vector maths & science

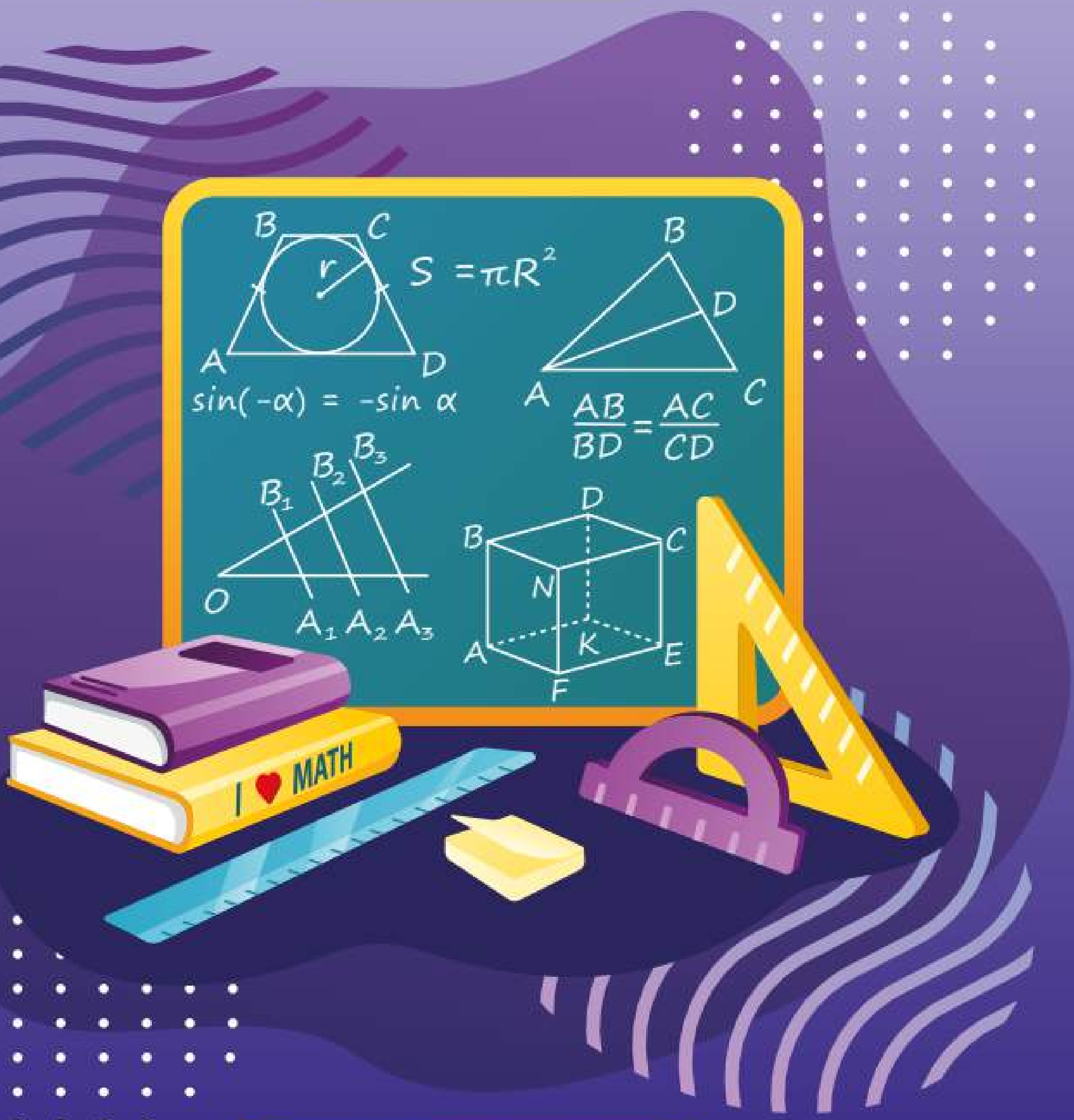
НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

formula Maths, Science & ICT

Джон Ендрю Біос

Геометрія

8 клас



Містить цифровий контент

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

Джон Ендрю Біос

Геометрія

Підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

8 клас

Київ
Видавництво «Лінгвіст»
2025

УДК 514*кл8(075.3)
Б 65

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 21.02.2025 № 347)

Підручник створено відповідно до модельної навчальної програми «Геометрія. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автора Істера О. С.)

Джон Ендрю Біос

Б 65 Геометрія : підруч. для 8 кл. закл. заг. сер. освіти / Джон Ендрю Біос. – К. : Видавництво «Лінгвіст», 2025. – 224 с. : іл.
ISBN 978-617-8290-40-5

Підручник розроблено згідно з Державним стандартом базової середньої освіти. Навчальний матеріал подано в доступній, чіткій та ілюстративній формі з урахуванням вікових особливостей здобувачів і здобувачок освіти. Видання містить цифровий контент, проєктну діяльність. Призначено для учнів та учениць 8 класу.

УДК 514*кл8(075.3)

Електронний додаток до підручника можна знайти за посиланням:
https://lms.e-school.net.ua/courses/join/add1720e/

ISBN 978-617-8290-40-5

Вітаємо, друзі та подруги!

Ми продовжуємо разом з вами вивчати основні принципи й концепції геометрії, які є фундаментом для багатьох галузей математики та інших наук.

Геометрія має різноманітне практичне застосування в реальному житті — від архітектури й інженерії до мистецтва й дизайну. Ця наука не лише розвиває логічне мислення і просторову уяву, а й відкриває нові горизонти для творчості та інновацій.

Для того, щоб краще й ефективніше сприймати інформацію, матеріал у підручнику подано в чіткій та ілюстративній формі. **Виноски на полях** біля теоретичного матеріалу слугують додатковими підказками та нагадуваннями.

Нотатки	Типові помилки	Проблемні питання	Історичні факти про математику	Підтримка ІКТ

Для швидкого орієнтування в підручнику використано такі **умовні позначки:**

1 — завдання для фронтальної та індивідуальної роботи;

2 — пізнавальні та прикладні завдання;

3 — завдання підвищеної складності;

4 — завдання з використанням ПЗ GeoGebra;

5 — математика англійською.

Як користуватися підручником

На початку кожного розділу підручника подано опис того, що вивчатиметься в ньому, а також наведено приклади практичного застосування теми. Це допоможе вам зрозуміти, як нові знання можна використати в реальному житті та чому вони важливі для вашого подальшого навчання і розвитку. Тут міститься і словник математичних термінів українською та англійською мовами.

Повторити вивчений матеріал вам допоможе рубрика **Короткий огляд розділу**,

а перевірити свої знання — **Перевірте свої досягнення**,

які розміщено наприкінці кожного розділу.

За допомогою проєктних робіт ви можете спробувати застосувати набуті знання на практиці.

У рубриці **Додаткові завдання до розділу** ви знайдете цікаві, нестандартні завдання, а також завдання англійською мовою.

Зміст підручника доповнено інтерактивними вправами та робочими аркушами, які доступні в **електронному додатку** (посилання розміщено на с. 2). Так ви матимете змогу краще зрозуміти та закріпити вивчений матеріал у зручний час та в обраному для вас темпі.

Скористайтеся вміщеними в підручнику **QR-кодами**, щоб ознайомитися з доведенням властивостей, ознак і теорем.

Доведення властивостей, ознак і теорем

https://formula.education/dovedennya-teorem-oznak-ta-vlastyvostej-geometriya-8-klas/

Бажаємо успіхів!

Зміст

4 Подібність геометричних фігур 105

5 Розв'язування прямокутних трикутників 147

6 Повторення та систематизація знань 195

1

Повторення вивченого в 7 класі

Геометрія тісно пов'язана з природою і оточує нас повсюди. Наприклад, водні хвилі і форми піщаних дюн також мають геометричні візерунки, що виникають унаслідок дії вітру й води. Ці природні процеси демонструють, як геометрія допомагає розуміти та передбачати поведінку природних систем.

Листя рослин часто має симетричні візерунки, що сприяють ефективному поглинанню світла для фотосинтезу. Наприклад, форма листя клена або дуба дає змогу максимізувати площу, що піддається сонячному світлу.

Геометрія в природі не лише дивує своєю красою, а й дає нам корисні знання для розвитку та вдосконалення, прийняття ефективних і гармонійних рішень.

У цьому розділі ми:

- пригадаємо елементарні геометричні фігури та їх властивості;
- обчислюватимемо відстані, використовуючи масштаб;
- класифікуватимемо кути за їх градусною мірою, їх властивостями;
- застосовуватимемо ознаки рівності трикутників до розв'язування прикладних задач;
- пригадаємо основні елементи кола та круга.

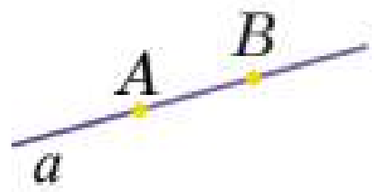
Ключові слова

- Пряма (*straight line*)
- Промінь (*ray*)
- Відрізок (*segment of line*)
- Кут (*angle*)
- Точка (*point*)
- Трикутник (*triangle*)
- Коло, круг (*circle*)
- Дотична (*tangent*)

1 Повторення вивченого в 7 класі

1.1. Елементарні геометричні фігури та їх властивості

Якщо точка належить прямій, то записуємо так: $A \in a$. Якщо ж не належить, то $B \notin a$.



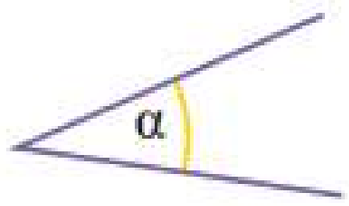
Пряма a, пряма AB

Промінь AB

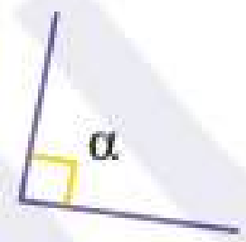
Відрізок AB

Види кутів

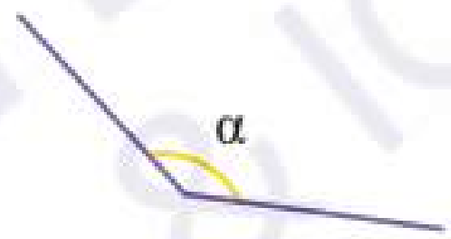
Міри кутів можна записувати у градусах, мінутах та секундах: $1° = 60' = 3600''$



Гострий кут ($0° < \alpha < 90°$)

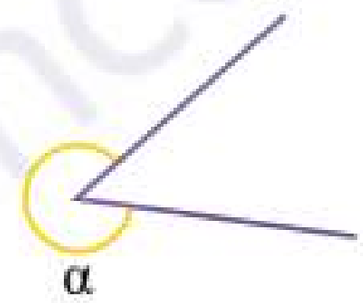


Прямий кут ($\alpha = 90°$)



Тупий кут ($90° < \alpha < 180°$)

Розгорнутий кут ($\alpha = 180°$)

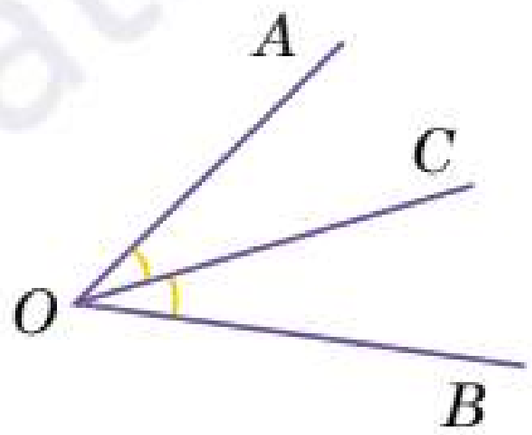


Більший за розгорнутий ($180° < \alpha < 360°$)

Як користуватися транспортиром

1. Прикладіть транспортир так, аби вершина кута збігалася з центром транспортира, а один із променів лежав на його основі і проходив через нульову позначку транспортира.
2. Другий промінь кута буде проходити через поділку транспортира, що й буде визначати градусну міру цього кута.

Бісектриса кута



OC — бісектриса кута AOB,

$$\angle AOC = \angle BOC = \frac{\angle AOB}{2}$$

Попрактикуйтеся

1 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Відрізок є частиною прямої.
б) Через кожні три точки можна провести пряму.
в) Через кожні дві точки можна провести пряму.
г) Точка ділить пряму на два рівних промені.

2 Які з точок належать променю TS, а які — променю FO?

3 З'ясуйте, чи лежать точки M, N, K на одній прямій. Якщо так, то вкажіть порядок цих точок:

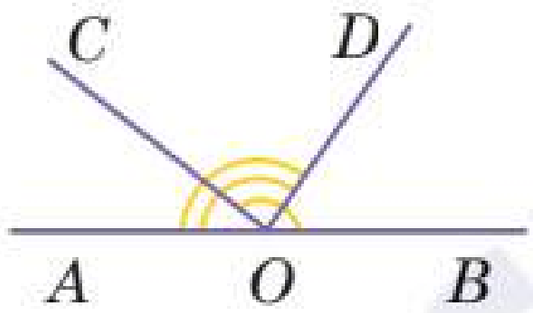
а) $MN = 3$, $NK = 6$, $MK = 10$;
б) $KN = 5$, $MN = 7$, $MK = 12$;
в) $MK = 13$, $NK = 15$, $NM = 4$;
г) $KM = 8$, $MN = 21$, $KN = 13$.

4 Накресліть, не використовуючи креслярських інструментів:

а) відрізки довжиною 4 см, 3,5 см та 5 см. Перевірте себе за допомогою лінійки;
б) кути 30°, 60° та 90°. Накресліть їх бісектриси. За допомогою транспортира перевірте себе.

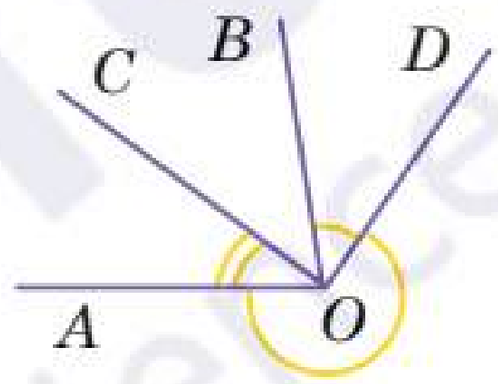
5 Розв'яжіть задачі за готовими рисунками:

а)



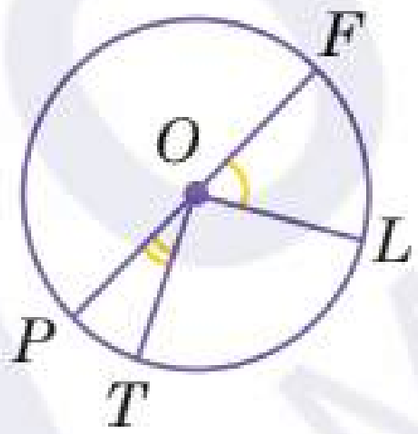
$\angle AOD = 130°$,
$\angle COB = 100°$
$\angle AOC$ — ?

б)



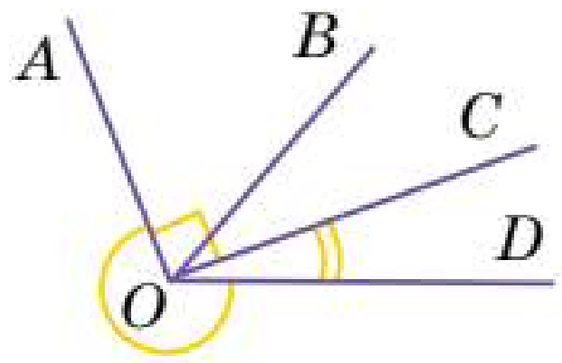
BO – бісектриса $\angle COD$, $\angle BOD = 35°$,
$\angle AOC = 58°$
$\angle AOD$ — ? (як показано на рисунку)

в)



$\angle POT = 25°$, $\angle FOL = 32°$
$\angle TOL$ — ?

г)



$\angle AOC = 90°$, $\angle COD = 35°$,
$\angle AOD$ — ? (зовнішній)

6 Промінь OE ділить кут AOB на два кути. Знайдіть $\angle AOB$, якщо:

а) $\angle AOE = 44°$, $\angle EOB = 77°$;
б) $\angle AOE = 12°37'$, $\angle EOB = 108°25'$.

7 Розгорнутий кут FON має внутрішні промені OM та OK, так що $\angle FOM : \angle MOK = 2 : 3$. Відомо, що $\angle FOK = 135°$. Знайдіть $\angle KON$.

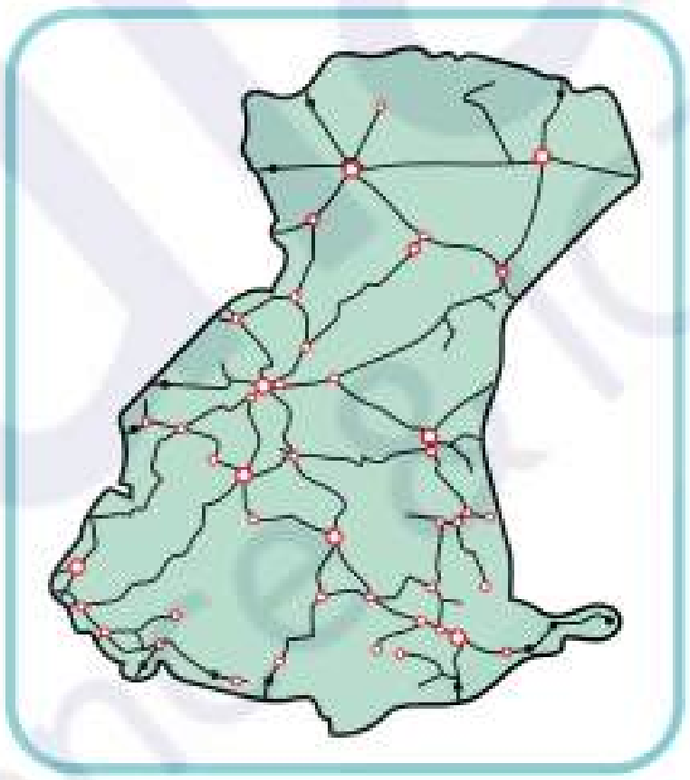
8 Кут AOB є частиною кута AOC. Відомо, що $\angle AOC = 108°$, $\angle AOB = 3\,\angle BOC$. Знайдіть градусну міру $\angle AOB$.

9 Уважно розгляньте на малюнки. Які об'ємні тіла ви тут бачите? На які елементи можна їх розкласти?

Собор Святої Трійці, Тбілісі, Грузія

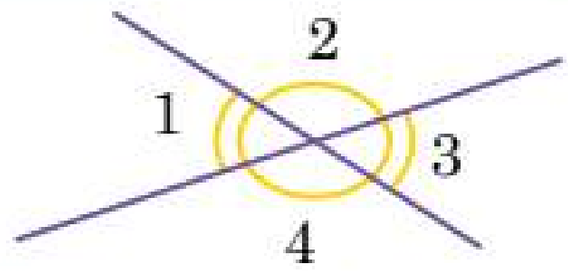
Лувр, Париж, Франція

10 На фотографії представлено типовий перетин залізничних шляхів Львівської області. Подивіться уважно та дайте відповідь на запитання: скільки кутів ви бачите? Виміряйте (за можливості) їх за допомогою транспортира. Поміркуйте, як у реальному житті вимірюють кути. Наведіть приклади іншого використання кутів в побуті людини.

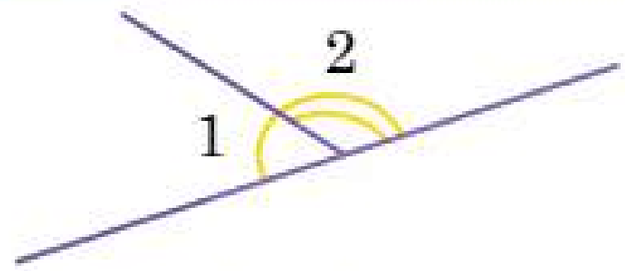


11 Вимірявши лінійкою на карті, знайдіть найкоротший шлях, який пройде турист. Зараз він знаходиться біля Українського державного університету ім. М. П. Драгоманова та має дійти до Національного науково-природничого музею НАН України. Обчисліть час прогулянки, врахувавши, що середня швидкість людини становить 1,5 м/с, масштаб карти 1 : 6000.

1.2. Взаємне розміщення прямих на площині

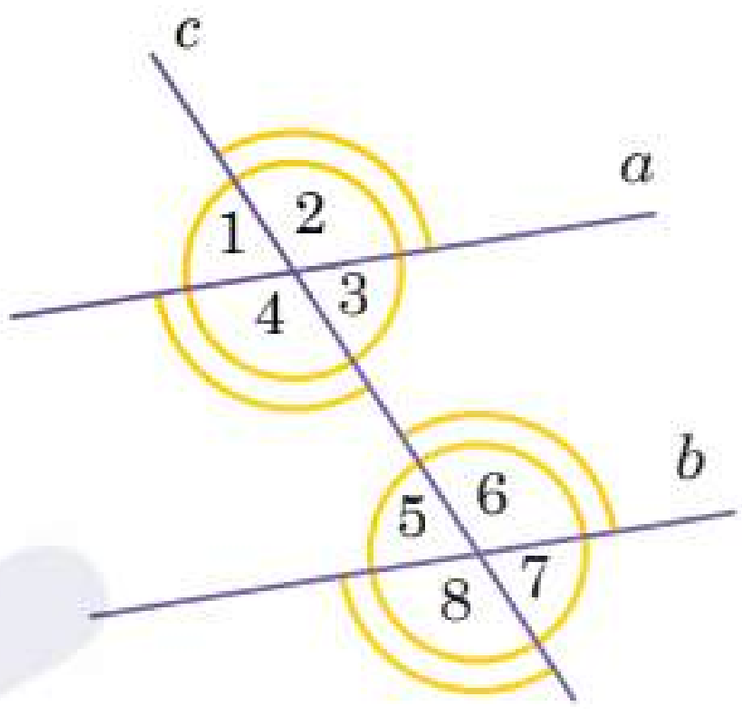


Вертикальні кути:
$\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$



Суміжні кути:
$\angle 1 + \angle 2 = 180°$

Якщо пряма a паралельна до прямої b і пряма c — січна, то утворюються такі пари кутів:



Внутрішні різносторонні:
$\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$

Внутрішні односторонні:
$\angle 3 + \angle 6 = 180°$, $\angle 4 + \angle 5 = 180°$

Відповідні:
$\angle 4 = \angle 8$, $\angle 3 = \angle 7$
$\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 6$

Зовнішні односторонні:
$\angle 1 + \angle 8 = 180°$, $\angle 2 + \angle 7 = 180°$

Зовнішні різносторонні:
$\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$

Ознаки паралельних прямих:
1) внутрішні різносторонні кути рівні;
2) відповідні кути рівні;
3) сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°.

Між собою прямі можуть перетинатися або не перетинатися. Перпендикулярні (⊥) прямі — це ті прямі, що при перетині утворюють кут 90°. Паралельні (∥) прямі — це ті прямі, які ніколи не перетинаються.

Попрактикуйтеся

12 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

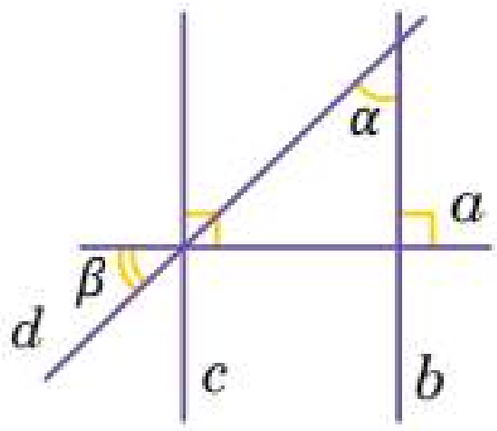
а) Якщо при перетині двох прямих січною, внутрішні різносторонні кути рівні, то такі прямі паралельні.
б) При перетині двох прямих утворюється тільки одна пара суміжних кутів.
в) Через точку, що не належить прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.
г) Якщо прямі перетинаються, то вони перпендикулярні.
д) Існують три прямі, які є взаємно перпендикулярними.
е) Два суміжних кути можуть бути вертикальними.
ж) Якщо кути рівні, то вони вертикальні.

