отрезки $AC$ и $BD$ — диагонали четырёхугольника $ABCD$.

Углы $ABC$, $BCD$, $CDA$ и $DAB$ (рис. 18.4) называют **углами четырёхугольника** $ABCD$. В этом четырёхугольнике все они меньше развёрнутого угла. Такой четырёхугольник называют **выпуклым**. На рисунке 18.5 угол $B$ четырёхугольника $ABCD$ больше 180°. Такой четырёхугольник называют **невыпуклым**.

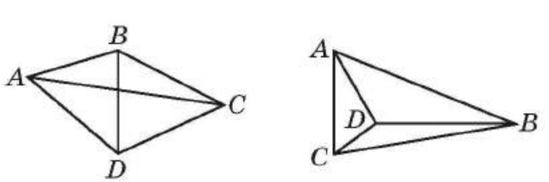



Рис. 18.3

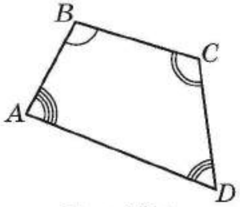



Рис. 18.4

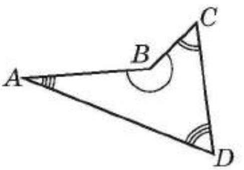



Рис. 18.5

❶ Сумма углов четырёхугольника равна 360°.

## 18.2. Параллелограмм и его свойства

**Параллелограммом** называют четырёхугольник, у которого каждые две противолежащие стороны параллельны.

На рисунке 18.6 изображён параллелограмм $ABCD$: $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$.

**Высотой параллелограмма** называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей сторону параллелограмма, на прямую, содержащую противолежащую сторону.

На рисунке 18.7 каждый из отрезков $AF$, $QE$, $BM$, $CK$, $PN$ является высотой параллелограмма $ABCD$.

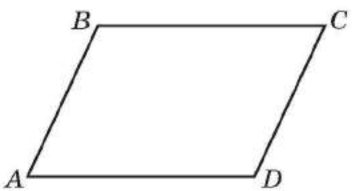



Рис. 18.6

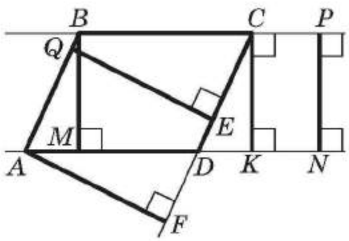



Рис. 18.7

**Свойства параллелограмма**

1. У параллелограмма противолежащие стороны равны.

На рисунке 18.6 изображён параллелограмм $ABCD$, поэтому $AB = CD$, $BC = AD$.

2. У параллелограмма противолежащие углы равны.

На рисунке 18.6 изображён параллелограмм $ABCD$, поэтому $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$.

3. У параллелограмма диагонали точкой пересечения делятся пополам.

На рисунке 18.8 изображён параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке $O$, поэтому $AO = OC$, $BO = OD$.

4. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Имеем: $BD^2 + AC^2 = 2AB^2 + 2BC^2$ (рис. 18.8).

Задача. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит сторону в отношении 2 : 1, считая от вершины острого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 60 см.

Решение. Пусть биссектриса тупого угла $B$ параллелограмма $ABCD$ (рис. 18.9) пересекает сторону $AD$ в точке $M$. По условию $AM : MD = 2 : 1$. Углы $ABM$ и $CBM$ равны по условию.

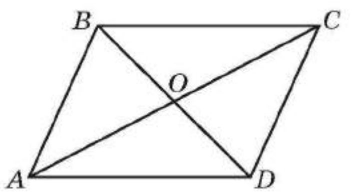



Рис. 18.8

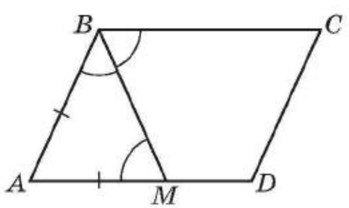



Рис. 18.9

Углы $CBM$ и $AMB$ равны как накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей $BM$.
Тогда $\angle ABM = \angle AMB$. Следовательно, треугольник $BAM$ равнобедренный, отсюда $AB = AM$.
Пусть $MD = x$ см, тогда $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Периметр параллелограмма равен $2(AB + AD)$. Учитывая условие, получаем:

$$2(2x + 3x) = 60;$$
$$x = 6.$$

Следовательно, $AB = 12$ см, $AD = 18$ см.
Ответ: 12 см, 18 см.

## 18.3. Признаки параллелограмма

1. Если в четырёхугольнике каждые две противолежащие стороны равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

На рисунке 18.10 изображён четырёхугольник $ABCD$, у которого $AB = CD$ и $BC = AD$, поэтому четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

2. Если в четырёхугольнике две противолежащие стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

На рисунке 18.10 изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором $BC = AD$ и $BC \parallel AD$, поэтому четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

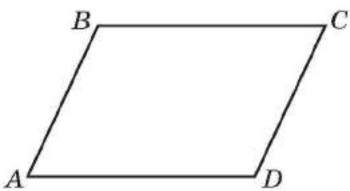



Рис. 18.10

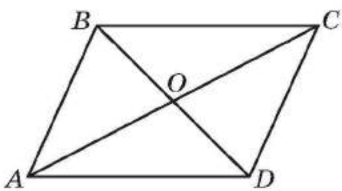



Рис. 18.11

3. Если в четырёхугольнике диагонали точкой пересечения делятся пополам, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

На рисунке 18.11 изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором диагонали $AC$ и $BD$ пересекаются в точке $O$, причём $AO = OC$ и $BO = OD$, поэтому четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

4. Если в четырёхугольнике каждые два противолежащих угла равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

На рисунке 18.10 изображён четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$, поэтому четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

З а д а ч а. Две стороны треугольника равны 23 см и 30 см, а медиана, проведённая к большей из известных сторон, — 10 см. Найдите третью сторону треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть в треугольнике $ABC$ $AC = 23$ см, $BC = 30$ см, отрезок $AM$ — медиана, $AM = 10$ см. На продолжении отрезка $AM$ за точку $M$ отложим отрезок $MD$, равный медиане $AM$ (рис. 18.12). Тогда $AD = 20$ см.

В четырёхугольнике $ABDC$ диагонали $AD$ и $BC$ точкой $M$ пересечения делятся пополам ($BM = MC$ по условию, $AM = MD$ по построению). Следовательно, четырёхугольник $ABDC$ — параллелограмм.

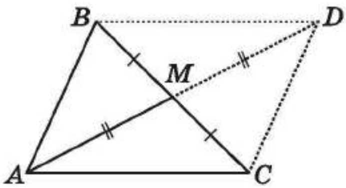



Рис. 18.12

По свойству диагоналей параллелограмма имеем:

$$AD^2 + BC^2 = 2\,(AB^2 + AC^2).$$

Тогда $20^2 + 30^2 = 2\,(AB^2 + 23^2)$;

$$400 + 900 = 2\,(AB^2 + 529);$$
$$AB^2 = 121;$$
$$AB = 11 \text{ см}.$$

Ответ: 11 см.

### 18.4. Прямоугольник, ромб, квадрат

**Прямоугольником** называют параллелограмм, у которого все углы прямые.

На рисунке 18.13 изображён прямоугольник $ABCD$.

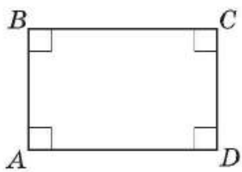


Рис. 18.13

❶ Диагонали прямоугольника равны.

На рисунке 18.14 изображён прямоугольник $ABCD$. Его диагонали $AC$ и $BD$ равны.

❶ Если один из углов параллелограмма прямой, то этот параллелограмм — прямоугольник.

❶ Если диагонали параллелограмма равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

**Ромбом** называют параллелограмм, у которого все стороны равны.

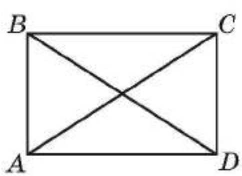


Рис. 18.14

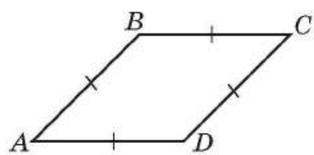


Рис. 18.15

На рисунке 18.15 изображён ромб $ABCD$.

❶ Диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

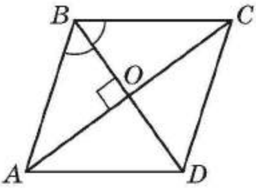


Рис. 18.16

На рисунке 18.16 изображён ромб $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке $O$. Поэтому $BO \perp AC$ и $\angle ABO = \angle CBO$.

❶ Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

❶ Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то этот параллелограмм — ромб.

**Квадратом** называют прямоугольник, у которого все стороны равны.

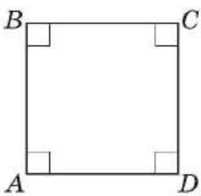


Рис. 18.17

На рисунке 18.17 изображён квадрат $ABCD$.

❶ Квадрат — это ромб, у которого все углы равны.

Квадрат является отдельным видом и прямоугольника и ромба.

❶ Диагонали квадрата равны, перпендикулярны и являются биссектрисами его углов.

## Примеры заданий № 25

### Часть 1

1. Найдите наименьший из углов четырёхугольника, если они пропорциональны числам 8, 9, 7 и 6. Ответ дайте в градусах.

**2.** В угол $A$, изображённый на рисунке 18.18, вписана окружность, которая касается сторон угла в точках $B$ и $C$. Найдите угол $BOC$, если $\angle A = 112°$. Ответ дайте в градусах.

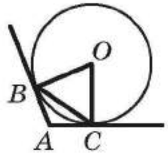


Рис. 18.18

**3.** Чему равна меньшая из сторон параллелограмма, если она на 5 см меньше другой стороны, а периметр параллелограмма равен 70 см? Ответ дайте в сантиметрах.

**4.** Один из углов параллелограмма равен 45°. Его высота, проведённая из вершины тупого угла, равна 3 и делит сторону параллелограмма пополам. Найдите эту сторону параллелограмма.

**5.** Величины двух углов параллелограмма относятся как 8 : 7. Найдите больший угол параллелограмма. Ответ дайте в градусах.

**6.** Найдите градусную меру острого угла параллелограмма $ABCD$, изображённого на рисунке 18.19, если биссектриса угла $BAD$ образует со стороной $BC$ угол, равный 37°.

**7.** На рисунке 18.20 изображён прямоугольник $ABCD$, отличный от квадрата. Укажите верное утверждение.

1) $AC = AD$ 3) $AC \perp BD$
2) $\angle ACB = \angle ACD$ 4) $AO = BO$

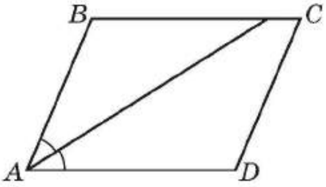


Рис. 18.19

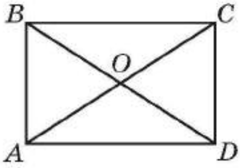


Рис. 18.20

**8.** Каким свойством обладает любой прямоугольник?

1) диагонали равны
2) диагонали перпендикулярны
3) диагонали являются биссектрисами его углов
4) угол между диагоналями равен 30°

**9.** Из четырёх равных прямоугольников составлен прямоугольник $ABCD$ так, как это показано на рисунке 18.21. Чему равен периметр прямоугольника $AMKE$, если периметр прямоугольника $ABCD$ равен 24 см? Ответ дайте в сантиметрах.

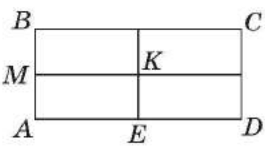



Рис. 18.21

**10.** Сторона прямоугольника равна 12 см и образует с его диагональю угол 30°. Найдите неизвестную сторону прямоугольника.

1) 6 см
2) $6\sqrt{3}$ см
3) $4\sqrt{3}$ см
4) $12\sqrt{3}$ см

**11.** Биссектриса угла $D$ прямоугольника $ABCD$ пересекает сторону $AB$ в точке $M$, $BM = 5$, $AD = 3$. Найдите периметр прямоугольника.

**12.** На рисунке 18.22 изображён прямоугольник $ABCD$, $\angle BOC = 128°$. Какова градусная мера угла $BAO$?

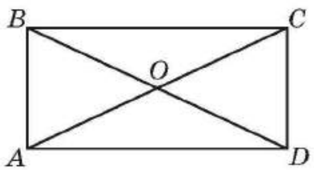



Рис. 18.22

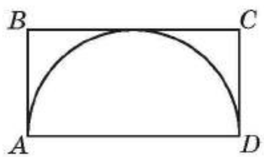



Рис. 18.23

**13.** В прямоугольник $ABCD$, изображённый на рисунке 18.23, вписана полуокружность с диаметром $AD$. Чему равно отношение $BC : AB$?

1) 2 : 1
2) 1 : 1
3) 3 : 1
4) 2 : π

**14.** Какое свойство имеет любой ромб?

1) диагонали равны
2) диагонали перпендикулярны
3) один из углов равен 60°
4) угол между диагоналями равен 60°

**15.** На рисунке 18.24 изображён ромб $ABCD$, отличный от квадрата. Укажите неверное утверждение.

1) $AO = OC$
2) $\angle ACB = \angle ACD$
3) $AC \perp BD$
4) $AO = BO$

**16.** Угол между высотой ромба, проведённой из вершины тупого угла, и его меньшей диагональю равен 20°. Какова градусная мера меньшего из углов ромба?

**17.** В ромбе $ABCD$, изображённом на рисунке 18.25, $\angle B = 100°$. Какова градусная мера угла $ACD$?

**18.** Диагонали ромба равны 6 и 8. Найдите периметр ромба.

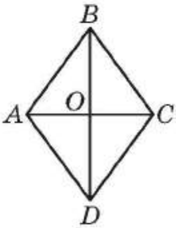


Рис. 18.24

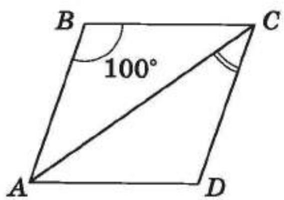


Рис. 18.25

**19.** Укажите верное утверждение.

1) если четырёхугольник одной из диагоналей делится на равные треугольники, то он является параллелограммом

2) если каждые два противолежащих угла четырёхугольника равны, то он является параллелограммом

3) если диагонали четырёхугольника перпендикулярны, то он является ромбом

4) если диагонали четырёхугольника равны и перпендикулярны, то он является квадратом

**20.** На рисунке 18.26 изображён квадрат $ABCD$, $AE = 2EO$. Чему равен угол $DAE$? Ответ дайте в градусах.

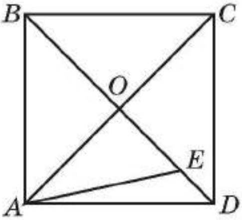


Рис. 18.26

**21.** Диагонали квадрата $ABCD$ пересекаются в точке $O$, $AO = 12$. Найдите отрезок $BD$.

**22.** Найдите диагональ квадрата, сторона которого равна $6\sqrt{2}$.

## Часть 2

**23.** Сторона $BC$ параллелограмма $ABCD$ вдвое меньше стороны $AB$. Точка $M$ — середина отрезка $AB$. Докажите, что луч $CM$ — биссектриса угла $BCD$.

**24.** Биссектрисы углов $B$ и $C$ параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $M$, принадлежащей стороне $AD$. Докажите, что точка $M$ — середина стороны $AD$.

**25.** Одна из сторон параллелограмма равна 10 см, меньшая диагональ — 14 см, а острый угол — 60°. Найдите периметр этого параллелограмма.

**26.** Стороны треугольника равны 6 см и 8 см. Медиана треугольника, проведённая к его третьей стороне, равна $\sqrt{46}$ см. Найдите неизвестную сторону треугольника.

**27.** Медиана $AM$ треугольника $ABC$ равна $m$ и образует со сторонами $AB$ и $AC$ углы $\alpha$ и $\beta$ соответственно. Найдите сторону $AC$.

**28.** Высота $BH$ ромба $ABCD$ делит сторону $CD$ на отрезки $CH = 10$ см и $DH = 16$ см. Найдите высоту ромба.

**29.** Перпендикуляр, опущенный из точки пересечения диагоналей ромба на его сторону, делит её на отрезки длиной 3 см и 12 см. Найдите бóльшую диагональ ромба.

**30.** Перпендикуляр, опущенный из точки пересечения диагоналей ромба на его сторону, делит её на два отрезка, один из которых на 5 см больше другого. Найдите периметр ромба, если длина этого перпендикуляра равна 6 см.

**31.** На стороне $BC$ квадрата $ABCD$ отметили точку $M$ так, что $\angle DAM = 60°$. Найдите отрезок $MD$, если $AB = \sqrt{3}$ см.

## 18.5. Трапеция. Средняя линия трапеции

**Трапецией** называют четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

Каждый из четырёхугольников, изображённых на рисунке 18.27, является трапецией.

Параллельные стороны трапеции называют **основаниями**, а непараллельные — **боковыми сторонами** (рис. 18.28).

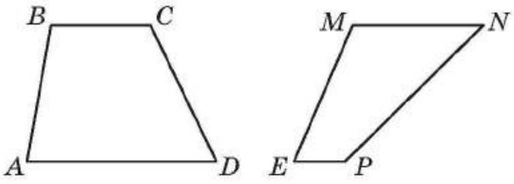



Рис. 18.27


Рис. 18.28

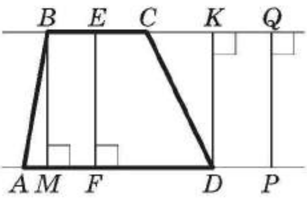



Рис. 18.29

**Высотой трапеции** называют перпендикуляр, опущенный из любой точки прямой, содержащей одно из оснований, на прямую, содержащую другое основание.

На рисунке 18.29 каждый из отрезков $BM$, $EF$, $DK$, $PQ$ является высотой трапеции $ABCD$.

На рисунке 18.30 изображена трапеция $ABCD$, в которой боковые стороны $AB$ и $CD$ равны. Такую трапецию называют **равнобокой** или **равнобедренной.**

Если боковая сторона трапеции является её высотой, то такую трапецию называют **прямоугольной** (рис. 18.31).

**Средней линией трапеции** называют отрезок, соединяющий середины её боковых сторон.

На рисунке 18.32 отрезок $MN$ — средняя линия трапеции $ABCD$.

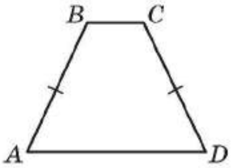



Рис. 18.30

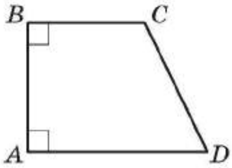



Рис. 18.31

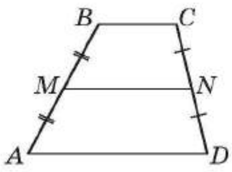



Рис. 18.32

❗ Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Имеем: $MN \parallel AD$ и $MN = \dfrac{BC + AD}{2}$ (рис. 18.32).

