EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Def $\quad y' = f(x,y) \quad \to$ eq. differenziale I ordine

(ha ∞ soluzioni : integrale generale)

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad \to \text{problema di Cauchy}$$

(ha un numero finito di soluzioni)

Teor (fondamentale)

Sia (PC) $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (x_0,y_0) \in \mathrm{Dom}f$

Se f è cont. in $U(x_0,y_0) \Rightarrow \exists$ soluzione locale in $U(x_0,y_0)$

Se f è lipschitziana in $U(x_0,y_0) \Rightarrow \exists!$ soluzione locale in $U(x_0,y_0)$
rispetto a y

Def $\quad f(x,y)$ è lipschitziana risp. a y in (x_0,y_0) se

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right| < k \quad \text{per } k \in \mathbb{R}$$

I) Eq. diff. a variabili separabili

$$\begin{cases} y' = \varphi(x)\,\psi(y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x)\psi(y)$$

es 14/01/20 Ri 2

$$\begin{cases} y' = \frac{t}{1+t^2}\, y^2 \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

la soluzione è sempre un intervallo

$y \equiv 0$ non è sol. del (PC)

$y \neq 0$: $\quad \frac{dy}{y^2} = \frac{t}{1+t^2}\,dt$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\,dt$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + k$$ integrale generale

$y(0) = -1$: $\quad +1 = \frac{1}{2}\ln|1| + k \Rightarrow k = +1$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + 1$$

$$\frac{1}{y} = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) - 1$$

$$y = \frac{1}{-1 + \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)}$$ soluzione del (PC)

C.E: $\quad \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right) \neq +1$

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \neq e \Rightarrow 1+t^2 \neq \frac{1}{e^2} \Rightarrow t^2 \neq \underbrace{\frac{1}{e^2} - 1}_{<0}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$

la soluzione è definita per $t \in \mathbb{R}$

II) Eq. diff. lineari del I ordine

$$\begin{cases} y' = a(x)\,y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

L'integrale generale: $y = e^{\int a(x)dx} \cdot \left\{ \int b(x)\, e^{-\int a(t)dt} dx \right\}$

15 14/02/20 n°4

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{t} y + t \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

$$y = e^{\int \frac{1}{t} dt} \left\{ \int t e^{-\int \frac{1}{u} du} dt \right\} =$$

$$= e^{\ln|t|} \left\{ \int t e^{-\ln|t|} dt \right\} =$$

$$= |t| \int t e^{\ln\left|\frac{1}{t}\right|} dt = |t| \int t \cdot \frac{1}{|t|} dt$$

In $U(1,0)$: $t>0$

$$y = t \int \cancel{t} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} dt = t(t+k) = t^2 + kt$$

$y(1) = 0$: $0 = 1 + k \Rightarrow k = -1$

$$y = y(t) = t^2 - t$$

$\mathrm{III})$ ODE a coefficienti costanti (del II ordine)

$$\begin{cases} a y'' + b y' + c y = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_1) = y_1 \end{cases} \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

$f \in C^0(\mathbb{R})$ $\exists!$ sol. definita su $\mathbb{R}$

L'integrale generale: $y = \underbrace{y_0}_{\text{sol. omogenea}} + \underbrace{\bar{y}}_{\text{sol. particolare}}$

y_0: $a y_0'' + b y_0' + c y_0 = 0$

Se $y_0 = e^{\lambda x}$: $y_0' = \lambda e^{\lambda x}$, $y_0'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$a \lambda^2 \cancel{e^{\lambda x}} + b \lambda \cancel{e^{\lambda x}} + c \cancel{e^{\lambda x}} = 0$$

polinomio associato: $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$

se $\Delta > 0$: $\lambda = \lambda_1 \vee \lambda = \lambda_2$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$

$$y_0 = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x}$$

se $\Delta = 0$: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$

$$y_0 = A e^{\lambda x} + B x e^{\lambda x}$$

se $\Delta < 0$: $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ coniugati

$$y_0 = A e^{\lambda_1 x} + B e^{\lambda_2 x}$$

$\lambda_1 = \alpha + i\beta$ $\qquad \lambda_2 = \alpha - i\beta$

$$y_0 = e^{\alpha x} \left(A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) \right)$$

(Eulero: $e^{i\beta} = \cos(\beta) + i \sin\beta$)

es 05/02/20
n° 2

$$\begin{cases} y'' - 7y' + 6y = 4e^{2x} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

$$y = y_0 + \bar{y}$$

y_0 : $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda - 6)(\lambda - 1) = 0$

$$y_0 = Ae^{6x} + Be^{x}$$

La soluzione particolare si trova per analogia con la f

- se $f(x)$ polinomio di grado n : $\bar{y}$ polinomio di grado n
- se $f(x) = e^{kx}$: $\bar{y} = \alpha e^{kx}$ se k non è sol. del polinomio associato
  $\bar{y} = \alpha e^{kx} + \beta x e^{kx}$ se k è sol. del polinomio associato
- se $f(x) = k_1 \sin(hx) + k_2 \cos(hx)$: $\bar{y} = \alpha \sin(hx) + \beta \cos(hx)$