13 Дано довільний трикутник ABC. Скільки прямих, паралельних стороні AB, можна провести через точку C?

14 Через точку, що не належить прямій p, проведені чотири довільні прямі. Яка кількість побудованих прямих перетинають дану пряму p? Розгляньте всі можливі випадки.

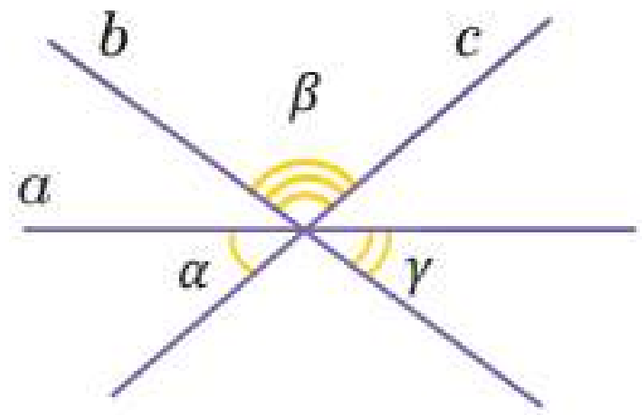
15 Знайдіть невідомі кути на рисунках:

а)



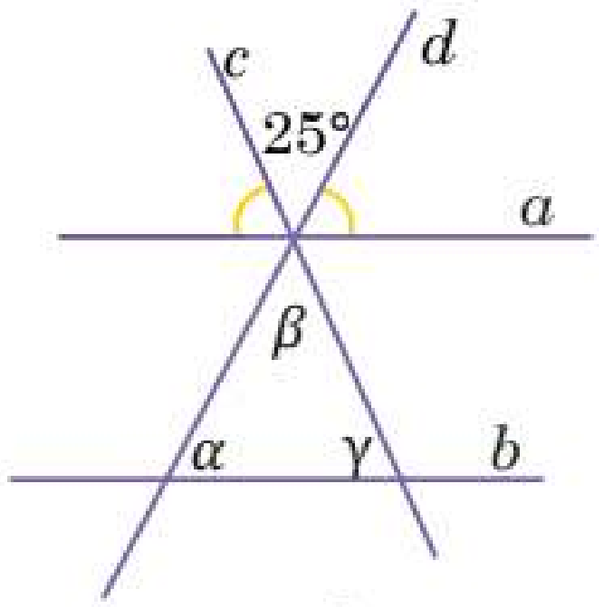
d — бісектриса,
α, β — ?

б)



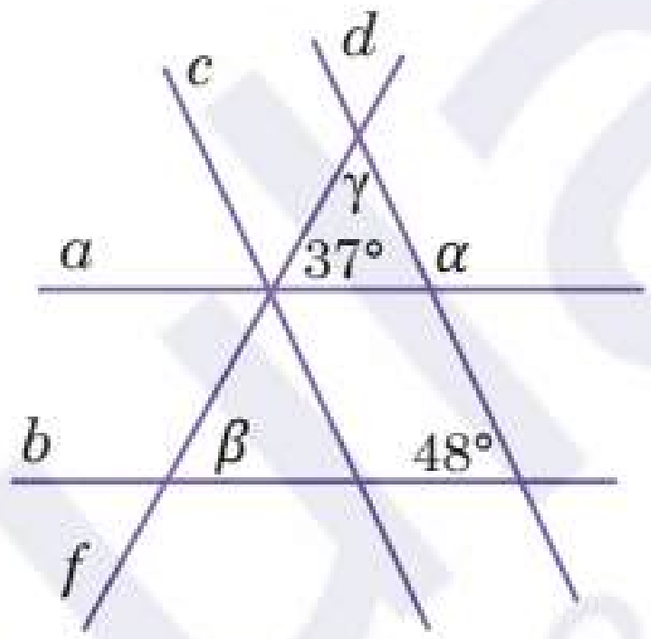
$\alpha + \beta + \gamma$ — ?

в)



$a \parallel b$
α, β, γ — ?

г)

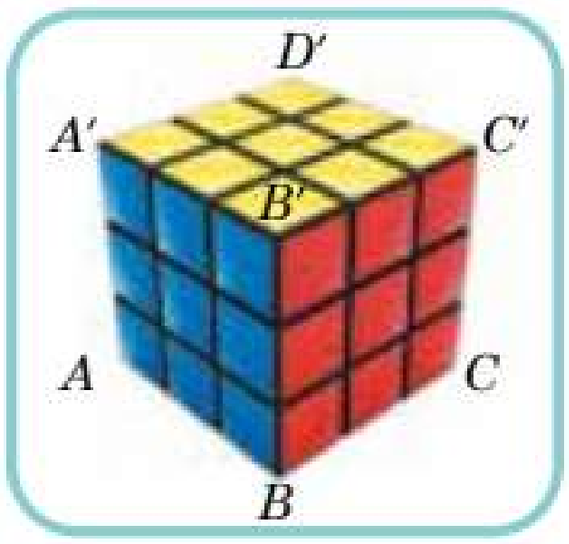


$a \parallel b$, $c \parallel d$
α, β, γ — ?

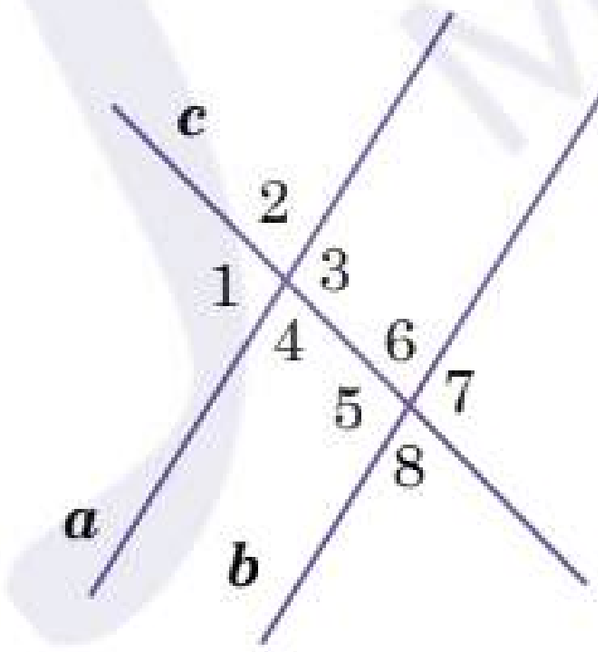
16 За допомогою транспортира та лінійки побудуйте кут величиною 68° та його бісектрису. На ній на відстані 4 см від вершини кута поставте точку A. З цієї точки опустіть перпендикуляри на сторони кута та виміряйте їх довжину. Порівняйте отримані величини та поясніть, чому так сталося.

17 Доведіть, що сторони квадрата попарно паралельні.

18 Користуючись зображенням куба, назвіть паралельні й перпендикулярні ребра та грані прямокутного паралелепіпеда.



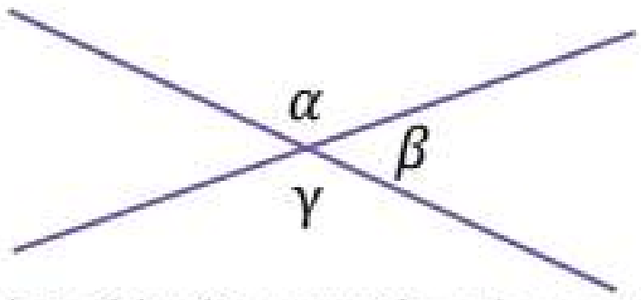
19



Користуючись рисунком, знайдіть градусні міри зображених кутів, якщо прямі a та b паралельні:

а) $\angle 2 + \angle 4 + \angle 5 = 225°$;
б) $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 280°$;
в) $\angle 2 : \angle 3 = 2 : 3$.

20 На рисунку сума кутів α, β, γ дорівнює 256°. Знайдіть градусні міри цих кутів.

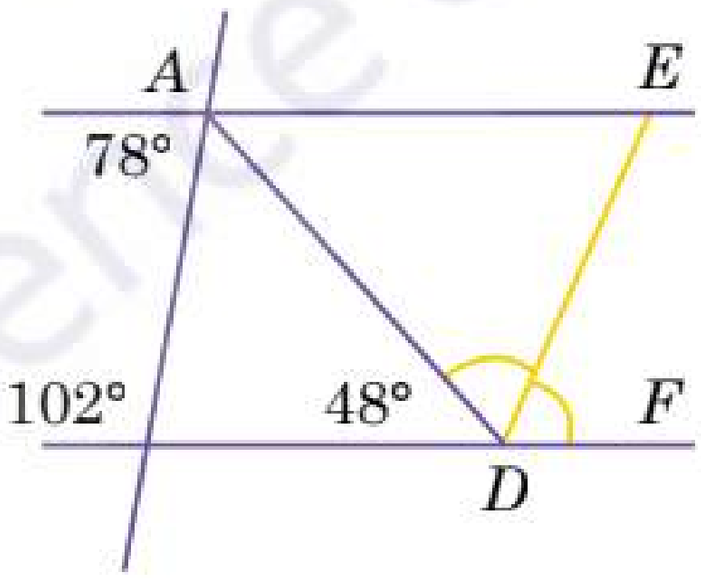


21 Побудуйте дві прямі та січну, які утворюють рівні вертикальні кути. Знайдіть решту кутів, утворених при перетині двох прямих січною, якщо різниця між суміжними кутами становить 60°.

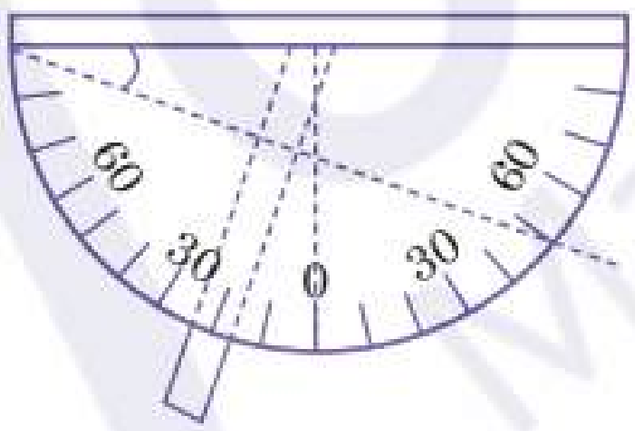
22 Знайдіть невідомі кути:

23 Єва вийшла зі свого будинку, який знаходиться на вулиці Шевченка, до книгарні, яка розташована на вулиці Котляревського. Від будинку вона пройшла прямо 500 м і далі повернув ліворуч на 70°. Пройшовши 300 м і повернувши праворуч на кут 70°, пройшла 700 м до книгарні. Побудуйте схему маршруту та перевірте, чи паралельні вулиці Шевченка та Котляревського.

24 На рисунку DE — бісектриса кута ADF. За даними рисунку знайдіть кути трикутника ADE.



25



На рисунку зображений пристрій, який має назву екліметр. Він використовується для вимірювання кутів в вертикальній площині під час проведення робіт на місцевості. Поясніть, що вимірюється за допомогою екліметра і як він працює.

26 Дано трикутник ABC і точки M та N такі, що середина відрізка BM співпадає з серединою сторони AC, а середина відрізка CN — з серединою сторони AB. Доведіть, що точки M, N та A лежать на одній прямій.

27 Доведіть, що дві прямі, паралельні перпендикулярним прямим, перпендикулярні між собою.

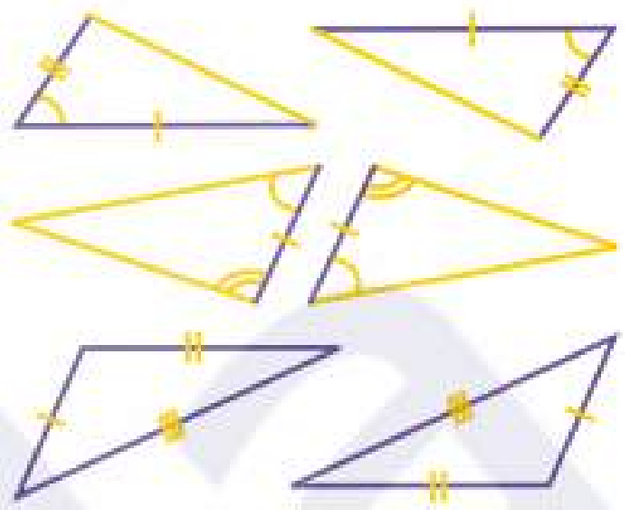
28 Дві паралельні прямі перетинає січна. Доведіть, що:

а) бісектриси відповідних кутів паралельні;

б) бісектриси внутрішніх односторонніх кутів перпендикулярні.

1.3. Трикутники. Ознаки рівності трикутників

Ознаки рівності трикутників



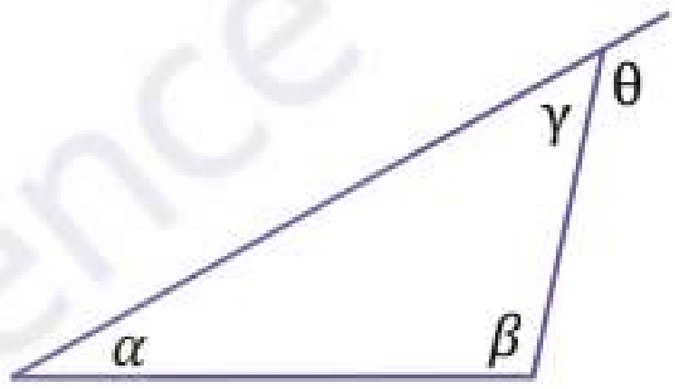
I ознака: Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника рівні двом сторонам і куту між ними іншого трикутника, то такі трикутник рівні — СКС.

II ознака: Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника рівні стороні та прилеглим кутам іншого трикутника, то такі трикутник рівні — КСК.

III ознака: Якщо три сторони одного трикутника рівні трьом сторонам іншого трикутника, то такі трикутник рівні — ССС.

Легко запам'ятати ознаки можна за допомогою абревіатур, де:
С — сторона;
К — кут.

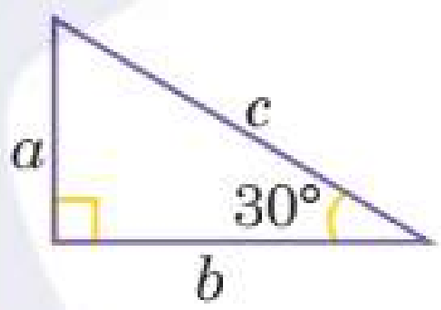
Сума кутів трикутника та його зовнішній кут



$\alpha + \beta + \gamma = 180°$ — сума кутів трикутника.

$\theta = \alpha + \beta$ — тобто зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів трикутника, не суміжних з ним.

Властивості прямокутного трикутника



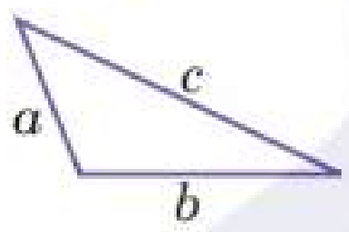
a, b — катети,
c — гіпотенуза.
а) $c > a$, $c > b$
б) $a = \frac{c}{2}$ (катет, що лежить проти кута 30°)

Попрактикуйтеся

29 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Рівносторонній трикутник — окремий випадок рівнобедреного трикутника.
б) Бічні сторони рівнобедреного трикутника завжди більші за основу.
в) Кожен кут рівностороннього трикутника гострий.
г) Гіпотенуза прямокутного трикутника є меншою за катет.
д) Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника завжди гострий.

Нерівність трикутника



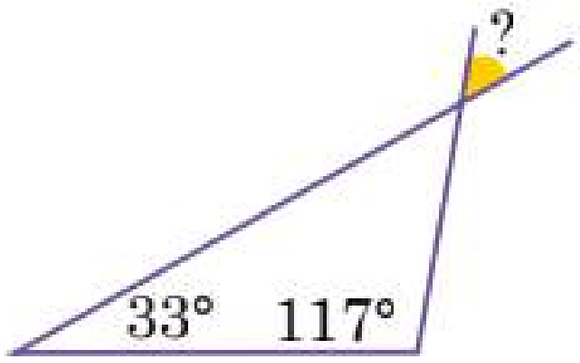
$a < b + c$
$b < a + c$
$c < a + b$

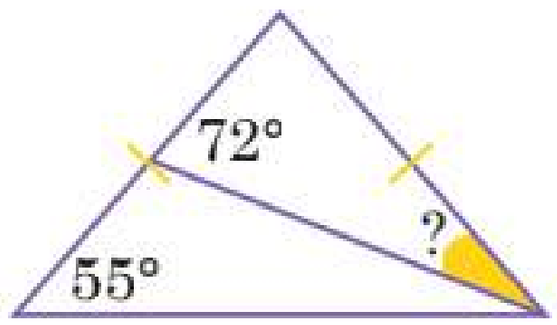
30 Діагональ квадрата ділить його на два рівні прямокутні трикутники. Наведіть приклади таких фігур, які також можна поділити на рівні трикутники, та проілюструйте це.

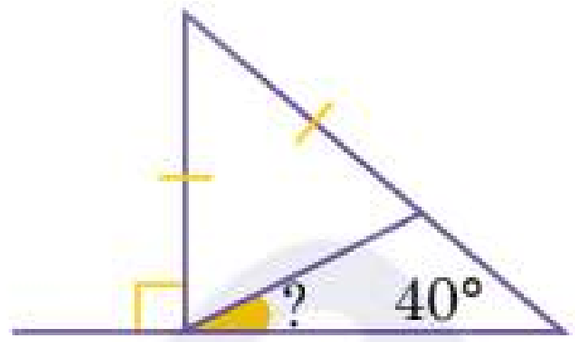
31 Перевірте, чи існує трикутник з такими сторонами:

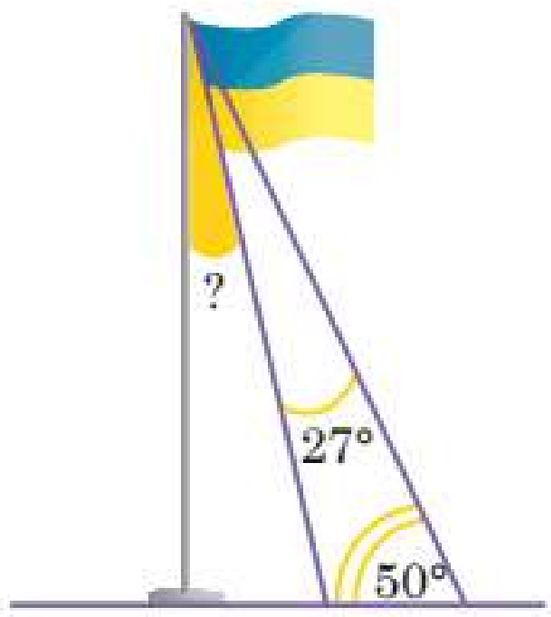
а) 4 см; 5 см; 6 см;
б) 13 см; 13 см; 27 см;
в) 0,3 дм; 5 дм; 0,7 м;
г) 91 мм; 9 см; 85 мм.

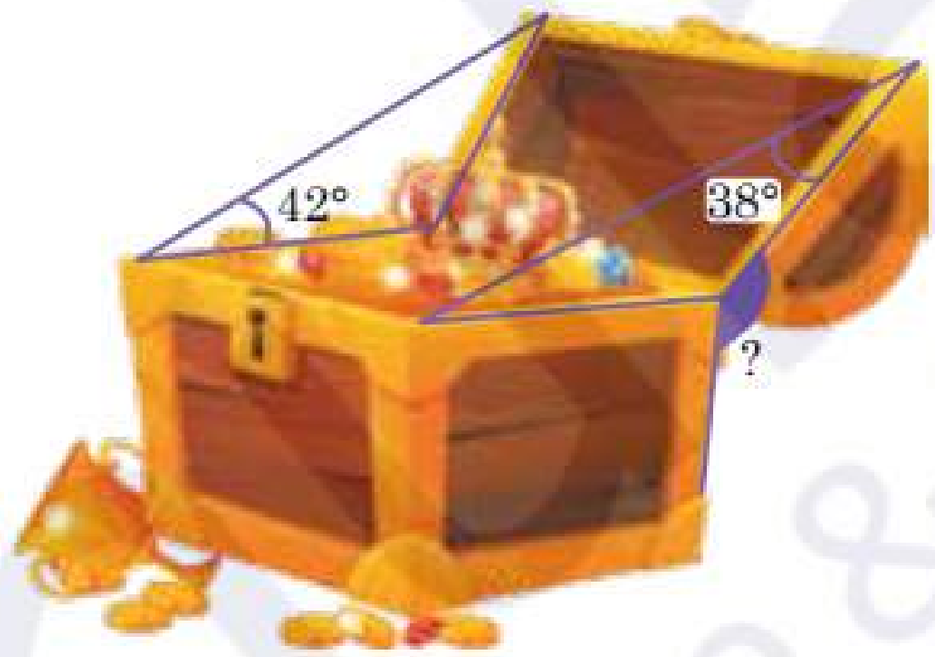
32 Знайдіть невідомі кути в трикутниках.



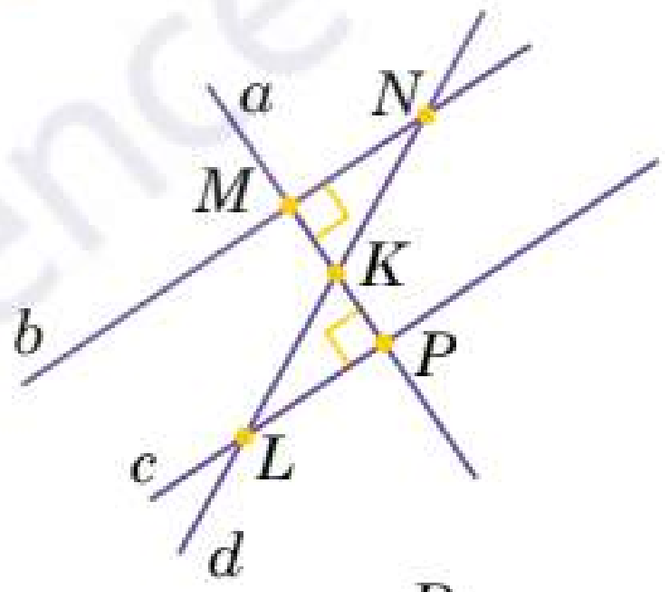






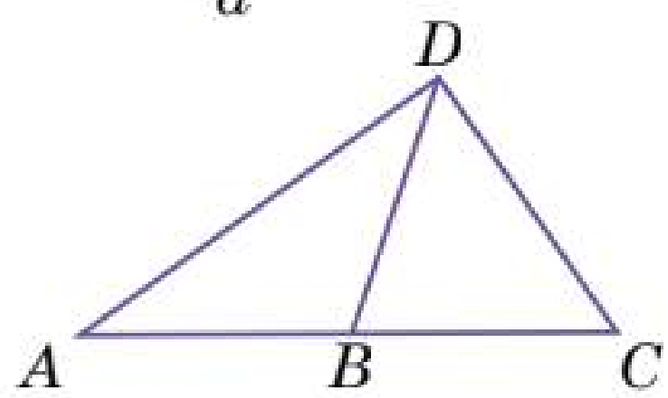


33 Прямі b та c — паралельні, а пряма a — перпендикулярна до прямих b і c. Користуючись рисунком, доведіть, що $MN = LP$ і $MK = KP$.



34 На основі FK рівнобедреного трикутника FMK відкладено точки A і B. $\angle FMA = \angle KMB$. Доведіть, що $FA = BK$.

35 У трикутнику ABD відомо, що $AB = BD$, трикутник BDC — рівносторонній. Знайдіть градусні міри всіх кутів обох трикутників. Зробіть висновок про вид трикутника ADC.