❗ В равнобокой трапеции:

1) углы при каждом основании равны;

2) диагонали равны;

3) высота трапеции, проведённая из вершины тупого угла, делит основание трапеции на два отрезка, меньший из которых равен полуразности оснований, а больший — полусумме оснований (средней линии трапеции).

Задача. В равнобокой трапеции основания равны 21 см и 9 см, а боковая сторона — 10 см. Найдите диагональ трапеции.

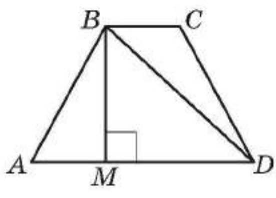



Рис. 18.33

Решение. Проведём высоту $BM$ равнобокой трапеции $ABCD$ (рис. 18.33).

Известно, что $AM = \dfrac{AD - BC}{2}$, $MD = \dfrac{BC + AD}{2}$.

Имеем: $AM = 6$ см, $MD = 15$ см.

Из треугольника $ABM$ получаем:

$BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

Из треугольника $MBD$ получаем:

$BD = \sqrt{BM^2 + MD^2} = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (см).

Ответ: 17 см.

## 18.6. Четырёхугольник, вписанный в окружность

Четырёхугольник называют **вписанным**, если существует окружность, которой принадлежат все его вершины.

На рисунке 18.34 изображён вписанный четырёхугольник $ABCD$. В этом случае также говорят, что окружность **описана** около четырёхугольника.

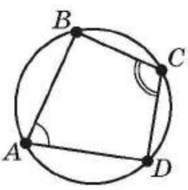


Рис. 18.34

❗ Если четырёхугольник является вписанным, то сумма его противолежащих углов равна 180°.

На рисунке 18.34 углы $A$ и $C$ — противолежащие углы вписанного четырёхугольника $ABCD$. Поэтому $\angle A + \angle C = 180°$.

❗ Если в четырёхугольнике сумма противолежащих углов равна 180°, то он является вписанным.

Например, прямоугольник и равнобокую трапецию можно вписать в окружность.

Задача. Из произвольной точки $M$ катета $AC$ прямоугольного треугольника $ABC$ опущен перпендикуляр $MK$ на гипотенузу $AB$. Докажите, что $\angle MKC = \angle MBC$.

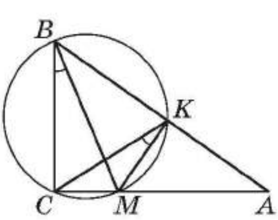


Рис. 18.35

Р е ш е н и е. Имеем: $\angle BCA = 90°$, $\angle MKB = 90°$ (рис. 18.35), тогда $\angle BCA + \angle MKB = 180°$. Следовательно, около четырёхугольника $CBKM$ можно описать окружность. Углы $MKC$ и $MBC$ являются вписанными, опирающимися на одну дугу $CM$. Отсюда $\angle MKC = \angle MBC$.

## 18.7. Четырёхугольник, описанный около окружности

Четырёхугольник называют **описанным**, если существует окружность, касающаяся всех его сторон.

На рисунке 18.36 изображён описанный четырёхугольник $ABCD$. В этом случае также говорят, что окружность **вписана** в четырёхугольник.

❗ Если четырёхугольник является описанным, то суммы его противолежащих сторон равны.

На рисунке 18.36 в четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность. Поэтому $AB + CD = BC + AD$.

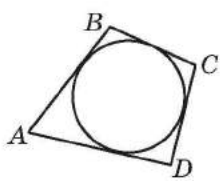


Рис. 18.36

❗ Если в выпуклом четырёхугольнике суммы противолежащих сторон равны, то этот четырёхугольник является описанным.

Например, описанным четырёхугольником является ромб.

## 18.8. Сумма углов выпуклого многоугольника

Сумма углов выпуклого $n$-угольника равна $180°(n - 2)$.

На рисунке 18.37 изображён выпуклый $n$-угольник $A_1A_2...A_{n-1}A_n$. Угол 1 является смежным с углом 2 многоугольника. Угол 1 называют **внешним углом** при вершине $A_1$ выпуклого многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$.

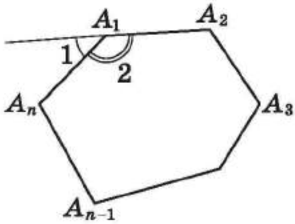


Рис. 18.37

❶ Сумма внешних углов выпуклого $n$-угольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.

Задача. Существует ли многоугольник, каждый угол которого равен 100°?

Решение. Предположим, что такой многоугольник существует и количество его углов равно $n$. Тогда сумма его углов равна $100°n$. Эта сумма также равна $180°(n - 2)$. Получаем уравнение $180(n - 2) = 100n$. Отсюда $2n = 9$. Поскольку $n$ должно быть натуральным числом, то такого многоугольника не существует.

## 18.9. Правильные многоугольники

Многоугольник называют **правильным**, если у него все стороны равны и все углы равны.

Например, равносторонний треугольник — это правильный треугольник, квадрат — это правильный четырёхугольник. На рисунке 18.38 изображены правильные пятиугольник и восьмиугольник.


Рис. 18.38

❶ Любой правильный многоугольник является как вписанным, так и описанным, причём центры его описанной и вписанной окружностей совпадают.

Точку, которая является центром описанной и вписанной окружностей правильного многоугольника, называют **центром правильного многоугольника.**

На рисунке 18.39 изображён фрагмент правильного $n$-угольника с центром $O$ и стороной $AB$. Угол $AOB$ называют **центральным углом правильного многоугольника**, $\angle AOB = \dfrac{360°}{n}$.

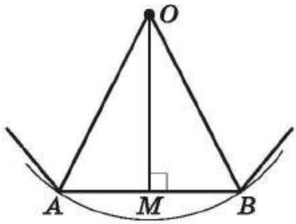



Рис. 18.39

Если длину стороны правильного $n$-угольника обозначить $a_n$, то радиусы $R_n$ и $r_n$ соответственно описанной и вписанной окружностей можно вычислить по формулам

$$R_n = \frac{a_n}{2\sin\dfrac{180°}{n}},$$

$$r_n = \frac{a_n}{2\operatorname{tg}\dfrac{180°}{n}}.$$

Подставив в эти формулы вместо $n$ числа 3, 4, 6, получим формулы для нахождения радиусов описанной и вписанной окружностей для правильных треугольника, четырёхугольника и шестиугольника со стороной $a$:

| **Количество сторон правильного $n$-угольника** | $n=3$ | $n=4$ | $n=6$ |
|---|---|---|---|
| **Радиус описанной окружности** | $R_3=\frac{a\sqrt{3}}{3}$ | $R_4=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | $R_6=a$ |
| **Радиус вписанной окружности** | $r_3=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ | $r_4=\frac{a}{2}$ | $r_6=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ |

Задача. В окружность вписан правильный треугольник со стороной 18 см. Найдите сторону правильного шестиугольника, описанного около этой окружности.

Решение. Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, вычисляется по формуле $R_3 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, где $a$ — длина стороны треугольника (рис. 18.40). Следовательно, $R_3 = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}$ (см).

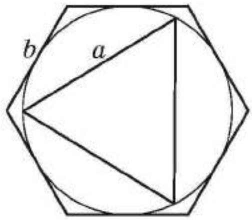


Рис. 18.40

По условию радиус окружности, вписанной в правильный шестиугольник, равен радиусу окружности, описанной около правильного треугольника, т. е. $r_6 = R_3 = 6\sqrt{3}$ см. Так как $r_6 = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, где $b$ — длина стороны правильного шестиугольника, то $b = \frac{2r_6}{\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 12$ (см).

Ответ: 12 см.

## Примеры заданий № 26

### Часть 1

1. Как можно окончить предложение «В любой равнобокой трапеции...», чтобы полученное утверждение было верным?
   1) диагонали перпендикулярны
   2) диагонали точкой пересечения делятся пополам

3) диагонали делят углы трапеции пополам
4) диагонали равны

**2.** Сумма двух углов равнобокой трапеции равна 92°. Найдите больший угол трапеции. Ответ дайте в градусах.

**3.** Прямая $CE$ параллельна боковой стороне $AB$ трапеции $ABCD$, изображённой на рисунке 18.41. Найдите градусную меру угла $B$ трапеции.

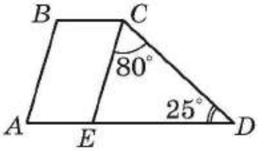


Рис. 18.41

**4.** Чему равен больший из углов равнобокой трапеции, если один из них в 8 раз меньше другого? Ответ дайте в градусах.

**5.** Известно, что $AD$ — большее основание трапеции $ABCD$. Через вершину $B$ проведена прямая, которая параллельна стороне $CD$ и пересекает основание $AD$ в точке $M$. Найдите периметр трапеции $ABCD$, если периметр треугольника $ABM$ равен 28, $BC = 5$.

**6.** Меньшее основание прямоугольной трапеции равно 9 см, бо́льшая диагональ — 17 см, а высота — 8 см. Чему равен периметр трапеции? Ответ дайте в сантиметрах.

**7.** Найдите высоту равнобокой трапеции, основания которой равны 23 см и 17 см, а диагональ — 25 см. Ответ дайте в сантиметрах.

**8.** Основания трапеции относятся как $2:5$, а её средняя линия равна 28 см. Найдите основания трапеции.

1) 8 см, 20 см
2) 16 см, 40 см
3) 32 см, 80 см
4) 12 см, 30 см

**9.** Прямые $MK$ и $NP$, пересекающие стороны треугольника $ABC$, изображённого на рисунке 18.42, параллельны стороне $BC$, $AK = KP = PC$, $MK = 6$ см. Чему равна длина стороны $BC$ треугольника? Ответ дайте в сантиметрах.

**10.** Вершинами какого четырёхугольника являются концы двух неперпендикулярных диаметров окружности?

1) трапеция
2) квадрат
3) ромб
4) прямоугольник

**11.** Какое утверждение неверно?

1) через любые две точки можно провести окружность
2) около любого треугольника можно описать окружность
3) около любого прямоугольника можно описать окружность
4) около любой трапеции можно описать окружность

**12.** На рисунке 18.43 изображена трапеция $ABCD$ с основаниями $AD$ и $BC$, вписанная в окружность. Чему равно отношение стороны $AB$ к стороне $CD$?

1) 1 : 1   2) 2 : 1   3) 4 : 1   4) 3 : 2

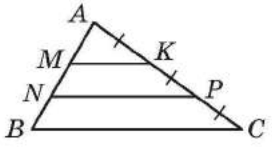



Рис. 18.42

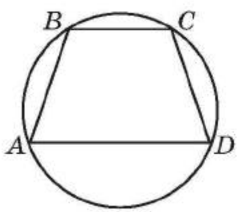



Рис. 18.43

**13.** Боковые стороны трапеции равны 3 см и 7 см. Найдите среднюю линию трапеции, если в неё можно вписать окружность.

1) 5 см 2) 4 см 3) 6 см 4) найти невозможно

**14.** Сумма углов выпуклого многоугольника равна 1080°. Чему равно количество его сторон?

**15.** Найдите градусную меру угла правильного двадцатиугольника.

**16.** Определите количество сторон правильного многоугольника, центральный угол которого равен 10°.

**17.** Сколько сторон имеет правильный многоугольник, угол которого равен 150°?

**18.** Укажите неверное утверждение.

1) если стороны четырёхугольника равны, то его углы равны

2) если около четырёхугольника можно описать окружность, то суммы его противолежащих углов равны

3) любой правильный $n$-угольник имеет ось симметрии

4) в любой правильный $n$-угольник можно вписать окружность

**19.** Чему равен радиус окружности, вписанной в правильный треугольник со стороной 18 см?

1) $3\sqrt{3}$ см 3) $6\sqrt{3}$ см

2) $9\sqrt{3}$ см 4) $18\sqrt{3}$ см

**20.** Около окружности описан правильный шестиугольник со стороной $8\sqrt{3}$ см. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

1) 12 см 3) 6 см

2) $12\sqrt{2}$ см 4) $6\sqrt{2}$ см

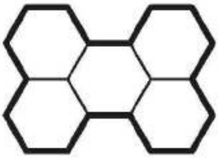


Рис. 18.44

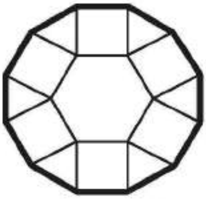


Рис. 18.45

**21.** Пять правильных шестиугольников расположены так, как показано на рисунке 18.44. Длина окружности, описанной около одного из шестиугольников, равна $12\pi$ см. Чему равна длина выделенной линии? Ответ дайте в сантиметрах.

**22.** Фигура, изображённая на рисунке 18.45, составлена из правильных многоугольников. Диаметр окружности, описанной около правильного шестиугольника, изображённого на этом рисунке, равен 4 см. Чему равна длина выделенной линии? Ответ дайте в сантиметрах.

### Часть 2

**23.** Одно из оснований равнобокой трапеции в два раза больше другого, а боковые стороны равны меньшему основанию. Найдите углы данной трапеции.

**24.** В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой тупого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки длиной 7 см и 11 см. Найдите периметр трапеции.

**25.** Бóльшая диагональ прямоугольной трапеции делит её острый угол пополам, а другую диагональ делит в отношении 5 : 8, считая от вершины тупого угла. Найдите периметр трапеции, если её меньшая боковая сторона равна 16 см.

**26.** Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне, а основания равны 7 см и 25 см. Найдите отрезки, на которые диагональ делит высоту трапеции, проведённую из вершины тупого угла.

**27.** Основания трапеции равны 16 см и 10 см. Чему равно расстояние между серединами её диагоналей?

**28.** Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $BC$ и $AD$ пересекаются в точке $O$, $AO = OD$. Докажите, что данная трапеция равнобокая.

**29.** Докажите, что если диагонали равнобокой трапеции перпендикулярны, то её высота равна средней линии трапеции.

**30.** Биссектрисы углов $A$ и $B$ при боковой стороне $AB$ трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Найдите расстояние от точки $O$ до прямой $AB$, если $AB = 20$ см, $BO = 16$ см.

**31.** Углы при одном из оснований трапеции равны $74°$ и $16°$, а отрезки, соединяющие середины противолежащих сторон трапеции, равны 6 см и 2 см. Найдите основания трапеции.

**32.** Центр окружности, описанной около трапеции, лежит на её большем основании. Найдите радиус этой окружности, если диагональ трапеции равна 20 см, а её высота — 12 см.

**33.** В трапеции $ABCD$ известно, что $BC \parallel AD$, $AD = 8$ см, $CD = 4\sqrt{3}$ см. Окружность, проходящая через точки $A$, $B$ и $C$, пересекает отрезок $AD$ в точке $K$, $\angle AKB = 60°$. Найдите отрезок $BK$.

**34.** Найдите радиус окружности, описанной около трапеции, основания которой равны 11 см и 21 см, а боковая сторона — 13 см.

**35.** Чему равен угол $ADC$ четырёхугольника $ABCD$, вписанного в окружность, если $\angle ACD = 32°$, $\angle CBD = 56°$?

**36.** Диагональ $AC$ четырёхугольника $ABCD$ является диаметром его описанной окружности, $M$ — точка пересечения диагоналей четырёхугольника, $\angle BAC = 46°$, $\angle AMB = 57°$. Найдите угол $BAD$.

**37.** Отрезки $AA_1$ и $BB_1$ — высоты остроугольного треугольника $ABC$. Докажите, что $\angle ABB_1 = \angle AA_1B_1$.

**38.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ACB = \angle ADB$. Докажите, что $\angle CAD = \angle CBD$.

**39.** Точка касания окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, делит её меньшее основание на отрезки длиной 6 см и 3 см, считая от вершины прямого угла. Вычислите периметр трапеции.

**40.** Как относится сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, к стороне правильного шестиугольника, описанного около этой окружности?

## § 19. Площадь и объём

### 19.1. Понятие площади многоугольника. Площадь прямоугольника

**Площадью многоугольника** называют положительную величину, которая обладает следующими свойствами:

1) равные многоугольники имеют равные площади;

2) если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников;

3) за единицу измерения площади принимают единичный квадрат, т. е. квадрат со стороной, равной единице измерения длины.

Измерить площадь многоугольника — это значит сравнить его площадь с площадью единичного квадрата. В результате получают **числовое значение площади** данного многоугольника. Это число показывает, во сколько раз площадь данного многоугольника отличается от площади единичного квадрата.

❶ Площадь $S$ прямоугольника вычисляют по формуле

$$S = ab,$$

где $a$ и $b$ — длины его соседних сторон.

Многоугольники, имеющие равные площади, называют **равновеликими**.

Из определения площади (свойство 1) следует, что все равные фигуры равновелики. Однако не все фигуры, имеющие равные площади, являются равными. Например, на рисунке 19.1 изображены два многоугольника, каждый из которых составлен из 7 единичных квадратов. Эти многоугольники равновелики, но не равны.

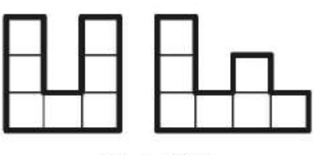


Рис. 19.1

## 19.2. Площадь параллелограмма и трапеции

❶ Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и высоты, соответствующей этой стороне.

На рисунке 19.2 изображён параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна $S$. Отрезки $BM$ и $CN$ — высоты параллелограмма. Поэтому $S = AD \cdot BM = AD \cdot CN$.

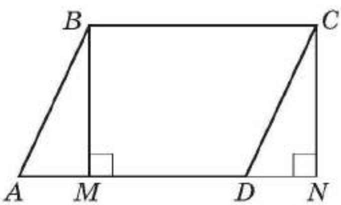



Рис. 19.2

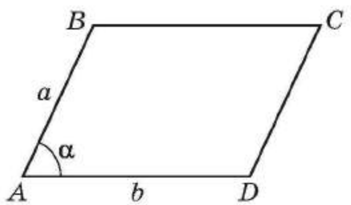



Рис. 19.3

❶ Площадь $S$ параллелограмма можно вычислить по формуле

$$S = ab \sin \alpha,$$

где $a$ и $b$ — длины соседних сторон параллелограмма, $\alpha$ — величина угла между ними (рис. 19.3).

❶ Площадь трапеции равна произведению полусуммы её оснований и высоты.

На рисунке 19.4 изображена трапеция $ABCD$ ($AD \parallel BC$), площадь которой равна $S$. Отрезок $CN$ — её высота. Поэтому $S = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot CN$.

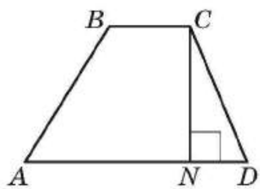



Рис. 19.4

Обозначим длины оснований трапеции и её высоты соответственно буквами $a$, $b$ и $h$. Тогда площадь $S$ трапеции вычисляют по формуле

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h.$$

**❶ Площадь трапеции равна произведению её средней линии и высоты.**

З а д а ч а. Диагональ равнобокой трапеции делит её тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 3, периметр равен 42. Найдите площадь трапеции.

