

## ■ Fractions et décimaux

### Objectifs du module

Les situations de ce module visent à introduire les fractions simples dans un contexte de mesure puis les fractions décimales et les écritures décimales. Plus précisément, les élèves seront amenés à :

- Construire un premier ensemble de fractions élémentaires et des écritures additives pour exprimer des mesures de longueurs obtenues en reportant une bande unité.
- Utiliser les notations et le vocabulaire associé.
- Concevoir qu'une mesure peut s'exprimer de différentes façons et établir ainsi des équivalences entre fractions et des décompositions faisant apparaître la partie entière.
- Rechercher les résultats d'additions simples portant sur des écritures fractionnaires.
- Utiliser des fractions et des écritures additives fractionnaires pour situer des points sur une demi-droite graduée et pour exprimer des distances.
- Donner du sens aux mots dixième, centième, millième et aux écritures  $\frac{1}{10}$  ;  $\frac{1}{100}$  ;  $\frac{1}{1000}$  ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001.
- Donner du sens aux fractions décimales et aux écritures à virgule.
- Connaître différentes désignations orales, différentes écritures fractionnaires, différentes écritures à virgule des décimaux et savoir passer d'une désignation à l'autre.
- Comparer des nombres décimaux.
- Calculer des sommes et des différences de nombres décimaux, des produits d'un nombre décimal par un entier inférieur à dix en s'appuyant sur la signification fractionnaire des décimales.

## Activités

### 1. Bande unité (période 2)

#### > DESCRIPTION RAPIDE

Dans les deux premières phases, les enfants vont devoir trouver et exprimer la longueur de segments à l'aide de fractions d'une unité de longueur  $u$  matérialisée par une bande de papier. Les fractions et la notation fractionnaire seront introduites pour formuler les démarches et les résultats des mesurages de la façon suivante: si l'on peut reporter exactement deux fois la bande unité et une moitié de la bande unité sur un segment  $[AB]^5$ , nous traduirons le résultat du mesurage en écrivant l'égalité  $AB = 2u + \frac{1}{2}u$  et en disant que la longueur du segment  $[AB]$

est égale à deux unités plus une demi-unité<sup>6</sup>.

Dans la troisième phase, les enfants devront comparer des longueurs exprimées sous la forme précédente.

Dans la quatrième phase, ils devront reconnaître et produire plusieurs écritures pour une même longueur.

#### > OBJECTIFS SPÉCIFIQUES

- Utiliser des fractions élémentaires et des écritures additives telles que:  $\frac{1}{2}$ ;

$\frac{1}{4}$ ;  $\frac{1}{8}$ ;  $\frac{3}{8}$ ;  $\frac{5}{8}$ ;  $\frac{4}{4}$ ;  $2 + \frac{3}{4}$ ;  $3 + \frac{1}{8}$ ; etc. pour exprimer des mesures de longueurs obtenues en reportant une bande unité.

- Utiliser les notations et le vocabulaire associé.

- Concevoir qu'une mesure peut s'exprimer de différentes façons et établir ainsi: des équivalences entre fractions:  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ ;

des décompositions faisant apparaître la partie entière:  $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$ ;

des résultats d'additions simples:  $1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2}$ ;  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ .

#### > PROCÉDURES SOUHAITÉES

- Pliages successifs et reports d'une bande unité pour mesurer des segments, pour construire des segments de longueurs données.

- Utilisation des fractions et des écritures fractionnaires pour communiquer les démarches et les résultats.

- Mobilisation de représentations mentales pour comparer et transformer des désignations et des écritures fractionnaires en leur donnant du sens.

5. Rappels:  $[AB]$  désigne le segment d'extrémités A et B, AB désigne, selon le contexte, sa longueur ou la mesure de cette longueur, c'est-à-dire une grandeur ou un nombre.

6. On pourrait aussi écrire l'égalité  $AB = 2 + \frac{1}{2}$  et dire que la mesure de la longueur AB est deux plus un demi.

### > VARIABLES DIDACTIQUES

- Les fractions travaillées: les dénominateurs seront toujours égaux à 2, 4 ou 8, les numérateurs seront inférieurs ou supérieurs aux dénominateurs.
- Les longueurs à mesurer: elles peuvent toujours s'exprimer à l'aide des fractions précédentes.
- Les écritures fractionnaires données aux élèves dans les activités de comparaison et de construction: certaines favorisent des décompositions additives faisant apparaître les parties entières, d'autres des transformations de fractions en fractions équivalentes.