36 У трикутнику ABC кути відносяться як 1 : 1 : 2. Знайдіть:

а) кути трикутника;
б) вид трикутника;
в) довжину більшої сторони трикутника, якщо висота, проведена до цієї сторони, дорівнює 5 см.

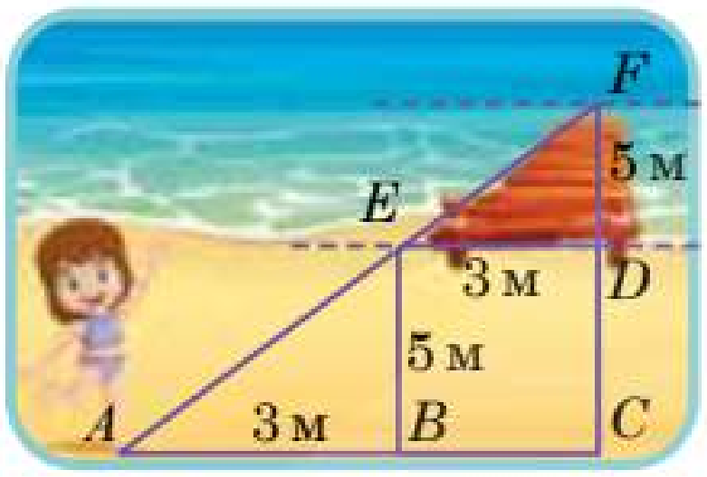
37* У трикутнику ABC провели медіани BM та AS, які перетинаються в точці O. Знайдіть співвідношення відрізків AO та OS.

38* Дві сторони трикутника дорівнюють 7 см і 8 см. Укажіть, найбільше ціле значення, якого може набувати третя сторона.

39 Крокви даху будинку утворюють кут 120°. Знайдіть їх довжину, якщо відомо, що висота мансарди становить 2 м.

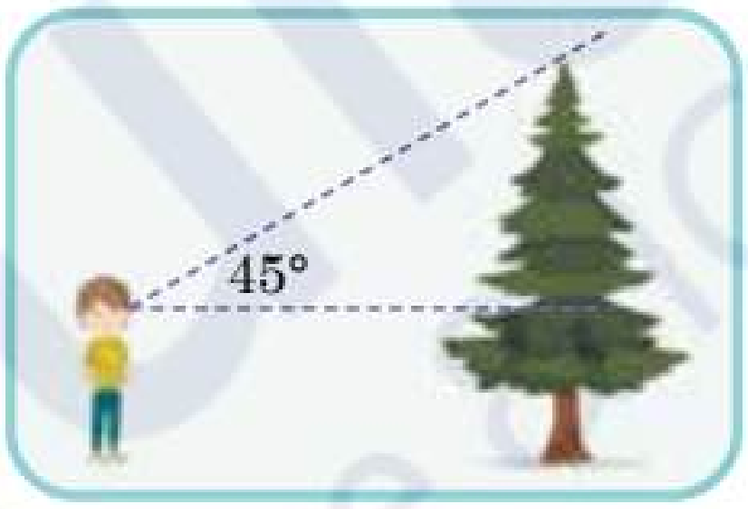
Мансарда — поверх у просторі горища.

40

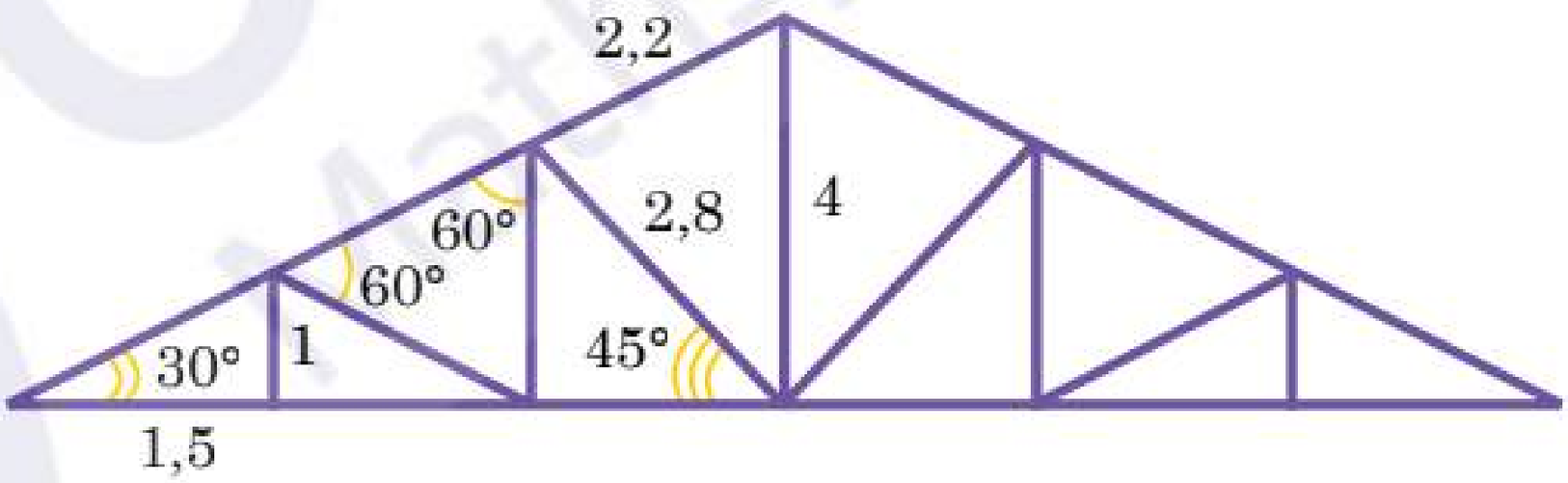


Знайдіть відстань, яку потрібно пройти дівчинці шляхом AC та CF, користуючись даними на зображенні ($ED \parallel AC$).

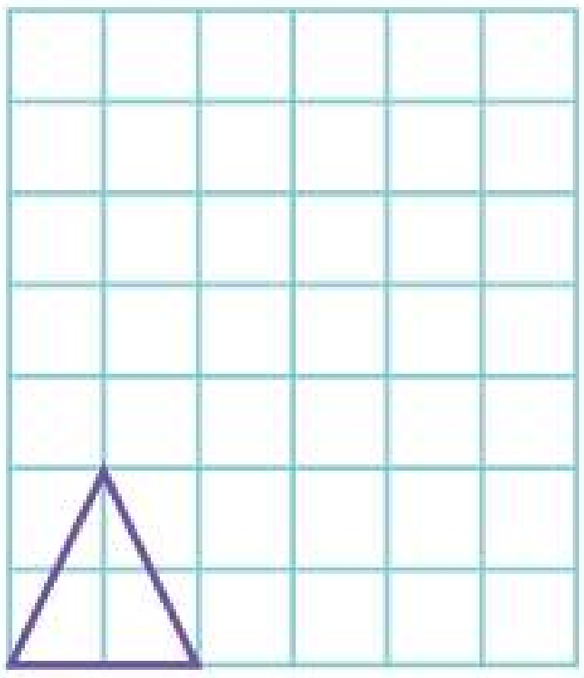
41 Знайдіть висоту дерева, якщо ви дивитеся на його верхівку під кутом 45°, а відстань від дерева до вас становить 4,5 м. Під час обчислення обирайте свій зріст.



42 При побудові навісів, гаражів, будинків, мостів використовуються ферми (конструкції) різного виду. Спочатку все починається з креслень інженерів-конструкторів. Для цього їм потрібно знати певні розміри. Зазвичай на початку роботи їм відомі тільки габаритні розміри конструкції, тобто ширину, довжину та висоту. Після обчислень можна отримати розміри балок, з яких складається конструкція. Обчисліть довжину балок, які потрібні для виготовлення зазначеної ферми. Усі розміри на схемі подано в метрах.



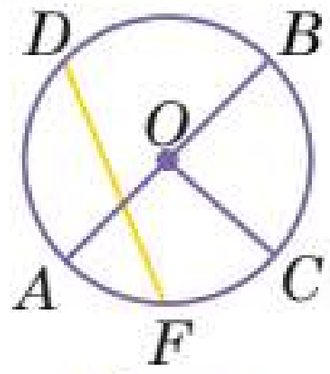
43 На аркуші в клітинку намалюйте паркет, складений з трикутників, як показано на рисунку. Розмалюйте трикутники так, щоб сусідні трикутники (які мають спільну сторону) були замальовані різними кольорами (тобто, щоб кольори сусідніх трикутників не були однаковими з даним трикутником). Яку найменшу кількість кольорів потрібно для такого розфарбування?



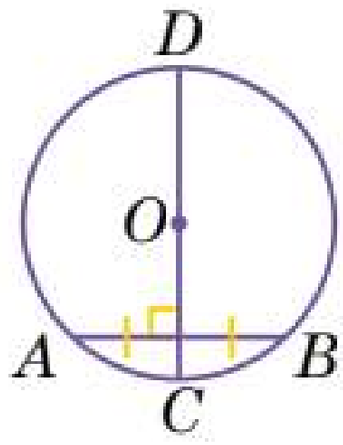
1.4. Коло і круг. Геометричні побудови

$K(O; OC)$, AB — діаметр, OC — радіус, DF — хорда.

Круг



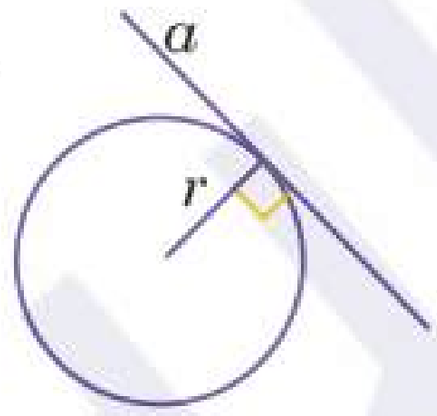
Коло

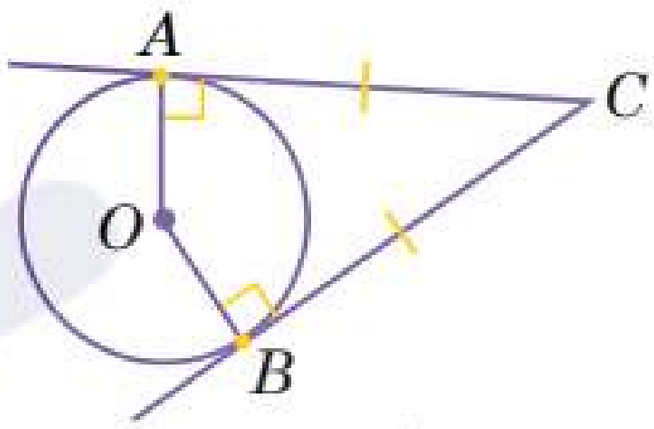


Діаметр кола, що проходить через середину хорди, є перпендикулярним до неї ($AB \perp CD$).

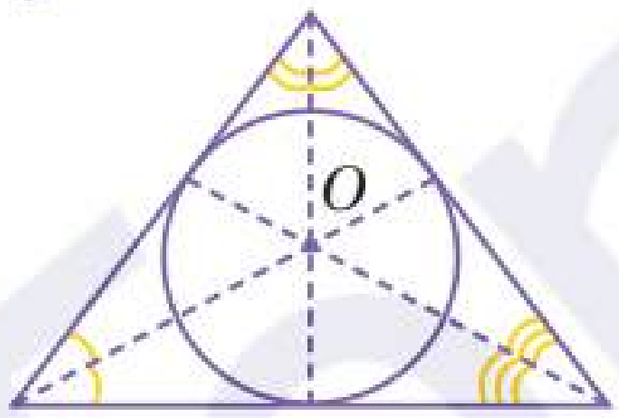
Геометричне місце точок (ГМТ) — множина точок, що мають певну властивість. ГМТ кута, рівновіддалених від його сторін, є бісектрисою цього кута.

Дотична — пряма, що має з колом одну спільну точку, — перпендикулярна до радіуса кола ($a \perp r$).



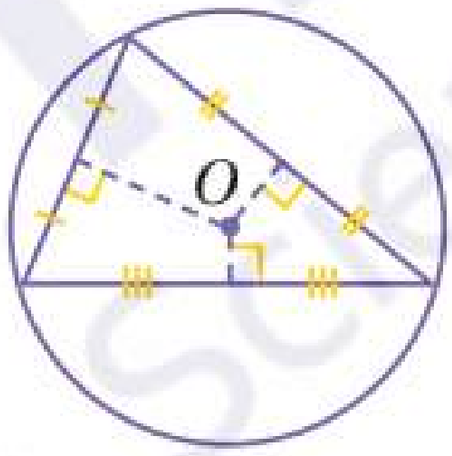


Точки дотику кола до сторін кута рівновіддалені від його вершини ($AC = BC$).



Вписане коло в трикутник

Центр — перетин бісектрис.



Описане коло навколо трикутника

Центр — перетин серединних перпендикулярів.

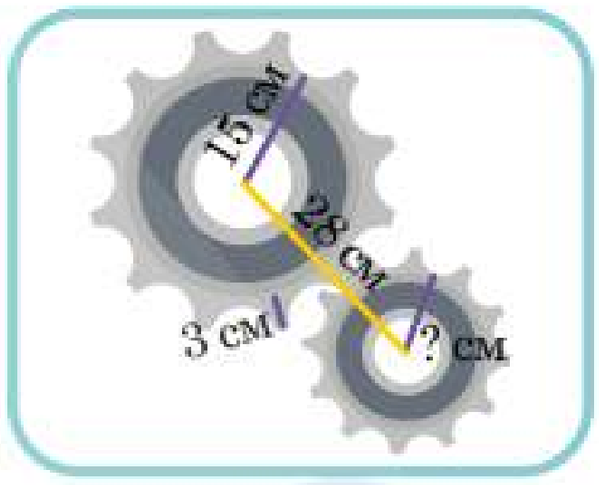
Попрактикуйтеся

44 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

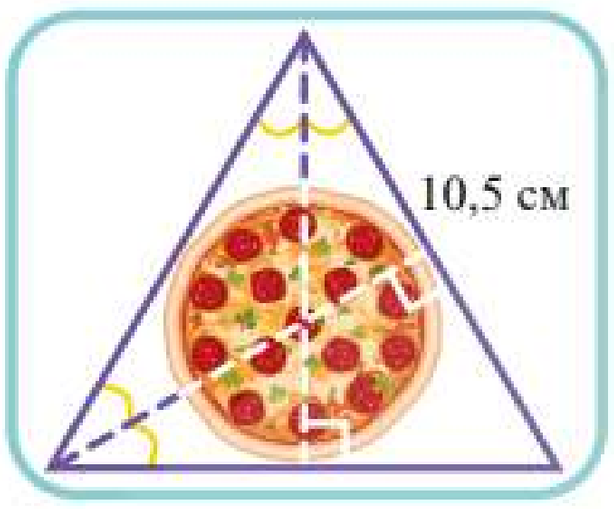
а) Найдовша хорда — діаметр.
б) Діаметр завжди перпендикулярний до хорди.
в) Дотична кола є перпендикулярною до його діаметра.
г) Точка перетину медіан рівностороннього трикутника є центром вписаного в нього кола.
д) Центр описаного кола навколо прямокутного трикутника лежить на його катеті.

45 У зошиті відкладіть точки M та N на невеликій відстані. Знайдіть ГМТ центрів кіл, що проходять через ці точки. Побудову виконайте за допомогою циркуля і лінійки.

46 Знайдіть радіус меншої шестерні, якщо відомо, що радіус більшої — 15 см і висота її зубця дорівнює 3 см.

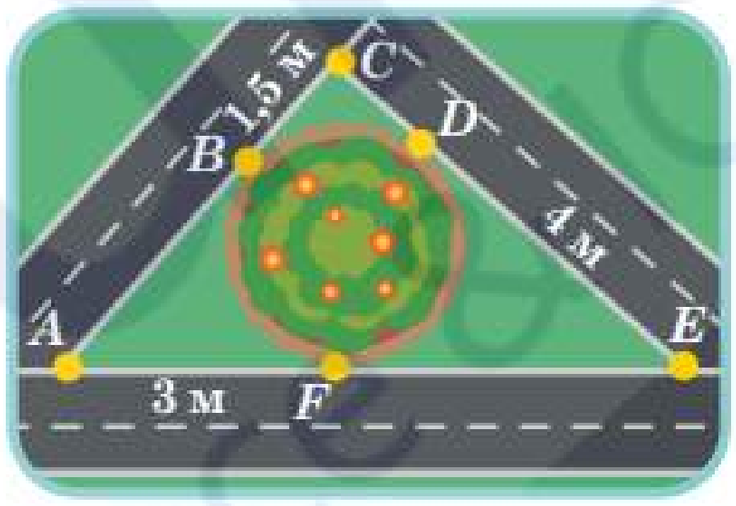


47



Знайдіть розмір трикутної коробки для піци, скориставшись даними на рисунку. Чи є така форма коробки вдалою? Обчисліть розміри квадратної коробки для такої піци. Чи була б вона компактнішою?

48 На рисунку зображено перехрестя трьох доріг та клумбу. Обчисліть, скільки метрів паркану потрібно, щоб обгородити ділянку між дорогами. Для обчислень скористайтеся даними на малюнку.



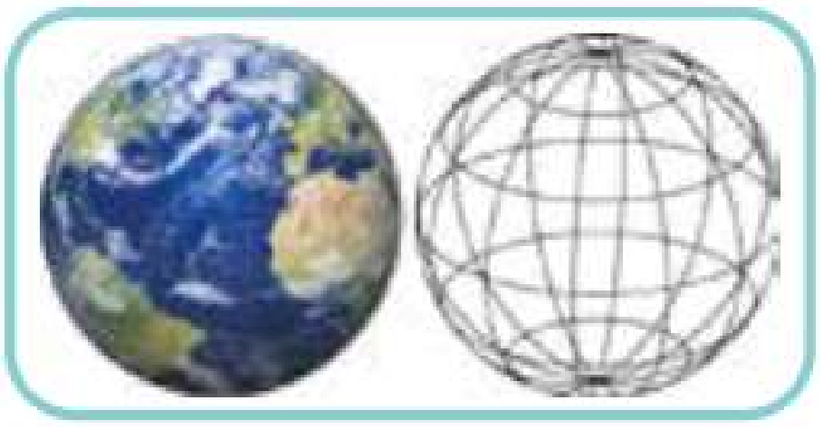
49 Як можна знайти центр круглої металевої деталі, скориставшись тільки лінійкою без поділок та косинцем? Для виконання виріжте круг з паперу або картону та практично знайдіть центр. Яку властивість при цьому було використано?

50 За допомогою креслярських інструментів (циркуля, лінійки, транспортира) побудуйте рівносторонній трикутник та його вписане й описане коло.

51 Знайдіть діаметр описаного кола навколо трикутника ABC з прямим кутом C, якщо сторона AB дорівнює 5 см.

52 Ділянку землі круглої форми хочуть засіяти газоном. Радіус ділянки — 5 м. Скільки буде витрачено коштів на засів, якщо на 1 м^2 витрачається 50 г насіння. Вартість мішка вагою 4 кг становить 600 грн.

53 Наша планета Земля має кулясту форму, приплюснуту на полюсах, — це геоїд. Для математичних задач зазвичай обирають простішу модель, а саме кулю. На рисунках можете побачити кулю та сферу. Сформулюйте відмінність цих двох понять.



Відомо, що приблизний радіус планети становить 6371 км. За допомогою калькулятора знайдіть довжину екватора.

Перевірте свої досягнення

1 На який кут повернеться годинникова стрілка протягом 20 хв?

а) 150°; б) 30°; в) 100°; г) 120°.

2 Точки M, N, K лежать на одній прямій. $MN = 11$ см, $NK = 28$ см. Знайдіть MK.

а) 39 см або 17 см; б) 17 см; в) 39 см; г) точки не лежать на одній прямій.

3 Який кут суміжний з тупим?

а) Тупий; б) Прямий; в) Гострий; г) Розгорнутий.

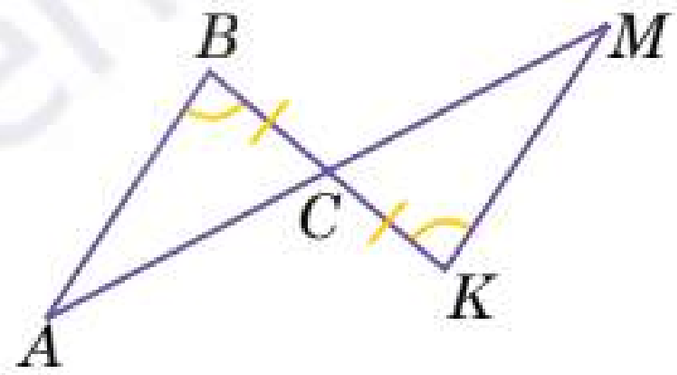
4 Сума трьох кутів, що утворились у результаті перетину двох прямих, дорівнює 260°. Знайдіть градусну міру четвертого кута.

а) 100°; б) 80°; в) 60°; г) 120°.

5 Знайдіть внутрішні односторонні кути при паралельних прямих і січній, якщо їх градусні міри пропорційні числам 3 і 15.

а) 30° і 150°; б) 60° і 120°; в) 3° і 173°; г) 15° і 165°.

6 За якою ознакою рівні трикутники на рисунку?



а) За двома кутами і прилеглою стороною;
б) За двома сторонами і кутом між ними;
в) За трьома сторонами;
г) Трикутники не рівні.

7 У прямокутному трикутнику катет, що лежить проти кута 60°, дорівнює 17 см, гіпотенуза — 20 см. Установіть відповідність між твердженням (1–4) та відповіддю (А–Д).

1. Довжина іншого катета	А. 30
2. Периметр трикутника	Б. 27
3. Градусна міра іншого кута	В. 12
4. Сума катетів	Г. 10
	Д. 47

8 Два кола мають зовнішній дотик у точці M. Радіус більшого кола дорівнює 5 см, а відстань між центрами кіл — 8 см. Установіть відповідність між твердженням ((1–4) та відповіддю (А–Д)).

1. Радіус меншого кола	А. 10π
2. Довжина більшого кола	Б. 9π
3. Довжина меншого кола	В. 3
4. Площа меншого кола	Г. 6π
	Д. 5π

9 Знайдіть основу рівнобедреного трикутника, якщо бічна сторона дорівнює 9 см, а периметр — 25 см.

10 Два кола мають зовнішній дотик, відстань між їх центрами становить 32 см. Знайдіть радіуси цих кіл, якщо вони відносяться як 5 : 3.

Додаткові завдання до розділу

54 Доведіть, що бісектриси двох суміжних кутів — перпендикулярні.

55 Доведіть, що бісектриси двох вертикальних кутів лежать на одній прямій.

56 В рівнобедренному трикутнику ABC з основою AC та кутом при вершині B, що дорівнює 36°, проведена бісектриса AD. Доведіть, що трикутники CDA та ADB — рівнобедрені.

