SERIE

serie numeriche — serie di potenze — serie di Fourier

Serie numeriche

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \quad \begin{cases} \text{conv. semplice} & \left|\sum_{n_0}^{\infty} a_n\right| < +\infty \\ \text{conv. assoluta} & \sum_{n_0}^{\infty} |a_n| < +\infty \end{cases}$$

Conv. assoluta $\Rightarrow$ conv. semplice

<u>CN</u> $a_n \to 0$

a) <u>Serie a termini positivi</u> : $a_n \geq 0$ definitivamente

$$\sum a_n = \begin{cases} +\infty & \text{diverge} \\ k < \infty & \text{converge} \end{cases}$$

i) Criterio della radice

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} k < 1 & \sum a_n \text{ conv.} \\ k > 1 & \sum a_n \text{ div.} \end{cases}$$

ii) Criterio del rapporto

con i fattoriali

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} k < 1 & \sum a_n \text{ conv.} \\ k > 1 & \sum a_n \text{ div.} \end{cases}$$

iii) Confronto con serie asintotiche

$$a_n \sim \frac{1}{n^{\alpha} \log^{\beta} n}$$

$\sum a_n$ conv. se $\alpha > 1$ $\vee$
se $\alpha = 1 \wedge \beta > 1$

Altrimenti diverge

b) Serie oscillanti

$$\sum (-1)^n a_n \qquad a_n \geq 0$$

convergono, divergono o non ammettono limite

es $\sum (-1)^n = ?$

Criterio di Leibniz:

se $a_n \searrow 0$ (a_n monotona decrescente) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum (-1)^n a_n$ conv.

5/5/17
lo 2

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n+n^n}{3^{2n} n!} = \sum (-1)^n a_n$$

C. assoluta: $\sum a_n = \sum \frac{3^n+n^n}{3^{2n} n!}$

$$a_n \sim \frac{n^n}{3^{2n} n!} = b_n$$

Crit. del rapporto $\frac{b_{n+1}}{b_n} \sim \frac{(n+1)^{n+1}}{3^{2n+2}(n+1)!} \cdot \frac{3^{2n} n!}{n^n} \sim$

$$\sim \cancel{(n+1)} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{1}{\cancel{n+1}} \sim$$

$$\sim \frac{1}{9}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{1}{9} e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{1}{9} e \to \frac{e}{9}$$

$\sum b_n$ conv. (ass.) $\Rightarrow$ $\sum a_n$ conv. (ass.) $\Rightarrow$ $\sum (-1)^n a_n$ conv. ass.

$$\Downarrow$$

$\sum (-1)^n a_n$ conv. simpl.

19/07/18 es.3

a) $\sum (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n^\alpha + \ln n}$ $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$\parallel$

$\sum (-1)^n a_n$

$(-1)^n a_n \to 0$ solo se $\alpha > 1/2$ (CN)

Conv. assoluta : $\sum a_n$: $a_n \sim \frac{1}{n^{\alpha - 1/2}}$

$\sum a_n$ conv. se $\alpha - 1/2 > 1 \Rightarrow \alpha > \frac{3}{2}$

$\sum a_n$ div. se $\alpha < \frac{3}{2}$

Per $\alpha > \frac{3}{2}$: $\sum (-1)^n a_n$ conv. assolutamente $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ conv. semplicemente

Per $\alpha \leq \frac{1}{2}$: $\sum (-1)^n a_n$ <u>non</u> conv.

$\sum (-1)^n a_n$ $a_n \sim \frac{1}{n^{\alpha - 1/2}} \Rightarrow a_n \searrow 0$

Per criterio di Leibniz $|\sum (-1)^n a_n| < +\infty$ (converge)

Per $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{3}{2}$: $\sum (-1)^n a_n$ conv. solo semplicemente

Serie di potenze

collegate alle funzioni C^ω

$(C^\infty([a,b]) \subsetneq C^\omega([a,b]))$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ cerchiamo il raggio di convergenza R

vera $(x_0 - R, x_0 + R) \rightarrow$ aperto

es $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $R=\infty$

$\arctan x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $R=1$

def. $x \in (-1,1)$

Prop $\sum a_n (x-x_0)^n \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

R è il raggio di conv. (la serie conv. su (x_0-R, x_0+R) uniformemente e totalmente)

c. totale $\Rightarrow$ c. uniforme

Ricordiamo

Def $\{f_n(x)\}$

f_n conv. puntualmente in x_0 a f $(f_n \xrightarrow[\text{punt.}]{} f)$

$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$

$f_n \to f$ uniformemente

$\sup_x |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Oss $f_n \to f$ uniformemente $\Rightarrow f_n \to f$ semplicemente $\forall x$