### > MATÉRIEL

Pour les trois phases, on utilisera des bandes unité de longueur 10 cm que l'on découpera dans du papier courant (80 g/m<sup>2</sup>) pour que le pliage en 8 soit aisé.

## D É R O U L E M E N T

### ■ Première phase Utilisation de fractions de l'unité pour exprimer la longueur d'un segment

- Étape 1: Mesurage d'un segment à l'aide d'une bande et écriture d'un message

Il s'agit d'une activité de communication.

Les élèves peuvent travailler seuls ou à deux. Le travail à deux favorise les échanges et facilite la mise en commun en réduisant le nombre de messages à examiner.

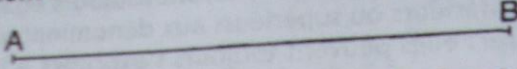
### > MATÉRIEL

- Pour chaque élève ou chaque groupe de deux élèves: une bande unité de 10 cm sur 1 cm, une feuille n° 1, une feuille n° 2, une feuille n° 3 (voir page suivante).

En cas de reproduction d'originaux des feuilles n° 1 et n° 3 avec une photocopieuse, il faut s'assurer que les longueurs sont respectées lors de la reproduction. Si ce n'est pas le cas, le plus simple est de modifier légèrement la longueur de la bande unité, afin que les mesures obtenues par report de cette bande soient bien celles données dans le tableau ci-dessous.

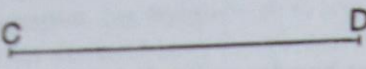
Segment	Mesure avec l'unité u	Mesure en cm
[AB] et (2)	$2 + 1/2$	25
[CD] et (5)	$1 + 3/4$	17,5
[EF] et (6)	$2 + 1/8$	21,25
(1)	$1 + 1/4$	12,5
(3)	$1 + 5/8$	16,25
(4)	$2 + 3/8$	23,75

Prénom : Feuille n°1

A  B

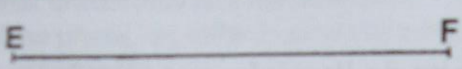
Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :  
Est-ce le bon segment ?

Prénom : Feuille n°1

C  D

Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :  
Est-ce le bon segment ?

Prénom : Feuille n°1

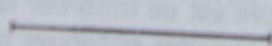
E  F

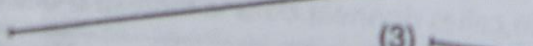
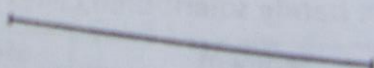
Segment de la feuille n°3 trouvé par le récepteur :  
Est-ce le bon segment ?

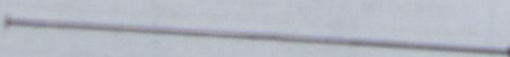
Prénom de l'émetteur : Feuille n°2  
Message :

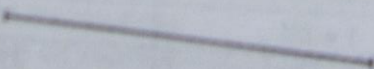
Prénom du récepteur :  
Segment de la feuille n°3 correspondant au message :  
Remarques :

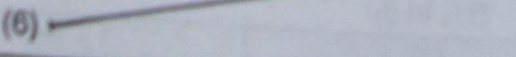
Prénom : Feuille n°3

(1) 

(2)  (3) 

(4) 

(5) 

(6) 

- Pour le maître : une bande unité de 40 cm et les segments des feuilles n° 1 et n° 3 reproduits à l'échelle 4.

Les élèves disposent de la bande unité et des feuilles n° 1 et n° 2, les règles graduées sont rangées. Tous les élèves ne reçoivent pas la même feuille n° 1. Certaines contiennent [AB], d'autres [CD], d'autres [EF]. Le maître montre la feuille n° 3, il explique que sur cette feuille se trouve un segment de la même longueur que celui qui figure sur la feuille n° 1 de chacun et il donne la consigne.

Consigne : « Sur la feuille n° 2, vous devez écrire un message qui permettra à ceux qui le recevront de trouver sur la feuille n° 3 le segment qui a même longueur que le vôtre. Vous ne pouvez pas mesurer votre segment avec le double décimètre mais vous pouvez utiliser la bande comme unité de longueur et l'appeler bande unité. »

On souhaite que les élèves mesurent leur segment en reportant la bande unité et que, pour obtenir suffisamment de précision, ils pensent à la plier en deux puis éventuellement à la replier en deux et encore en deux. On s'attend à ce que les mots moitié, demi, quart soient utilisés dans certains messages pour exprimer la démarche ou le résultat et à ce que les difficultés, les échecs, les erreurs, les ambiguïtés mettent en évidence l'intérêt des pliages, des fractions et des notations correspondantes.