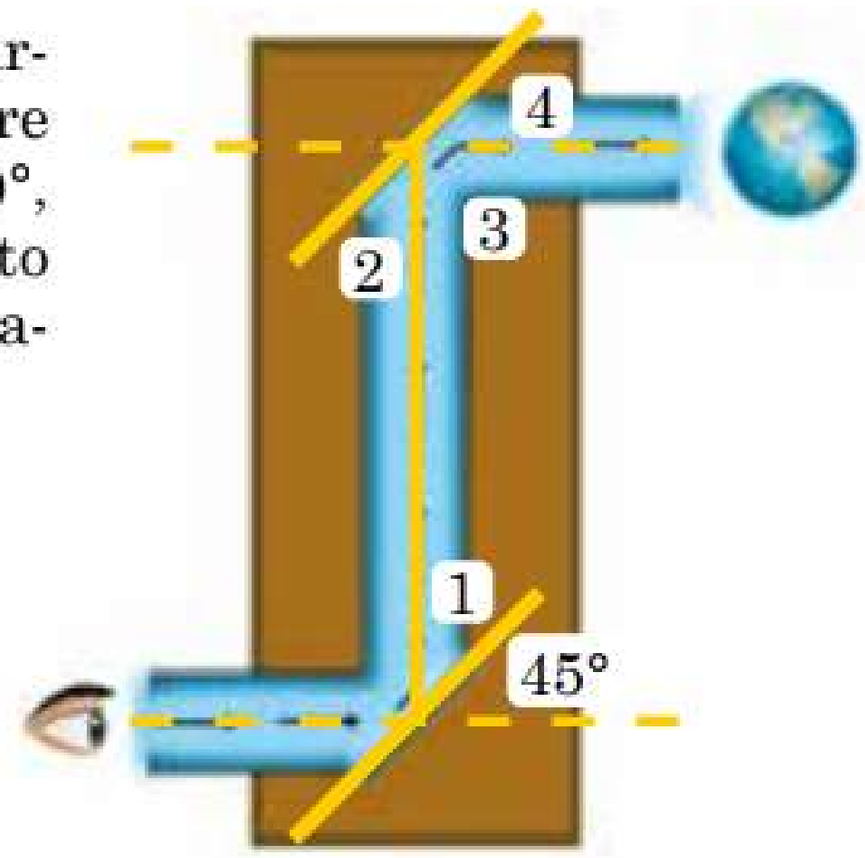
57 Фермери розглядають два сорти капусти для посадки на своєму полі. Середній діаметр качана у першого сорту становить 25 см, а у другого — 15 см. Проте, густота посадки на 1 гектар у першого сорту втричі менше, ніж у другого. Припустимо, що щільність наповнення качанів і розмір листя однакові у всіх сортах. Який сорт капусти обрали фермери для отримання найбільшої кількості врожаю та чому?

58 Власник пекарні хоче прикрасити свій великий круглий торт фруктами по краю. Для цього він розглядає два варіанти:

1) Викласти фрукти по колу з радіусом 15 см.
2) Викласти фрукти по колу з радіусом 10 см, а також додаткове кільце фруктів по колу з радіусом 5 см ближче до центру.

Який із варіантів дозволяє розмістити більше фруктів на торті, якщо відстань між фруктами однакова?

59 The two mirrors used in a periscope are parallel to each other as shown. The angles are given as follows: $\angle 1 = 3x°$, $\angle 2 = (60 - x)°$, $\angle 3 = 90°$. Write and solve an equation to find the value of x. Then determine the measure of $\angle 4$.



Parallel to each other as shown — розташовані паралельно одне одному.
Find the value — знайдіть значення
Equation — рівняння
Measure of angle — міра кута

2

Многокутники та їх властивості

Ми можемо побачити плоскі фігури та симетрії у навколишньому світі. Наприклад, якщо ви поглянете на бджолині стільники, то зможете зауважити, що вони складаються з дрібних комірок у формі шестикутника.

Павутина часто має форму багатокутника, наприклад восьмикутника.

Видима сторона Місяця в деякі дні має форму кола або півкола. Морські зірки, метелики, мурахи та інші істоти є симетричними, якщо ми умовно розділимо їх однією або кількома прямими лініями. Якщо розрізати апельсин навпіл, можна також отримати симетричні візерунки.

Геометрія вивчає властивості плоских фігур. Ці знання застосовуються у будівництві будівель, літаків, мостів тощо.

У цьому розділі ми:

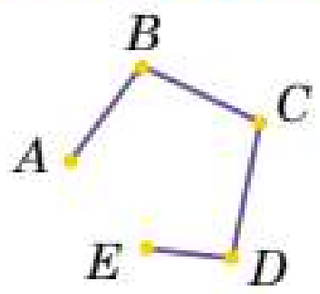
- визначатимемо властивості чотирикутників;
- використовуватимемо формули для обчислення площі чотирикутників, з якими ми вже ознайомились;
- класифікуватимемо чотирикутники за їхніми властивостями;
- визначатимемо властивості многокутників, співвідношення між внутрішніми та зовнішніми кутами, між кількістю сторін та розмірами внутрішніх кутів;
- використовуючи знання про плоскі фігури, розв'язуватимемо задачі, в яких потрібно обчислити периметр або площу складеної фігури;
- потренуємося використовувати формулу для обчислення суми внутрішніх кутів будь-якого многокутника;
- дізнаємось про суму зовнішніх кутів будь-якого многокутника.

Ключові слова

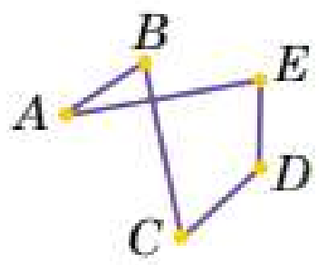
- Многокутник (*polygon*)
- Чотирикутник (*quadrilateral*)
- Паралелограм (*parallelogram*)
- Ромб (*rhombus*)
- Дельтоїд (*deltoid*)
- Зовнішній кут (*exterior angle*)
- Внутрішній кут (*interior angle*)
- Сума (*sum*)
- Периметр (*perimeter*)
- Площа (*area*)

2 Многокутники та їх властивості

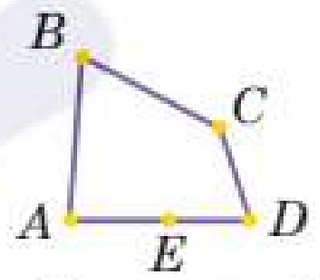
2.1. Многокутник



Ламана не замкнена



Ламана має самоперетин

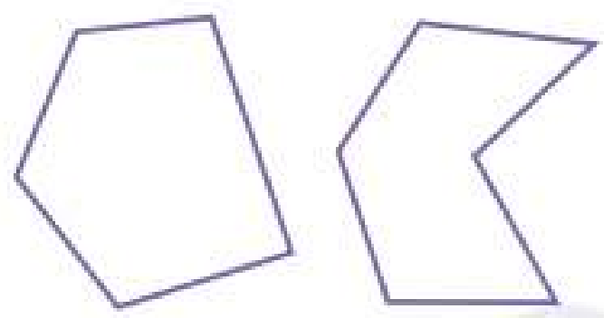


Три сусідні вершини ламаної лежать на одній прямій

Ламану можемо називати **многокутником**, якщо:

1) вона замкнена;
2) вона не має самоперетинів;
3) три сусідні її вершини не лежать на одній прямій.

Многокутником називають замкнену плоску фігуру, яка має три або більше прямих сторін.

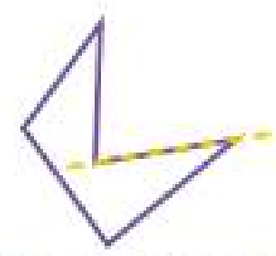

Многокутники


Не є многокутниками

Існують опуклі та неопуклі многокутники. Усі внутрішні кути опуклого многокутника менші, ніж 180°, тоді як неопуклий многокутник має принаймні один внутрішній кут більший, ніж 180°.

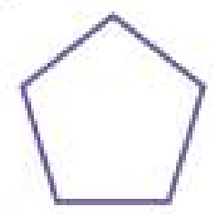
Опуклий многокутник — многокутник, що лежить в одній півплощині щодо будь-якої прямої, яка містить його сторону.

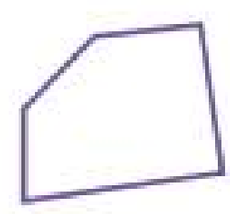

Опуклий


Неопуклий

Многокутник також має назву за кількістю сторін. Многокутник із 6-ма сторонами називається шестисторонним многокутником або шестикутником, многокутник із 7-ма сторонами називається семисторонним многокутником або семикутником, многокутник із 8-ма сторонами називається восьмисторонним многокутником або восьмикутником і т. д.

Многокутник називається **правильним**, якщо всі його кути та всі сторони рівні.


Правильний

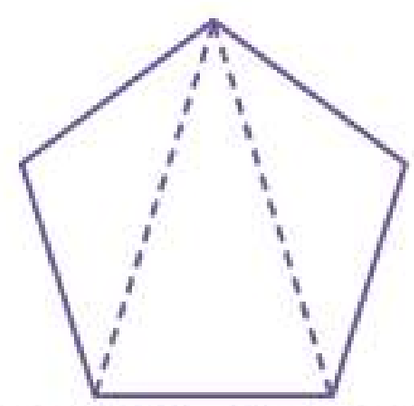

Неправильний

Многокутник, який має n сторін, називається **n-кутник.**

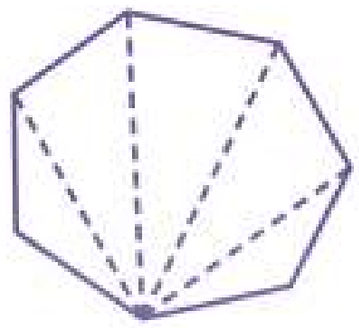
Відрізки, які з'єднують вершини і не належать одній стороні, називаються **діагоналями многокутника.**

Сума внутрішніх кутів многокутника

Щоб знайти суму внутрішніх кутів многокутника, ми можемо поділити цей многокутник на трикутники. Наприклад, п'ятикутник можна поділити на 3 трикутники. Отже, сума внутрішніх кутів п'ятикутника — це $3 \cdot 180° = 540°$.



Семикутник можна поділити на 5 трикутників. Отже, сума внутрішніх кутів семикутника — це $5 \cdot 180° = 900°$.



Розглянувши подані вище многокутники, ми можемо зауважити, що кількість трикутників, на які ми поділили многокутник, — це на 2 менше, ніж кількість сторін многокутника.

Загальна формула, за якою ми можемо обчислити **суму внутрішніх кутів многокутника** із n кількістю сторін (n-кутника), — це

$$(n - 2) \cdot 180°$$

Доведення теореми про суму кутів опуклого многокутника

Приклад

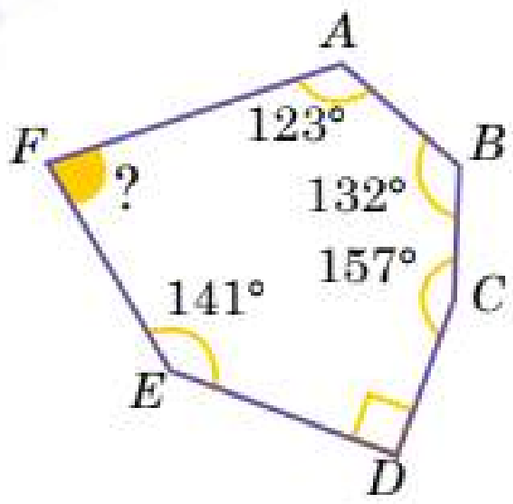
1 Обчисліть суму внутрішніх кутів шестикутника.

Розв'язання

Шестикутник має 6 сторін.
Отже, $(6 - 2) \cdot 180° = 4 \cdot 180° = 720°$.
Відповідь. 720°.

Приклад

2 Обчисліть величину невідомого кута.

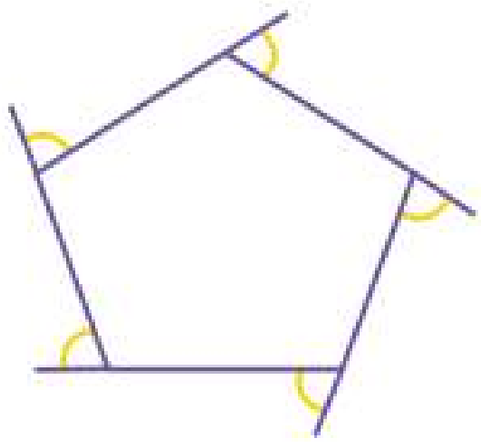


Розв'язання

Це шестикутник, отже за формулою суми внутрішніх кутів многокутника:
$(6 - 2) \cdot 180° = 4 \cdot 180° = 720°$.
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E + \angle F = 720°$.
$\angle F = 720° - (123° + 132° + 157° + 90° + 141°) = 720° - 643° = 77°$.
Відповідь. 77°.

Сума зовнішніх кутів многокутника

Якщо відрізки, які є сторонами многокутника, продовжити, то утворяться зовнішні кути даного многокутника. Сума внутрішнього кута та зовнішнього кута, що мають спільну вершину, дорівнює 180°, оскільки вони суміжні за означенням. Тому сума всіх внутрішніх і зовнішніх кутів опуклого n-кутника дорівнює $180° \cdot n$. Але сума всіх внутрішніх кутів дорівнює $180° \cdot (n - 2)$. Отже, сума зовнішніх кутів становить $180° \cdot n - 180° \cdot (n - 2) = 360°$.



Отже, якщо многокутник правильний, ми можемо розділити 360° на кількість сторін, щоб знайти міру його зовнішнього кута.

Приклад

3 З'ясуйте, скільки сторін має правильний многокутник, якщо його внутрішній кут дорівнює 120°.

Розв'язання

Величина кожного зовнішнього кута цього многокутника становить 180° − 120° = 60°. Відомо, що сума зовнішніх кутів будь-якого многокутника дорівнює 360°.

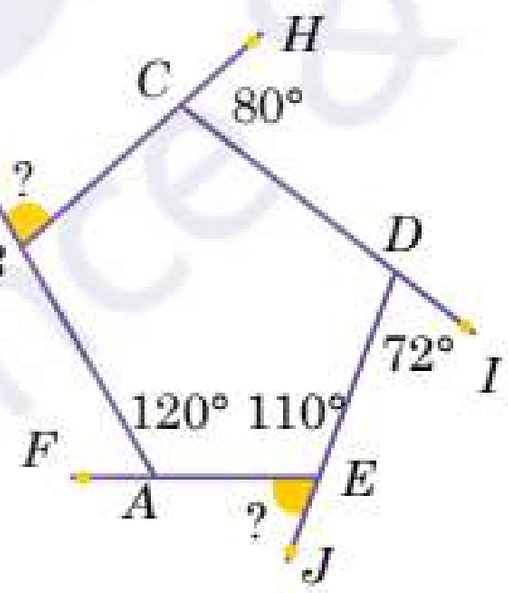
Отже, щоб дізнатися, скільки сторін має цей правильний многокутник, нам потрібно:

$$360° : 60° = 6 \text{ (сторін)}.$$

Відповідь. 6 сторін.

Приклад

4 Обчисліть величину невідомих кутів:
AEJ — ? $\angle GBC$ — ?



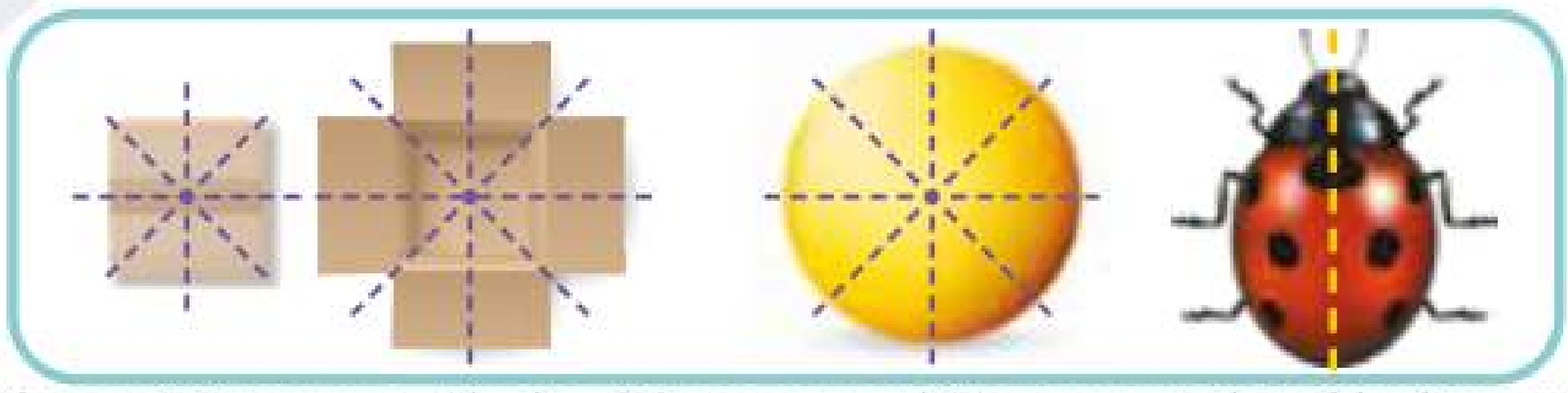
Розв'язання

$\angle AEJ + \angle AED = 180°$;
$\angle AEJ = 180° - \angle AED = 180° - 110° = 70°$.
$\angle FAB + \angle BAE = 180°$;
$\angle FAB = 180° - \angle BAE = 180° - 120° = 60°$.
$\angle FAB + \angle GBC + \angle HCD + \angle IDE + \angle JEA = 360°$
(за власт. суми зовнішніх кутів п'ятикутника).
$\angle GBC = 360° - (60° + 80° + 72° + 70°) = 360° - 282° = 78°$.
Відповідь. 70° і 78°.

Симетрія многокутника. Осі симетрії

Якщо ми можемо провести через фігуру пряму, яка розділить її на дві цілком однакові частини так, немовби ця лінія була б дзеркалом, ми можемо стверджувати, що ця фігура має вісь симетрії. Одна сторона фігури є дзеркальним відображенням іншої.

Ми можемо зауважити, що деякі фігури мають декілька осей симетрії, а коло має нескінченну кількість осей симетрії.



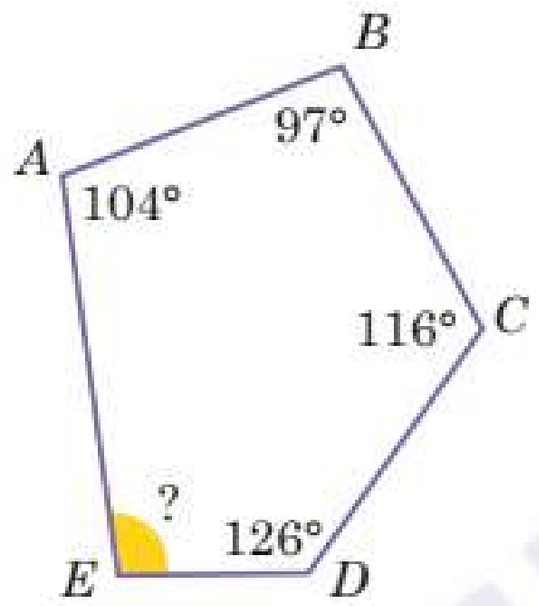
Попрактикуйтеся

60 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

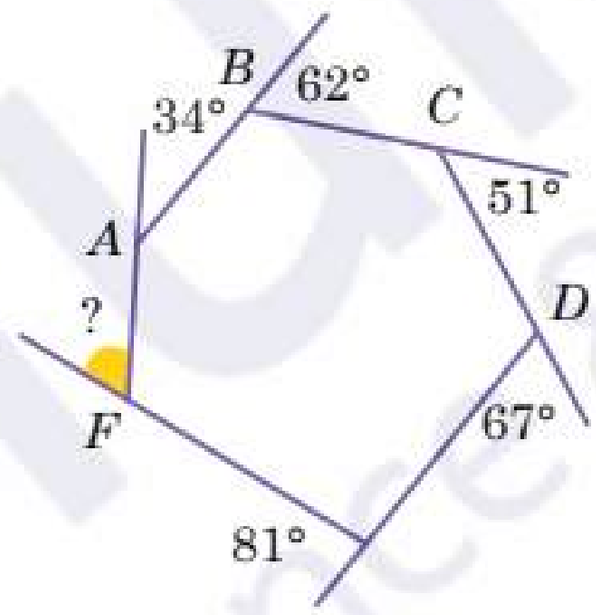
а) Усі внутрішні кути опуклого многокутника менші ніж 180°.
б) У правильного многокутника всі сторони рівні.
в) Сума внутрішніх кутів восьмикутника дорівнює 1080°.
г) Сума зовнішніх кутів многокутника дорівнює 360°.
д) Діагоналі многокутника — це відрізки, що з'єднують сусідні вершини многокутника.
е) Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n - 1)$.

61 Обчисліть величину невідомих кутів:

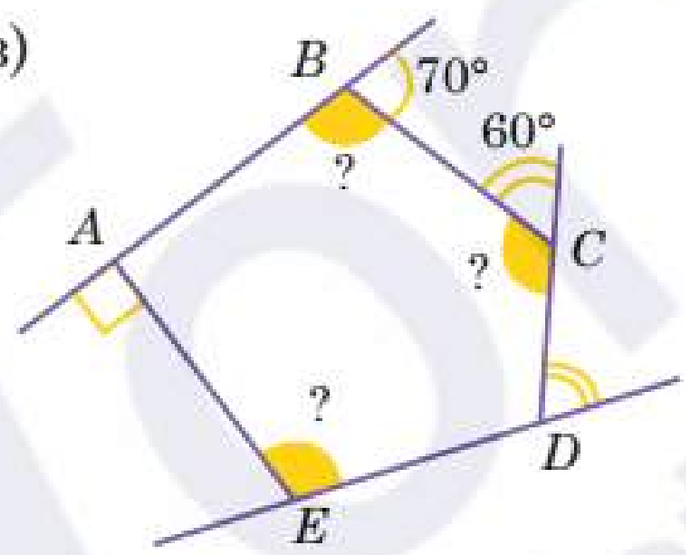
а)



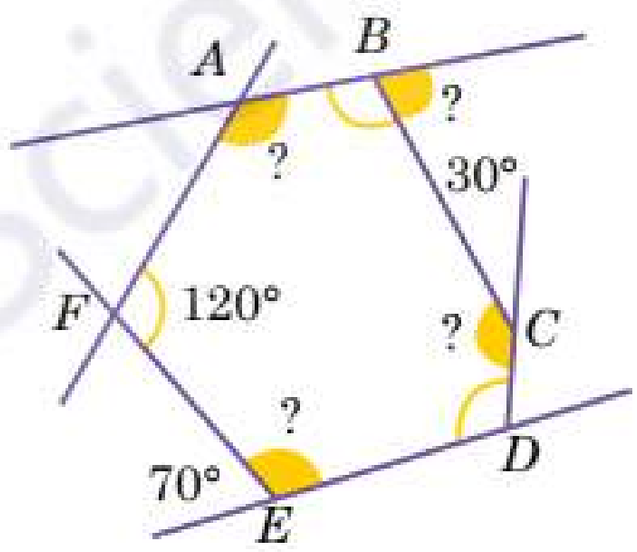
б)



в)



г)



62 Побудуйте довільний шестикутник $ABCDEF$. Назвіть:

а) усі вершини;
б) усі сторони;
в) усі внутрішні кути;
г) дві пари сусідніх сторін;
д) дві пари несусідніх сторін;
е) пару сусідніх вершин;
ж) пару несусідніх вершин.

Перевірте, чи є побудований шестикутник $ABCDEF$ опуклим.

63 Чи може діагональ шестикутника ділити його:

а) на два трикутники;
б) на два чотирикутники;
в) на трикутник і п'ятикутник?

64 Знайдіть величину внутрішнього кута правильного семикутника.

65 Знайдіть величину внутрішнього кута правильного десятикутника.

66 Знайдіть величину зовнішнього кута правильного п'ятикутника.

67 Знайдіть величину зовнішнього кута правильного дев'ятикутника.

68 Скільки сторін має многокутник, якщо сума його внутрішніх кутів дорівнює 900°?

69 Відомо, що один із внутрішніх кутів правильного многокутника дорівнює 156°. Визначте кількість сторін цього многокутника.

70 Відомо, що один із внутрішніх кутів правильного многокутника дорівнює 135°. Визначте кількість сторін цього многокутника.

71 Знайдіть кількість сторін правильного многокутника, якщо кожен його зовнішній кут дорівнює 30°.

72 Скільки сторін має правильний многокутник, якщо кожен його зовнішній кут дорівнює 60°?

73 Дизайнерка хоче створити плиткове покриття у формі правильного дев'ятикутника для тераси будинку. Визначте величину внутрішніх і зовнішніх кутів цього дев'ятикутника.