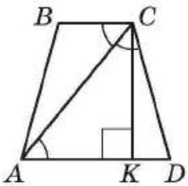



Рис. 19.5

Р е ш е н и е. Пусть $BC$ и $AD$ — основания трапеции $ABCD$, $BC = 3$, $CA$ — биссектриса угла $BCD$ (рис. 19.5). Поскольку $\angle CAD = \angle BCA = \angle DCA$, то треугольник $ACD$ равнобедренный. Поэтому $AD = CD = AB = \dfrac{42-3}{3} = 13.$

Из вершины $C$ опустим перпендикуляр $CK$ на основание $AD$. Тогда

$$DK = \frac{AD - BC}{2} = \frac{13-3}{2} = 5,$$

$$CK = \sqrt{CD^2 - KD^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$$

Следовательно, $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot CK = 96.$

О т в е т: 96.

## 19.3. Формулы для нахождения площади треугольника

1. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны и проведённой к ней высоты.

Если длины сторон треугольника обозначить $a$, $b$ и $c$, длины проведённых к ним высот — соответственно $h_a$, $h_b$, $h_c$, то можно записать $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$, где $S$ — площадь треугольника.

2. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.

3. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра и радиуса вписанной окружности:

$$S = pr,$$

где $S$ — площадь данного треугольника, $p$ — его полупериметр, $r$ — радиус вписанной окружности.

4. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними.

Пусть площадь треугольника $ABC$ равна $S$, $BC = a$, $AC = b$ и $\angle C = \gamma$. Имеем:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

5. **Формула Герона.** Площадь $S$ треугольника можно вычислить по формуле

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $a$, $b$, $c$ — длины сторон треугольника, $p$ — его полупериметр.

6. Площадь $S$ треугольника можно вычислить по формуле

$$S = \frac{abc}{4R},$$

где $a$, $b$, $c$ — длины сторон треугольника, $R$ — радиус его описанной окружности.

З а д а ч а. Стороны треугольника равны 17 см, 65 см и 80 см. Найдите наименьшую высоту треугольника, радиусы его вписанной и описанной окружностей.

Р е ш е н и е. Пусть $a = 17$ см, $b = 65$ см, $c = 80$ см. Полупериметр треугольника $p = \frac{17+65+80}{2} = 81$ (см), его площадь $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81(81-17)(81-65)(81-80)} = \sqrt{81 \cdot 64 \cdot 16} = 9 \cdot 8 \cdot 4 = 288$ (см$^2$).

Наименьшей высотой треугольника является высота $h$, проведённая к его наибольшей стороне $c$.

Так как $S = \frac{1}{2}ch$, то $h = \frac{2S}{c} = \frac{2 \cdot 288}{80} = 7{,}2$ (см).

Радиус вписанной окружности $r = \frac{S}{p} = \frac{288}{81} = \frac{32}{9}$ (см).

Радиус описанной окружности $R = \frac{abc}{4S} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 80}{4 \cdot 288} = \frac{17 \cdot 65 \cdot 5}{4 \cdot 18} = \frac{5525}{72}$ (см).

О т в е т: 7,2 см, $\frac{32}{9}$ см, $\frac{5525}{72}$ см.

## 19.4. Площадь круга. Площадь сектора

❶ Площадь $S$ круга радиуса $R$ вычисляют по формуле

$$S = \pi R^2.$$

Площадь $S$ сектора, содержащего дугу окружности в $n°$, вычисляют по формуле

$$S = \frac{\pi R^2 n}{360}.$$

З а д а ч а. В окружность с центром $O$, радиус которой равен 8 см, вписан правильный восьмиугольник $ABCDEFMK$ (рис. 19.6). Найдите площади сектора и сегмента, содержащих дугу $AB$.

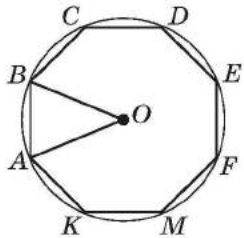


Рис. 19.6

Р е ш е н и е. Угол $AOB$ — центральный угол правильного восьмиугольника, $\angle AOB = \frac{360°}{8} = 45°$.

Тогда искомая площадь сектора $S_{\text{сект}} = \frac{\pi \cdot 8^2 \cdot 45}{360} = 8\pi$ (см$^2$), площадь сегмента $S_{\text{сегм}} = S_{\text{сект}} - S_{AOB} = 8\pi - \frac{1}{2}OA^2 \sin\angle AOB = 8\pi - 16\sqrt{2}$ (см$^2$).

О т в е т: $8\pi$ см$^2$, $(8\pi - 16\sqrt{2})$ см$^2$.

## 19.5. Формулы объёмов прямоугольного параллелепипеда, куба и шара

❗ Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению трёх его измерений:

$V = abc$, где $V$ — объём, $a$, $b$ и $c$ — измерения параллелепипеда.

❗ Объём куба $V$ вычисляют по формуле

$V = a^3$, где $a$ — длина ребра куба.

❶ Объём $V$ шара вычисляют по формуле

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \text{ где } R \text{ — радиус шара.}$$

## Примеры заданий № 27

### Часть 1

1. На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \times 1$ изображена фигура (рис. 19.7). Найдите её площадь.

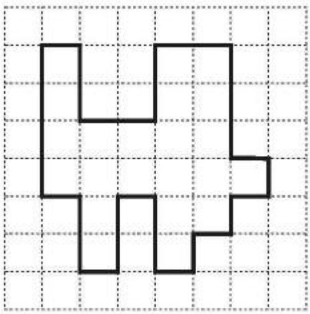


Рис. 19.7

2. Найдите площадь параллелограмма, сторона которого равна 12 см, а высота, проведённая к ней, — 8 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.
3. Вычислите площадь параллелограмма, две стороны которого равны 6 см и $5\sqrt{2}$ см, а угол между ними — 45°.

   1) 30 $см^2$

   2) 15 $см^2$

   3) $30\sqrt{2}$ $см^2$

   4) $15\sqrt{2}$ $см^2$

**4.** На рисунке 19.8 изображён параллелограмм $ABCD$, площадь которого равна $S$, $M$ — некоторая точка стороны $AD$. Найдите площадь треугольника $BMC$.

1) $\frac{S}{4}$

2) $\frac{S}{3}$

3) $\frac{S}{2}$

4) зависит от положения точки $M$

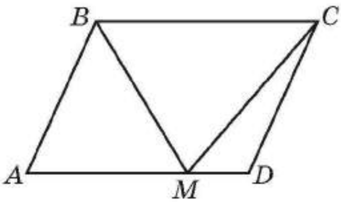



Рис. 19.8

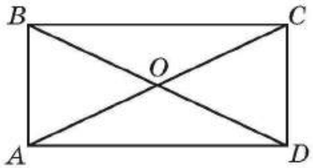



Рис. 19.9

**5.** Площадь прямоугольника $ABCD$, изображённого на рисунке 19.9, равна 12 см$^2$. Чему равна площадь треугольника $AOB$?

1) 2 см$^2$

2) 4 см$^2$

3) 3 см$^2$

4) найти невозможно

**6.** Вычислите площадь ромба $ABCD$, если $AC = 8$ см, $BD = 5$ см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

**7.** На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \times 1$ изображён треугольник (рис. 19.10). Найдите его площадь.

**8.** Вычислите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 20, а высота, проведённая к основанию, — 12.

**9.** Один из катетов прямоугольного треугольника равен 12, а радиус описанной около этого треугольника окружности — 6,5. Вычислите площадь данного треугольника.

**10.** Вычислите (в квадратных сантиметрах) площадь треугольника со сторонами 4 см и $3\sqrt{2}$ см и углом 135° между ними.

**11.** Точка $M$ — середина стороны $AB$ треугольника $ABC$, точка $K$ — середина стороны $AC$. Площадь треугольника $AMK$ равна 12. Чему равна площадь четырёхугольника $BMKC$?

**12.** Чему равна площадь изображённого на рисунке 19.11 четырёхугольника $ABCD$, если площадь одной клетки равна 1 см$^2$? Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

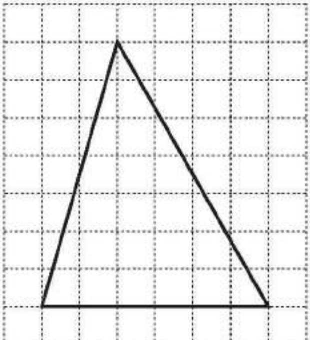


Рис. 19.10

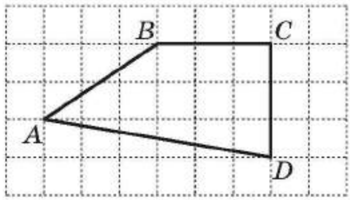



Рис. 19.11

**13.** Найдите площадь закрашенной фигуры, изображённой на рисунке 19.12, если четырёхугольник $ABCD$ — прямоугольник (длины отрезков на рисунке приведены в сантиметрах). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

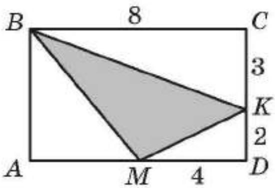



Рис. 19.12

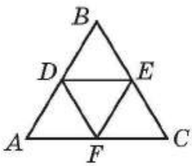



Рис. 19.13

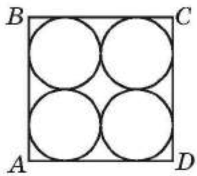



Рис. 19.14

**14.** Из четырёх равных правильных треугольников составили треугольник, изображённый на рисунке 19.13. Вычислите площадь треугольника $DEF$, если периметр треугольника $ABC$ равен 24 см.

1) $4\sqrt{3}$ см$^2$    3) 4 см$^2$

2) $8\sqrt{3}$ см$^2$    4) 8 см$^2$

**15.** В квадрат $ABCD$ вписаны четыре равные окружности радиуса 5 см так, как показано на рисунке 19.14. Сколько квадратных сантиметров составляет площадь квадрата ABCD?

**16.** На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \times 1$ изображена фигура (рис. 19.15). Найдите её площадь.

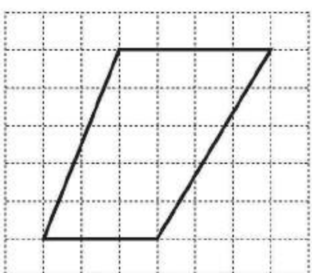


Рис. 19.15

**17.** Чему равна площадь трапеции, средняя линия которой равна 12, а высота — 6?

**18.** Основания прямоугольной трапеции равны 22 см и 38 см, а бо́льшая боковая сторона — 20 см. Найдите площадь трапеции. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

**19.** Из восьми равных равносторонних треугольников составили трапецию, изображённую на рисунке 19.16. Чему равна площадь трапеции, если её периметр равен 16 см?

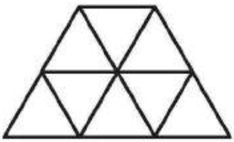


Рис. 19.16

1) 16 см$^2$ 3) 8 см$^2$

2) $16\sqrt{3}$ см$^2$ 4) $8\sqrt{3}$ см$^2$

**20.** Чему равна площадь круга, длина окружности которого $16\pi$ см?

1) $8\pi$ см$^2$ 3) $32\pi$ см$^2$

2) $16\pi$ см$^2$ 4) $64\pi$ см$^2$

**21.** Площади двух кругов относятся как 1 : 16. Как относятся длины окружностей, ограничивающих эти круги?

1) 1 : 2 3) 1 : 16

2) 1 : 4 4) 1 : 256

**22.** Чему равно отношение площади квадрата к площади вписанного в него круга?

1) $2 : \pi$ 3) $4 : \pi$

2) $\pi : 2$ 4) $\pi : 4$

**23.** Радиус круга равен 8 см. Найдите площадь сектора этого круга, если градусная мера его дуги равна 54°.

1) $\frac{12\pi}{5}$ см$^2$ 3) $\frac{48\pi}{5}$ см$^2$

2) $\frac{24\pi}{5}$ см$^2$ 4) $\frac{54\pi}{5}$ см$^2$

## Часть 2

24. Угол между высотами параллелограмма, проведёнными из вершины тупого угла, равен $30°$. Найдите площадь параллелограмма, если его высоты равны 6 см и 16 см.
25. Через середину диагонали $BD$ прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны $BC$ и $AD$ прямоугольника в точках $M$ и $K$ соответственно, $BD = 10$ см, $BM = 6$ см, $MC = 2$ см. Вычислите площадь четырёхугольника $AMCK$.
26. Внутри параллелограмма $ABCD$ взяли произвольную точку $M$. Докажите, что сумма площадей треугольников $AMD$ и $BMC$ равна половине площади параллелограмма $ABCD$.
27. Биссектриса острого угла параллелограмма делит его сторону в отношении $2 : 5$, считая от вершины тупого угла, равного $120°$. Вычислите площадь параллелограмма, если его периметр равен 54 см.
28. Бóльшая диагональ ромба равна $d$, а острый угол — $\alpha$. Найдите площадь ромба.
29. Длины диагоналей ромба относятся как $\sqrt{3} : 1$. Найдите площадь ромба, если его периметр равен 40 см.
30. Высота $BM$ треугольника $ABC$ делит сторону $AC$ на отрезки $AM$ и $MC$, $MC = 4\sqrt{2}$ см, $AB = 4$ см, $\angle A = 45°$. Найдите площадь треугольника $ABC$.
31. Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, равна 15 см, а высота, проведённая к боковой стороне, — 24 см. Найдите площадь этого треугольника.
32. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на отрезки длиной 30 см и 40 см.

**33.** Боковая сторона равнобедренного треугольника точкой касания вписанной окружности делится в отношении $8 : 9$, считая от вершины угла при основании треугольника. Найдите площадь треугольника, если радиус вписанной окружности равен 16 см.

**34.** На медиане $BD$ треугольника $ABC$ отметили точку $M$ так, что $BM : MD = 3 : 1$. Найдите площадь треугольника $ABC$, если площадь треугольника $AMD$ равна 3 см$^2$.

**35.** Основания равнобокой трапеции равны 1 см и 17 см, а диагональ делит её тупой угол пополам. Найдите площадь трапеции.

**36.** Диагональ равнобокой трапеции делит высоту, проведённую из вершины тупого угла, на отрезки длиной 10 см и 8 см. Найдите площадь трапеции, если её меньшее основание равно боковой стороне трапеции.

**37.** Боковые стороны $AB$ и $CD$ трапеции $ABCD$ равны соответственно 13 см и 12 см, $BC = 4$ см. Биссектриса угла $BAD$ проходит через середину стороны $CD$. Найдите площадь трапеции.

**38.** Найдите площадь трапеции, основания которой равны 16 см и 30 см, а боковые стороны — 13 см и 15 см.

**39.** Радиус окружности, вписанной в равнобокую трапецию, равен 6 см, а одно из оснований на 10 см больше другого. Найдите площадь трапеции.

**40.** Диагональ равнобокой трапеции перпендикулярна боковой стороне и образует с основанием трапеции угол 30°. Найдите площадь трапеции, если радиус окружности, описанной около неё, равен $R$.

**41.** Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 10 см, а острый угол — 45°. Найдите площадь этой трапеции, если в неё можно вписать окружность.

**42.** Радиус окружности, вписанной в равнобокую трапецию, равен $R$, а один из углов трапеции — 45°. Найдите площадь трапеции.

**43.** В равнобокую трапецию вписана окружность. Одна из боковых сторон точкой касания делится на отрезки длиной 4 см и 9 см. Найдите площадь трапеции.

**44.** Найдите площадь круга, описанного около треугольника со сторонами 7 см, 8 см и 9 см.

## § 20. Декартовы координаты на плоскости

### 20.1. Координатная плоскость

Проведём на плоскости две перпендикулярные координатные прямые так, чтобы их начала отсчёта совпадали (рис. 20.1). Эти прямые называют **осями координат**, точку $O$ их пересечения — **началом координат**. Горизонтальную ось называют **осью абсцисс** и обозначают буквой $x$, вертикальную ось называют **осью ординат** и обозначают буквой $y$.

Ось абсцисс ещё называют осью $x$, а ось ординат — осью $y$. Вместе они образуют **прямоугольную систему координат**. Плоскость, на которой задана прямоугольная система координат, называют **координатной плоскостью.**

Координатные оси разбивают плоскость на четыре части. Их называют **координатными четвертями** и нумеруют так, как показано на рисунке 20.2.

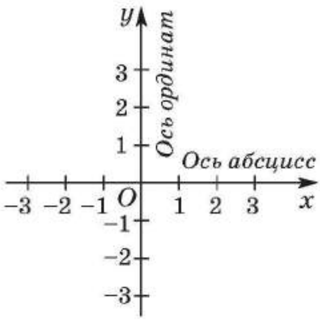



Рис. 20.1

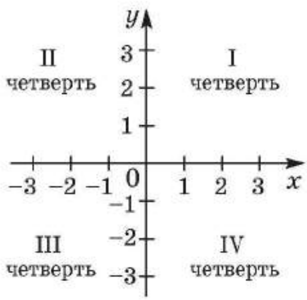



Рис. 20.2

На координатной плоскости отметим точку $M$ (рис. 20.3). Прямая, проходящая через точку $M$ перпендикулярно оси абсцисс, пересекает её в точке $A$, а прямая, перпендикулярная оси ординат, пересекает эту ось в точке $B$. Точка $A$ на оси $x$ имеет координату 3, а точка $B$ на оси $y$ — координату −2.

Число 3 называют **абсциссой** точки $M$, число −2 — **ординатой** точки $M$. Числа 3 и −2 однозначно определяют положение точки $M$ на координатной плоскости. Их называют **координатами** точки $M$ и записывают: $M(3; -2)$.

У начала координат абсцисса и ордината равны нулю. Пишут: $O(0; 0)$.

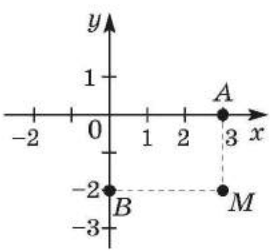



Рис. 20.3

## 20.2. Формула расстояния между двумя точками. Координаты середины отрезка

Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ вычисляют по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пусть $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ — точки координатной плоскости. Координаты $(x_0; y_0)$ точки $M$ — середины отрезка $AB$ — вычисляют по формулам

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

$$y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

З а д а ч а 1. Точка $M(2; -5)$ — середина отрезка $AB$, $A(-1; 3)$. Найдите координаты точки $B$.

Р е ш е н и е. Обозначим $(x_B; y_B)$ — координаты точки $B$, $(x_A; y_A)$ — координаты точки $A$, $(x_M; y_M)$ — координаты точки $M$.

Поскольку $\frac{x_A + x_B}{2} = x_M$, то $\frac{-1 + x_B}{2} = 2$;

$-1 + x_B = 4$; $x_B = 5$.

Аналогично $\frac{y_A + y_B}{2} = y_M$; $\frac{3 + y_B}{2} = -5$; $y_B = -13$.

О т в е т: $B(5; -13)$.