#### ■ Étape 2 : Réception des messages

Les élèves deviennent récepteurs. Les feuilles n° 2 sont échangées, puis les feuilles n° 3 sont distribuées. Si cela est possible, les élèves identifient le segment de la feuille n° 3 correspondant au message reçu. Si cela est impossible ou lorsqu'ils ont terminé, ils écrivent leurs remarques concernant le message.

Un certain nombre d'enfants procèdent en reportant la bande sur le segment et pensent à plier la bande pour terminer :

Nom de l'expéditeur : *Laure.*

Message : *Mon segment mesure 2 bandes unités + une demi bande.*

Nom du récepteur : *Lainab*

Segment de la feuille n° 3 correspondant au message : *2*

Remarques : *Ces bien préci.*

Certains enfants reportent la bande dans le sens de la longueur mais aussi dans le sens de la largeur, d'autres ne pensent pas à la replier.

Nom de l'émetteur: Victoire

Message: J'ai pris la bande-unité, j'ai trouvé la moitié. J'ai replié pour trouver le car de la bande. Ensuite j'ai pris la moitié je l'ai posé sur le segment sa doit faire 3 moitié et un car.

Nom du récepteur: Virginia

Segment de la feuille n°3 correspondant au message: C'est le n°5

Remarque:

Le message est très claire

Nom de l'émetteur: Adeline

Message: J'ai plié ma bande unité en deux puis en quatre. Mon segment mesure 7 quarts de bande-unité

Nom du récepteur: Myriam

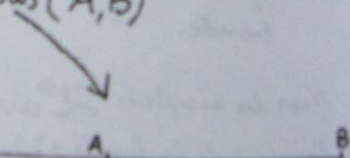
Segment de la feuille n°3 correspondant au message: 5

Remarque:

Nom de l'émetteur: Virginia

Feuille n°2

Message: Aide toi de la bande et fait un trait. Au bout de deux fois rajoute la distance ci-dessous (A, B)



A

Nom du récepteur: Victoire

Segment de la feuille n°3 correspondant au message: segment 2

Remarque: C'est très très clair

Quelques enfants ne savent pas comment utiliser la bande unité, ils se ramènent comme ils peuvent aux unités usuelles :

Nom de l'émetteur : Zainab

Message : Mon segment mesure 2 bandes + un mini morceau.

Nom du récepteur : Laure.

Segment de la feuille n°3 correspondant au message : ⑥

Remarque : Je n'avais pas compris le mini morceau.

Nom de l'émetteur : Magiam

feuille n°2

Message : Mon segment fait 2 fois la bande + un écart ressemblant beaucoup à la suite d'un mètre (1 à 2) sur une règle.  
d'un

Nom du récepteur :

Adeline

Segment de la feuille n°3 correspondant au message : n°6

Remarque : Ce n'est pas un mètre, c'est un centimètre et la bande s'appelle une bande-unité.  
s'appelle

### ■ Étape 3: Vérification

Les élèves récupèrent leur feuille n° 2 et complètent leur feuille n° 1 en vérifiant si leur message a permis aux récepteurs de trouver le bon segment.

### ■ Étape 4: Mise en commun

Le maître recense les messages obtenus pour le segment [AB] et il écrit, à côté des mesures, les segments trouvés par les récepteurs.

Les auteurs des messages viennent expliciter leur démarche avec le matériel agrandi. Le mot demi est utilisé pour désigner les fractions de bande obtenues par pliage en deux et les écritures fractionnaires sont introduites pour reformuler les résultats.

Dans la classe évoquée ci-dessus, on a écrit  $AB = 2u + \frac{1}{2}u$  et  $AB = \frac{5}{2}u$  et on a formulé la relation « dans une unité il y a deux demi-unités ».

On vérifie avec le matériel collectif et le matériel individuel que le segment (2) a même longueur que le segment [AB] en le mesurant avec la bande et en procédant par superposition.

Les erreurs et les causes d'échec sont analysées.

On procède de la même façon pour les segments [CD] et [EF].