Def $\sum a_n (x-x_0)^n$ conv. totalmente se $\exists \{M_n\}$

$|a_n (x-x_0)^n| < M_n$ con $\sum M_n < \infty$

23/07/20

es. 7

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} x^n \qquad \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} = a_n$$

$$1/R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^3}} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} x^n$ conv. totalmente $(-1, 1)$

($\Rightarrow$ conv. uniformemente e puntualm.)

se $x = -1$:

$$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} (-1)^n = \sum \frac{(-1)^{2n-1}}{n^3} =$$

$$= \sum \frac{-1}{n^3} = -\sum \frac{1}{n^3} \quad \text{conv. ass.}$$

$\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} x^n$ conv. puntualmente per $x = -1$

se $x = 1$: $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n^3} = \sum (-1)^n \left(-\frac{1}{n^3}\right)$ conv. ass.

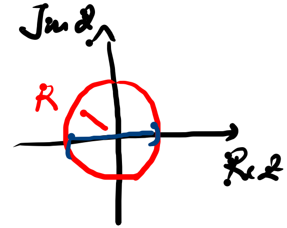
$\sum \frac{(-1)^n}{n^3} x^n$ conv. ass. su $[-1, 1]$

2/2/22

Es. 10

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n = \sum a_n z^n$$

Raggio di convergenza



$$1/R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \sim \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{(n+1)}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \sim$$

$$\sim e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \sim e^{-n/n+1} \to e^{-1} \Rightarrow R = e$$

$\sum a_n z^n$ conv. totalmente in $B(0,e) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < e\}$

SERIE DI FOURIER

Df $f \in L^2([-\pi, \pi])$ se $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx}$$

Oss $C^0([-\pi, \pi]) \subseteq L^2([-\pi, \pi])$

es $f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x \le 0 \\ 1 & 0 < x \le \pi \end{cases}$

ha quadrato integrabile $(f \in L^2([-\pi, \pi]))$

ma **non** è continua

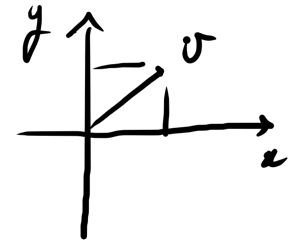
Consideriamo $f \in L^2([-\pi,\pi])$

Serie di Fourier

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

coefficienti di Fourier

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \end{cases}$$



$$\underline{v} = \langle \underline{v}, \underline{e}_1\rangle \underline{e}_1 + \langle \underline{v}, \underline{e}_2\rangle \underline{e}_2$$

In analogia con R^n $\{\sin(nx), \cos(nx)\}$ costituiscono una base (di Schauder) di $L^2([-\pi,\pi])$ spazio vettoriale dotato di prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$$

Proprietà

CORRETTO

1. $\|f\|_2^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$ identità di Parseval

- $S_n f \to f$ **non** puntualmente

ma in norma L^2 (in media quadratica)

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |S_n f(x) - f(x)|^2 dx} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

dove $S_n f(x) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$

<u>Non</u> vale $Sf(x) = f(x)$ in generale

Prop f regolare a tratti su $[-\pi, \pi]$

(C^1 salvo che in un numero finito di punti)

allora $f(x) = Sf(x)$ $\forall x \in [-\pi, \pi]$ in cui f è continua

$$Sf(x_0) = \frac{f_-(x_0) + f_+(x_0)}{2}$$ $\forall x_0$ punto di disc. isolata

$$f_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \qquad f_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

Oss La teoria si estende naturalmente alle funzioni 2π-periodiche e $L^2([-\pi, \pi])$