З а д а ч а 2. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A(2; -1)$, $B(1; 3)$, $C(-3; 2)$ и $D(-2; -2)$ является прямоугольником.

Р е ш е н и е. Пусть точка $M$ — середина диагонали $AC$. Тогда

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2 - 3}{2} = -0,5;$$

$$y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1 + 2}{2} = 0,5.$$

Следовательно, $M(-0,5; 0,5)$.
Пусть точка $K$ — середина диагонали $BD$. Тогда

$$x_K = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1-2}{2} = -0,5;$$

$$y_K = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{3-2}{2} = 0,5, K(-0,5; 0,5).$$

Следовательно, точки $M$ и $K$ совпадают. Т. е. диагонали четырёхугольника $ABCD$ имеют общую середину. Отсюда следует, что $ABCD$ — параллелограмм. Далее,

$$AC = \sqrt{(-3-2)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34},$$

$$BD = \sqrt{(-2-1)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{34}.$$

Следовательно, диагонали параллелограмма $ABCD$ равны. Отсюда следует, что этот параллелограмм является прямоугольником.

## 20.3. Уравнение фигуры. Уравнение окружности

**Уравнением фигуры *F***, заданной на плоскости $xy$, называют уравнение с двумя переменными $x$ и $y$, обладающее такими свойствами:

1) если точка принадлежит фигуре $F$, то её координаты являются решением данного уравнения;

2) любое решение $(x; y)$ данного уравнения является координатами точки, принадлежащей фигуре $F$.

Например, уравнение прямой, изображённой на рисунке 20.4, имеет вид $y = 2x - 1$, а уравнение гиперболы, изображённой на рисунке 20.5, имеет вид $y = \frac{1}{x}$.

Если данное уравнение является уравнением фигуры $F$, то эту фигуру можно рассматривать как

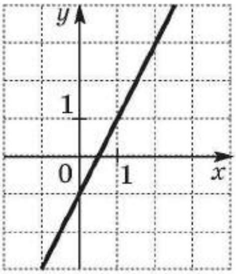



Рис. 20.4

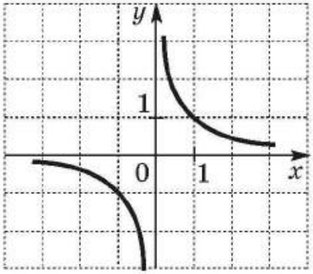



Рис. 20.5

геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

❶ Уравнение окружности радиуса $R$ с центром в точке $A\ (a; b)$ имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2.$$

❶ Любое уравнение вида $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$, где $a$, $b$ и $R$ — некоторые числа, причём $R>0$, является уравнением окружности радиуса $R$ с центром в точке с координатами $(a; b)$.

Если центром окружности является начало координат, то $a=b=0$. Уравнение такой окружности имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2.$$

З а д а ч а 1. Составьте уравнение окружности, диаметром которой является отрезок $AB$, если $A\ (-5; 9)$, $B\ (7; -3)$.

Р е ш е н и е. Поскольку центр окружности является серединой диаметра, то можем найти координаты $(a; b)$ центра $C$ окружности:

$$a=\frac{-5+7}{2}=1,\ b=\frac{9-3}{2}=3.$$

Следовательно, $C(1; 3)$.
Радиус окружности $R = AC$. Тогда $R^2 = (1 + 5)^2 + (3 - 9)^2 = 72$.
Следовательно, искомое уравнение имеет вид:

$$(x-1)^2+(y-3)^2=72.$$

Задача 2. Докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + 6x - 14y + 50 = 0$ задаёт окружность. Найдите координаты центра и радиус этой окружности.
Решение. Представим данное уравнение в виде $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$:

$$x^2+6x+9+y^2-14y+49+50-58=0;$$
$$(x+3)^2+(y-7)^2=8.$$

Следовательно, данное уравнение является уравнением окружности с центром в точке $(-3; 7)$ и радиусом $\sqrt{8}$.

## 20.4. Общее уравнение прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой имеет вид:

$$ax+by=c,$$

где $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа, причём $a$ и $b$ не равны нулю одновременно.

Любое уравнение вида $ax + by = c$, где $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа, причём $a$ и $b$ не равны нулю одновременно, является уравнением прямой.

Замечание. Если $a=b=c=0$, то графиком уравнения $ax+by=c$ является вся плоскость $xy$. Если $a=b=0$ и $c \neq 0$, то уравнение не имеет решений.

Если $b=0$ и $a \neq 0$, то уравнение прямой $ax + by = c$ задаёт вертикальную прямую; если $b \neq 0$, то это уравнение задаёт невертикальную прямую.

Уравнение $ax + by = c$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, называют **общим уравнением прямой**.

Следующая таблица подытоживает вышеприведённый материал.

| **Уравнение** | **Значение $a$, $b$, $c$** | **График** |
|---|---|---|
| $ax + by = c$ | $b \neq 0$, $a$ и $c$ — любые | Невертикальная прямая |
| $ax + by = c$ | $b = 0$, $a \neq 0$, $c$ — любое | Вертикальная прямая |
| $ax + by = c$ | $a = b = c = 0$ | Вся координатная плоскость |
| $ax + by = c$ | $a = b = 0$, $c \neq 0$ | Пустое множество |

Уравнение вида $y = kx + b$ называют **уравнением прямой с угловым коэффициентом**. Этим уравнением можно задать только невертикальную прямую. Число $k$ называют **угловым коэффициентом** этой прямой.

❶ Если прямая $y = kx + b$ образует с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha$, то

$$k = \operatorname{tg} \alpha.$$

❶ Если $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$, то прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны.

❶ Если прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, то $k_1 = k_2$.

Задача 1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки: 1) $A(-3; 5)$ и $B(-3; -6)$; 2) $C(6; 1)$ и $D(-18; -7)$.

Решение. 1) Так как данные точки имеют равные абсциссы, то прямая $AB$ является вертикальной. Её уравнение имеет вид $x = -3$.

Ответ: $x = -3$.

2) Так как данные точки имеют разные абсциссы, то прямая $CD$ не является вертикальной. Тогда можно воспользоваться уравнением прямой в виде $y = kx + p$.
Подставив координаты точек $C$ и $D$ в уравнение $y = kx + p$, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, находим, что $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$.

Ответ: $y = \frac{1}{3}x - 1$.

Задача 2. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A\ (-4;\ 3)$ и параллельной прямой $y = 0{,}5x - 4$.
Решение. Пусть уравнение искомой прямой $y = kx + b$. Поскольку эта прямая и прямая $y = 0{,}5x - 4$ параллельны, то их угловые коэффициенты равны, т. е. $k = 0{,}5$.
Следовательно, искомое уравнение имеет вид: $y = 0{,}5x + b$. Учитывая, что данная прямая проходит через точку $A\ (-4;\ 3)$, получаем: $0{,}5 \cdot (-4) + b = 3$. Отсюда $b = 5$. Искомое уравнение имеет вид: $y = 0{,}5x + 5$.
Ответ: $y = 0{,}5x + 5$.

## 20.5. Графическая интерпретация неравенств с двумя переменными

Неравенства $2x - y > 1$; $y \geqslant x^2$; $x^2 + y^2 < 4$ являются примерами **неравенств с двумя переменными**.

Пару значений переменных, обращающую неравенство с двумя переменными в правильное числовое неравенство, называют **решением неравенства с двумя переменными.**

Так, для неравенства $2x - y > 1$ каждая из пар чисел $(3; -1)$, $(0; -2)$, $(1; 0)$ является его решением, а, например, пара $(0; 0)$ не является его решением.

**Графиком неравенства с двумя переменными** называют геометрическую фигуру, состоящую из всех тех и только тех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями данного неравенства.

**Линейным неравенством с двумя переменными** называют неравенство вида $ax + by > c$ или $ax + by < c$, где $x$ и $y$ — переменные, $a$, $b$ и $c$ — некоторые числа.

❗ Если числа $a$ и $b$ не равны нулю одновременно, т. е. $a^2 + b^2 \neq 0$, то графиком линейного неравенства является одна из открытых полуплоскостей, на которые прямая $ax + by = c$ разбивает координатную плоскость $xy$.

❗ Если $a^2 + b^2 = 0$, то при $c = 0$ графиком линейного неравенства является вся координатная плоскость, а при $c \neq 0$ — пустое множество.

❗ Неравенства вида $ax + by \geqslant c$ и $ax + by \leqslant c$ также считают линейными. Графиком каждого из неравенств $ax + by \geqslant c$ и $ax + by \leqslant c$, где $a^2 + b^2 \neq 0$, является полуплоскость.

## Примеры заданий № 28

### Часть 1

1. Найдите расстояние от точки $A$ $(-4; 3)$ до начала координат.

**2.** Точка $C$ — середина отрезка $AB$, $A(-4; 3)$, $C(2; 1)$. Найдите координаты точки $B$.

1) $B(-8; 1)$ 3) $B(-1; 2)$
2) $B(8; -1)$ 4) $B(1; -2)$

**3.** Окружность с центром в точке $A(3; -6)$ проходит через точку $M(1; -1)$. Чему равен радиус этой окружности?

1) $\sqrt{29}$ 3) $\sqrt{65}$
2) 29 4) определить невозможно

**4.** Дано уравнение окружности $(x-3)^2+(y+6)^2=9$. Укажите координаты центра окружности.

1) $(-3; 6)$ 2) $(3; -6)$ 3) $(-3; -6)$ 4) $(3; 6)$

**5.** Дано уравнение окружности $(x+4)^2+(y-15)^2=$ $=20$. Чему равен радиус окружности?

1) $\sqrt{20}$ 2) $\sqrt{10}$ 3) 20 4) 10

**6.** Укажите уравнение окружности, изображённой на рисунке 20.6.

1) $(x+3)^2+(y-3)^2=3$
2) $(x-3)^2+(y+3)^2=3$
3) $(x+3)^2+(y-3)^2=9$
4) $(x-3)^2+(y+3)^2=9$

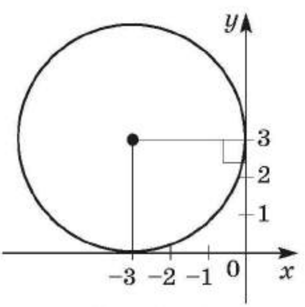



Рис. 20.6

7. Окружность с центром в точке $C\,(-3;\,5)$ касается оси ординат. Чему равен радиус окружности?
8. Окружность задана уравнением $(x + 4)^2 + (y - 1)^2 = 12$. Как расположена точка $A\,(-2;\,3)$ относительно этой окружности?
   1) принадлежит окружности
   2) расположена вне окружности
   3) расположена внутри окружности
   4) установить невозможно
9. Прямая образует с положительным направлением оси абсцисс угол 60°. Чему равен угловой коэффициент прямой?

   1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3) 1

   2) $\sqrt{3}$ 4) определить невозможно

**Часть 2**

10. Найдите координаты точки, которая принадлежит оси ординат и равноудалена от точек $C\,(3;\,2)$ и $D\,(1;\,-6)$.
11. Четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, $B\,(4;\,1)$, $C\,(-1;\,1)$, $D\,(-2;\,-2)$. Найдите координаты вершины $A$.
12. Вершинами треугольника являются точки $A\,(-3;\,1)$, $B\,(2;\,-2)$ и $C\,(-4;\,6)$. Найдите медиану $AM$ треугольника $ABC$.
13. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\,(2;\,-2)$, $B\,(1;\,2)$, $C\,(-3;\,1)$ и $D\,(-2;\,-3)$ является прямоугольником.
14. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ с вершинами в точках $A\,(-1;\,5)$, $B\,(4;\,6)$, $C\,(3;\,1)$, $D\,(-2;\,0)$ является ромбом.
15. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A\,(-1;\,4)$ и $B\,(-3;\,-2)$.

**16.** Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $A\,(2; -7)$ и образует с положительным направлением оси абсцисс угол $45°$.

**17.** Составьте уравнение прямой, изображённой на рисунке 20.7.

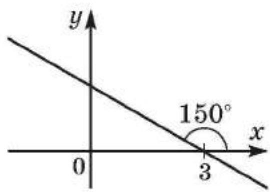


Рис. 20.7

**18.** Отрезок $AM$ — медиана треугольника с вершинами в точках $A\,(-4; -2)$, $B\,(5; 3)$ и $C\,(-3; -7)$. Составьте уравнение прямой $AM$.

**19.** Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку $P\,(2; -5)$ и параллельна прямой $y = -0{,}5x + 9$.

**20.** Постройте график неравенства $3x + 2y < 6$.

**21.** Постройте график неравенства $2x - y \geqslant 0$.

**22.** Постройте график неравенства $y \leqslant 1 - x^2$.

**23.** Постройте график неравенства
$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 < 0.$$

# § 21. Векторы на плоскости

## 21.1. Понятие вектора. Модуль вектора. Коллинеарные векторы. Равные векторы

Величины, которые определяются не только числовым значением, но и направлением, называют **векторными величинами**, или просто **векторами**.

Примеры векторных величин: сила, перемещение, скорость, ускорение, вес.

Рассмотрим отрезок $AB$. Если мы договоримся точку $A$ считать **началом** отрезка, а точку $B$ — его **концом**, то такой отрезок будет характеризоваться не только длиной, но и направлением от точки $A$ к точке $B$.

Если указано, какая точка является началом отрезка, а какая точка — его концом, то такой отрезок называют **направленным отрезком**, или **вектором**.

Вектор с началом в точке $A$ и концом в точке $B$ обозначают так: $\overrightarrow{AB}$ (читают: «вектор $AB$»).

На рисунках вектор изображают отрезком со стрелкой, указывающей его конец. На рисунке 21.1 изображены векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{MN}$.

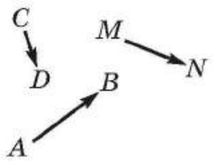


Рис. 21.1

Для обозначения векторов также используют строчные буквы латинского алфавита со стрелкой сверху. На рисунке 21.2 изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

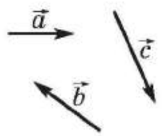


Рис. 21.2

Вектор, у которого начало и конец — одна и та же точка, называют **нулевым вектором**, или **нуль-вектором**, и обозначают $\vec{0}$. Если начало и конец нулевого вектора — это точка $A$, то его можно обозначить и так: $\overrightarrow{AA}$.

**Модулем** вектора $\overrightarrow{AB}$ называют длину отрезка $AB$. Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$ обозначают так: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, а модуль вектора $\vec{a}$ — так: $|\vec{a}|$.

Модуль нулевого вектора считают равным нулю. Пишут: $\left|\vec{0}\right| = 0$.

Ненулевые векторы называют **коллинеарными**, если они лежат на параллельных прямых или на одной прямой.

Нулевой вектор считают коллинеарным любому вектору.

На рисунке 21.3 изображены коллинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\overrightarrow{MN}$.

Тот факт, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, обозначают так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

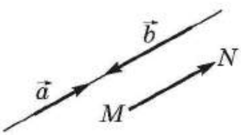


Рис. 21.3

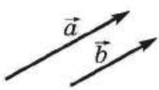


Рис. 21.4

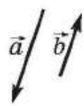


Рис. 21.5

Рис. 21.6

На рисунке 21.4 ненулевые коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены. Такие векторы называют **сонаправленными** и обозначают $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

На рисунке 21.5 ненулевые коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ **противоположно направлены**. Этот факт обозначают так: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Нулевой вектор не считают сонаправленным (противоположно направленным) ни с каким другим вектором.

Два ненулевых вектора называют **равными**, если их модули равны и они сонаправлены. Любые два нулевых вектора равны.

На рисунке 21.6 изображены равные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это обозначают так: $\vec{a} = \vec{b}$.

Равенство ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ означает, что $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

З а д а ч а. Дан четырёхугольник $ABCD$. Известно, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ и $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$. Определите вид четырёхугольника $ABCD$.

Р е ш е н и е. Из условия $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ следует, что $AB \parallel DC$ и $AB = DC$. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

Равенство $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ означает, что диагонали четырёхугольника $ABCD$ равны. А параллелограмм с равными диагоналями является прямоугольником.

## 21.2. Координаты вектора

Рассмотрим на координатной плоскости вектор $\vec{a}$. От начала координат отложим равный ему вектор $\overrightarrow{OA}$ (рис. 21.7). **Координатами вектора** $\vec{a}$ будем называть координаты точки $A$. Запись $\vec{a}(x; y)$ означает, что вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(x; y)$.

Числа $x$ и $y$ называют соответственно **первой** и **второй координатами вектора** $\vec{a}$.

Равные векторы имеют равные соответствующие координаты. Например, каждый из равных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 21.8) имеет координаты $(2; 1)$.

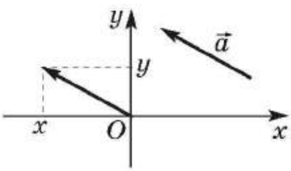



Рис. 21.7

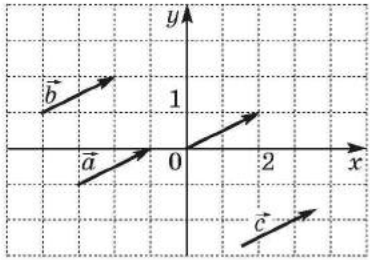



Рис. 21.8

Если соответствующие координаты векторов равны, то равны и сами векторы.

Если точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ соответственно являются началом и концом вектора $\vec{a}$, то числа $x_2 - x_1$ и $y_2 - y_1$ равны соответственно первой и второй координатам вектора $\vec{a}$.

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Задача. Даны координаты трёх вершин параллелограмма $ABCD$: $A(3; -2)$, $B(-4; 1)$, $C(-2; -3)$. Найдите координаты вершины $D$.

Решение. Так как четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Следовательно, координаты этих векторов равны.

Пусть $(x; y)$ — координаты точки $D$. Имеем:

$\overrightarrow{AB}(-4-3; 1-(-2)) = \overrightarrow{AB}(-7; 3)$; $\overrightarrow{DC}(-2-x; -3-y)$.

Отсюда

$$\begin{cases} -7 = -2 - x, \\ 3 = -3 - y; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5, \\ y = -6. \end{cases}$$

Ответ: $D(5; -6)$.

## 21.3. Сложение и вычитание векторов

Отложим от произвольной точки $A$ вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. Далее от точки $B$ отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называют **суммой векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 21.9) и записывают $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$.

Описанный алгоритм сложения двух векторов называют **правилом треугольника.**

Для любых трёх точек $A$, $B$ и $C$ выполняется равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, которое выражает **правило треугольника для сложения векторов.**

Отложим от произвольной точки $A$ вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, и вектор $\overrightarrow{AD}$, равный вектору $\vec{b}$. Построим параллелограмм $ABCD$ (рис. 21.10). Тогда искомая сумма $\vec{a} + \vec{b}$ равна вектору $\overrightarrow{AC}$.