Dans la même classe, on a écrit  $CD = \frac{7}{4}u$ ;  $CD = 1u + \frac{3}{4}u$ ;  $CD = \frac{3}{2}u + \frac{1}{4}u$ ;

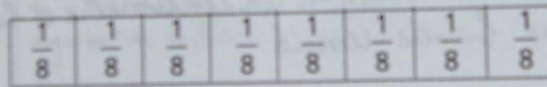
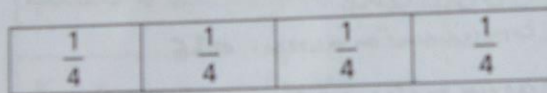
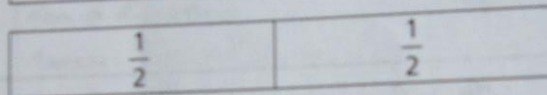
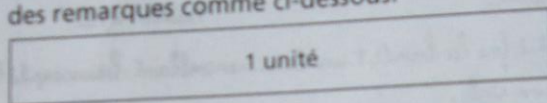
$EF = 2u + \frac{1}{8}u$ . Un élève a expliqué que la moitié d'un demi est un quart.

Si des écritures soustractives apparaissent, elles sont également retenues.

Par exemple :

$$CD = 2u - \frac{1}{4}u.$$

À l'issue de cette activité on pourra conserver une trace écrite sous forme d'un affichage collectif et en faisant coller dans les cahiers des bandes avec des remarques comme ci-dessous.



Dans une unité, il y a 2 demis, il y a 4 quarts, il y a 8 huitièmes.

Dans un demi, il y a 2 quarts, il y a 4 huitièmes.

Dans un quart, il y a 2 huitièmes.

## ■ Deuxième phase

### Utilisation des fractions pour mesurer et construire des segments

#### ■ Étape 1 : Entraînement à la mesure

Le travail est individuel. Le but est de réinvestir et de consolider les notions, le vocabulaire et les notations introduits lors de la phase précédente. Les enfants doivent mesurer tous les segments de la feuille n° 3 en utilisant la bande unité et écrire leurs résultats à côté ou au-dessus des segments en respectant les notations précédemment introduites.

Dans une classe, nous avons obtenu pour le segment (1) :

$$1u + \frac{1}{4}u \text{ (16 fois)}; 1u + \frac{2}{8}u \text{ (2 fois)}; 1u + \frac{1}{2}u \text{ (1 fois)}; 1u + \frac{2}{4}u \text{ (1 fois)};$$

$$1u + \frac{3}{4}u \text{ (2 fois)}; 1u + \frac{1}{8}u \text{ (2 fois)}; 1u \text{ (1 fois)}.$$

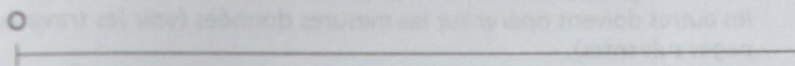
Le maître écrit au tableau les résultats obtenus pour un segment.

Ces résultats sont vérifiés individuellement par chacun, puis collectivement. Cette vérification permet d'expliciter les erreurs, de mettre en évidence et de justifier plusieurs écritures pour une même longueur.

Exemple:  $1u + \frac{1}{4}u = 1u + \frac{2}{8}u$  car dans un quart il y a deux huitièmes.

- **Étape 2: Construction de segments de longueur donnée**  
Le travail est individuel, chacun a sa bande unité.  
Les longueurs données sont choisies de manière à favoriser des décompositions  $(\frac{5}{2} = 2 + \frac{1}{2})$  et des transformations  $(\frac{2}{4} = \frac{1}{2})$ .

Les élèves reçoivent une feuille avec une demi-droite d'origine O.



Ils doivent y placer les points A, B et C tels que:

$$OA = 1u + \frac{5}{4}u; \quad OB = 2u + \frac{2}{4}u; \quad OC = \frac{5}{2}u + \frac{1}{8}u$$

Pour placer A, certains reportent une fois la bande et cinq fois un quart de bande, d'autres reportent deux fois la bande et une fois un quart.

Pour placer B et C, quelques élèves ne repartent pas de l'origine, ils placent B un quart après A et C un huitième après B.

Les différentes procédures sont explicitées et des égalités sont formulées et justifiées en plaçant les points avec la bande de 40 cm sur une demi-droite tracée au tableau.

Exemple:  $1u + \frac{5}{4}u = 2u + \frac{1}{4}u$  car dans une unité il y a quatre quarts, donc cinq quarts c'est une unité et un quart.

Dans un second temps, le maître remet à chacun une feuille avec la même demi-droite sur laquelle les points A, B et C sont correctement placés.