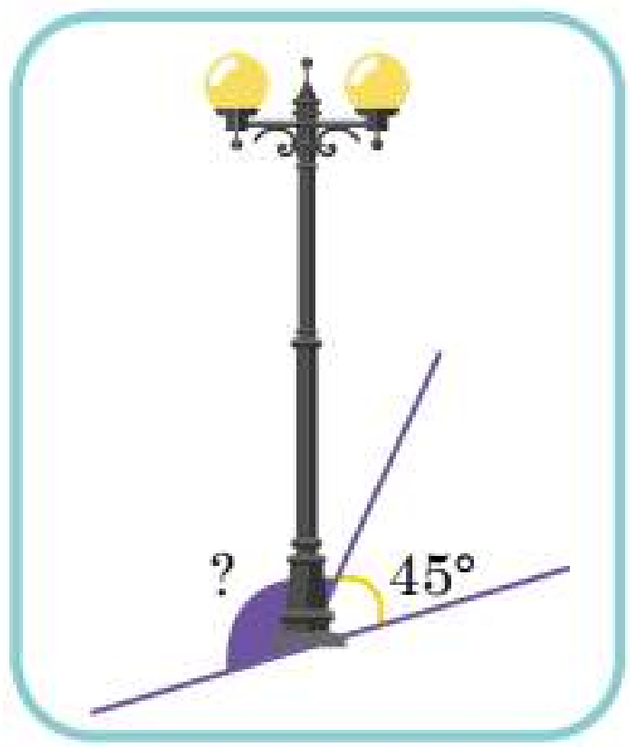
74 У міському парку вирішили побудувати альтанку у формі правильної восьмикутної призми. Кожна сторона основи альтанки дорівнює 2,5 м. Знайдіть периметр основи альтанки та величину кожного внутрішнього кута, щоб мати змогу правильно розрахувати необхідну кількість матеріалів.

75 Будівельна компанія планує побудувати парк у формі правильного многокутника. Для цього їм потрібно знати кількість сторін та кути цієї фігури, щоб правильно розмістити освітлення. Відомо, що кожен зовнішній кут цього многокутника становить 45°.

а) Скільки сторін матиме парк?

б) Яка величина кожного внутрішнього кута цього многокутника?

в) Будівельники вирішили розмістити по одному ліхтарю на кожній вершині многокутника. Скільки ліхтарів їм потрібно?

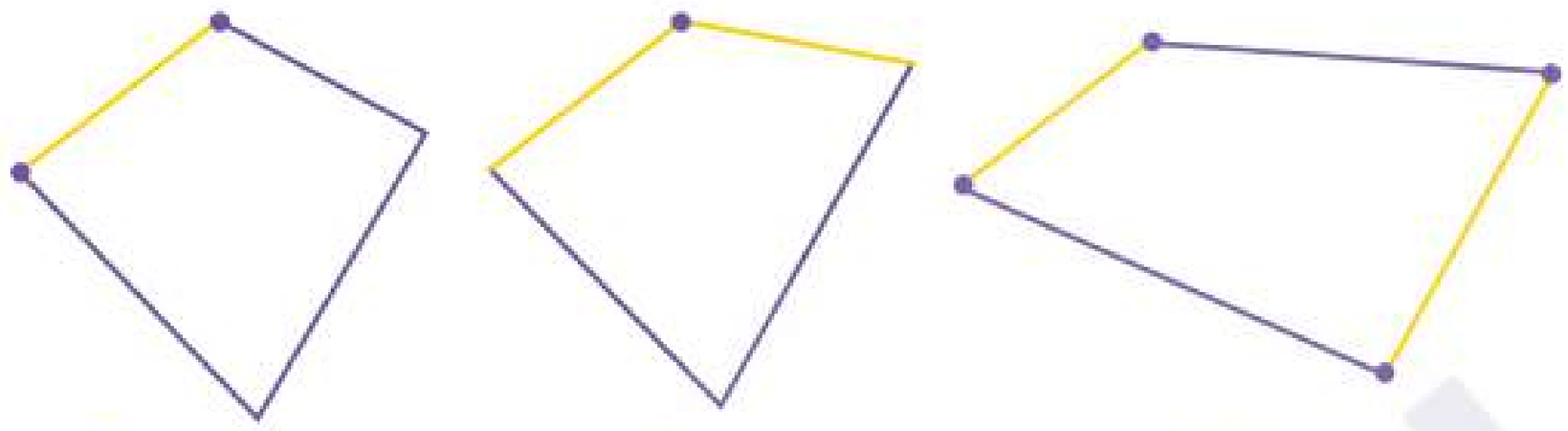


76 Доведіть, що кожна друга вершина правильного $2n$–кутника є вершинами правильного n–кутника.

2.2. Чотирикутник

2

Чотирикутником називають замкнену плоску фігуру, яка має чотири прямі сторони та чотири вершини.



Вершини чотирикутника називаються **сусідніми**, якщо вони є кінцями однієї з його сторін.

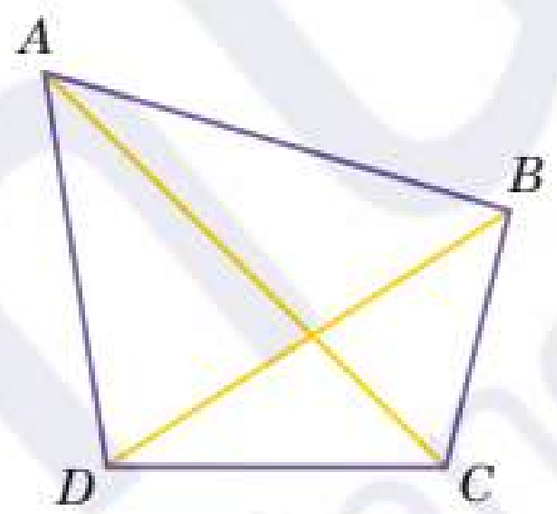
Сторони чотирикутника, що виходять з однієї вершини, називаються **сусідніми**.

Сторони чотирикутника, які не мають спільного кінця, називаються **протилежними**.

Несусідні вершини чотирикутника називаються **протилежними**.

Діагоналями називають відрізки, які сполучають дві протилежні вершини чотирикутника або дві несусідні вершини многокутника, у якого більше ніж чотири сторони.

Чотирикутники мають дві діагоналі. У чотирикутнику $ABCD$ діагоналями є відрізки AC та DB.



Чотирикутник називається **опуклим**, якщо всі його кути менші від 180°. Якщо один з кутів чотирикутника більший за 180°, то такий чотирикутник називають **неопуклим**.

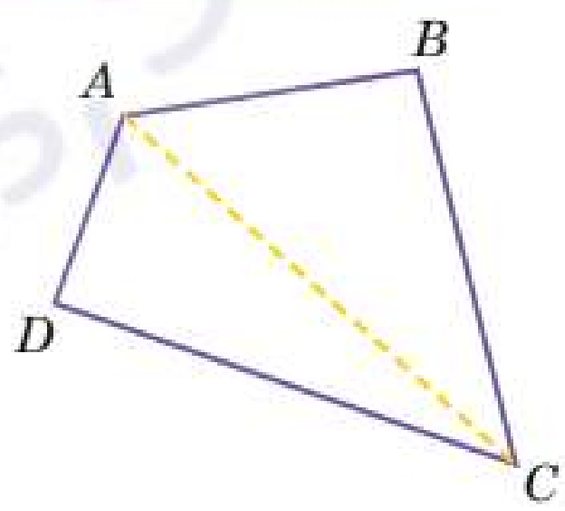
Сума кутів чотирикутника

Діагональ ділить чотирикутник на два трикутники. Сума всіх кутів будь-якого трикутника дорівнює 180°.

Отже, **сума внутрішніх кутів чотирикутника** становить:

180° + 180° = **360°**.

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$

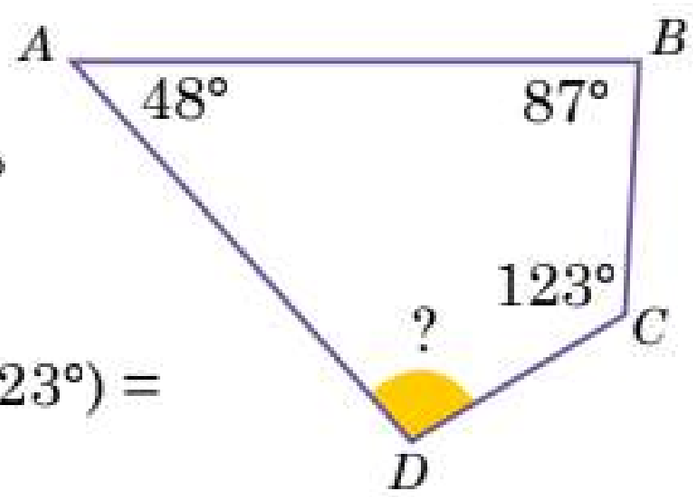


Доведення теореми про суму внутрішніх кутів чотирикутника

Приклад

1 Визначте величину невідомого кута.

Розв'язання



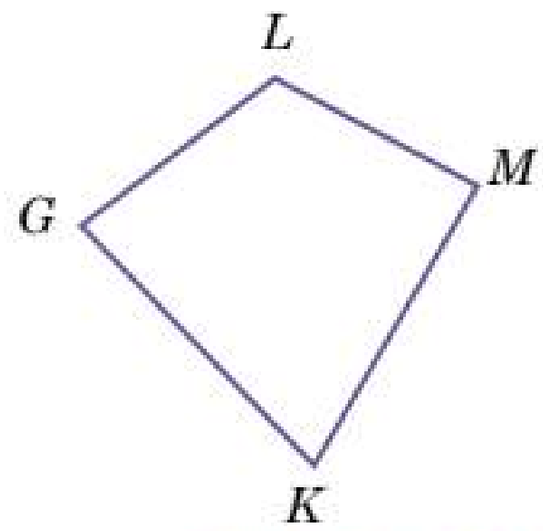
$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ (за теоремою про суму кутів чотирикутника);

$\angle D = 360° - (48° + 87° + 123°) =$
$= 360° - 258° = 102°$.

Відповідь. 102°.

Периметром чотирикутника називають суму довжин усіх його сторін. Периметр позначають літерою P.

Наприклад, $P_{GLMK} = GL + LM + MK + KG$.

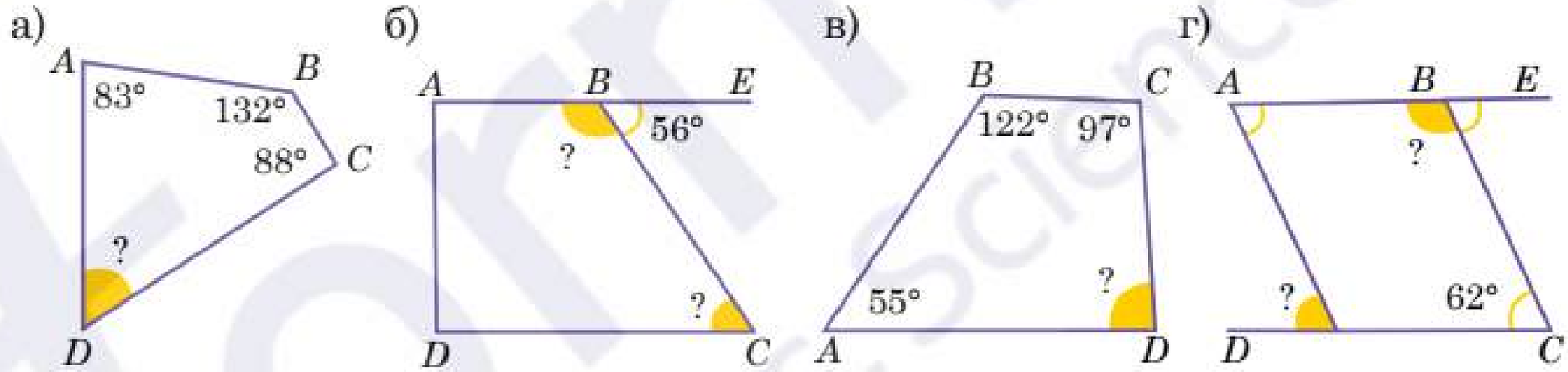


Попрактикуйтеся

77 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Будь-який чотирикутник має чотири пари протилежних кутів.
б) Будь-який чотирикутник має чотири вершини, чотири сторони та чотири діагоналі.
в) Діагоналі сполучають дві протилежні вершини чотирикутника.
г) Вершини чотирикутника називаються сусідніми, якщо вони є кінцями однієї з його сторін.
д) Будь-який чотирикутник має чотири пари сусідніх сторін.

78 Обчисліть величину невідомих кутів:



79 Накресліть довільний чотирикутник $PRST$. Назвіть та запишіть:

а) пари протилежних сторін;
б) пари сусідніх сторін;
в) пари протилежних вершин;
г) пари сусідніх вершин;
д) усі внутрішні кути.

Проведіть діагоналі цього чотирикутника. Назвіть та запишіть їх. Виміряйте довжину кожної сторони. Запишіть та обчисліть його периметр.

80 Використовуючи програмний засіб GeoGebra, побудуйте опуклий і неопуклий чотирикутники. Перевірте це за допомогою додаткових побудов.

81 Чи можуть кути чотирикутника дорівнювати:

а) 80°; 100°; 90°; 90°;
б) 70°; 110°; 90°; 100°;
в) 85°; 95°; 85°; 95°;
г) 75°; 95°; 85°; 105°?

Якщо такий чотирикутник існує, то опуклим чи неопуклим він є?

82 У чотирикутнику $PNRS$ відомо, що $\angle P = 100°$, $\angle N = 85°$, $\angle R = 110°$. Знайдіть градусну міру кута S.

83 У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A = 90°$, $\angle B = 120°$, $\angle C = \angle B$. Знайдіть градусну міру кута D.

84 Чи може існувати чотирикутник, у якого всі кути:

а) гострі; б) прямі; в) тупі?

85 У чотирикутнику $ABCD$ відомо, що $\angle A : \angle B : \angle C : \angle D = 1 : 2 : 3 : 4$. Знайдіть величини цих кутів. За допомогою транспортира побудуйте вказаний чотирикутник.

86 У многокутнику $PNRS$ відомо, що $\angle P : \angle N : \angle R : \angle S = 1 : 2 : 2 : 5$. Знайдіть величини цих кутів. Чи є ця фігура чотирикутником?

87 У приміщенні встановлено систему камер відеоспостереження у формі чотирикутника. За періодом часу кожна з камер зафіксувала такі кути огляду: $\angle A = 110°$, $\angle B = 70°$ і $\angle C = 80°$. Знайдіть величину $\angle D$, який показує напрямок четвертої камери.

88 Ви маєте ділянку землі неправильної форми, яка є довільним чотирикутником. Сторони цієї ділянки мають такі довжини: перша сторона — 25 м, друга сторона — 30 м, третя сторона — 35 м і четверта сторона — 40 м. Обчисліть, скільки секцій паркану вам потрібно придбати, якщо довжина однієї секції становить 2,5 м.

89 Відомо, що периметр чотирикутника $MKNL$ дорівнює 42 см, периметр трикутника MKL — 20 см, периметр трикутника KNL — 30 см, периметр трикутника MKN — 27 см, периметр трикутника MLN — 33 см. Знайдіть довжини діагоналей MN і KL.

90 Ви відповідаєте за облаштування нового майданчика для паркування чотирикутної форми перед офісною будівлею. Сторони майданчика мають довжини 20 м, 30 м, 25 м і 35 м. Зовнішні кути майданчика становлять 100°, 110°, 75° і 75° відповідно. Перевірте правильність виміряних зовнішніх кутів. Обчисліть периметр цього майданчика. Поміркуйте, чи є майданчик такої форми зручним для паркування автомобілів?

91 Складіть із семи олівців два квадрати. Перетворіть їх в один прямокутник. Перемістіть один олівець так, щоб утворився трикутник та чотирикутник.

92 За допомогою циркуля та лінійки, побудуйте довільний чотирикутник $ABCD$, знаючи довжини його сторін і величини кутів: $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $CD = 7$ см, $DA = 8$ см, $\angle A = 90°$, $\angle B = 120°$. Якщо у вас є доступ до програм для геометричної побудови, таких як GeoGebra або інші, можна скористатися ними для більш точної побудови.

2

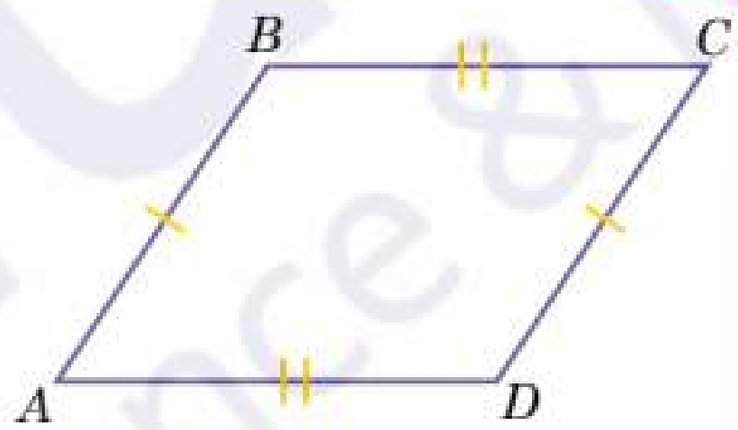
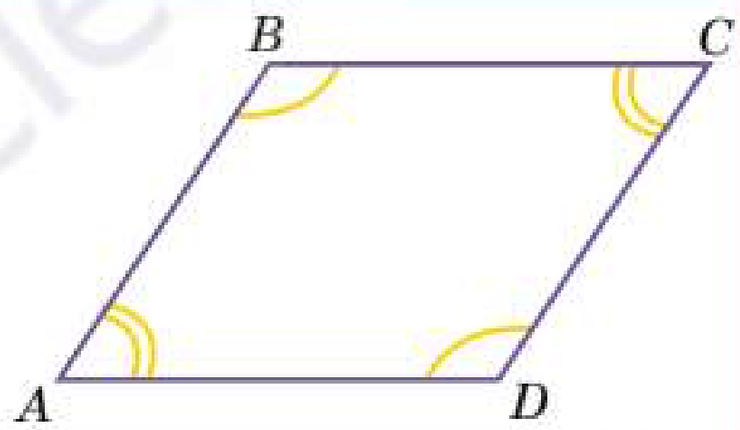
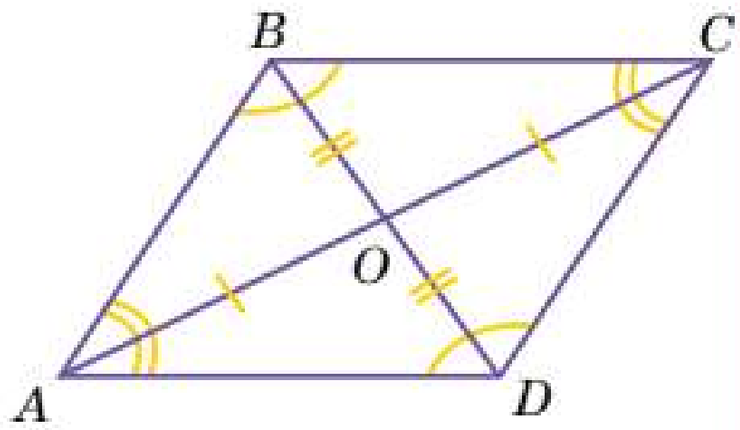
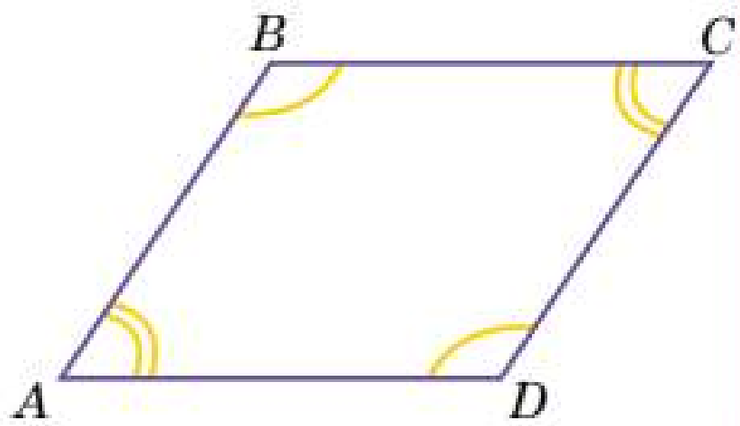
2.3. Паралелограм та його властивості. Ознаки паралелограма

Паралелограм — це чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні, тобто лежать на паралельних прямих.

Паралелограми часто можна зустріти в дизайні будівель і мостів. Наприклад, у сучасних будівлях можна побачити фасади, побудовані з елементів у формі паралелограмів, що додає конструкціям естетичної привабливості та підвищує їхню міцність.

Поміркуйте!
Чим паралелограм відрізняється від інших чотирикутників?

Властивості паралелограма

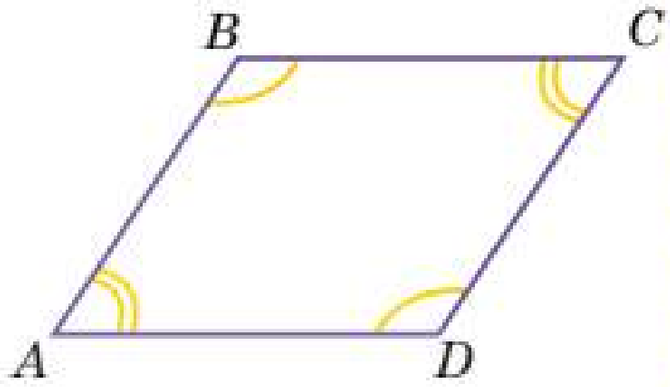
Протилежні сторони паралелограма рівні: $AB = CD$ і $AD = BC$	
Протилежні кути паралелограма рівні: $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$	
Діагоналі паралелограма діляться точкою перетину навпіл: $AO = CO$ і $BO = DO$	
Сума кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, дорівнює 180°: $\angle A + \angle B = 180°$ $\angle B + \angle C = 180°$ $\angle C + \angle D = 180°$ $\angle A + \angle D = 180°$	

Властивість — це характеристика фігури, яка завжди справедлива для цієї фігури. Наприклад, властивості паралелограма описують особливості, які притаманні всім паралелограмам без винятку.

Доведення властивостей паралелограма

Приклад

1 Знайдіть кути паралелограма, якщо сума двох його кутів дорівнює 150°.



Розв'язання

Оскільки сума двох внутрішніх односторонніх кутів паралелограма дорівнює 180°, то в умові йде мова про суму протилежних кутів.

Нехай $\angle A + \angle C = 150°$. Тоді $\angle A = \angle C = 150° : 2 = 75°$.

Оскільки сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°, то $\angle A + \angle B = 180°$.

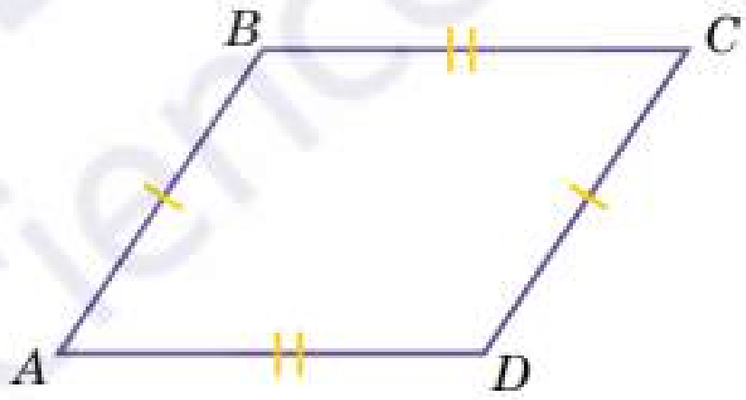
$\angle B = 180° - \angle A = 180° - 75° = 105°$.

Протилежні кути паралелограма рівні, отже $\angle B = \angle D = 105°$.

Відповідь. $\angle A = \angle C = 75°$, $\angle B = \angle D = 105°$.

Приклад

2 У паралелограмі $ABCD$ сторона AB дорівнює 10 см, а сторона BC дорівнює 6 см. Знайдіть периметр паралелограма.