Описанный алгоритм сложения двух векторов называют **правилом параллелограмма.**

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$, то координаты вектора $\vec{a} + \vec{b}$ равны $(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

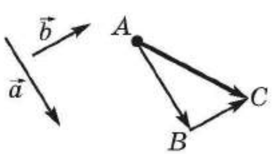



Рис. 21.9

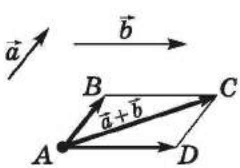



Рис. 21.10

❶ Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ выполняются равенства:

1) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;

2) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительное свойство);

3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательное свойство).

**Разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Пишут: $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

От произвольной точки $O$ отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 21.11). Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ равен разности $\vec{a} - \vec{b}$.

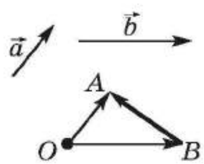


Рис. 21.11

Для любых трёх точек $O$, $A$ и $B$ выполняется равенство $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$, которое выражает **правило нахождения разности двух векторов, отложенных от одной точки.**

Если координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ соответственно равны $(a_1; a_2)$ и $(b_1; b_2)$, то координаты вектора $\vec{a} - \vec{b}$ равны $(a_1 - b_1; a_2 - b_2)$.

Два ненулевых вектора называют **противоположными**, если их модули равны и векторы противоположно направлены.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположны, то говорят, что вектор $\vec{a}$ — **противоположный** вектору $\vec{b}$, а вектор $\vec{b}$ — противоположный вектору $\vec{a}$.

Вектором, противоположным нулевому вектору, считают нулевой вектор.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают так: $-\vec{a}$.

Выполняется равенство $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Противоположным вектору $\overrightarrow{AB}$ является вектор $\overrightarrow{BA}$.

Для любых точек $A$ и $B$ выполняется равенство $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то вектор $-\vec{a}$ имеет координаты $(-a_1; -a_2)$.

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ выполняется равенство $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$.

Чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, можно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $-\vec{b}$ (рис. 21.12).

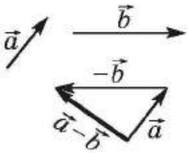


Рис. 21.12

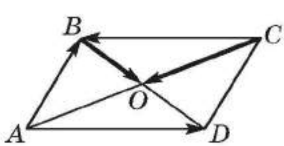


Рис. 21.13

З а д а ч а. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке $O$ (рис. 21.13). Выразите векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{CB}$ через векторы $\overrightarrow{CO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Р е ш е н и е. Так как точка $O$ — середина отрезков $BD$ и $AC$, то $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO} = \vec{b}$.

Имеем:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BO} = -\vec{a} - \vec{b}$;

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$;

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} = \vec{a} - \vec{b}$.

## 21.4. Умножение вектора на число

**Произведением** ненулевого вектора $\vec{a}$ и числа $k$, отличного от нуля, называют такой вектор $\vec{b}$, что:

1) $|\vec{b}| = |k|\ |\vec{a}|$;

2) если $k > 0$, то $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$; если $k < 0$, то $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$.

Пишут: $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $k = 0$, то считают, что $k\vec{a} = \vec{0}$.

На рисунке 21.14 изображены векторы $\vec{a}$, $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\,\vec{a}$.

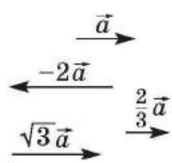



Рис. 21.14

Имеем:

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a},$$
$$-1 \cdot \vec{a} = -\vec{a}.$$

Если $\vec{b} = k\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число $k$, что $\vec{b} = k\vec{a}$.

Если вектор $\vec{a}$ имеет координаты $(a_1; a_2)$, то вектор $k\vec{a}$ имеет координаты $(ka_1; ka_2)$.

Векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(ka_1; ka_2)$ коллинеарны.

Если векторы $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ коллинеарны, причём $\vec{a} \neq \vec{0}$, то существует такое число $k$, что $b_1 = ka_1$ и $b_2 = ka_2$.

Для любых чисел $k$, $m$ и любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ справедливы равенства:

| | |
|---|---|
| 1) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$ | (сочетательное свойство); |
| 2) $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$ | (первое распределительное свойство); |
| 3) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ | (второе распределительное свойство). |

### 21.5. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы. Тогда для любого вектора $\vec{c}$ существует единственная пара чисел $(x; y)$ такая, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны и для вектора $\vec{c}$ найдена пара действительных чисел $(x; y)$ такая, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то говорят, что вектор $\vec{c}$ **разложен по векторам** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Упорядоченную пару $(\vec{a};\ \vec{b})$ неколлинеарных векторов называют **базисом.** Если для вектора $\vec{c}$ выполняется равенство $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то говорят, что вектор $\vec{c}$ **разложен по базису** $(\vec{a};\ \vec{b})$. Упорядоченную пару $(x; y)$ называют **координатами вектора** $\vec{c}$ **в базисе** $(\vec{a};\ \vec{b})$.

З а д а ч а. Пусть точка $M$ — середина отрезка $AB$ и $X$ — произвольная точка (рис. 21.15). Докажите, что

$\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

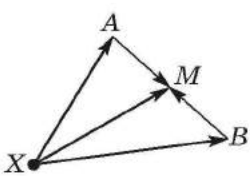



Рис. 21.15

Р е ш е н и е. Применяя правило треугольника, запишем:

$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{AM};$$
$$\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{BM}.$$

Сложим эти два равенства:

$$2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$ противоположны, то $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$. Имеем: $2\overrightarrow{XM} = \overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB}$. Отсюда $\overrightarrow{XM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XB})$.

## 21.6. Скалярное произведение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два ненулевых и несонаправленных вектора (рис. 21.16). От произвольной точки $O$ отложим векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, соответственно равные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Величину угла $AOB$ будем называть **углом между векторами** $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Например, на рисунке 21.16 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$, а на рисунке 21.17 $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = 180°$.

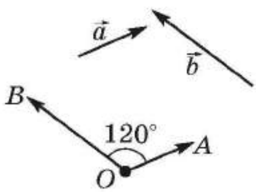



Рис. 21.16

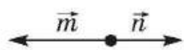



Рис. 21.17

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, то считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ или $\vec{b}$ нулевой, то также считают, что $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0°$.

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеет место неравенство:

$$0° \leqslant \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leqslant 180°.$$

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **перпендикулярными**, если угол между ними равен 90°. Пишут: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

**Скалярным произведением двух векторов** называют произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называют **скалярным квадратом** вектора $\vec{a}$ и обозначают $\vec{a}^{\,2}$.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля: $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$. Отсюда $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$.

❶ Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ можно вычислить по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2.$$

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ можно вычислить по формуле

$$\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

Задача 1. Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$. Найдите $|2\vec{a} - 3\vec{b}|$.

Решение. Поскольку скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то $|2\vec{a} - 3\vec{b}|^2 =$

$= (2\vec{a} - 3\vec{b})^2$. Отсюда $\left|2\vec{a} - 3\vec{b}\right| = \sqrt{(2\vec{a} - 3\vec{b})^2} =$

$= \sqrt{4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2} =$

$= \sqrt{4\left|\vec{a}\right|^2 - 12\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) + 9\left|\vec{b}\right|^2} =$

$= \sqrt{36 + 18 + 9} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$.

Задача 2. В треугольнике $ABC$ известно, что $AB = 4$ см, $BC = 6\sqrt{3}$ см, $\angle ABC = 30°$. Найдите медиану $BM$.

Решение. Имеем:

$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$ (рис. 21.18).

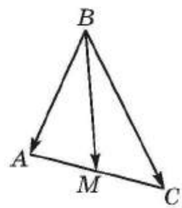



Рис. 21.18

Отсюда $\overrightarrow{BM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 =$

$= \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2) =$

$= \frac{1}{4}(\left|\overrightarrow{BA}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{BA}\right|\left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos\angle ABC + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2) =$

$= \frac{1}{4}\left(16 + 48\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 108\right) = 49$. Следовательно,

$BM^2 = 49$; $BM = 7$ см.

## Примеры заданий № 29

### Часть 1

1. Даны точки $M\ (4; -2)$ и $K\ (2; 1)$. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{MK}$.

1) $\overrightarrow{MK}\,(2; -3)$
3) $\overrightarrow{MK}\,(2; 3)$
2) $\overrightarrow{MK}\,(-2; 3)$
4) $\overrightarrow{MK}\,(-2; -3)$

**2.** Укажите координаты начала вектора $\overrightarrow{EF}$, если $\overrightarrow{EF}\,(0; -3)$, $F\,(3; 3)$.

1) $E\,(-3; 0)$
2) $E\,(3; 0)$
3) $E\,(3; 6)$
4) $E\,(-3; -6)$

**3.** Даны точки $A\,(-4; 1)$, $B\,(-2; 4)$, $C\,(2; 5)$, $D\,(0; 2)$. Укажите верное равенство.

1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
2) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}$
3) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$
4) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$

**4.** При каком значении $n$ векторы $\vec{a}\,(4; 2n - 1)$ и $\vec{b}\,(4; 9 - 3n)$ равны?

**5.** Вычислите модуль вектора $\vec{a}\,(-2; 3)$.

1) $\sqrt{5}$  2) $\sqrt{13}$  3) 5  4) 1

**6.** На рисунке 21.19 изображён параллелограмм $ABCD$. Укажите верное равенство.

1) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$
2) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$
3) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CO}$
4) $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$

**7.** На рисунке 21.20 изображён квадрат $ABCD$. Какой из векторов равен разности векторов $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BC}$?

1) $\overrightarrow{DO}$  2) $\overrightarrow{BO}$  3) $\overrightarrow{AD}$  4) $\overrightarrow{DC}$

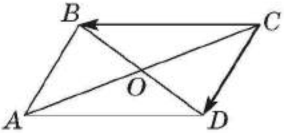


Рис. 21.19

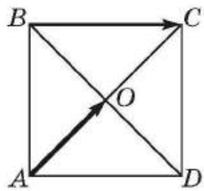
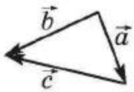


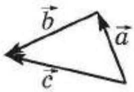
Рис. 21.20

**8.** Укажите рисунок, на котором $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$.

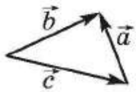
1)



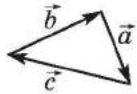

2)




3)




4)




**9.** Найдите координаты разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображённых на рисунке 21.21.

**1)** (2; 4) **2)** (−2; −4) **3)** (−2; 4) **4)** (2; −4)

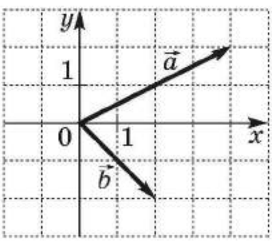



Рис. 21.21

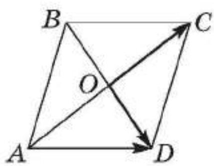



Рис. 21.22

**10.** На рисунке 21.22 изображён параллелограмм $ABCD$. Выразите вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{OD} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{b}$.

1) $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b}$

2) $\overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b}$

3) $\overrightarrow{AD} = \vec{b} - \vec{a}$

4) $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

**11.** Найдите координаты разности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $B$ (5; 7), $C$ (−1; 4), $A$ — некоторая точка плоскости.

1) (−6; −3)

2) (6; 3)

3) (4; 11)

4) найти невозможно

**12.** Найдите модуль вектора $\vec{m} = -3\vec{n}$, если $\vec{n}(\sqrt{3};1)$.

**13.** Укажите вектор, коллинеарный вектору $\vec{a}(-27; 21)$.

1) $\vec{b}(54; 42)$ 3) $\vec{d}(9; -7)$

2) $\vec{c}(-27; -21)$ 4) $\vec{m}(-9; -7)$

**14.** При каком значении $y$ векторы $\vec{a}(2; 5)$ и $\vec{b}(-6; y)$ коллинеарны?

**15.** На рисунке 21.23 изображён ромб $ABCD$, в котором $AB = 4$ см, $\angle BAD = 60°$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

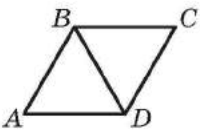


Рис. 21.23

**16.** Сторона правильного шестиугольника $ABCDEF$ равна 1. Вычислите скалярное произведение $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$.

**17.** Даны точки $C(-3; 1)$, $D(1; 4)$, $E(2; 2)$. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{CE}$.

**18.** Определите вид угла между векторами $\vec{m}(-8; 3)$ и $\vec{n}(2; 5)$.

1) острый 3) прямой

2) тупой 4) определить невозможно

**19.** При каком значении $a$ векторы $\vec{m}(4; a)$ и $\vec{n}(-5; 2)$ перпендикулярны?

### Часть 2

**20.** Известно, что $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. Найдите $|\vec{c}|$, если $\vec{a}(-1; 1)$, $\vec{b}(-2; 3)$.

**21.** Найдите угол между векторами $\vec{a}(-2;\ 2\sqrt{3})$ и $\vec{b}(3;\ -\sqrt{3})$.

**22.** Вычислите скалярное произведение $(\vec{a}+2\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120°$.

**23.** На стороне $AD$ параллелограмма $ABCD$ отметили точку $K$ так, что $AK : KD = 1 : 2$. Выразите вектор $\overrightarrow{BK}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$.

**24.** На сторонах $BC$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки $E$ и $F$ так, что $BE : EC = 3 : 4$, $CF : FD = 1 : 3$. Выразите вектор $\overrightarrow{EF}$ через векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

**25.** На стороне $AD$ и диагонали $AC$ параллелограмма $ABCD$ отметили соответственно точки $N$ и $M$ так, что $AN = \frac{1}{5}AD$, $AM = \frac{1}{6}AC$. Докажите, что точки $N$, $M$ и $B$ лежат на одной прямой.

## § 22. Геометрические преобразования

### 22.1. Движение фигуры. Параллельный перенос

Преобразование фигуры $F$, сохраняющее расстояние между её точками, называют **движением фигуры** $F$.

При движении фигуры $F$ образами любых её трёх точек, лежащих на одной прямой, являются три точки, лежащие на одной прямой, а образами трёх точек, не лежащих на одной прямой, являются три точки, не лежащие на одной прямой.

При движении отрезка, луча, прямой, угла образами являются соответственно отрезок, луч, прямая, угол.

Если при движении угла $ABC$ его образом является угол $A_1B_1C_1$, то $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

Если при движении треугольника $ABC$ его образом является треугольник $A_1B_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Две фигуры называют **равными**, если существует движение, при котором одна из данных фигур является образом другой.

Запись $F = F_1$ означает, что фигуры $F$ и $F_1$ равны.

Пусть даны некоторая фигура $F$ и вектор $\vec{a}$. Каждой точке $X$ фигуры $F$ поставим в соответствие точку $X_1$ такую, что $\overrightarrow{XX_1} = \vec{a}$. В результате такого преобразования фигуры $F$ получим фигуру $F_1$ (рис. 22.1). Описанное преобразование фигуры $F$ называют **параллельным переносом на вектор $\vec{a}$** и обозначают так: $T_{\vec{a}}$. Пишут: $T_{\vec{a}}(F) = F_1$.

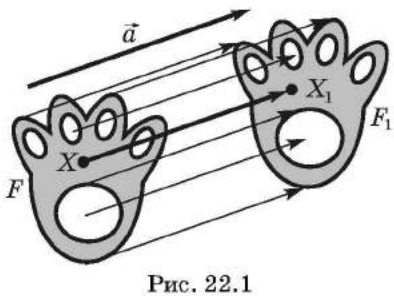


Рис. 22.1

**Свойства параллельного переноса**

1. Параллельный перенос является движением.
2. Если $T_{\vec{a}}(F) = F_1$, то $F_1 = F$.

Задача. Точка $A_1$ (−2; 3) является образом точки $A$ (−1; 2) при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$ и координаты образа точки $B$ (−7; −3).

Решение. Из условия следует, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$. Отсюда $\vec{a}(-1;\ 1)$. Пусть $B_1(x;\ y)$ — образ точки $B(-7;\ -3)$. Тогда $\overrightarrow{BB_1} = \vec{a}$, т. е. $x + 7 = -1$ и $y + 3 = 1$. Отсюда $x = -8$, $y = -2$.

## 22.2. Осевая симметрия

Точки $A$ и $A_1$ называют **симметричными относительно прямой** $l$, если прямая $l$ является серединным перпендикуляром отрезка $AA_1$ (рис. 22.2). Если точка $A$ принадлежит прямой $l$, то её считают симметричной самой себе относительно прямой $l$.

Например, точки $A$ и $A_1$, ординаты которых равны, а абсциссы — противоположные числа, симметричны относительно оси ординат (рис. 22.3).

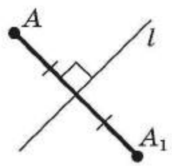


Рис. 22.2

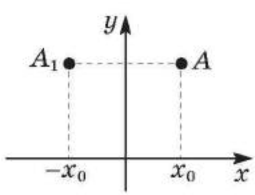


Рис. 22.3

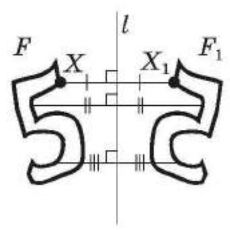


Рис. 22.4

Рассмотрим фигуру $F$ и прямую $l$. Каждой точке $X$ фигуры $F$ поставим в соответствие симметричную ей относительно прямой $l$ точку $X_1$. В результате такого преобразования фигуры $F$ получим фигуру $F_1$ (рис. 22.4). Описанное преобразование фигуры $F$ называют **осевой симметрией относительно прямой $l$** и обозначают так: $S_l$. Пишут: $S_l(F) = F_1$. Прямую $l$ называют **осью симметрии**. Также говорят, что фигуры $F$ и $F_1$ **симметричны относительно прямой $l$**.

**Свойства осевой симметрии**

1. Осевая симметрия является движением.
2. Если $S_l(F) = F_1$, то $F = F_1$.

Фигуру $F$ называют **симметричной относительно прямой** $l$, если $S_l(F) = F$. Прямую $l$ называют **осью симметрии фигуры $F$**. Также говорят, что **фигура $F$ имеет ось симметрии**.

На рисунке 22.5 изображён равнобедренный треугольник. Прямая, содержащая его высоту, проведённую к основанию, является осью симметрии треугольника.

Любой угол имеет ось симметрии — это прямая, содержащая его биссектрису (рис. 22.6).

Равносторонний треугольник имеет три оси симметрии (рис. 22.7).

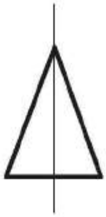


Рис. 22.5

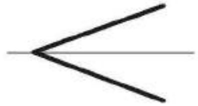


Рис. 22.6

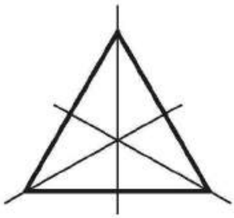


Рис. 22.7

Задача. Точки $A$ и $B$ лежат в одной полуплоскости относительно прямой $a$. Найдите на прямой $a$ такую точку $X$, чтобы сумма $AX + XB$ была наименьшей.

Решение. Пусть $S_a(A) = A_1$. Покажем, что искомой точкой $X$ является точка пересечения прямых $A_1B$ и $a$.