Les élèves vérifient si leurs points étaient bien placés, puis ils cherchent les longueurs AB, BC, AC.

Ils peuvent opérer sur les mesures données ou utiliser les points correctement placés pour mesurer les longueurs avec leur bande.

### ■ Troisième phase Comparaison de longueurs

Dans cette phase, les élèves travaillent par deux. Ils ne disposent pas de bande unité car on souhaite qu'ils opèrent sur les écritures en se représentant mentalement les fractions données.

Consigne: « Avec la bande unité, j'ai mesuré 6 segments. J'ai trouvé:

$$OA = 1u + \frac{5}{2}u$$

$$OB = \frac{7}{2}u$$

$$OC = 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u$$

$$OD = \frac{10}{4}u$$

$$OE = 2u + \frac{7}{8}u$$

$$OF = 1u + \frac{15}{8}u$$

Vous devez chercher le segment le plus court, le segment le plus long, dire s'il y a des segments de même longueur. »

En cas de difficulté importante, on pourra fournir à certains élèves une bande unité de 10 cm et les inviter à placer les points A, B, C, D, E et F sur une demi-droite d'origine O.

Ces élèves peuvent procéder de cette façon ou bien construire les différentes longueurs les unes en dessous des autres à l'aide de leur bande, mais les autres doivent opérer sur les mesures données (voir les travaux d'élèves pages suivantes).

Lors de la mise en commun, après avoir recensé, explicité et discuté les différentes réponses, la validation se fera en plaçant les points sur une demi-droite tracée au tableau. Les égalités utilisées par les enfants seront notées ainsi que les arguments utilisés.

Exemples:

$$1u + \frac{5}{2}u = \frac{7}{2}u \text{ car } 1u = \frac{2}{2}u, \text{ dans une unité il y a deux demis;}$$

$$1u + \frac{5}{2}u = 3u + \frac{1}{2}u \text{ car } \frac{5}{2}u = 2u + \frac{1}{2}u;$$

$$\frac{7}{2}u = 3u + \frac{1}{2}u \text{ car } \frac{6}{2}u = 3u; \text{ etc.}$$

#### ■ Quatrième phase

##### Production de plusieurs écritures pour une même longueur

Comme dans la phase précédente, les recherches se font sans matériel afin de favoriser les représentations mentales.

##### Activité 1

Voici des écritures:

$$\frac{4}{8}; \frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{14}{8}; \frac{10}{4}; \frac{7}{4}; 2 + \frac{1}{2}; 1 + \frac{6}{8}$$

Lesquelles désignent la même longueur ?

La recherche se fait à deux sans matériel. Les élèves sont informés que la validation sera faite par construction effective de segments.

Le maître recense les égalités. Pour chacune d'elles, il relève le nombre d'accords et de désaccords et il fait expliciter les arguments.

Exemples:

$\frac{10}{4} = 2 + \frac{1}{4}$  car dans une unité il y a quatre quarts et dans un demi il y a deux quarts.

$\frac{10}{4} = \frac{5}{2}$  car dans un demi il y a deux quarts.

La validation se fait ensuite en construisant des segments au tableau à l'aide d'une bande unité.

### Activité 2

Pour chacune des mesures données, trouvez d'autres écritures et justifiez les égalités trouvées:

$$\frac{18}{8}$$

$$3 + \frac{1}{4}$$

La recherche et la mise en commun se déroulent comme précédemment. On peut obtenir:

$\frac{18}{8} = 2 + \frac{2}{8}$  car dans une unité il y a huit huitièmes;

ou  $\frac{18}{8} = 2 + \frac{1}{4}$ ;

ou encore  $\frac{18}{8} = 1 + \frac{10}{8}$ ; etc.

$3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$  car dans trois unités il y a 12 quarts;

ou  $3 + \frac{1}{4} = 2 + \frac{5}{4}$ ; etc.

### Activité 3

Pour chacune des mesures données, trouvez au moins deux autres écritures et justifiez les égalités trouvées:

$$\frac{10}{4} = \dots$$

$$\frac{8}{3} = \dots$$

$$\frac{24}{5} = \dots$$

Le déroulement est le même. En proposant des tiers et des cinquièmes, on souhaite voir si les enfants sont capables de transférer ce qui a été fait avec les demis, les quarts et les huitièmes.

On peut par exemple obtenir  $\frac{8}{3} = 2 + \frac{2}{3}$  et  $\frac{8}{3} = 3 - \frac{1}{3}$ .