Розв'язання

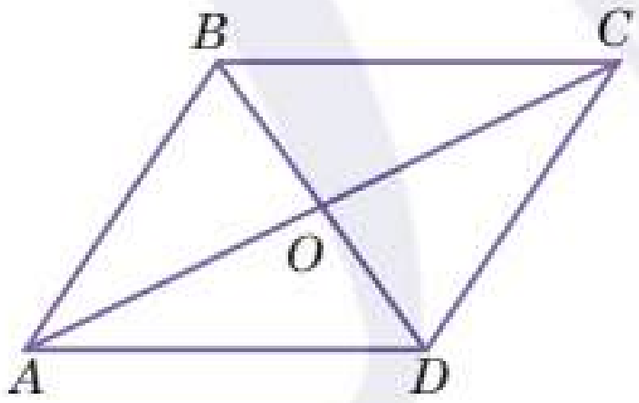
Протилежні сторони паралелограма рівні:

$AB = CD$ і $AD = BC$.

$P_{ABCD} = 2(AB + AD)$; $P_{ABCD} = 2(10 + 6) = 32$ см.

Відповідь. 32 см.

Ознаки паралелограма



1) Якщо дві протилежні сторони чотирикутника паралельні і рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

$$AB = CD,\ AD = BC$$
$$AB \parallel CD,\ AD \parallel BC$$

2) Якщо протилежні сторони чотирикутника попарно рівні, то цей чотирикутник — паралелограм.

$$AB = CD,\ AD = BC$$

3) Якщо діагоналі чотирикутника точкою перетину діляться навпіл, то цей чотирикутник — паралелограм.

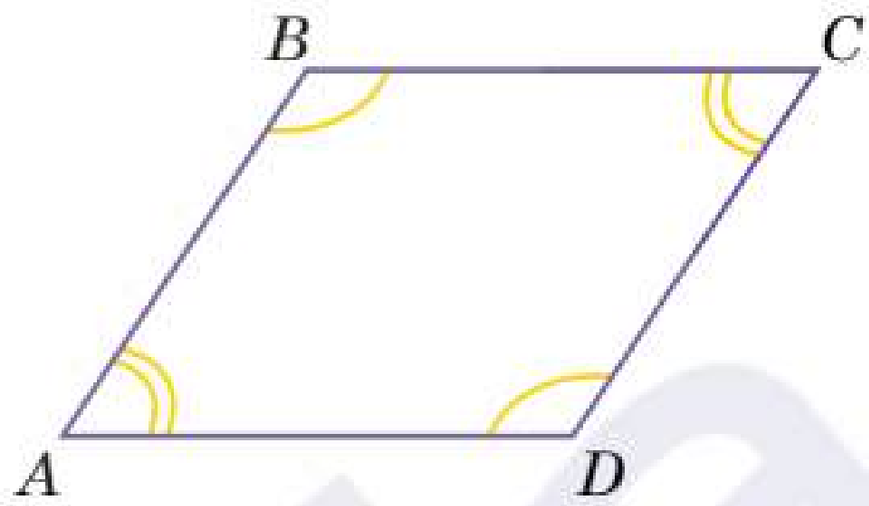
$$AO = CO \text{ і } BO = DO$$

Доведення ознак паралелограма

Приклад

3 Сума градусних мір трьох кутів паралелограма дорівнює 220°. Знайдіть величину гострого кута цього паралелограма.

Розв'язання



$\angle A + \angle B + \angle C = 220°$.
Сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°:
$\angle A + \angle B = 180°$.
Звідси, $\angle C = 220° - 180° = 40°$.
Відповідь. 40°.

Щоб обчислити периметр паралелограма, потрібно додати довжини всіх сторін. Оскільки, протилежні його сторони мають однакову довжину, то **периметр паралелограма** можна обчислити так:

$P = a \cdot 2 + b \cdot 2 = (a + b) \cdot 2$, де a, b — сторони паралелограма.

Приклад

4 Сторони паралелограма відносяться як 3 : 7, а його периметр дорівнює 96 см. Знайдіть сторони паралелограма.

Розв'язання

Нехай $AB = 3x$, $BC = 7x$. Складемо рівняння:
$P_{ABCD} = 2(3x + 7x) = 96$;
$3x + 7x = 48$;
$10x = 48$;
$x = 4{,}8$.
Звідси $AB = CD = 3x = 14{,}4$ см.
$BC = AD = 5x = 33{,}6$ см.
Відповідь. 14,4 см; 33,6 см; 14,4 см; 33,6 см.

Попрактикуйтеся

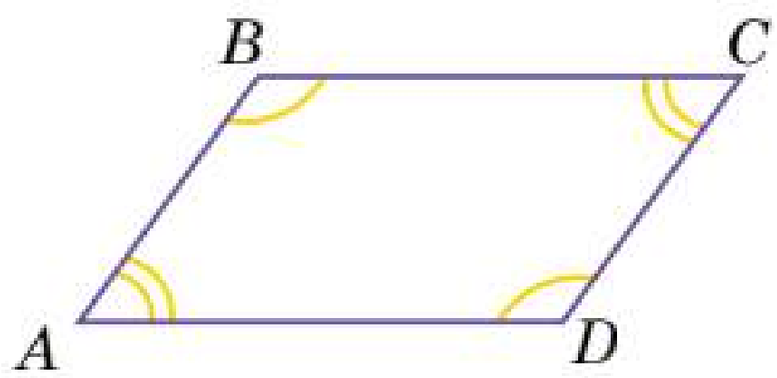
93 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) У паралелограма протилежні сторони паралельні.
б) У паралелограма всі сторони рівні.
в) У паралелограма протилежні кути рівні.
г) Діагоналі паралелограма ділять його на чотири рівні трикутники.
д) Діагоналі паралелограма завжди перетинаються під прямим кутом.

е) Сума кутів паралелограма дорівнює 360°.
ж) Будь-який чотирикутник з паралельними протилежними сторонами є паралелограмом.

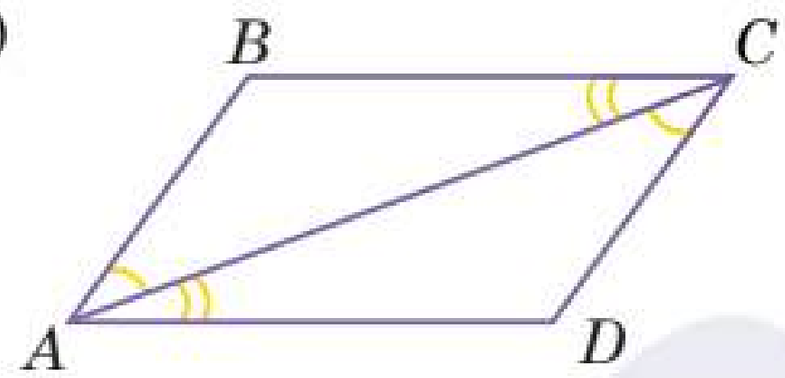
94 Обчисліть величину невідомих кутів:

а)



$\angle A = 75°$
$\angle D$ — ?

б)



$\angle BCA = 15°$; $\angle BAC = 30°$
$\angle ABC$ — ?; $\angle BCD$ — ?

95 Побудуйте паралелограм $ABCD$. Чому дорівнюватимуть кути ADC і BAD у цьому паралелограмі, якщо:

а) $\angle ABC = 115°$; б) $\angle BCD = 65°$; в) $\angle ABC = \angle BCD = 90°$?

96 Обчисліть кути паралелограма, якщо:

а) один з його кутів на 45° менший від іншого;
б) сума двох його кутів дорівнює 240°.

97 Сума градусних мір трьох кутів паралелограма дорівнює 310°. Обчисліть величину тупого кута цього паралелограма.

98 Знайдіть паралелограми у вашому домі або школі. Намалюйте їх або зробіть фотографії та позначте властивості. Використовуючи транспортир, виміряйте кути паралелограмів.

99 Накресліть у зошиті трикутник і проведіть через кожну його вершину пряму, паралельну протилежній стороні. Скільки паралелограмів утворилося на рисунку? Скільки спільних вершин мають будь-які два утворені паралелограми?

100 Сума градусних мір трьох кутів паралелограма дорівнює 290°. Обчисліть величину гострого кута цього паралелограма.

101 У паралелограмі $ABCD$ діагональ BD утворює зі стороною CD кут 68°, тоді як $\angle ABC = 84°$. Знайдіть кути ADB і BCD.

102 Використовуючи програмний засіб GeoGebra, побудуйте паралелограм:

а) зі сторонами 4 см та 7 см; б) з кутом 60°.

Приклад

5 Периметр паралелограма дорівнює 54 см. Якого найбільшого цілого значення може набувати довжина однієї з діагоналей цього паралелограма?

Розв'язання

$P_{ABCD} = 54$ см;
$P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 54$ см.

Відповідно до теореми про нерівність трикутника, у трикутнику кожна сторона менша за суму двох інших сторін.

Розглянемо трикутник ABC: $AB + BC = 27$ см.

За теоремою про нерівність трикутника, сторона AC не може бути більшою за 27 см.

$$AB + BC > AC$$

Відповідь. 26 см.

103 Периметр паралелограма дорівнює 90 см. Якого найбільшого цілого значення може набувати довжина однієї з діагоналей цього паралелограма?

104 O — точка перетину діагоналей паралелограма $ABCD$. Периметр трикутника AOD на 7 см більше, ніж периметр трикутника AOB. Знайдіть різницю сторін AD і AB.

105 Довжина однієї із сторін паралелограма становить 40% від довжини іншої сторони. Знайдіть довжину меншої сторони цього паралелограма, якщо його півпериметр дорівнює 48 см.

106 Довжина однієї із сторін паралелограма становить 80% від довжини іншої сторони. Знайдіть довжину меншої сторони цього паралелограма, якщо його периметр дорівнює 32 см.

107 Різниця сторін паралелограма дорівнює 7 см, а його периметр дорівнює 62 см. Знайдіть сторони паралелограма.

108 Один з елементів мозаїки в оздобленні підлоги Десятинної церкви має форму паралелограма. Його сторони відносяться як 2 : 5, а периметр дорівнює 16,8 см. Знайдіть сторони паралелограма.

109 Знайдіть периметр паралелограма $ABCD$, якщо сторона AD дорівнює 18 см і становить $\frac{2}{3}$ сторони AB.

110 Кут між бісектрисою тупого кута паралелограма і висотою, проведеною з вершини цього кута, дорівнює 40°. Знайдіть кути паралелограма.

111* Бісектриса одного з кутів паралелограма ділить його протилежну сторону навпіл. Знайдіть периметр паралелограма, якщо ця сторона дорівнює a см.

112* Сума двох сторін паралелограма дорівнює 36 см, а його периметр — 84 см. Знайдіть сторони паралелограма.

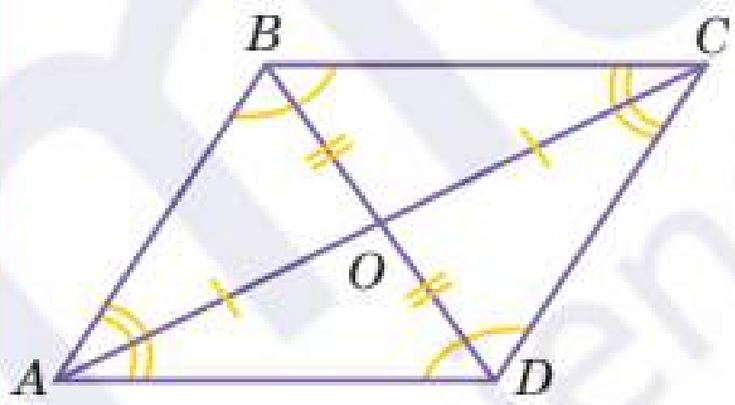
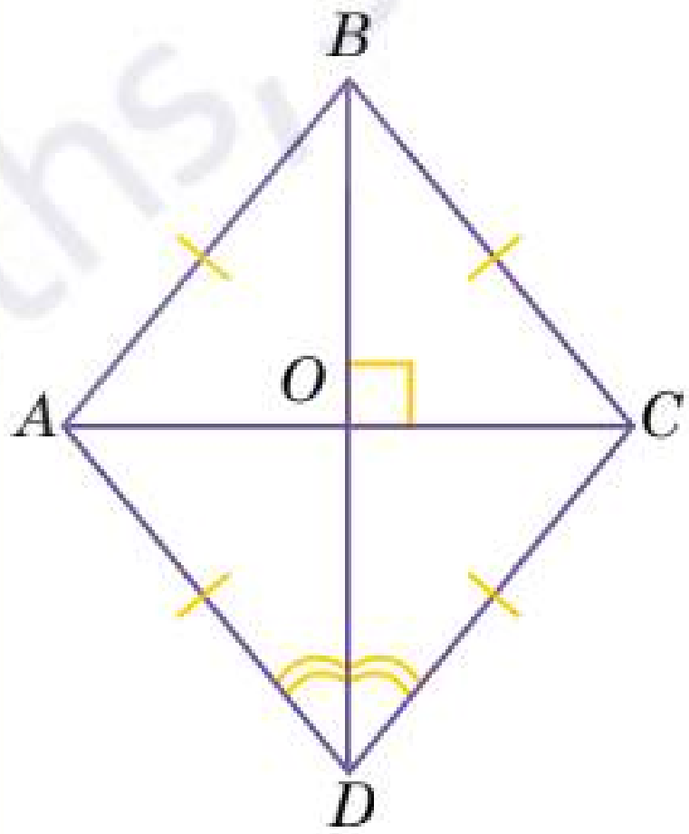
2.4. Ромб та його властивості. Дельтоїд

Ромби та дельтоїди можна знайти в різних візерунках, дизайні одягу, архітектурі та навіть у природі. Розуміння їх властивостей допомагає нам створювати красиві та цікаві речі.

Ромб — це паралелограм, у якого всі сторони рівні. Оскільки ромб є паралелограмом, то для нього справджуються всі його властивості. Але він має і низку особливостей.

Поміркуйте!
У чому полягає різниця між ромбом і паралелограмом?

Властивості ромба

1) Протилежні сторони ромба рівні 2) Протилежні кути ромба рівні 3) Діагоналі ромба діляться точкою перетину навпіл 4) Сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°	Ці властивості ромб запозичив у паралелограма 
5) Усі сторони ромба рівні, тобто мають однакову довжину: $AB = BC = CD = AD$ 6) Діагоналі перетинаються під прямим кутом: $AC \perp BD$ 7) Діагоналі ділять кути навпіл. Тобто діагональ ромба є бісектрисою кутів, до яких їх проведено: $\angle ADO = \angle ODC$	

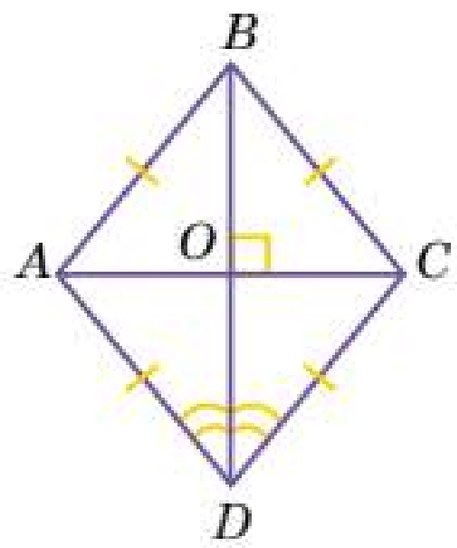
Доведення властивостей ромба

У рівнобедреного трикутника бічні сторони та кути при основі рівні.

Приклад

1 Діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O. Знайдіть кути трикутника ABC, якщо $\angle DAB$ дорівнює 100°.

Розв'язання



$\angle ABC + \angle DAB = 180°$.

Отже, $\angle ABC = 180° - \angle DAB = 180° - 100° = 80°$.

За властивістю ромба, всі сторони рівні.

Отже, ΔABC — рівнобедрений

$AB = BC$, $\angle BAC = \angle BCA$.

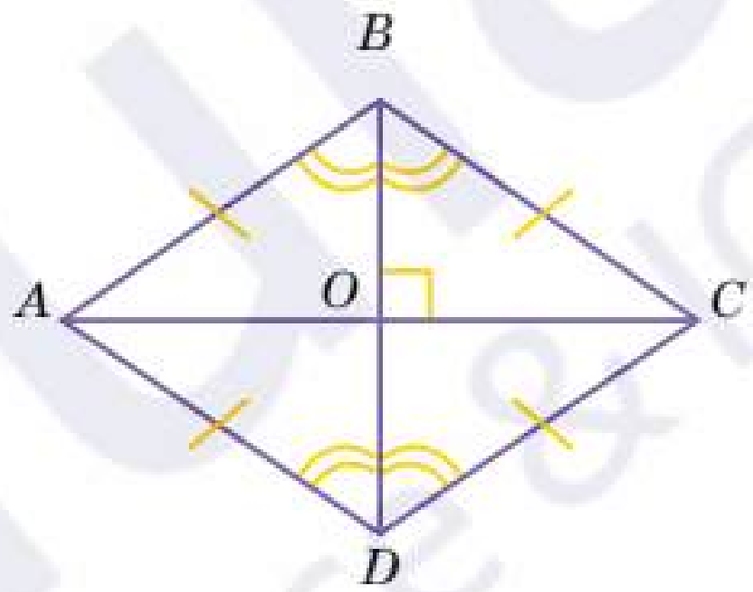
$\angle BAC = \angle BCA = (180° - 80°) : 2 = 50°$.

Відповідь. 80°; 50°.

Приклад

2 З вершини кута ромба, що дорівнює 120°, проведено діагональ завдовжки 32 см. Знайдіть периметр ромба.

Розв'язання



$\angle ABC = 120°$, отже $\angle ABO = 60°$.

Діагональ $BD = 32$ см. Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом і в точці перетину діляться навпіл.

Отже, $OB = 16$ см, $\angle AOB = 90°$.

$\angle BAO = 90° - 60° = 30°$.

ΔAOB — прямокутний ($\angle AOB = 90°$).

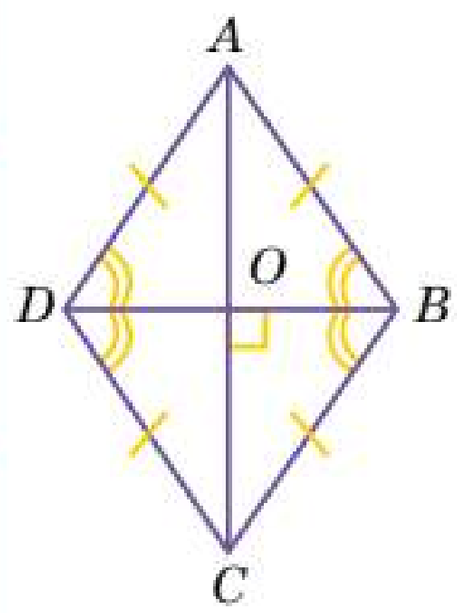
За властивістю кута 30° у прямокутному трикутнику:

$AB = 2 \cdot OB = 32$ см.

Отже, $P = 4 \cdot AB = 4 \cdot 32 = 128$ см.

Відповідь. 128 см.

Ознаки ромба

Якщо в паралелограма дві сусідні сторони рівні, то цей паралелограм є ромбом	
Якщо в паралелограма діагоналі перетинаються під прямим кутом (взаємно перпендикулярні), то цей паралелограм є ромбом	
Якщо в паралелограма діагональ є бісектрисою його кутів, то цей паралелограм є ромбом	

Доведення ознак ромба

Оскільки за властивостями ромба в нього всі сторони рівні, то для обчислення периметра ромба достатньо довжину сторони помножити на 4:

$P = 4 \cdot a$, де a — сторона ромба.

Уявіть собі повітряного змія, таку собі іграшку, яка літає високо в небі. Такі іграшки зазвичай виготовляють з легких матеріалів, як от папір або тканина, і міцного каркаса. Але яку форму має ця іграшка? Це не паралелограм, не квадрат, не прямокутник чи ромб. Це чотирикутник, який має по дві рівні сторони, проте ці сторони не паралельні між собою, тому цей чотирикутник не є паралелограмом.

Дельтоїд — це чотирикутник, у якого дві пари сусідніх сторін рівні.

Властивості дельтоїда

Дві пари сусідніх сторін мають однакову довжину:

$AB = BC$, $AD = DC$

Головна діагональ (більша діагональ BD) дельтоїда є бісектрисою протилежних кутів:

$\angle ABO = \angle OBC$, $\angle AOD = \angle ODC$

Головна діагональ ділить дельтоїд на два рівні трикутники.

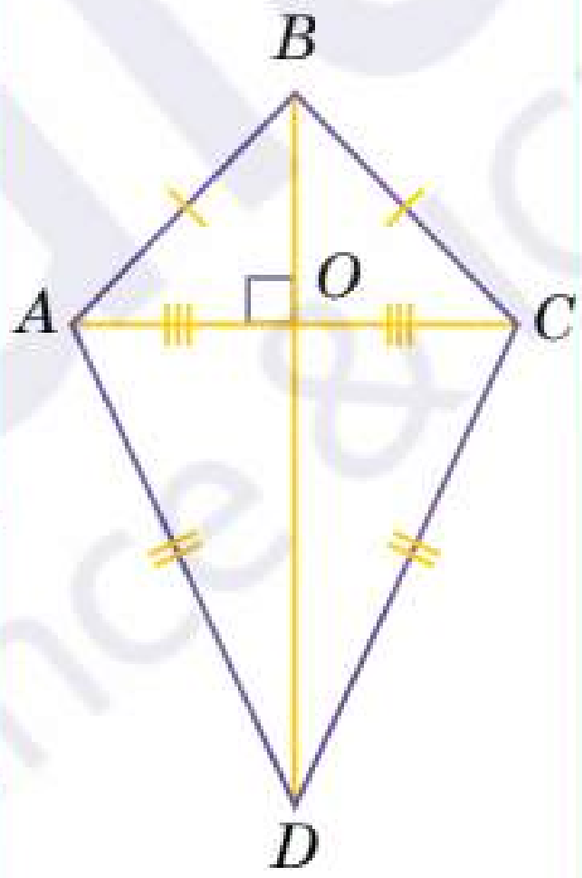
$\triangle BAD = \triangle BCD$

Діагоналі перетинаються під прямим кутом, причому одна діагональ ділить іншу на дві рівні частини:

$AC \perp BD$

Кути дельтоїда між сторонами, які мають різну довжину, рівні:

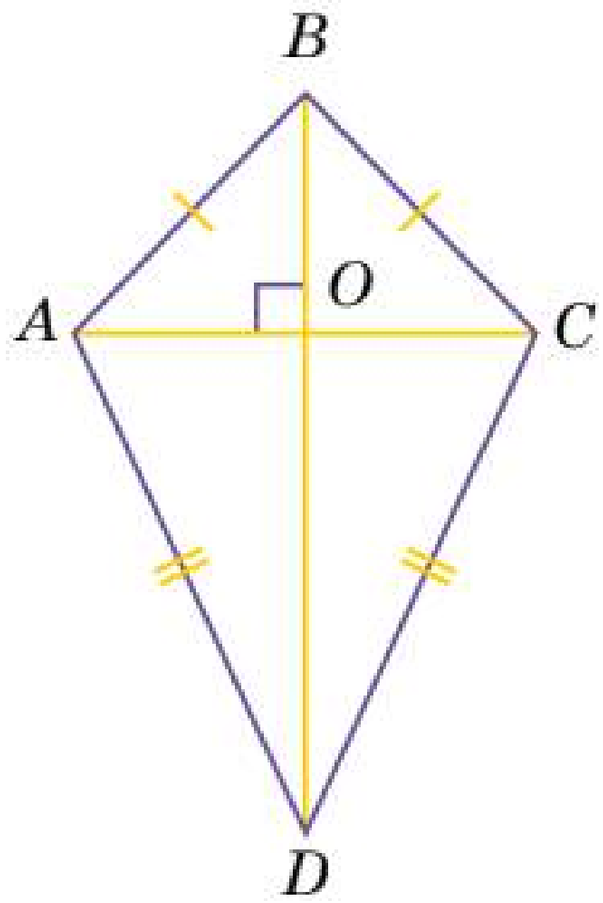
$\angle BAD = \angle BCD$



Приклад

3 Знайдіть сторони дельтоїда, якщо його периметр дорівнює 130 см, а різниця бічних сторін дорівнює 5 см.