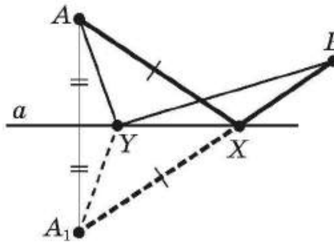



Рис. 22.8

Пусть $Y$ — произвольная точка прямой $a$, отличная от точки $X$ (рис. 22.8), отрезки $A_1X$ и $A_1Y$ — образы отрезков $AX$ и $AY$ при симметрии относительно прямой $a$ соответственно. Тогда $AX = A_1X$, $AY = A_1Y$.

Имеем: $AX + BX = A_1X + BX = A_1B < A_1Y + YB = = AY + YB$.

## 22.3. Центральная симметрия

Точки $A$ и $A_1$ называют **симметричными относительно точки** $O$, если точка $O$ является серединой отрезка $AA_1$ (рис. 22.9). Точку $O$ считают симметричной самой себе.


Рис. 22.9

Например, точки $A$ и $A_1$, у которых соответствующие абсциссы и ординаты — противоположные числа, симметричны относительно начала координат (рис. 22.10).

Рассмотрим фигуру $F$ и точку $O$. Каждой точке $X$ фигуры $F$ поставим в соответствие симметричную ей относительно точки $O$ точку $X_1$. В результате такого преобразования фигуры $F$ получим фигуру $F_1$ (рис. 22.11). Описанное преобразование фигуры $F$ называют **центральной симметрией относительно точки $O$** и обозначают так: $S_O$. Пишут: $S_O(F) = F_1$. Точку $O$ называют **центром симметрии.** Также говорят, что фигуры $F$ и $F_1$ **симметричны относительно точки $O$.**

**Свойства центральной симметрии**

1. Центральная симметрия является движением.
2. Если $S_O(F) = F_1$, то $F = F_1$.

Фигуру $F$ называют **симметричной относительно точки $O$**, если $S_O(F) = F$.

Точку $O$ называют **центром симметрии фигуры**. Также говорят, что **фигура имеет центр симметрии**.

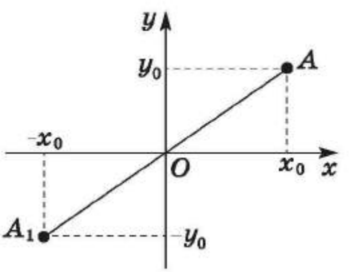



Рис. 22.10

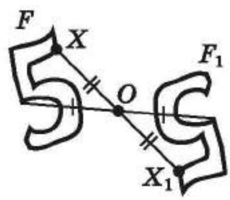



Рис. 22.11

Центром симметрии отрезка является его середина (рис. 22.12).

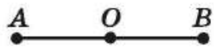


Рис. 22.12

Точка пересечения диагоналей параллелограмма является его центром симметрии (рис. 22.13).

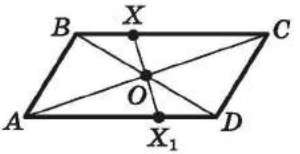


Рис. 22.13

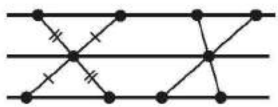


Рис. 22.14

Существуют фигуры, имеющие бесконечно много центров симметрии. Например, каждая точка прямой является её центром симметрии.

Также бесконечно много центров симметрии имеет фигура, состоящая из двух параллельных прямых. Любая точка прямой, равноудалённой от двух данных, является центром симметрии рассматриваемой фигуры (рис. 22.14).

З а д а ч а. Точка $M$ принадлежит углу $ABC$ (рис. 22.15). На сторонах $BA$ и $BC$ угла найдите такие точки $E$ и $F$, чтобы точка $M$ была серединой отрезка $EF$.

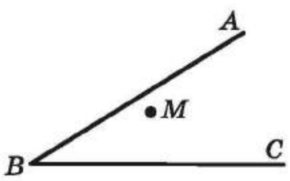


Рис. 22.15

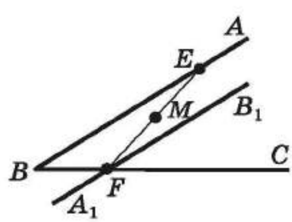


Рис. 22.16

Решение. Пусть прямая $A_1B_1$ — образ прямой $AB$ при центральной симметрии относительно точки $M$ (рис. 22.16). Обозначим $F$ — точку пересечения прямых $A_1B_1$ и $BC$.

Найдём прообраз точки $F$. Очевидно, что он лежит на прямой $AB$. Поэтому достаточно найти точку пересечения прямых $FM$ и $AB$. Обозначим эту точку $E$. Тогда $E$ и $F$ — искомые точки.

## 22.4. Поворот

На рисунке 22.17 изображены точки $O$, $X$, $X_1$ и $X_2$ такие, что $OX_1 = OX_2 = OX$, $\angle X_1OX = \angle X_2OX = \alpha$. Говорят, что точка $X_1$ является образом точки $X$ при **повороте вокруг центра $O$ против часовой стрелки на угол $\alpha$.** Также говорят, что точка $X_2$ — это образ точки $X$ при **повороте вокруг центра $O$ по часовой стрелке на угол $\alpha$.** Точку $O$ называют **центром поворота**, угол $\alpha$ — **углом поворота**.

Рассмотрим фигуру $F$, точку $O$ и угол $\alpha$. Каждой точке $X$ фигуры $F$ поставим в соответствие точку $X_1$, являющуюся образом точки $X$ при повороте вокруг центра $O$ против часовой стрелки на угол $\alpha$ (если точка $O$ принадлежит фигуре $F$, то ей сопо-

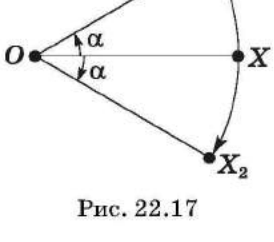



Рис. 22.17

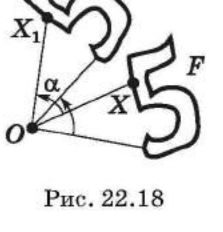



Рис. 22.18

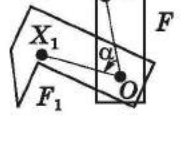



Рис. 22.19

ставляется она сама). В результате такого преобразования фигуры $F$ получим фигуру $F_1$ (рис. 22.18, 22.19). Описанное преобразование фигуры $F$ называют **поворотом вокруг центра $O$ против часовой стрелки на угол $\alpha$** и обозначают так: $R_O^\alpha$. Пишут: $R_O^\alpha(F) = F_1$. Точку $O$ называют **центром поворота**.

Аналогично определяют преобразование поворота фигуры $F$ по часовой стрелке на угол $\alpha$ (рис. 22.20). Поворот по часовой стрелке обозначают так: $R_O^{-\alpha}$. Пишут: $R_O^{-\alpha}(F) = F_1$.

Рис. 22.20

**Свойства поворота**

1. Поворот является движением.

2. Если фигура $F_1$ — образ фигуры $F$ при повороте, то $F = F_1$.

Задача. Даны прямая $a$ и точка $O$, ей не принадлежащая. Постройте образ прямой $a$ при повороте вокруг точки $O$ против часовой стрелки на угол 45°.

Решение. Так как поворот — это движение, то образом прямой $a$ будет прямая. Для построения прямой достаточно знать две любые её точки. Выберем на прямой $a$ произвольные точки $A$ и $B$ (рис. 22.21). Пусть точки $A_1$ и $B_1$ — их образы при повороте вокруг точки $O$ против часовой стрелки на угол 45°. Тогда прямая $A_1B_1$ — образ прямой $a$.

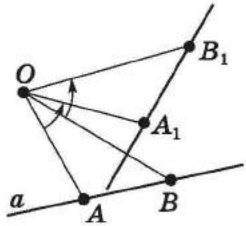


Рис. 22.21

## 22.5. Гомотетия. Подобие фигур

Если точки $O$, $X$ и $X_1$ таковы, что $\overrightarrow{OX_1} = k\overrightarrow{OX}$, где $k \neq 0$, то говорят, что точка $X_1$ — это образ точки $X$ при **гомотетии с центром $O$ и коэффициентом $k$.** Точку $O$ называют **центром гомотетии**, число $k$ — **коэффициентом гомотетии**, $k \neq 0$.

Рассмотрим фигуру $F$ и точку $O$. Каждой точке $X$ фигуры $F$ поставим в соответствие точку $X_1$, являющуюся образом точки $X$ при гомотетии с центром $O$ и коэффициентом $k$ (если точка $O$ принадлежит фигуре $F$, то ей сопоставляется она сама). В результате такого преобразования фигуры $F$ получим фигуру $F_1$ (рис. 22.22, 22.23). Описанное преобразование называют **гомотетией** фигуры $F$ **с центром $O$ и коэффициентом $k$** и обозначают так: $H_O^k$. Пишут: $H_O^k(F) = F_1$. Также говорят, что фигура $F_1$ **гомотетична** фигуре $F$ с центром $O$ и коэффициентом $k$.

Например, на рисунке 22.24 треугольник $A_1B_1C_1$ гомотетичен треугольнику $ABC$ с центром $O$ и коэффициентом, равным $-3$. Пишут: $H_O^{-3}(\Delta ABC) = \Delta A_1B_1C_1$.

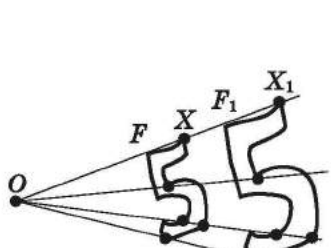


Рис. 22.22

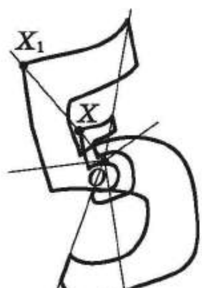


Рис. 22.23

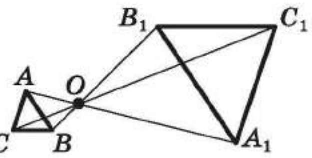



Рис. 22.24

Также можно сказать, что треугольник $ABC$ гомотетичен треугольнику $A_1B_1C_1$ с тем же центром, но коэффициентом гомотетии, равным $-\frac{1}{3}$. Пишут:

$$H_O^{-\frac{1}{3}}(\Delta A_1B_1C_1) = \Delta ABC.$$

При гомотетии фигуры $F$ с коэффициентом $k$ все расстояния между её точками изменяются в $|k|$ раз, т. е. если $A$ и $B$ — произвольные точки фигуры $F$, а $A_1$ и $B_1$ — их соответствующие образы при гомотетии с коэффициентом $k$, то $A_1B_1 = |k|AB$.

При гомотетии отрезка, луча, прямой образами являются соответственно отрезок, луч, прямая. При гомотетии угла образом является угол, равный данному. При гомотетии треугольника образом является треугольник, подобный данному.

Две фигуры называют **подобными**, если одну из них можно получить из другой в результате композиции двух преобразований: гомотетии и движения (рис. 22.25).

**Преобразование подобия** = **гомотетия** + **движение**

Рис. 22.25

Запись $F \sim F_1$ означает, что фигуры $F$ и $F_1$ подобны. Также говорят, что фигура $F_1$ — образ фигуры $F$ при **преобразовании подобия.**

При преобразовании подобия фигуры $F$ расстояния между её точками изменяются в одно и то же число раз.

Пусть $A$ и $B$ — произвольные точки фигуры $F$, а точки $A_1$ и $B_1$ — их образы при преобразовании подобия. Точки $A_1$ и $B_1$ принадлежат фигуре $F_1$, которая подобна фигуре $F$. Число $k = \frac{A_1B_1}{AB}$ называют **коэффициентом подобия**. Говорят, что фигура $F_1$ подобна фигуре $F$ с коэффициентом подобия $k$, а фигура $F$ подобна фигуре $F_1$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{k}$.

❗ Отношение площадей подобных многоугольников равно квадрату коэффициента подобия.

З а д а ч а. Пусть отрезок $CD$ — высота прямоугольного треугольника $ABC$ ($\angle C = 90°$). Найдите радиус $r$ вписанной окружности треугольника $ABC$, если радиусы окружностей, вписанных в треугольники $ACD$ и $BCD$, соответственно равны $r_1$ и $r_2$.

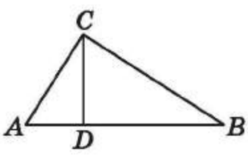


Рис. 22.26

Р е ш е н и е. Так как угол $A$ — общий для прямоугольных треугольников $ACD$ и $ABC$ (рис. 22.26), то эти треугольники подобны. Пусть коэффициент подобия равен $k_1$. Очевидно, что $k_1 = \frac{r_1}{r}$. Аналогично $\Delta BCD \sim \Delta ABC$ с коэффициентом $k_2 = \frac{r_2}{r}$.

Обозначим площади треугольников $ACD$, $BCD$ и $ABC$ соответственно $S_1$, $S_2$ и $S$. Имеем:

$$\frac{S_1}{S} = k_1^2 = \frac{r_1^2}{r^2};\ \frac{S_2}{S} = k_2^2 = \frac{r_2^2}{r^2}.$$

Отсюда $\dfrac{r_1^2 + r_2^2}{r^2} = \dfrac{S_1 + S_2}{S} = 1.$

Получаем, что $r^2 = r_1^2 + r_2^2$, т. е. $r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$.

## Примеры заданий № 30

### Часть 1

**1.** Сколько существует параллельных переносов, при которых образом прямой является параллельная ей прямая?

1) один
2) два
3) бесконечно много
4) ни одного

**2.** Найдите координаты точки, являющейся образом точки $A\,(2; -3)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}\,(-1; 4)$.

1) (1; 1) 2) (−1; −1) 3) (3; −7) 4) (−3; 7)

**3.** Четырёхугольник $ABCD$, изображённый на рисунке 22.27, — трапеция с основаниями $AD$ и $BC$. Укажите пару прямых, каждая из которых может быть образом прямой $BC$ при параллельном переносе.

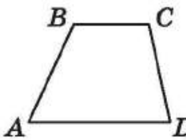


Рис. 22.27

1) $AB$ и $BC$
2) $BC$ и $CD$
3) $CD$ и $AD$
4) $AD$ и $BC$

**4.** Укажите уравнение окружности, являющейся образом окружности $x^2 + y^2 = 4$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}(-5; 4)$.

1) $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 4$
2) $(x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4$
3) $(x - 5)^2 + (y + 4)^2 = 4$
4) $(x + 5)^2 + (y + 4)^2 = 4$

**5.** Какие координаты имеет образ точки $B(3; -4)$ при симметрии относительно оси абсцисс?

1) $(-4; 3)$ 3) $(-3; -4)$
2) $(3; 4)$ 4) $(-3; 4)$

**6.** Какие координаты имеет образ точки $A(-2; 5)$ при симметрии относительно оси ординат?

1) $(2; -5)$ 3) $(-2; -5)$
2) $(2; 5)$ 4) $(5; -2)$

**7.** Сколько осей симметрии имеет прямоугольник, не являющийся квадратом?

**8.** Какая из данных фигур имеет только одну ось симметрии?

1) квадрат 3) парабола
2) окружность 4) отрезок

**9.** Какая из данных фигур имеет ровно две оси симметрии?

1) луч 3) квадрат
2) отрезок 4) окружность

**10.** Относительно какой точки симметричны точки $A(-2; 3)$ и $B(0; -1)$?

1) $C(-2; 4)$ 3) $E(1; 1)$
2) $D(-1; 1)$ 4) $F(-2; 2)$

**11.** Какие координаты имеет образ точки $B(7; -10)$ при симметрии относительно начала координат?

1) $(-10; 7)$ 3) $(7; 10)$
2) $(-7; -10)$ 4) $(-7; 10)$

**12.** Какие координаты имеет точка, симметричная точке $C\,(-3;\,5)$ относительно точки $D\,(1;\,-7)$?

1) $(4;\,-12)$  3) $(-7;\,17)$
2) $(-1;\,-1)$  4) $(5;\,-19)$

**13.** Сколько центров симметрии имеет трапеция?

1) один  3) четыре
2) два  4) ни одного

**14.** Какая из данных фигур не имеет центра симметрии?

1) квадрат
2) окружность
3) отрезок
4) равносторонний треугольник

**15.** Точка $O$ — центр правильного двенадцатиугольника, изображённого на рисунке 22.28. Укажите образ стороны $A_2A_3$ при повороте вокруг точки $O$ по часовой стрелке на угол 150°.

1) $A_{10}A_{11}$  3) $A_6A_7$
2) $A_9A_{10}$  4) $A_7A_8$

**16.** Квадрат $CDEF$, изображённый на рисунке 22.29, является образом квадрата $ABCD$ при повороте по часовой стрелке на угол 90°. Какая точка является центром поворота?

1) $A$  3) $D$
2) $C$  4) $B$

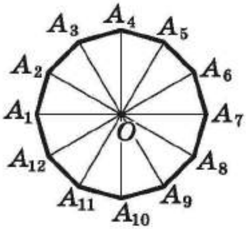



Рис. 22.28

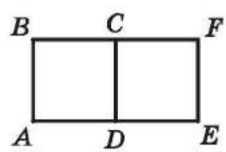



Рис. 22.29

**17.** Медианы треугольника $ABC$, изображённого на рисунке 22.30, пересекаются в точке $M$. Найдите коэффициент гомотетии с центром в точке $B$, при которой точка $M$ является образом точки $B_1$.

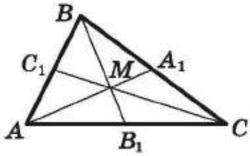


Рис. 22.30

1) $\frac{2}{3}$

2) $\frac{1}{3}$

3) $-\frac{2}{3}$

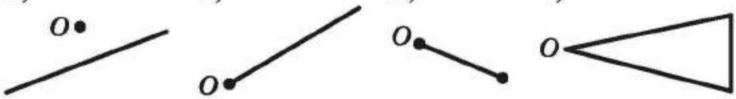
4) $-\frac{1}{3}$

**18.** Какая из данных фигур совпадает со своим образом при гомотетии с центром $O$ и коэффициентом $k < 0$?

1) 2) 3) 4)


**19.** Какая из данных фигур совпадает со своим образом при гомотетии с центром $O$ и коэффициентом $k > 0$ и $k \neq 1$?

1) 2) 3) 4)




**20.** Точка $A_1(-1; 4)$ является образом точки $A\ (2; -8)$ при гомотетии с центром в начале координат. Чему равен коэффициент гомотетии?

