

**О перпендикулярности в
пространстве в трудах
Евклида, А. Каши и А.
Лежандра.**

Аксио́ма параллельности Евкли́да, или пя́тый постула́т

Одна из аксиом, лежащих в основании классической планиметрии. Впервые приведена в «Началах» Евклида

И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых.

Евклид использует понятия постулат и аксиома, не объясняя их различия; в разных манускриптах «Начал» Евклида разбиение утверждений на аксиомы и постулаты различно, равно как не совпадает и их порядок. В классическом издании «Начал» Гейбергасформулированное утверждение является пятым постулатом.

На современном языке текст Евклида можно переформулировать так

Если [на плоскости] при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних односторонних углов меньше 180° , то эти прямые при достаточном продолжении пересекаются, и притом с той стороны, с которой эта сумма меньше 180° .

Уточнение, с какой именно стороны пересекаются прямые, Евклид добавил, вероятно, для ясности — легко доказать, что оно вытекает из самого факта существования пересечения^[2].

Пятый постулат чрезвычайно сильно отличается от других постулатов Евклида, более простых и очевидных (см. Начала Евклида). Поэтому в течение двух тысячелетий не прекращались попытки исключить его из списка аксиом и вывести как теорему. Все эти попытки окончились неудачей.

«Вероятно, невозможно в науке найти более захватывающую и драматичную историю, чем история пятого постулата Евклида»^[3]. Несмотря на отрицательный результат, эти поиски не были напрасны, так как в конечном счёте привели к пересмотру научных представлений о геометрии Вселенной

Для среднего образования выдающееся значение имел его превосходный учебник «Éléments de géométrie» («Начала геометрии», 1794), выдержавший несколько изданий при его жизни, множество переводов и, сверх того, посмертные переработки другими авторами. Достоинства этого учебника не испортили даже безуспешные попытки автора доказать в этой книге пятый постулат Евклида. В разных изданиях книги Лежандр дал целых три доказательства V постулата, все они оказались ошибочными.

Перпендикулярность в трудах Коши

Вопросы перпендикулярности в пространстве у Коши рассматривались прежде всего в рамках:

1. Аналитической геометрии — он активно развивал методы координатной геометрии, где понятие перпендикулярности связано с понятием скалярного произведения векторов.

2. Механики и физики — Коши вводил тензоры напряжений, и при этом использовал понятия ортогональных (перпендикулярных) направлений в пространстве для описания действия сил и деформаций.

3. Дифференциальной геометрии — при анализе поверхностей, нормалей, касательных пространств и т.д.

Коши использовал аналитические методы для описания перпендикулярности:

- Векторы считаются перпендикулярными, если их скалярное произведение равно нулю.

- Прямая и плоскость считаются перпендикулярными, если вектор, направленный по прямой, перпендикулярен любому вектору, лежащему в плоскости.

Пример: перпендикулярность и производные

Коши также интересовался понятием нормали к поверхности. Если поверхность задана функцией $f(x, y, z) = 0$, то вектор градиента ∇f является нормальным (перпендикулярным) к поверхности в данной точке.

Таким образом, перпендикулярность в его трудах зачастую была связана с анализом производных и направлений изменения функций — как это происходит в современной векторной и тензорной математике.