Oss $$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

f pari $\Rightarrow$ $b_n = 0$ $\forall n$

f dispari $\Rightarrow$ $a_n = 0$ $\forall n$

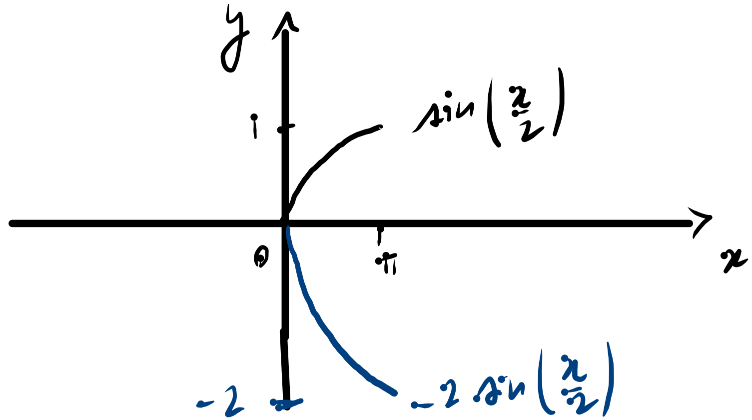
04/05/15

es. 3

$$f(x) = 5 - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \qquad x \in [0, \pi]$$

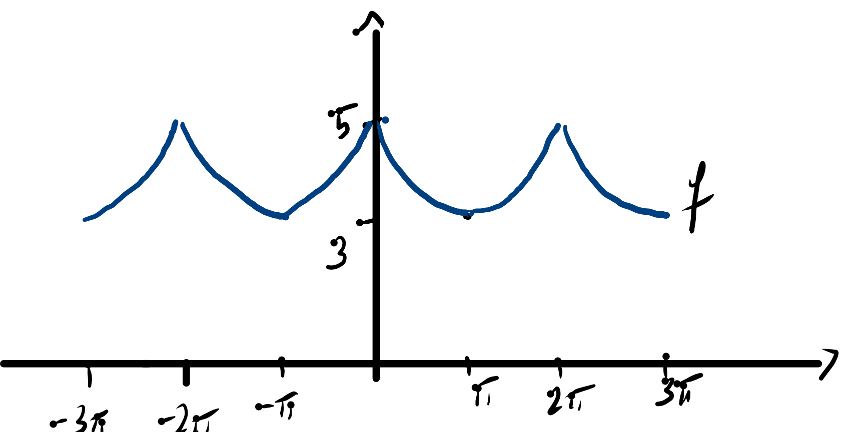
2π-periodica, pari

$$Sf(x) = 5 - \frac{4}{\pi} + \sum_{1}^{\infty} \frac{8}{(4n^2-1)\pi} \cos(nx)$$



$\sin(kx)$

$T = \frac{2\pi}{k}$



$f \in C^0(\mathbb{R})$

C^1 a tratti

$$Sf(x) = \underbrace{5-\frac{4}{\pi}}_{\frac{a_0}{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{8}{(4n^2-1)\pi}}_{a_n} \cos(nx)$$

$$\frac{a_0}{2} = 5-4\pi \qquad a_n = \frac{8}{(4n^2-1)\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \underset{\text{peri}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(5-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \underset{\text{peri}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(5-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)\cos(nx)\,dx$$

$b_n = 0$ $\quad f$ è pari

f è C^0 e C^1 a tratti $\Rightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$$Sf(x) = f(x)$$

(Sf conv. puntualmente in tutti i punti in cui f è cont.)

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n^2-1)} = \sum_{1}^{\infty} c_n$$

$$f(\pi) = Sf(\pi) = 5 - \frac{4}{\pi} + \sum_{1}^{\infty} \frac{8}{(4n^2-1)\pi} (-1)^n =$$

$$= 5 - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi} \sum_{1}^{\infty} c_n$$

$$f(\pi) = 5 - 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad 5 - \frac{4}{\pi} + \frac{8}{\pi} \sum_{1}^{\infty} c_n = 3 \Rightarrow \sum c_n = \left(-2 + \frac{4}{\pi}\right) \frac{\pi}{8}$$

02/02/22

es 9

$f(x) = \sin x \sin^2(x)$ su $[-\pi, \pi)$

2π-periodica (f dispari)

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

a) F conv. in media quadratica su $[-\pi, \pi]$ a f

$$F \xrightarrow[L^2]{} f$$

b) $f(-\pi) = 0$

$f(\pi) = 0$

f è $C^0(\mathbb{R})$

e $C^1(\mathbb{R})$ a tratti

$F(x) \to f(x)$ puntualmente $\forall x \in \mathbb{R}$

c) $a_n, a_0 = 0$ f dispari