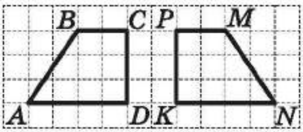



Рис. 22.31

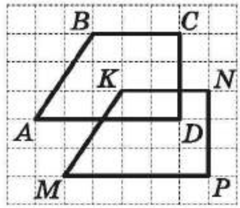



Рис. 22.32

**21.** Укажите движение, при котором образом четырёхугольника $ABCD$, изображённого на рисунке 22.31, является четырёхугольник $MNKP$.
1) осевая симметрия
2) центральная симметрия
3) параллельный перенос
4) поворот

**22.** Укажите движение, при котором образом четырёхугольника $ABCD$, изображённого на рисунке 22.32, является четырёхугольник $MKNP$.
1) осевая симметрия
2) центральная симметрия
3) параллельный перенос
4) поворот

### Часть 2

**23.** При параллельном переносе на вектор $\vec{a}$ образом точки $A\,(1; -1)$ является точка $B\,(-2; 4)$. Какие координаты имеет прообраз точки $D\,(3; -4)$ при параллельном переносе на вектор $\vec{a}$?

**24.** Точки $A$ и $B$ лежат в различных полуплоскостях относительно прямой $a$. На прямой $a$ найдите такую точку $X$, чтобы прямая $a$ содержала биссектрису угла $AXB$.

**25.** Точки $A$ и $B$ лежат в одной полуплоскости относительно прямой $a$. Найдите на прямой $a$ такую точку $X$, чтобы лучи $XA$ и $XB$ образовывали с этой прямой равные углы.

**26.** Вершина $A$ квадрата $ABCD$ является центром поворота на угол 90°. Найдите отрезок $BC_1$, где точка $C_1$ — образ точки $C$ при указанном повороте, если $AB = 1$ см.

**27.** Вершина $A$ равностороннего треугольника $ABC$ является центром поворота на угол 120°. Найдите отрезок $BC_1$, где точка $C_1$ — образ точки $C$ при указанном повороте, если $AB = 1$ см.

**28.** Отрезок $BM$ — медиана треугольника $ABC$, изображённого на рисунке 22.33, отрезок $DE$ — средняя линия треугольника $ABM$. Чему равна площадь треугольника $ABC$, если площадь четырёхугольника $DBME$ равна 12 см$^2$?

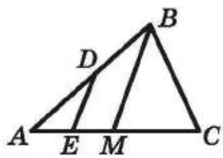


Рис. 22.33

**29.** Площадь треугольника $ABC$ равна 18 см$^2$. На стороне $AB$ отметили точки $K$ и $D$ так, что $AK = KD = DB$, а на стороне $AC$ — точки $F$ и $E$ так, что $AF = FE = EC$. Найдите площадь четырёхугольника $DEFK$.

**30.** В прямоугольном треугольнике $MNK$ на гипотенузу $MK$ опущена высота $NF$. Площадь треугольника $MNF$ равна 2 см$^2$, а площадь треугольника $KNF$ — 32 см$^2$. Найдите гипотенузу треугольника $MNK$.

# ОТВЕТЫ К ПРИМЕРАМ ЗАДАНИЙ

## Примеры заданий № 1

**1.** 6. **2.** 10. **3.** 30. **4.** 9. **5.** 4. **6.** 2. **7.** 5. **8.** 3. **9.** 9. **10.** 5. **11.** 8. **12.** 56. **13.** 16. **14.** 28. **15.** 99. **16.** 120. **17.** 4. **18.** 10. **19.** 560. **20.** 120. **21.** 84. **22.** 1. **23.** 24. **24.** 2. **25.** 4. **26.** 0. **27.** 1. **28.** 9. **29.** 5. **30.** 4.

## Примеры заданий № 2

**1.** 0,3. **2.** 2. **3.** 1. **4.** 6. **5.** 3. **6.** 2. **7.** 106,5. **8.** 2,75. **9.** 18,8. **10.** 4. **11.** 7,5. **12.** 1,2. **13.** 36. **14.** 24. **15.** 2. **16.** 0,005. **17.** 0,047. **18.** 4,1. **19.** 0,5. **20.** 17. **21.** 2. **22.** 0,9. **23.** 0,6044. **24.** 5. **25.** 32. **26.** 2. **27.** 15. **28.** 5. **29.** 49. **30.** 270. **31.** 72. **32.** 18,5. **33.** 2. **34.** 3. **35.** 2.

## Примеры заданий № 3

**1.** 64. **2.** 38. **3.** 558. **4.** 6. **5.** 15 120. **6.** 8,1. **7.** 1687,5. **8.** 200. **9.** 1500. **10.** 44. **11.** 1500. **12.** 3. **13.** 150. **14.** 3. **15.** 35. **16.** 25. **17.** 40. **18.** 9. **19.** 40. **20.** 5,2. **21.** 8,75. **22.** 120. **23.** 270. **24.** 54. **25.** 28. **26.** 2,5. **27.** 1.

## Примеры заданий № 4

**1.** 4. **2.** 4. **3.** 3. **4.** 3. **5.** 123. **6.** 1. **7.** 16. **8.** 4. **9.** 3600. **10.** 3. **11.** −83. **12.** −2. **13.** −3,95. **14.** 3. **15.** 2. **16.** 63. **17.** 3. **18.** −10. **19.** −3. **20.** 0,1. **21.** 2. **22.** −3,4. **23.** −25. **24.** −3,6. **25.** 1. **26.** 1. **27.** −5,8. **28.** 0,4. **29.** −3,4.

## Примеры заданий № 5

**1.** 1. **2.** −0,012. **3.** 2. **4.** 2. **5.** 4. **6.** 2. **7.** 1. **8.** 625. **9.** 9. **10.** 16. **11.** 16,2. **12.** 4. **13.** 2. **14.** 33,75. **15.** 2.

**16.** 2. **17.** 2. **18.** 1. **19.** 10. **20.** −5. **21.** 4. **22.** −21. **23.** 4. **24.** 51. **25.** 9,5. **26.** 7. **27.** 3. **28.** 3. **29.** 0. **30.** 2. **31.** 1. **32.** 4. **33.** 9. **34.** 0. **35.** 2. **36.** 44. **37.** 32. **38.** 100. **39.** 12. **40.** 144.

### Примеры заданий № 6

**1.** 3. **2.** 1. **3.** 3. **4.** 1. **5.** 3. **6.** 4,75. **7.** 0,05. **8.** 3. **9.** 1. **10.** 4. **11.** 1. **12.** −0,5. **13.** 3. **14.** −1,3. **15.** 0,25. **16.** 1. **17.** 4. **18.** 2,5. **19.** 1. **20.** 4. **21.** −6. **22.** 5. **23.** 0,2. **24.** 0,8. **25.** −0,12. **26.** 5. **27.** 60. **28.** 1. **29.** 9. **30.** $x+2$. **31.** $\frac{a+6}{b-5}$. **32.** −1. **33.** 1. **34.** $\frac{1}{a}$. **35.** $\frac{2}{x-4}$. **36.** 1. **37.** $\frac{x-4}{x+4}$. **38.** $\frac{5b+15}{b}$. **39.** $\frac{1}{3}$. **40.** $\frac{x+2}{3}$. **41.** 12. **42.** 5. **43.** −4.

### Примеры заданий № 7

**1.** 1. **2.** 3. **3.** 3. **4.** 3. **5.** 2. **6.** 4. **7.** 3. **8.** 0,2. **9.** 10. **10.** 0,1. **11.** 3. **12.** 4. **13.** 4. **14.** 2. **15.** 1. **16.** −2. **17.** 1. **18.** 2. **19.** 0,000258. **20.** 3. **21.** 2. **22.** $\frac{1}{x^2y^2}$. **23.** $0{,}8a^3$. **24.** $\frac{b^{14}}{a^4}$. **25.** 12.

### Примеры заданий № 8

**1.** 3. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 2. **6.** 40. **7.** 4. **8.** 3. **9.** 525. **10.** 1. **11.** 2. **12.** 8. **13.** 3. **14.** 4. **15.** 2. **16.** 4. **17.** 1. **18.** 2. **19.** 2. **20.** 1. **21.** 1. **22.** 2. **23.** 3. **24.** 3. **25.** 2. **26.** 1. **27.** 4. **28.** 0. **29.** 1. **30.** 10. **31.** −1. **32.** 1. **33.** $a-7$. **34.** $-\sqrt{2}$. **35.** $2b-a$. **36.** $-2\sqrt{3}$. **37.** 4. **38.** 40.

**39.** $\frac{\sqrt{30}-2}{13}$. **40.** $\frac{\sqrt{31}-\sqrt{3}}{4}$. **41.** $\sqrt{b}$. **42.** $\sqrt{m}$. **43.** 6. **44.** $\sqrt{8}+\sqrt{6}$. **45.** $\sqrt{26}+\sqrt{24}$.

### Примеры заданий № 9

**1.** 1. **2.** 0,4. **3.** 2. **4.** 4. **5.** 1. **6.** 3. **7.** −6,5. **8.** −17. **9.** −9. **10.** −5. **11.** −7. **12.** 6,25. **13.** 1,5. **14.** −7. **15.** 81. **16.** 3. **17.** 2. **18.** 1,5. **19.** 6. **20.** −0,8. **21.** 4. **22.** −63. **23.** −14. **24.** 2. **25.** 1. **26.** 3. **27.** −0,4. **28.** −12 или 12. **29.** 15. **30.** −1. **31.** $3+\sqrt{14}$; −1; −5. **32.** −4; 4. **33.** −2. **34.** −2. **35.** $\frac{4a-3}{a-1}$. **36.** $\frac{a-6}{2a+1}$. **37.** $\frac{a^2+3a+9}{5a-1}$. **38.** −1. **39.** −5,75. **40.** 9,25. **41.** $6\frac{1}{3}$. **42.** 1,5; −9. **43.** −7. **44.** $x^2-14x+44=0$. **45.** $x^2+2x-12=0$.

### Примеры заданий № 10

**1.** 2. **2.** 4. **3.** 14. **4.** −6. **5.** −3. **6.** 2. **7.** 8. **8.** 3. **9.** 2. **10.** 2. **11.** 7; 3,5. **12.** 1,5. **13.** 9. **14.** 3; 5; 8. **15.** −6; 0; 7. **16.** −6; −2; 6. **17.** −5; −3; 4. **18.** −7; 3. **19.** −10; 0; −20. **20.** −3; 4; −10. **21.** 1; 2. **22.** $5\pm\sqrt{2}$. **23.** 1; 2; $\frac{3\pm\sqrt{33}}{2}$. **24.** $2\pm\sqrt{11}$. **25.** −0,25; 1. **26.** 5,5; 6,2. **27.** −10; 2. **28.** −4; −1; $\frac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$. **29.** 1; 10. **30.** −2; 0; $-1\pm\sqrt{14}$.

### Примеры заданий № 11

**1.** −9. **2.** 5. **3.** 27. **4.** 0,25. **5.** 1. **6.** 7,3. **7.** 9. **8.** 1. **9.** 2. **10.** 3. **11.** 1. **12.** 3. **13.** 3. **14.** 2. **15.** 1. **16.** 2. **17.** 3. **18.** 2. **19.** 3. **20.** 4. **21.** 4. **22.** 2. **23.** 2. **24.** 4. **25.** 3.

**26.** 3. **27.** 1. **28.** 4. **29.** 1. **30.** 2. **31.** 312. **32.** 4. **33.** 4. **34.** 1. **35.** 3. **36.** 3. **37.** 3. **38.** 3. **39.** 1. **40.** $-\sqrt{7}$; $\sqrt{7}$. **41.** $k=-3$, $b=4$. **42.** $-1$. **43.** Рис. 1. Функция возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$ и убывает на промежутке $[-1; +\infty)$. **44.** Рис. 2. При $b = 1{,}5$ или $b = -6$. **45.** Рис. 3. Функция не имеет промежутков возрастания, убывает на промежутке $(-\infty; +\infty)$. **46.** Рис. 4. **47.** Рис. 5. **48.** Рис. 6. При $k = -8$. **49.** Рис. 7. При $b = 0$ или $b = -\frac{5}{3}$. **50.** Рис. 8. При $k = 0$, или $k = -\frac{9}{2}$, или $k = \frac{9}{2}$.

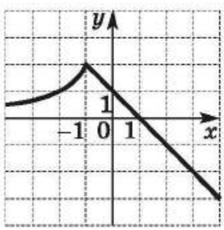


Рис. 1

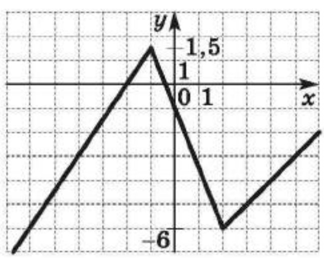


Рис. 2

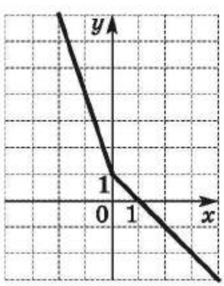


Рис. 3

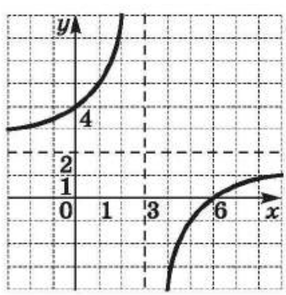


Рис. 4

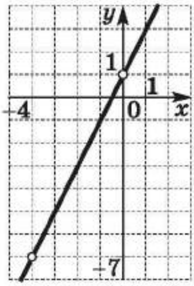



Рис. 5

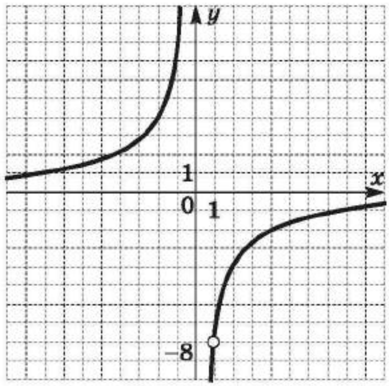



Рис. 6

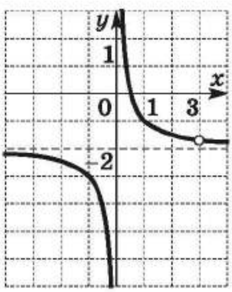



Рис. 7

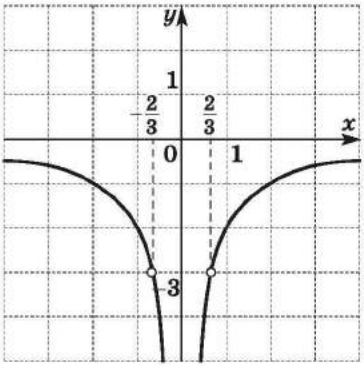



Рис. 8

## Примеры заданий № 12

**1.** 4. **2.** −10. **3.** 2. **4.** 3. **5.** 132. **6.** 4. **7.** 2. **8.** 231. **9.** 4. **10.** 4. **11.** 4. **12.** 1. **13.** 4. **14.** 2. **15.** 4. **16.** 2. **17.** 3. **18.** 2. **19.** $(-\infty; -5)\cup(2; 3{,}5)\cup(3{,}5; +\infty)$. **20.** $[5; 6)\cup(6; +\infty)$. **21.** $(3; 6]$. **22.** Рис. 9. 1) $[-4; +\infty)$; 2) при $x \in (-\infty; -3)\cup\cup(1; +\infty)$. **23.** Рис. 10. 1) $(-\infty; 1]$; 2) $(-\infty; -3]$. **24.** Рис. 11.

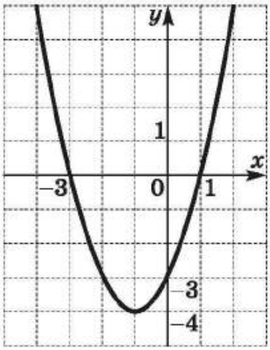



Рис. 9

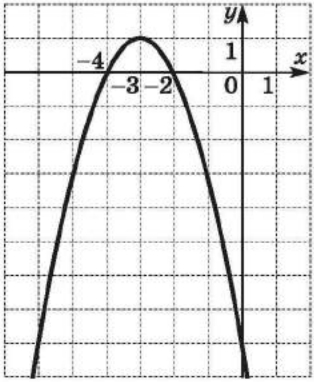



Рис. 10

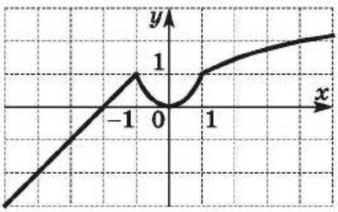



Рис. 11

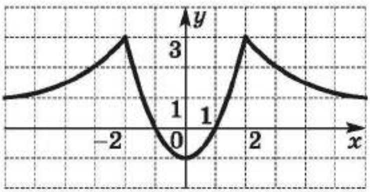



Рис. 12

Функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -1]$ и $[0; +\infty)$, убывает на промежутке $[-1; 0]$. **25.** Рис. 12. Функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; -2]$ и $[0; 2]$, убывает каждом из промежутков $[-2; 0]$ и $[2; +\infty)$. **26.** $-4\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$. **27.** 3. **28.** 10. **29.** 6. **30.** $p = -2$, $q = -3$. **31.** $a = \frac{5}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$. **32.** (3; 2). **33.** $a = -3$, $c = -9$. **34.** При $p < 0$ или $p > 5$. **35.** При $p < -\frac{1}{2}$, или $0 < p < \frac{1}{2}$, или $p > 8$. **36.** 4. **37.** Рис. 13. **38.** Рис. 14. **39.** Рис. 15. При $b = 0$ или

$b \geq 1$. **40.** Рис. 16. При $b = 3$ или $b = 4$. **41.** Рис. 17. При $0 \leq b < 4$. **42.** Рис. 18. 4 точки. **43.** Рис. 19. 4 точки.

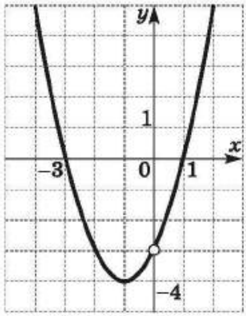


Рис. 13

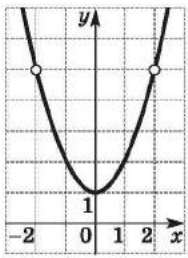


Рис. 14

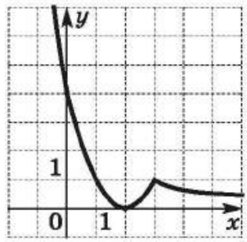


Рис. 15

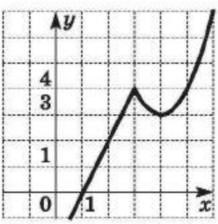


Рис. 16

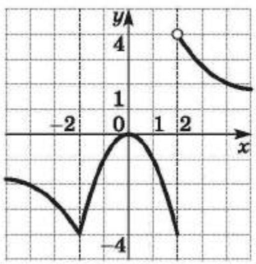


Рис. 17

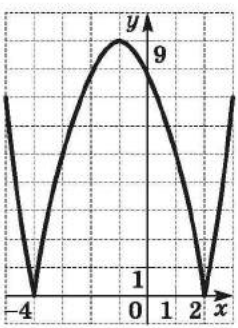


Рис. 18

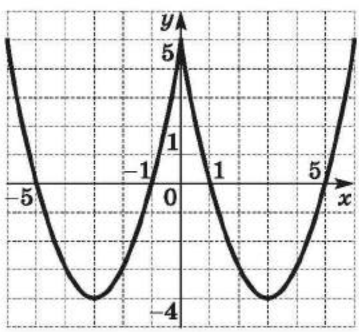


Рис. 19

**44.** Рис. 20. 6 точек. **45.** Рис. 21. При $k = -2$, или $k = 2$, или $k = 2{,}5$. **46.** Рис. 22. При $b = 1$ или $b = -9$. **47.** Рис. 23. При $b = 2$. **48.** Рис. 24. При $b = 0$ или $b = 1$. **49.** Рис. 25. При $b = -1$ или $b = 1$. **50.** 1. **51.** −6; 1. **52.** 4.