Розв'язання



$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$.

$AB = BC$, $CD = AD$.

$AD - AB = 5$ см;

$AD = 5 + AB$.

Нехай $AB = x$, $AD = x + 5$.

Складемо рівняння:

$x + x + x + 5 + x + 5 = 130$;

$4x + 10 = 130$;

$4x = 120$;

$x = 30$.

Отже, $AB = 30$ см, $AD = 30 + 5 = 35$ см.

Відповідь. 30 см; 35 см.

Попрактикуйтеся

113 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) У ромба всі сторони рівні.
б) У дельтоїда всі кути рівні.
в) Діагоналі ромба перетинаються під прямим кутом.
г) Діагоналі дельтоїда рівні.
д) Ромб є окремим випадком паралелограма.
е) Дельтоїд має тільки одну пару паралельних сторін.
ж) Протилежні кути дельтоїда рівні.
и) У дельтоїда всі сторони рівні.
к) Діагоналі ромба є бісектрисами його кутів.
л) Дельтоїд є окремим випадком паралелограма.

114 Діагоналі ромба $ABCD$ перетинаються в точці O. Знайдіть кути трикутника AOD, якщо кут BAC дорівнює 120°.

115 У ромбі $ABCD$ кут A дорівнює 122°. Знайдіть кути трикутника AOB, якщо O — точка перетину діагоналей.

116 Одна з діагоналей ромба дорівнює його стороні. Знайдіть кути ромба.

117 З вершини кута ромба, що дорівнює 60°, проведено діагональ завдовжки 1,6 дм. Знайдіть периметр ромба.

118 Використовуючи програмний засіб GeoGebra:

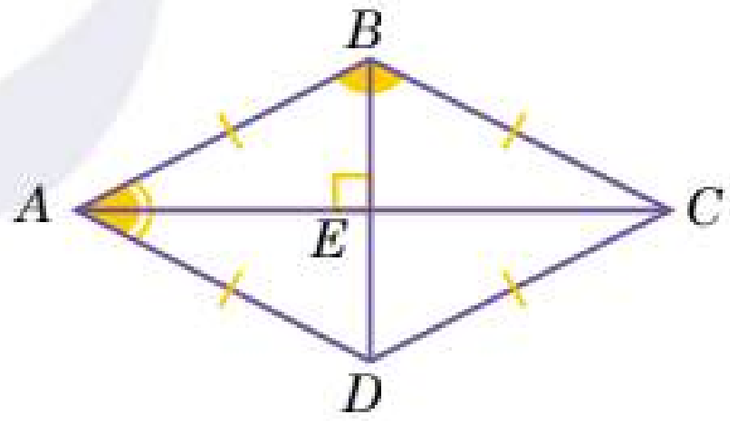
а) побудуйте ромб та виміряйте кут між діагоналями. Спробуйте змінити розміри ромба, перевірте, чи змінилася градусна міра кута між діагоналями;
б) побудуйте дельтоїд з кутом 60°. Виміряйте кут між діагоналями, а також кути дельтоїда.

119 Один із кутів ромба $ABCD$ на 32° більший, ніж інший. Знайдіть кути трикутника AOB, якщо O — точка перетину діагоналей.

120 Сума двох кутів ромба дорівнює 86°. Знайдіть усі кути ромба.

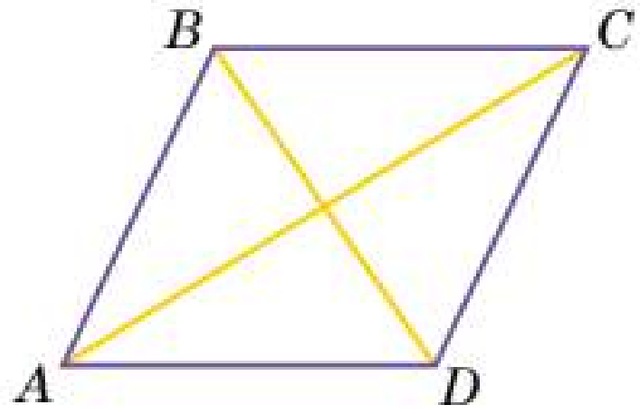
121 Розв'яжіть задачі за поданими рисунками.

а)



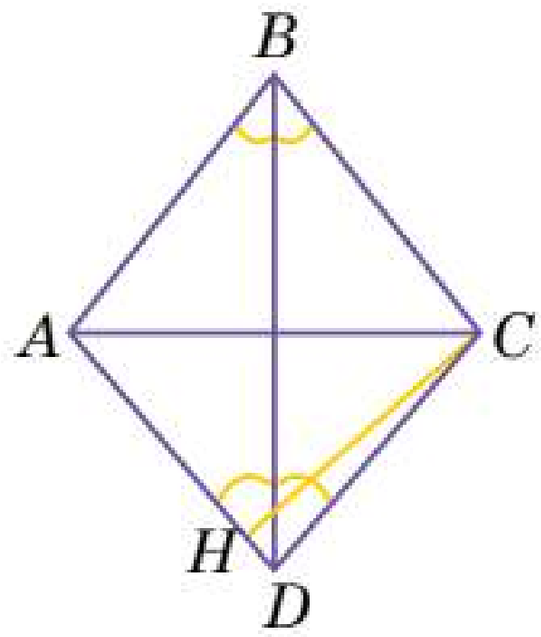
$\angle BAD = 60°$, $AB = 10$ см
BD — ?

б)



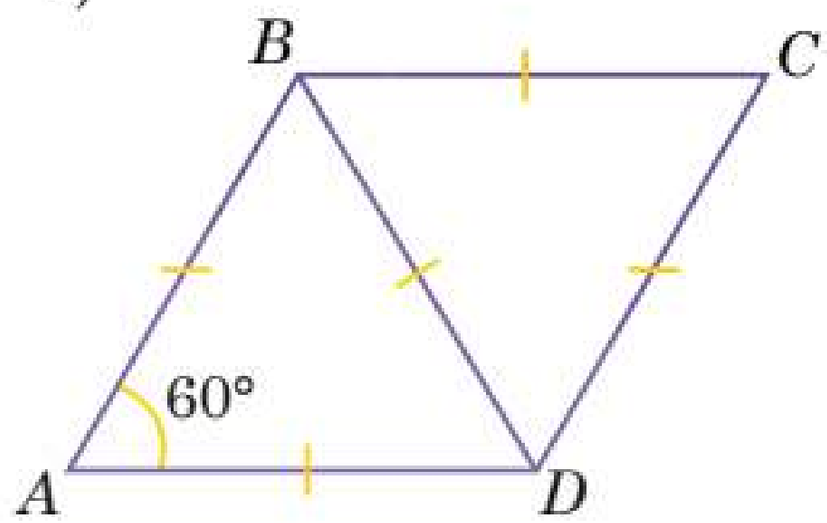
$ABCD$ — ромб, $AB = 17$ см
P_{ABCD} — ?

в)



$ABCD$ — ромб $\angle HCD = 15°$
$\angle ADC = 50°$ $\angle ACH$ — ?

г)



$\angle A = 60°$
$\angle DBC$ — ?

122 Кут між стороною ромба і висотою, проведеною з вершини тупого кута, дорівнює 25°. Знайдіть більший із кутів ромба.

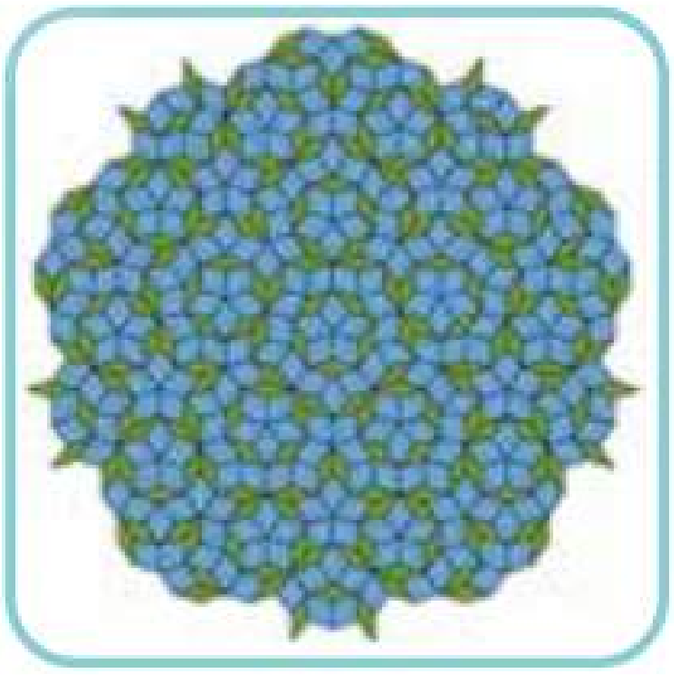
123 Повітряний змій має форму дельтоїда. Знайдіть його сторони, якщо його периметр дорівнює 246 см, а різниця бічних сторін дорівнює 3 см.

124 Чотирикутник $ABCD$ — дельтоїд. Знайдіть сторони дельтоїда, якщо одна сторона вдвічі більша за іншу, а його периметр дорівнює 60 см.

125 Знайдіть кути ромба, якщо кути, утворені його стороною, з діагоналями відносяться як 4 : 5.

126 Дельтоїд $ABCD$ складений із рівностороннього трикутника ABC, периметр якого дорівнює 90 см, і рівнобедреного трикутника ADC, периметр якого дорівнює 110 см. Знайдіть периметр дельтоїда.

127 У 1973 році британський фізик-математик Роджер Пенроуз представив нову геометричну концепцію, названу мозаїками (плитками) Пенроуза. Ідея в тому, що вся площина вкрита ромбами двох типів таким чином, як показано на зображенні. Чому дорівнюють кути деталей мозаїки (ромбів)?



128 Суміжні сторони дельтоїда відносяться як 2 : 5. Знайдіть його найменшу сторону, якщо периметр дельтоїда дорівнює 84 см.

129 Доведіть, що ромб, один з кутів якого — прямий, є квадратом.

130 На сторонах AB, BC та AC трикутника ABC позначено точки F, D та E так, що $EC : AE = 2 : 1$, $FE = DE$, $AF = 3$ см, $DC = 4$ см, $FB = BD$. Знайдіть FB.

131 Чотирикутник $ABCD$ — дельтоїд. До сторони AB з точки C проведено висоту CE: $CE \perp AB$, $\angle BAD = 100°$, $\angle ECD = 80°$. Знайдіть $\angle DBC$.

2.5. Прямокутник, квадрат та їх властивості

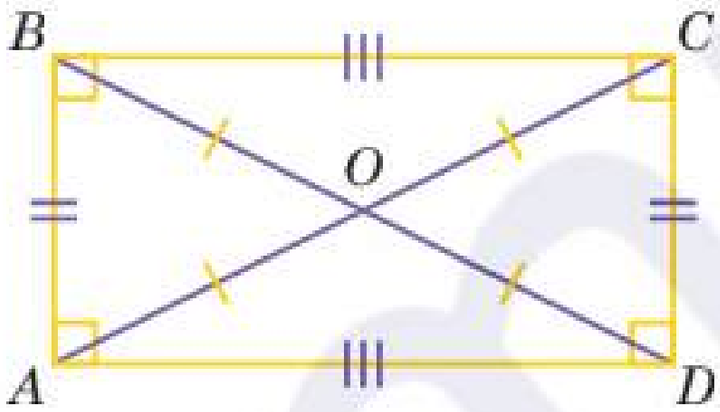
Прямокутником називається паралелограм, у якого всі кути прямі.

Квадратом називається прямокутник, у якого всі сторони рівні.

Квадрат — це чотирикутник, який за своїми властивостями є одночасно паралелограмом, прямокутником і ромбом.

Прямокутник та квадрат є частинними випадками паралелограма, проте мають деякі властивості, які роблять їх особливими.

Леонардо да Вінчі (1452–1519 р р.) довів, що тіло людини вписується в квадрат.



Периметр прямокутника:

$$P_{ABCD} = (AB + BC) \cdot 2$$

Периметр квадрата:

$$P_{KLMN} = 4 \cdot KL$$

Поміркуйте!
Чим відрізняється квадрат від ромба?

Властивості прямокутника і квадрата

Прямокутник	Квадрат
Протилежні сторони рівні	Усі сторони рівні
Протилежні сторони паралельні	Протилежні сторони паралельні
Протилежні кути рівні	Протилежні кути рівні
Усі кути прямі	Усі кути прямі
Сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°	Сума кутів, прилеглих до однієї сторони, дорівнює 180°
Діагоналі рівні	Діагоналі рівні та перетинаються під прямим кутом
Діагоналі точкою перетину діляться навпіл	Діагоналі точкою перетину діляться навпіл
Діагоналі утворюють дві пари рівних рівнобедрених трикутників	Діагоналі утворюють чотири рівних прямокутних трикутники

Доведення властивостей та ознак прямокутника

Ознаки прямокутника

1. Якщо в паралелограмі один із кутів прямий, то цей паралелограм є прямокутником.
2. Якщо діагоналі паралелограма рівні, то цей паралелограм є прямокутником.

Ознаки квадрата

1. Якщо діагоналі прямокутника взаємно перпендикулярні, то він є квадратом.
2. Якщо діагоналі ромба мають однакову довжину, то він є квадратом.

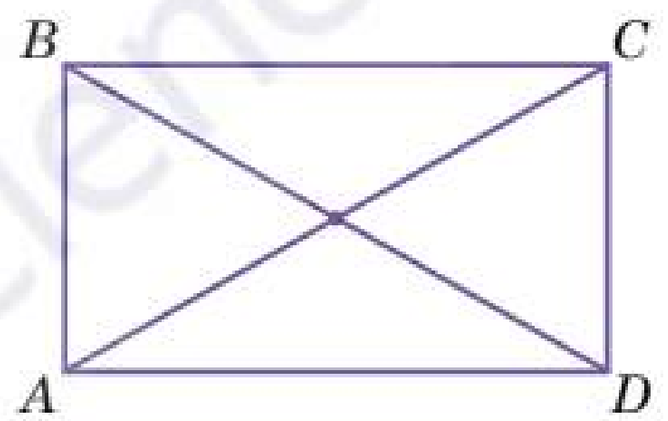
Доведення ознак квадрата

Приклад

1 У прямокутнику $ABCD$ довжина вдвічі більша за ширину. Знайдіть сторони й периметр прямокутника, якщо AC дорівнює 24 см, а периметр трикутника ABC дорівнює 90 см.

Розв'язання

Розглянемо ΔABC: сторони AB і BC — катети трикутника.
$P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC = 90$ см (за умовою).
$AB + BC$ — півпериметр прямокутника $ABCD$.
$\frac{1}{2}P_{ABCD} = AB + BC$;
$\frac{1}{2}P_{ABCD} = P_{ABC} - AC = 90 - 24 = 66$ см.



За умовою $AB : BC = 1 : 2$. Нехай $AB = x$ см, $BC = 2x$ см. Складемо рівняння:

$x + 2x = 66$;
$3x = 66$;
$x = 22$;
$2x = 44$.

Отже, $AB = 22$ см, $BC = 44$ см.
$\frac{1}{2}P_{ABCD} = 66$ см;
$P_{ABCD} = 2 \cdot \frac{1}{2}P_{ABCD} = 132$ см.

Діагональ ділить прямокутник на два рівних прямокутних трикутники.

Відповідь. $AB = 22$ см; $BC = 44$ см; $P_{ABCD} = 132$ см.

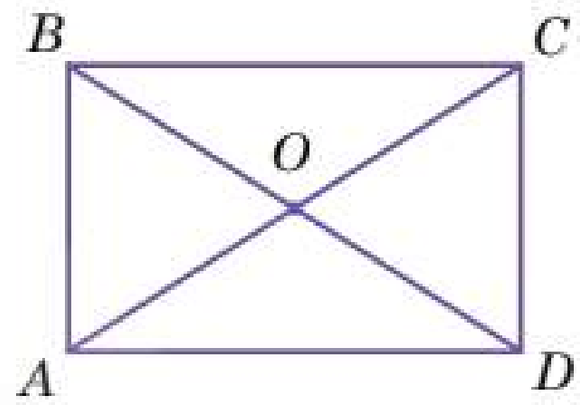
Приклад

2 У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $\angle BAC = 63°$. Знайдіть кути між діагоналями прямокутника.

Розв'язання

Розглянемо $ABCD$ — прямокутник. $\angle BAC = 63°$ (за умовою).
Оскільки ΔAOB — рівнобедрений (за власт. діагоналей прямок.),

то $\angle BAO = \angle ABO = 63°$ (за власт. кутів рівнобедреного трикутника).



$\angle BAO + \angle ABO + \angle AOB = 180°$ (як сума кутів трикутника).

Звідси $\angle AOB = 180° - (\angle BAO + \angle ABO)$;
$\angle AOB = 180° - 126° = 54°$.

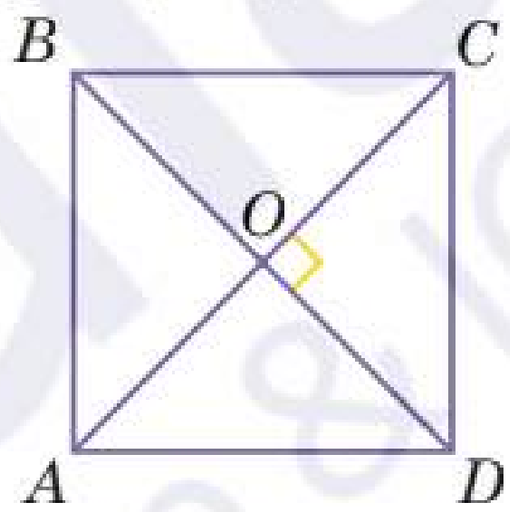
$\angle AOB$ і $\angle COB$ — суміжні,
то $\angle AOB + \angle COB = 180°$ (за власт. суміжних кутів).

Звідси $\angle COB = 180° - \angle AOB = 180° - 54° = 126°$.

Відповідь. 54°; 126°.

Приклад

3 Доведіть, що паралелограм, у якому всі кути рівні, а діагоналі перпендикулярні, є квадратом.



Розв'язання

Нехай $ABCD$ — даний паралелограм. За умовою: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$, AC і AD — діагоналі, $AC \perp AD$.

Доведемо, що $ABCD$ — квадрат.

Оскільки $ABCD$ — паралелограм, то $AO = OC$ (за власт. діагоналей паралелограма), BO — висота і медіана ΔABC.

Звідси ΔABC — рівнобедрений (за ознакою).

Отже, $AB = BC$ (за власт. рівнобедреного трикутника).

За властивістю протилежних сторін паралелограма: $AB = CD$, $BC = AD$. Звідси $AB = CD = BC = AD$.

Отже, $ABCD$ — ромб (за ознаками ромба).

Оскільки сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює 360°, то: $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 360° : 4 = 90°$.

Отже, $ABCD$ — квадрат.

Доведено!

Попрактикуйтеся

132 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) У прямокутника всі кути прямі.
б) У квадрата всі сторони різні.
в) Діагоналі прямокутника рівні.
г) Діагоналі квадрата не перетинаються.
д) Квадрат є окремим випадком ромба.
е) Прямокутник з рівними сторонами є квадратом.
ж) Діагоналі прямокутника ділять його на чотири рівні прямокутні трикутники.
и) Сума кутів прямокутника дорівнює 180°.

133 Периметр прямокутника дорівнює 28 см, а одна з його сторін — 5 см. Знайдіть довжину іншої сторони.

134 У прямокутному саду довжина вдвічі більша за ширину. Для огорожі саду потрібно 56 м дощечок. Знайдіть ширину та довжину саду.

135 Футбольне поле має форму прямокутника. Його довжина на 10 м більша за ширину, а периметр дорівнює 260 м. Знайдіть довжину і ширину футбольного поля.

136 Доведіть, що якщо в чотирикутнику всі кути прямі, то чотирикутник є прямокутником.

137 Знайдіть периметр прямокутника $ABCD$, якщо бісектриса кута A ділить:

а) сторону BC на відрізки 45,6 см і 7,85 см;
б) сторону DC на відрізки 2,7 дм і 4,5 дм.

138 Діагоналі прямокутника $KLMN$ перетинаються в точці O. Доведіть, що трикутники KON і KOL — рівнобедрені.

139 Кут між діагоналями прямокутника дорівнює 70°. Знайдіть величину кутів, утворених діагоналлю та сторонами прямокутника.

140 Використовуючи програмний засіб GeoGebra, побудуйте прямокутник $ABCD$ та виконайте такі побудови:

а) проведіть діагоналі прямокутника;
б) виміряйте кут між діагоналями;
в) проведіть бісектрису цього кута;
г) поділіть AO навпіл точкою E, де точка O — точка перетину діагоналей;
д) через точку O проведіть перпендикуляр до AC.

141 У прямокутнику $ABCD$ відомо, що $\angle BAC = 55°$. Знайдіть кути між діагоналями прямокутника.

142 Фермерська ділянка землі має прямокутну форму. Відомо, що периметр ділянки дорівнює 2000 метрів, а співвідношення довжин сторін становить 3 : 2. Знайдіть розміри ділянки.

143 У квадраті $ABCD$ на сторонах AB і BC взято точки E і F відповідно так, що $AE = BF$. Доведіть, що $CE = DF$.

144 Діагоналі прямокутника $KLMN$ перетинаються в точці O. Знайдіть периметр трикутника KON, якщо $\angle MKN = 30°$, $KM = 12$ см.

145 Доведіть, що ромб, у якого один з кутів прямий, є квадратом.

146 У прямокутному трикутнику проведено бісектрису прямого кута. Через точку перетину бісектриси з гіпотенузою проведено прямі, паралельні катетам трикутника. Доведіть, що отриманий чотирикутник — квадрат.

147 Діагональ AC квадрата $ABCD$ дорівнює 18,4 см. Пряма, що проходить через точку A і перпендикулярна до сторони AC, перетинає сторони BC і CD в точках M і N відповідно. Знайдіть довжину відрізка MN.

148 На сторонах AB і CD прямокутника $ABCD$ взяли точки K і M таким чином, що геометрична фігура $AKCM$, що утворилася — це ромб. Діагональ AC утворює з стороною AB кут 30°. Знайдіть сторону ромба, якщо найбільша сторона прямокутника дорівнює 3 см.

149 На сторонах AB, BC, CD, AD квадрата $ABCD$ лежать точки P, M, E та K відповідно таким чином, що $AP = BM = CE = DK = 3$ см, $\angle APK = 60°$. Знайдіть периметр чотирикутника $PMEK$.

150 Всередині квадрата $ABCD$ вибрана точка M таким чином, що трикутник AMD — рівносторонній. Знайдіть величину кута AMB.

151 Чи можна стверджувати, що чотирикутник $KLMN$ — прямокутник, якщо $KL = MN$, $KM = LN$.

152* Вершини чотирикутника є серединами сторін довільного многокутника. За якої умови даний чотирикутник — квадрат?

153* У рівнобедрений прямокутний трикутник MAD ($\angle A$ — прямий), вписали квадрат $SAYE$, який має з ним спільний прямий кут. Вершина протилежного кута лежить на гіпотенузі MD. Знайдіть катет трикутника MAD, якщо периметр квадрата дорівнює 60 см.

154* На діагоналі AC квадрата $ABCD$ взято точку M так, що $AM = AB$. Через точку M проведено пряму, перпендикулярну до прямої AC. Ця пряма перетинає сторону квадрата BC в точці H. Доведіть, що $BH = HM = MC$.

155* Дано прямокутник $ABCD$ з діагоналями AC і BD, які перетинаються в точці O. Відомо, що точка P лежить на діагоналі AC так, що $AP = 2PC$. Доведіть, що трикутник BOP — рівнобедрений.

