Appunti di Analisi complessa

Serie di Laurent

Prop. Sia f una funzione meromorfa su un aperto $\Omega \subseteq \mathbf{C}$ (ovvero f è olomorfa su $\Omega - Sing(f)$, dove $Sing(f)$ è l'insieme discreto delle singolarità isolate). Allora:

- $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, con p, q olomorfe su Ω;
- $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ (**serie di Laurent**) nella corona circolare $r < |z - z_0| < R$, essendo:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw\,, & n \geq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw\,, & n < 0 \end{cases}$$

dove γ_r è il bordo interno della corona circolare e γ_R è il bordo esterno della corona circolare.

Oss. Se f è olomorfa in z_0, allora $a_n = \frac{f^n(z_0)}{n!}$. In particolare, tutti i termini con indice negativo sono nulli.

Oss. La serie di Laurent converge uniformemente nella corona circolare $r < |z - z_0| < R$.

<u>Come si calcolano i raggi di convergenza r e R?</u>

Prop. Posto che almeno uno dei limiti indicati esista:

$$\frac{1}{R} = limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$$r = limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{-n}|} = limsup_{n\to\infty} \frac{|a_{-n-1}|}{|a_{-n}|}$$

Residui

Def. Il termine $a_1 = Res(f, z_0)$ è il **residuo** di f in z_0.

Teor. (dei residui di Cauchy)

Sia γ una curva chiusa semplice il cui interno contiene un certo insieme A di singolarità di una funzione meromorfa f. Allora:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_0 \epsilon A} Res(f, z_0)$$

Come si calcolano i residui?

Prop. Sia $z_0 \in Sing(f)$. Allora:

1. Se z_0 è eliminabile (i.e. $\lim_{z \to z_0} f(z)$ è finito), allora $Res(f, z_0) = 0$.
2. Se z_0 è un polo di ordine k (i.e. $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ è finito), allora $Res(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_o)^k f(z)]$.

Oss. Se z_0 è essenziale (i. e. $\lim_{z \to z_0} f(z)$ non definito), il residuo si calcola ricorrendo allo sviluppo di Laurent.