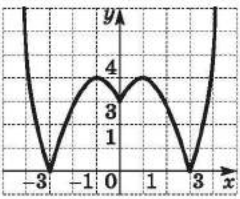



Рис. 20

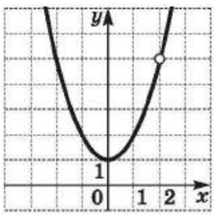



Рис. 21

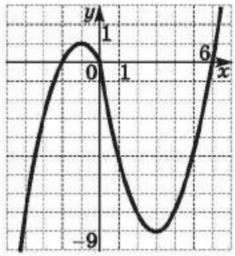



Рис. 22

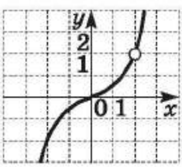



Рис. 23

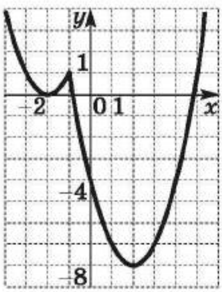



Рис. 24

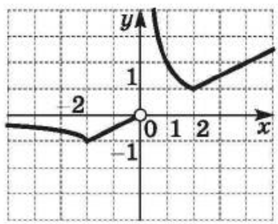



Рис. 25

## Примеры заданий № 13

**1.** 1. **2.** 23. **3.** −3. **4.** 21. **5.** 3. **6.** 3. **7.** 231. **8.** 3. **9.** −6. **10.** 4. **11.** 3. **12.** 1. **13.** Рис. 26. **14.** Рис. 27. **15.** Рис. 28. **16.** (3; 2), (2; 3). **17.** (0; −2), (2; 0). **18.** 4. **19.** 3. **20.** (−5; 3). **21.** (5; −1), $\left(-\frac{22}{5}; \frac{22}{25}\right)$. **22.** График — точка с координатами (3; −2). **23.** 4. **24.** −6.

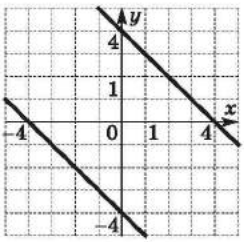



Рис. 26

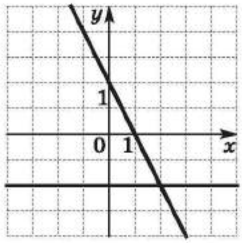



Рис. 27

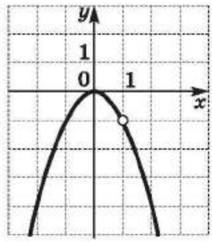



Рис. 28

**25.** $(2; 12)$, $(-0{,}8; 6{,}4)$. **26.** $(1; 1)$, $\left(-\frac{13}{7}; \frac{3}{7}\right)$. **27.** $(4; -2)$, $\left(-7; 1\frac{2}{3}\right)$. **28.** $(-2; -4)$, $(2; -2)$. **29.** $(8; 1)$, $(-8; -1)$, $(1; 8)$, $(-1; -8)$. **30.** $(3; 2)$, $(-3; 2)$. **31.** $(-5; 2)$, $(-5; -2)$. **32.** $(0; 0)$, $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$. **33.** $(8{,}5; -2)$. **34.** $(-2; -1)$, $(2; 1)$, $(5; 0{,}75)$, $(-5; -0{,}75)$. **35.** $(2; 11)$, $(4; 9)$. **36.** $(-2; -8)$, $\left(\frac{1}{3}; -1\right)$. **37.** $(3; 6)$, $(-3; 6)$. **38.** $(2; 1)$, $(0{,}7; 3{,}6)$. **39.** $(5; 1)$, $(-1; -5)$. **40.** $(1; 2)$, $(2; 1)$. **41.** $(4; 2)$, $(-4; -2)$. **42.** $(2; 1)$, $\left(\frac{126}{11}; -\frac{54}{11}\right)$. **43.** $(-2; 2)$, $(2; -2)$. **44.** $(4; 1)$, $(1; 4)$. **45.** $(0; 1)$, $(0; -1)$, $(2; 1)$, $(-2; -1)$. **46.** $a = 18$. **47.** $a > 8$.

## Примеры заданий № 14

**1.** 16 км/ч. **2.** 45 км. **3.** 40 км/ч. **4.** 9 км/ч. **5.** 60 км/ч. **6.** 70 км/ч. **7.** 50 км/ч. **8.** 60 км/ч. **9.** 3 км/ч. **10.** 4 км/ч. **11.** 32 км/ч. **12.** 5 км/ч. **13.** 16 км/ч. **14.** 12 автомобилей. **15.** 16 деталей. **16.** 20 $м^3$. **17.** 24 ч, 48 ч. **18.** 6 ч. **19.** 80 г. **20.** 30 кг.

### Примеры заданий № 15

**1.** 100 кг, 200 кг. **2.** 15 ч, 10 ч. **3.** 260 000 р. **4.** 4000 р., 3000 р. **5.** 40 км/ч, 60 км/ч. **6.** 4 ц, 5 ц. **7.** 15 км/ч, 12 км/ч. **8.** 12 ч.

### Примеры заданий № 16

**1.** 8. **2.** 3. **3.** 3. **4.** 2. **5.** 140. **6.** 3. **7.** 4. **8.** 3. **9.** 12. **10.** 66. **11.** 8. **12.** 375 м. **13.** 6 %. **14.** 64 мин. **15.** 260 р. **16.** 64 км/ч. **17.** 320 мин. **18.** 600 м. **19.** 12 кг.

### Примеры заданий № 17

**1.** 2. **2.** 4. **3.** 1. **4.** 4. **5.** 2. **6.** 1. **7.** 2. **8.** 4. **9.** 3. **10.** 1. **11.** 1. **12.** 2. **13.** 4. **14.** 1. **15.** 4. **16.** 2. **17.** −3. **18.** 3. **19.** 4. **20.** 1. **21.** 3. **22.** 3. **23.** 4. **28.** 8. **29.** 4. **30.** 0. **31.** 5. **32.** 6. **33.** $[-2;\ 3)$. **34.** $\left[\frac{1}{3};\ 3\right]$. **35.** $(4;\ 4+\sqrt{3})$. **36.** $(-6-\sqrt{7};\ -6+\sqrt{7})$. **37.** $[-1;\ 1]$. **38.** $(-\infty;\ -10]\cup[10;\ +\infty)$. **39.** 4. **40.** $0 < a < 0{,}8$. **41.** $b < -8$ или $b > 8$. **42.** $[-6;\ 5]$. **43.** $[2;\ 3)$. **44.** $(-7;\ 2)$. **45.** $0 < a \le 1$.

### Примеры заданий № 18

**1.** 10. **2.** −31,2. **3.** 165. **4.** −5. **5.** −1,5. **6.** 12. **7.** 2380. **8.** 232. **9.** 1. **10.** 93,75. **11.** −15. **12.** 576 000. **13.** 168. **14.** 217. **15.** 762. **16.** 27. **17.** 0,8. **18.** −8. **19.** 14. **20.** 16. **21.** −93. **22.** 6. **23.** 12. **24.** −36,4. **25.** 2. **26.** 8775. **27.** 70 336. **28.** 5, 10. **29.** 15 %. **30.** 96. **31.** 1,5. **32.** −10; 1. **33.** 63. **34.** 25. **35.** 16. **36.** $\frac{8}{45}$. **37.** $\frac{107}{330}$.

### Примеры заданий № 19

**1.** 32. **2.** 72. **3.** 720. **4.** 24. **5.** 60. **6.** 4. **7.** 3. **8.** 120. **9.** 40. **10.** 8. **11.** 220. **12.** 4,7. **13.** 320. **14.** 4. **15.** 7. **16.** 4. **17.** 0,94. **18.** 0,4. **19.** 0,875. **20.** 0,95. **21.** 2. **22.** 0,3. **23.** 2. **24.** 0,45. **25.** 2. **26.** 0,98. **27.** 0,4. **28.** 0,09. **29.** 2880. **30.** 294. **31.** 4. **32.** 3,1; 3. **33.** Мода — 3 ошибки, среднее значение — 1,92 ошибки. **34.** 87. **35.** $\frac{1}{3}$. **36.** $\frac{2}{3}$. **37.** 12. **38.** $\frac{1}{2}$. **39.** $\frac{1}{4}$. **40.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$.

### Примеры заданий № 20

**1.** 23. **2.** 12. **3.** 13. **4.** 14. **5.** 5,4. **6.** 25. **7.** 17. **8.** 3. **9.** 104. **10.** 72. **11.** 3. **12.** 2. **13.** 3. **14.** 5.

### Примеры заданий № 21

**1.** 3. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 100. **5.** 60. **6.** 132. **7.** 110.

### Примеры заданий № 22

**1.** 4. **2.** 35. **3.** 2. **4.** 0. **5.** 3. **6.** 34. **7.** 50. **8.** 88. **9.** 2. **10.** 50. **11.** 63. **12.** 3. **13.** 16. **14.** 39. **15.** 14. **16.** 4. **17.** 10. **18.** 1. **19.** 21. **20.** 81. **21.** 1. **22.** 4. **23.** 7,2. **24.** 35 см. **25.** 6 см. **26.** 7 : 3. **27.** $8\sqrt{13}$ см, $4\sqrt{13}$ см, $12\sqrt{5}$ см. **28.** 20 см. **29.** 2 см. **30.** 36 см.

### Примеры заданий № 23

**1.** 9. **2.** 28. **3.** 5. **4.** 1. **5.** 30. **6.** 1. **7.** 0,75. **8.** 2. **9.** 1,5. **10.** 4. **11.** 4. **12.** 16. **13.** 4. **14.** 2. **15.** 3. **16.** 3. **17.** 1. **18.** 3. **19.** 2. **20.** $\sqrt{26}$ см. **21.** 32 см. **22.** 12 см. **23.** 15 см. **24.** $8\sqrt{10}$ см. **25.** 10 см. **26.** $\frac{h}{\sin\alpha\cos\alpha}$. **27.** $a(2+\sqrt{2})$. **28.** 15 см, 24 см. **29.** 6 см. **30.** $2\sqrt{13}$ см. **31.** $8\sqrt{6}$ см.

### Примеры заданий № 24

**1.** 2. **2.** 4. **3.** 3. **4.** 6. **5.** 22. **6.** 6. **7.** 8. **8.** 24. **9.** 40. **10.** 20. **11.** 1. **12.** 16. **13.** 4. **14.** 4. **15.** 6. **16.** 4. **17.** 4. **18.** 160. **19.** 15. **20.** 150. **21.** 168. **22.** 52. **23.** 140. **24.** 20. **25.** 3,2. **26.** 1. **27.** 3. **28.** 60. **29.** 4 см. **31.** $\frac{65}{18}$ см. **32.** 12 см. **33.** 15 см, 24 см. **34.** 16 см. **35.** $3\sqrt{10}$ см. **36.** $3\sqrt{5}$ см. **37.** 2 см. **38.** 48 см. **39.** $2\sqrt{10}$ см. **40.** 108 см. **41.** 8 см. **42.** $\sqrt{111}$ см. **43.** 8 см. **44.** $45\pi$ см.

### Примеры заданий № 25

**1.** 72. **2.** 68. **3.** 15. **4.** 6. **5.** 96. **6.** 74. **7.** 4. **8.** 1. **9.** 12. **10.** 3. **11.** 22. **12.** 64. **13.** 1. **14.** 2. **15.** 4. **16.** 40. **17.** 40. **18.** 20. **19.** 2. **20.** 15. **21.** 24. **22.** 12. **25.** 52 см. **26.** 4 см. **27.** $\frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. **28.** 24 см. **29.** $12\sqrt{5}$ см. **30.** 52 см. **31.** $\sqrt{7-2\sqrt{3}}$ см.

### Примеры заданий № 26

**1.** 4. **2.** 134. **3.** 105. **4.** 160. **5.** 38. **6.** 42. **7.** 15. **8.** 2. **9.** 18. **10.** 4. **11.** 4. **12.** 1. **13.** 1. **14.** 8. **15.** 162. **16.** 36. **17.** 12. **18.** 1. **19.** 1. **20.** 2. **21.** 108. **22.** 24. **23.** 60°, 120°. **24.** 80 см. **25.** 88 см. **26.** $\frac{21}{4}$ см, $\frac{27}{4}$ см. **27.** 3 см. **30.** 9,6 см. **31.** 8 см, 4 см. **32.** 12,5 см. **33.** 4 см. **34.** $\frac{65}{6}$ см. **35.** 92°. **36.** 59°. **39.** 54 см. **40.** $\sqrt{3}:2$.

### Примеры заданий № 27

**1.** 22. **2.** 96. **3.** 1. **4.** 3. **5.** 3. **6.** 20. **7.** 21. **8.** 192. **9.** 30. **10.** 6. **11.** 36. **12.** 12. **13.** 14. **14.** 1. **15.** 400.

**16.** 17,5. **17.** 72. **18.** 360. **19.** 4. **20.** 4. **21.** 2. **22.** 3. **23.** 3. **24.** 192 см$^2$. **25.** 12 см$^2$. **27.** $63\sqrt{3}$ см$^2$. **28.** $\frac{1}{2}d^2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$. **29.** $50\sqrt{3}$ см$^2$. **30.** 12 см$^2$. **31.** 300 см$^2$. **32.** 1176 см$^2$. **33.** $\frac{4000}{3}$ см$^2$. **34.** 24 см$^2$. **35.** 135 см$^2$. **36.** 972 см$^2$. **37.** 78 см$^2$. **38.** 276 см$^2$. **39.** 156 см$^2$. **40.** $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. **41.** $50(\sqrt{2}+1)$ см$^2$. **42.** $4R^2\sqrt{2}$. **43.** 156 см$^2$. **44.** $\frac{441\pi}{20}$ см$^2$.

### Примеры заданий № 28

**1.** 5. **2.** 2. **3.** 1. **4.** 2. **5.** 1. **6.** 3. **7.** 3. **8.** 3. **9.** 2. **10.** (0; −1,5). **11.** (3; −2). **12.** $\sqrt{5}$. **15.** $y = 3x + 7$. **16.** $y = x - 9$. **17.** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$. **18.** $y = -2$. **19.** $y = -0{,}5x - 4$. **20.** Рис. 29. **21.** Рис. 30. **22.** Рис. 31. **23.** Рис. 32.

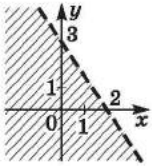


Рис. 29

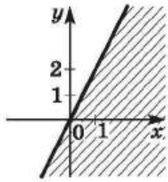


Рис. 30

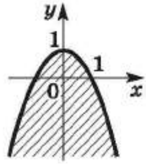


Рис. 31

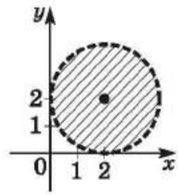


Рис. 32

### Примеры заданий № 29

**1.** 2. **2.** 3. **3.** 3. **4.** 2. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 1. **8.** 2. **9.** 1. **10.** 1. **11.** 2. **12.** 6. **13.** 3. **14.** −15. **15.** 8. **16.** −1. **17.** 23. **18.** 2.

**19.** 10. **20.** $\sqrt{65}$. **21.** 150°. **22.** −1,5. **23.** $\overrightarrow{BK} = -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

**24.** $\overrightarrow{EF} = \frac{4}{7}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a}$.

## Примеры заданий № 30

**1.** 3. **2.** 1. **3.** 4. **4.** 1. **5.** 2. **6.** 2. **7.** 2. **8.** 3. **9.** 2. **10.** 2. **11.** 4. **12.** 4. **13.** 4. **14.** 4. **15.** 4. **16.** 3. **17.** 1. **18.** 1. **19.** 2. **20.** −0,5. **21.** 1. **22.** 3. **23.** (6; −9). **26.** 1 см или $\sqrt{5}$ см. **27.** 1 см или 2 см. **28.** 32 см$^2$. **29.** 6 см$^2$. **30.** 17 см.

*Справочное издание*

**Мерзляк Аркадий Григорьевич,**
**Полонский Виталий Борисович,**
**Якир Михаил Семенович**

**МАТЕМАТИКА**

**Новый полный справочник**
**для подготовки к ОГЭ**

*Редакция «Образовательные проекты»*

Ответственный редактор *Н.А. Шармай*
Технический редактор *Е.П. Кудиярова*
Компьютерная верстка *А.А. Ворониной*

Подписано в печать 15.06.2017. Формат 84x108 $^{1}/_{32}$
Усл. печ. л. 23,52.
Серия «Новый полный справочник для подготовки к ОГЭ»
Тираж 10 000 экз. Заказ №
Серия «Самый популярный справочник для подготовки к ОГЭ»
Тираж 15 000 экз. Заказ №

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953005 — литература учебная

**ООО «Издательство АСТ»**
129085, г. Москва, Звёздный бульвар, д. 21, стр. 1, комн. 39
Наш электронный адрес: www.ast.ru; e-mail: stelliferovskiy@ast.ru

**По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:**
123317, г. Москва, Пресненская наб., д. 6, стр. 2,
Деловой комплекс «Империя», а/я № 5

## ОСНОВНОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКЗАМЕН

Вниманию выпускников 9 классов общеобразовательных организаций предлагается справочник, в котором представлен материал курса «Математика» в объёме, проверяемом на государственной итоговой аттестации.

Структура книги соответствует современному кодификатору элементов содержания по предмету, на основе которого формируются контрольные измерительные материалы (КИМы) основного государственного экзамена (ОГЭ).

Справочник состоит из двух глав. Первая глава «Арифметика. Алгебра» соответствует содержанию курсов математики 5–6 классов и алгебры 7–9 классов основной школы, вторая глава «Геометрия» — содержанию курса геометрии 7–9 классов.

Пособие содержит не только теоретический материал, необходимый для решения вариантов ОГЭ, но и значительное количество разобранных примеров, иллюстрирующих основные методы и приёмы решения задач.
Ко всем представленным в справочнике заданиям в конце пособия размещены ответы.

Работа с пособием позволит в короткий срок повторить все основные темы курса математики за 5–9 классы, оценить уровень знаний и успешно подготовиться к сдаче основного государственного экзамена.

**Создатели справочника — практикующие педагоги, авторы хорошо известных школьных учебников математики для 5–9 классов, входящих в Федеральный перечень Министерства образования и науки Российской Федерации.**

ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ПРОЕКТЫ

ISBN 978-5-17-096817-6
9 785170 968176