Nell'esercizio : $f(x) = 4e^{2x}$

Cerco : $\bar{y} = \alpha e^{2x}$

$$\bar{y}'' - 7\bar{y}' + 6\bar{y} = 4e^{2x}$$

$$4\alpha \cancel{e^{2x}} - 14\alpha \cancel{e^{2x}} + 6\alpha \cancel{e^{2x}} = 4\cancel{e^{2x}}$$

$$-4\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = -1$$

Integrale generale : $y = y_0 + \bar{y} = Ae^{6x} + Be^{x} - e^{2x}$

$$y = Ae^{6x} + Be^{x} - e^{2x}$$

$$\begin{cases} y(0) = 2 \\ y'(0) = 6 \end{cases}$$

$y(0) = 2$: $\quad 2 = A + B - 1$

$y'(0) = 6$: $\quad 6A + B - 2 = 6$

$$\begin{cases} A + B = 3 \\ 6A + B = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1 \\ B = +2 \end{cases}$$

$$5A = 5$$

La soluzione del (PC) $\quad y = e^{6x} + 2e^{x} - e^{2x}$

$$y = e^{6x} + 2e^{x} - e^{2x}$$

$$e^{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6x)^k}{k!} + 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2x)^k}{k!} =$$

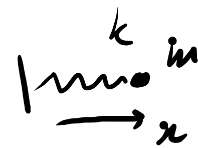
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6x)^k + 2x^k - (2x)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k + 2 - 2^k}{k!} x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \qquad R = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{\frac{1}{a_k}}$$

$$a_k \sim \frac{6^k + 2 - 2^k}{k!} \sim \frac{\alpha 6^k + o(6^k)}{k!} \sim \frac{o(k!)}{k!} \to 0$$

$R = \infty$ raggio di convergenza infinito us (Oscillatore armonico)

Legge di Hooke: $$ma = -kx$$



$$m\ddot{x} + kx = 0 \qquad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

polinomio associato: $$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + B\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ pulsazione $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

23/07/20
es. 6

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = e^x \cos x - x^2 = f(x) \\ y'(0) = 2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

a) $\exists!$ sol. definita su $\mathbb{R}$ visto che $f \in C^0(\mathbb{R})$

b) La soluzione passa per $(0,1)$ per la II condizione iniziale

c) $T_{x_0} f : y = 2x + 1 \qquad x_0 = 0$

$T_{x_0} f : \quad y - \underbrace{y_0}_{1} = \underbrace{y'(x_0)}_{2} (x - \underbrace{x_0}_{0})$

$y - 1 = 2x \Rightarrow y = 2x + 1$

d) $y'' = 3y' - 2y + e^x \cos x - x^2$

$y''(0) = 3\underbrace{y'(0)}_{2} - 2\underbrace{y(0)}_{1} + 1 = 6 - 2 + 1 = 5$

e) $y''' = (y'')' = (3y' - 2y + e^x \cos x - x^2)' =$

$= 3y'' - 2y' + e^x \cos x - e^x \sin x - 2x$

$y'''(0) = 3y''(0) - 2y'(0) + 1 = 15 - 4 + 1 = 12$

f) $y''(0) = 5 > 0 \qquad$ la concavità è rivolta verso l'alto

12/09/17
n 4

i) $\begin{cases} y' = \dfrac{xe^x}{2y} \\ y(0) = y_0 \end{cases}$ (*)

$y \equiv k = y_0$ costante : $0 \equiv \dfrac{xe^x}{2y_0}$ $\forall x$ $\Rightarrow$ non esistono soluzioni costanti

$y(0) = y_0 = -1$

(*) $2y\,dy = xe^x\,dx$

$y^2 = \int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx =$ per parti

$= xe^x - e^x + k$

$y(0) = -1$: $1 = -1 + k \Rightarrow k = 2$

$y^2 = xe^x - e^x + 2$

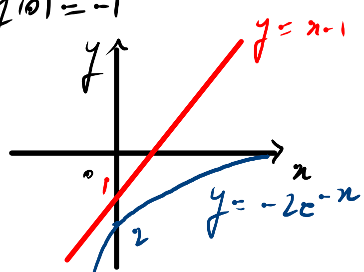
$\left.\begin{array}{l} y = \pm\sqrt{xe^x - e^x + 2} \\ y(0) = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow y = -\sqrt{xe^x - e^x + 2}$

definita solo per

$e^x(x-1) + 2 \geq 0$

$x - 1 \geq -2/e^x = -2e^{-x}$

Dom $y = \{x \in \mathbb{R}\}$



ii) $y'' - 2y' + y = e^x$ $\qquad \exists !$ sol. globale def. su $\mathbb{R}$

$y = y_0 + \bar{y}$: polinomio associato

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 0$

$\lambda = 1$ doppia

$y_0 = Ae^x + Bxe^x$

$\bar{y} = \alpha e^x + \beta x e^x$: $\qquad \bar{y}' = \alpha e^x + \beta e^x + \beta x e^x$

$\bar{y}'' = \alpha e^x + \beta e^x + \beta e^x + \beta x e^x$

$$\alpha \cancel{e^x} + 2\beta \cancel{e^x} + \beta x \cancel{e^x} - 2(\alpha \cancel{e^x} + \beta \cancel{e^x} + \beta x \cancel{e^x}) + \alpha \cancel{e^x} + \beta x \cancel{e^x} = \cancel{e^x}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - 2\alpha - 2\beta + \alpha = 1 \\ \beta - 2\beta + \beta = 0 \end{cases}$$

non si conclude

Cerchiamo: $y = \alpha x^2 e^x$

Perché non funziona il metodo precedente?

$ay'' + by' + c = e^{kx}$

se polinomio associato ha sol. $\lambda = \lambda_1$ e $\lambda = \lambda_2$ $\quad (\Delta > 0)$

$\lambda_1 \neq k$ e $\lambda_2 \neq k$: $\quad \bar{y} = \alpha e^{kx}$

$\lambda_1 = k$ e $\lambda_2 \neq k$: $\quad \bar{y} = \alpha x e^{kx}$

se polinomio associato ha sol. $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ $\quad (\Delta = 0)$

$\lambda \neq k$: $\quad \bar{y} = \alpha e^{kx}$

$\lambda = k$: $\quad \bar{y} = \alpha x^2 e^{kx}$