### Activité d'accompagnement

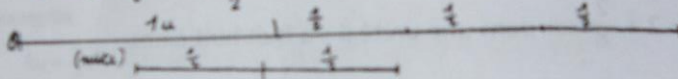
Des recherches d'écritures comme les précédentes, des questions du type « Combien de quarts dans cinq demis ? », « Combien d'unités dans quinze quarts ? » peuvent être proposées oralement lors de courtes séquences. Afin de favoriser les représentations mentales, on fait travailler les enfants sans matériel mais les réponses et les arguments sont ensuite validés avec la bande unité.

### Productions d'élèves

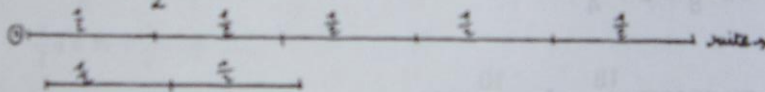
- Troisième phase

Isabelle et Reine

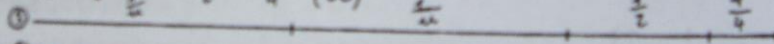
① il faut faire  $1u + \frac{5}{2}u = (OA)$



② il faut faire  $\frac{7}{2}u = (OB)$



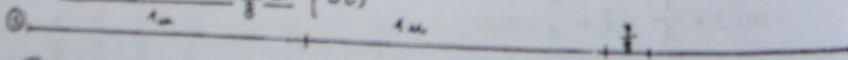
③ il faut faire  $2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u = (OC)$



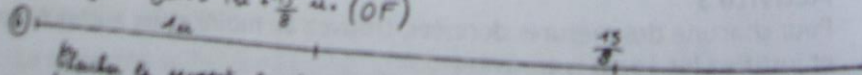
④ il faut faire  $\frac{1}{4}u = (OD)$



⑤ il faut faire  $2u + \frac{7}{8}u = (OE)$



⑥ il faut faire  $1u + \frac{15}{8}u = (OF)$



Trouver le segment le plus court. OD.

Trouver le segment le plus long. OA et OB.

Y en a-t-il de la même longueur que OA et OB, OE et OF.

- Quatrième phase

Laine, Émilie et Lucie

$$OA = 1u + \frac{5}{2}u = 3u + \frac{1}{2}u =$$

$$OB = \frac{7}{2}u = 3u + \frac{1}{2}u$$

$$OC = 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u = 2u + \frac{3}{4}u$$

$$OD = \frac{10}{4} = 2u + \frac{1}{2}u$$

$$OE = 2u + \frac{7}{8}u = 2u + \frac{3}{4}u + \frac{1}{8}u$$

$$OF = 1u + \frac{15}{8}u = 2u + \frac{7}{8}u = 2u + \frac{3}{4}u + \frac{1}{8}u$$

égaliser: OA et OB | OE et OF

plus petit: OD

plus grand: OA et OB

Raphaël et Gaëlle

$$OA = 1u + \frac{5}{2}u = 3u + \frac{1}{2}u = \frac{7}{2}u$$

$$OB = \frac{7}{2}u = 3u + \frac{1}{2}u = 1u + \frac{5}{2}u$$

$$OC = 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u = 2u + \frac{6}{4}u$$

$$OD = 2u + \frac{1}{2}u = \frac{10}{4}u$$

$$OE = 2u + \frac{7}{8}u = 1u + \frac{15}{8}u$$

$$OF = 1u + \frac{15}{8}u = 2u + \frac{7}{8}u$$

Le segment le plus court est le [OD]

Le segment le plus long est le [OA:OB]

Où il y en a de la même longueur: [OA:OB] [OE:OF].

Jeanne  
Nicolas

$$OA = 1u + \frac{5}{2}u = 3u + \frac{1}{2}u = \frac{7}{2}u \quad \text{égaux}$$

$$OB = \frac{7}{2}u = 3u + \frac{1}{2}u = 1u + \frac{5}{2}u$$

$$OC = 2u + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u = 2u + \frac{3}{4}u = \frac{5}{2}u + \frac{1}{4}u \quad \text{plus long}$$

$$OD = \frac{10}{4} = 2u + \frac{1}{2}u = 2u + \frac{2}{4}u \quad \text{plus court}$$

$$OE = 2u + \frac{7}{8}u = \frac{23}{8}u$$

$$OF = 1u + \frac{15}{8}u = \frac{22}{8}u = 2u + \frac{7}{8}u \quad \text{égaux}$$