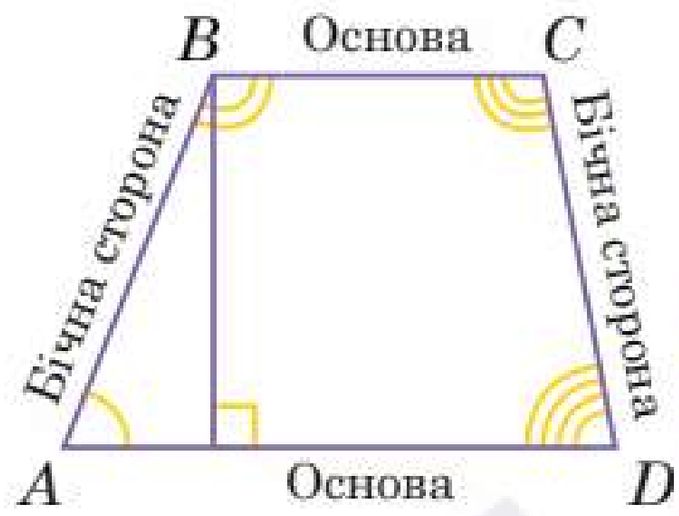
156* У квадрат зі стороною 10 см вписаний прямокутник таким чином, що на кожній стороні квадрата розташована одна з його вершин, а сторони прямокутника паралельні діагоналям квадрата. Знайдіть довжини сторін прямокутника, якщо одна з них у 3 рази коротша за іншу.

2.6. Трапеція та її властивості

Трапеція — це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші — ні.

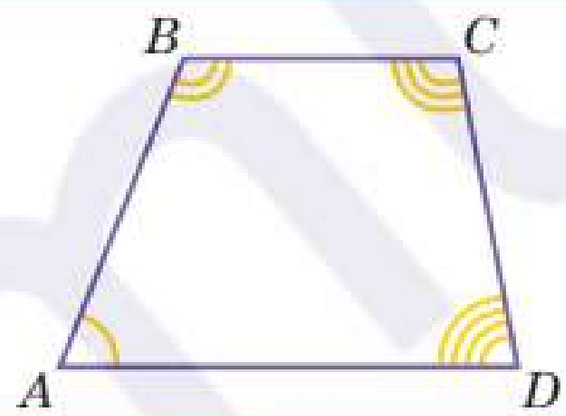
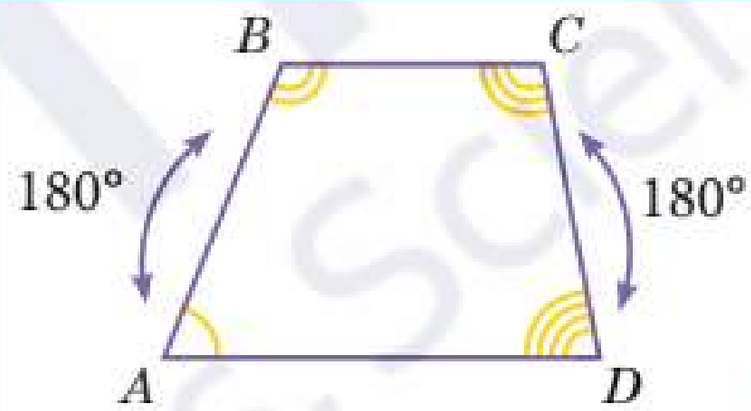
Паралельні сторони називаються **основами** трапеції, а непаралельні — **бічними сторонами.**

Перпендикуляр, проведений з будь-якої точки основи до прямої, що містить протилежну основу, називається **висотою** трапеції.



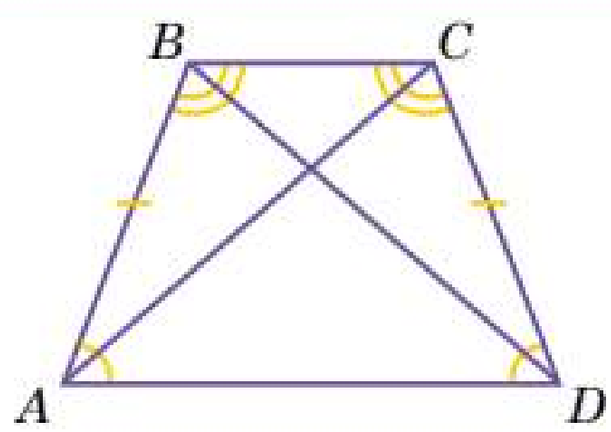
Властивості трапеції

Властивості довільної трапеції

Основи трапеції паралельні: $AD \parallel BC$	
Сума кутів, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180°	

Рівнобічна трапеція

Рівнобічною (рівнобедреною) трапецією називається трапеція, у якій бічні сторони рівні.

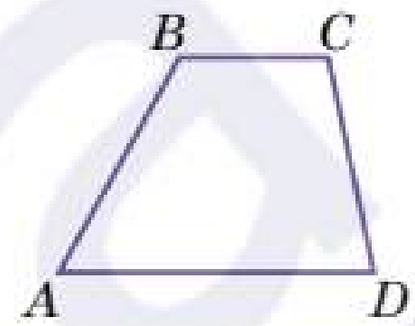
Кути при основі рівні: $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$	
Бічні сторони рівні: $AB = CD$	
Діагоналі рівні: $AC = BD$	

Ознаки рівнобічної трапеції

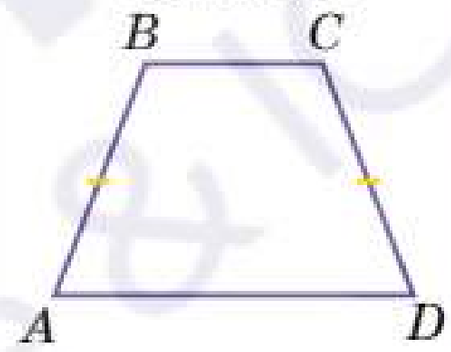
1. Якщо кути при основі трапеції рівні, то така трапеція рівнобічна.
2. Якщо діагоналі трапеції рівні, то така трапеція рівнобедрена.

2

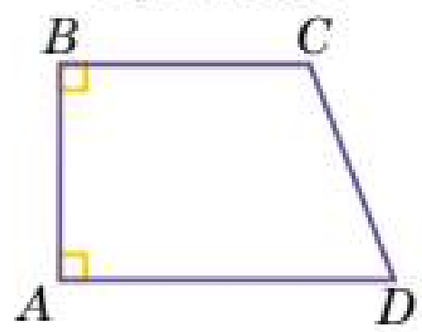
Довільна трапеція



Рівнобічна трапеція



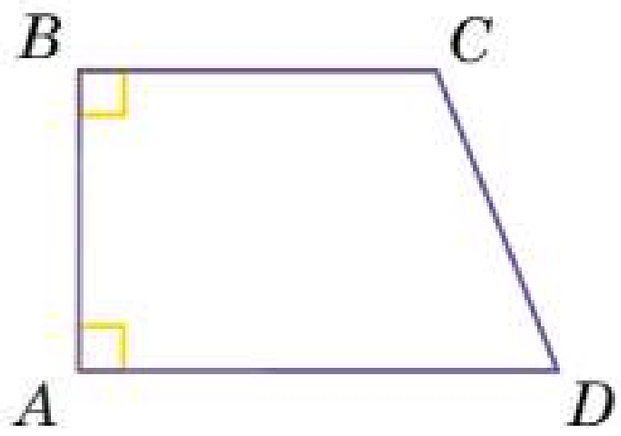
Прямокутна трапеція



Доведення властивостей та ознак трапеції

Прямокутна трапеція

Прямокутною трапецією називається трапеція, у якій одна з бічних сторін перпендикулярна до основ.



$$\angle A = \angle B = 90°$$

Будь-яка трапеція є опуклим чотирикутником, отже її периметр обчислюється як сума довжин всіх її сторін.

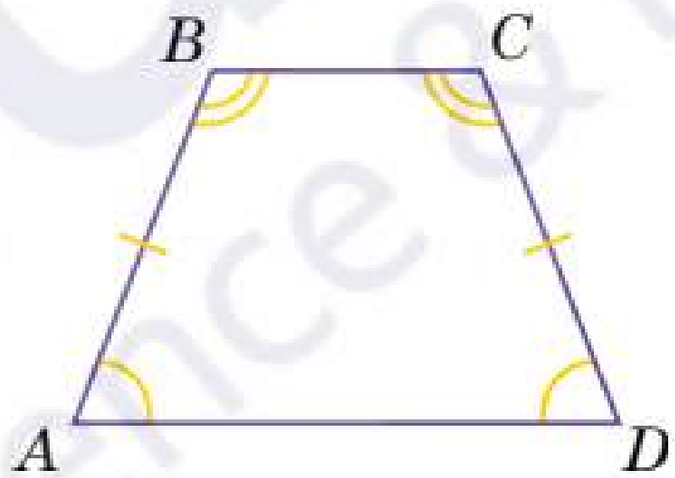
Властивість діагоналей трапеції

Сума квадратів діагоналей трапеції дорівнює сумі квадратів її бічних сторін та подвоєного добутку основ.

Приклад

1 У рівнобічній трапеції кут при основі дорівнює 50°. Знайдіть інші кути трапеції.

Розв'язання



У рівнобічної трапеції кути, прилеглі до основи, рівні, отже $\angle A = \angle D = 50°$.

Сума кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, дорівнює 180°.

$\angle A + \angle B = 180°$;

$\angle B = 180° - 50° = 130°$.

$\angle C + \angle D = 180°$;

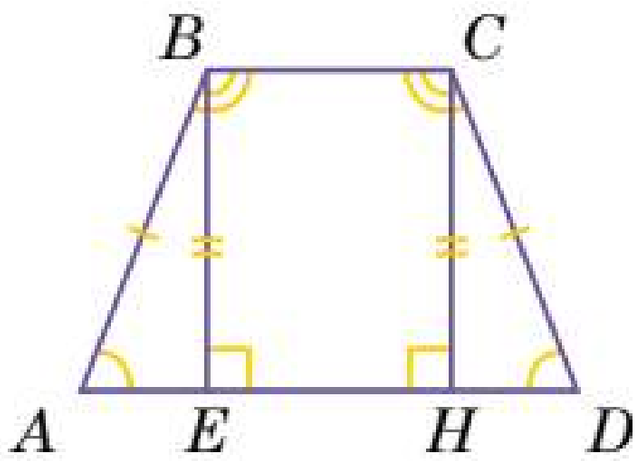
$\angle C = 180° - 50° = 130°$.

Відповідь. 50°; 130°; 130°.

Приклад

2 $ABCD$ — рівнобічна трапеція. Висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 7 см і 45 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

Розв'язання



ΔAEB і ΔDHC — прямокутні трикутники.

Оскільки трапеція $ABCD$ — рівнобічна, то ΔAEB і ΔDHC рівні за гіпотенузою і гострим кутом або за гіпотенузою і катетом.

$AE = DH$ (за власт. рівних трикутників);

$AE = DH = 7$ см.

$EH = AD - 2HD = 45 - 14 = 31$ см;

$BC = EH = 31$ см.

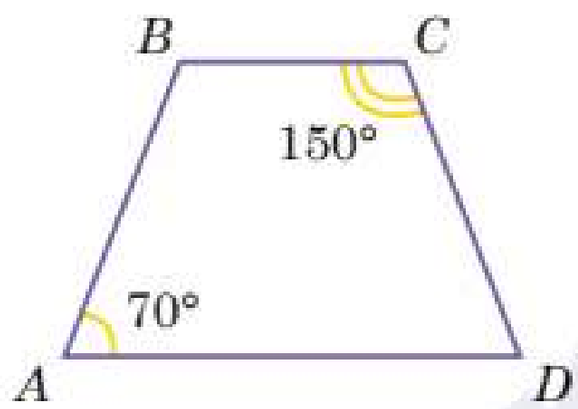
Відповідь. 31 см.

Попрактикуйтеся

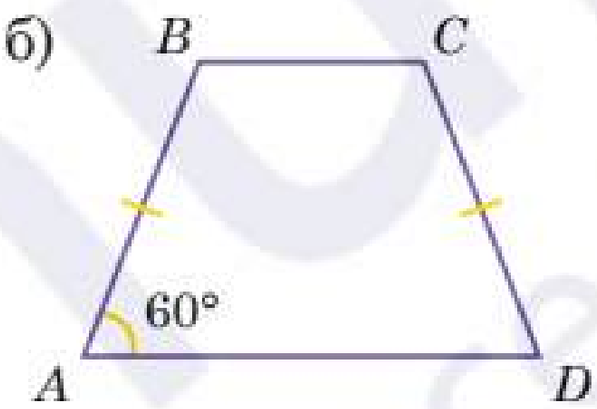
157 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Трапеція має дві пари паралельних сторін.
б) Рівнобічна трапеція має рівні бічні сторони.
в) У прямокутній трапеції всі кути прямі.
г) Середня лінія трапеції паралельна її основам.
д) Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.
е) Висота трапеції завжди є однією з її сторін.
ж) Сума кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, дорівнює 180°.
и) Будь-який чотирикутник з двома паралельними сторонами є трапецією.

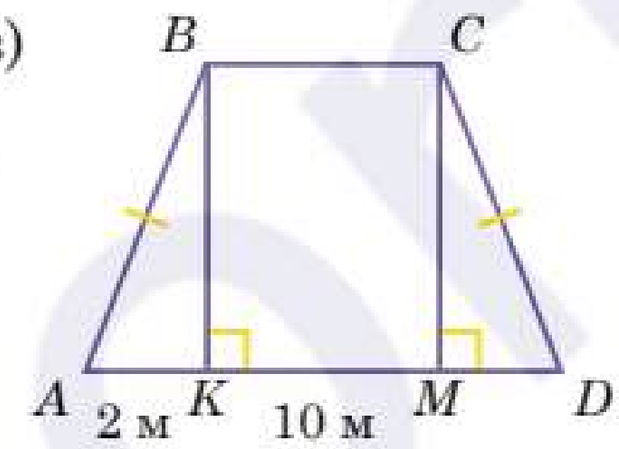
158 Знайдіть величину невідомих елементів трапеції.

а)


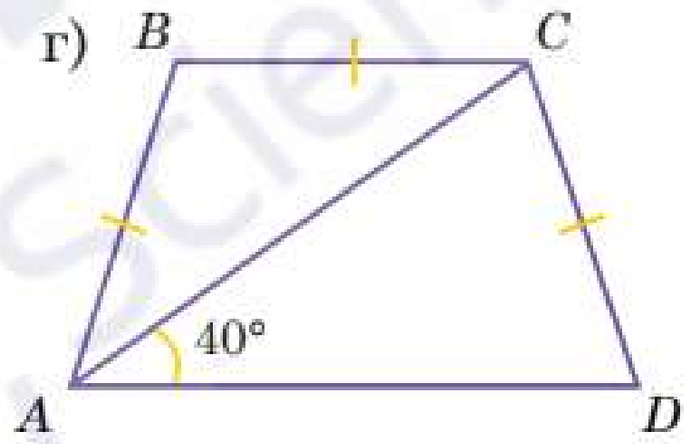
$\angle B - ?$ $\angle D - ?$

б)


$\angle B - ?$ $\angle C - ?$ $\angle D - ?$

в)


$AD - ?$ $BC - ?$

г)


$\angle A - ?$ $\angle B - ?$ $\angle C - ?$ $\angle D - ?$

159 Знайдіть невідомі кути:

а) трапеції $ABCD$ з основами AD і BC, якщо $\angle A = 40°$, $\angle D = 50°$;
б) рівнобічної трапеції, один із кутів якої дорівнює 58°;
в) прямокутної трапеції, найбільший кут якої утричі більший за найменший кут.

160 Два кути трапеції дорівнюють 32° і 143°. Знайдіть інші кути трапеції.

161 GA Використовуючи програмний засіб GeoGebra:

а) побудуйте трапецію за висотою, бічними сторонами та однією із діагоналей;
б) побудуйте трапецію з кутом при меншій основі 135°;
в) побудуйте рівнобічну трапецію з основами 5 см і 3 см. Побудуйте діагоналі трапеції;
г) побудуйте чотирикутник $ABCD$, у якого сторони AB і CD — паралельні. Чи обов'язково цей чотирикутник — трапеція?

162 Знайдіть кути рівнобічної трапеції, якщо різниця її протилежних кутів дорівнює 86°.

163 У рівнобічній трапеції кут при основі дорівнює 70°. Знайдіть інші кути трапеції.

164 На стіні будинку зображено мурал у формі рівнобедреної трапеції. Відомо, що нижня основа муралу має довжину 8 метрів, верхня — 5 метрів, а бічна сторона становить 50% від більшої основи. Яку довжину має декоративна стрічка, якою потрібно обвести мурал по периметру?

165 Три сторони трапеції дорівнюють по 5 см, а кути при більшій основі — по 60°. Знайдіть периметр трапеції.

166 Вулиці одного з кварталів міста утворюють трапецію. Дороги двох паралельних вулиць міста мають довжини, що відносяться як 3 : 4. Сумарна довжина цих вулиць становить 28 км. Знайдіть довжину кожної вулиці.

167 Дах будинку має форму рівнобічної трапеції. Кут при основі даху становить 60°. Знайдіть довжину верхньої основи даху, якщо довжина нижньої основи дорівнює 10 метрів, а бічна сторона — 5 метрів.

168 У рівнобічній трапеції висота, проведена з вершини тупого кута, ділить більшу основу на відрізки завдовжки 8 см і 40 см. Знайдіть меншу основу трапеції.

169 Вікно має форму рівнобічної трапеції. Нижня основа вікна дорівнює 1,2 м, верхня основа — 0,8 м, а периметр вікна — 3,6 м. Знайдіть довжину бічної рами вікна.

170 Діагональ рівнобічної трапеції ділить навпіл її гострий кут, який дорівнює 60°. Знайдіть периметр трапеції, якщо її менша основа дорівнює 18 см.

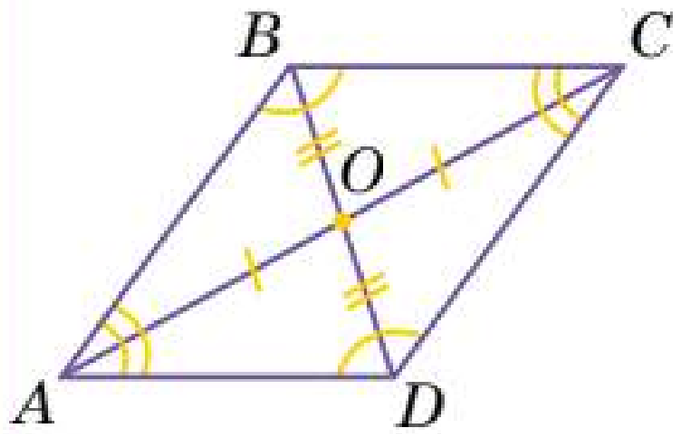
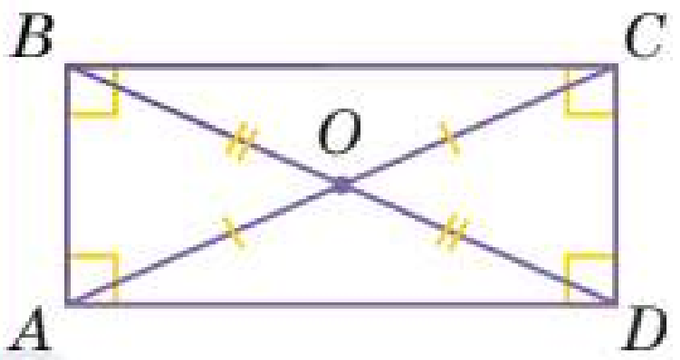
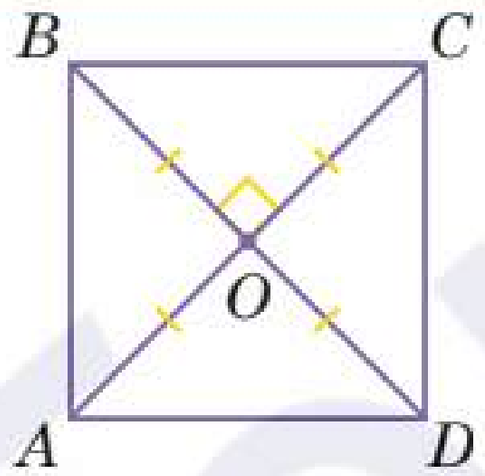
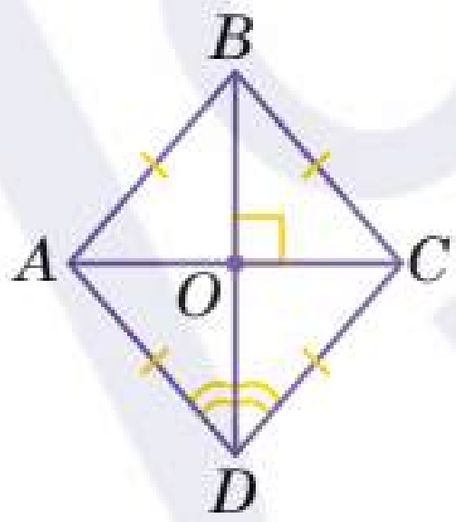
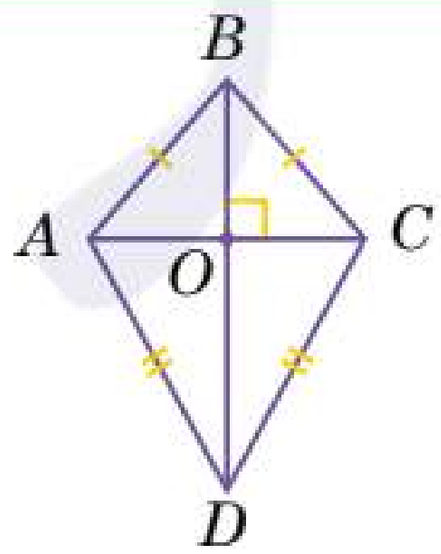
171 Естакада для ремонту автомобілів має форму прямокутної трапеції. Один із кутів трапеції дорівнює 157°. Знайдіть менший кут цієї трапеції.

172 У рівнобічній трапеції більша основа дорівнює 10 см, висота — 3 см, а гострий кут — 45°. Знайдіть меншу основу.

173 Довжина сторони AB трапеції $ABCD$ з прямим кутом A дорівнює сумі довжин основ AD і BC. Знайдіть, в якому відношенні бісектриса кута A ділить сторону CD на відрізки.

2.7. Розв'язування задач практичного змісту

Повторимо властивості та ознаки деяких чотирикутників.

Геометрична фігура	Властивості	Ознаки
 Паралелограм	$AB = CD$ і $AD = BC$ $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ $AO = CO$ і $BO = DO$ $\angle A + \angle B = 180°$ $\angle B + \angle C = 180°$ $\angle C + \angle D = 180°$ $\angle A + \angle D = 180°$	$AB = CD$, $AD = BC$ $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$ $AB = CD$, $AD = BC$ $AO = CO$ і $BO = DO$
 Прямокутник	$AB = CD$ і $AD = BC$ $\angle A = \angle B = \angle C =$ $= \angle D = 90°$ $AC = BD$	$\angle A = \angle B = \angle C =$ $= \angle D = 90°$ $AC = BD$
 Квадрат	$AB = CD = AD = BC$ $\angle A = \angle B = \angle C =$ $= \angle D = 90°$ $AC = BD$ $AC \perp BD$	$AB = CD = AD = BC$ $\angle A = \angle B = \angle C =$ $= \angle D = 90°$ $AC = BD$ $AC \perp BD$
 Ромб	$AB = CD = AD = BC$ $AC \perp BD$ $AO = CO$ і $BO = DO$ $\angle ADB = \angle CDB$	$AB = CD = AD = BC$ $AC \perp BD$ $\angle ADB = \angle CDB$
 Дельтоїд	$AB = BC$, $AD = DC$ $\angle BAD = \angle BCD$ $AC \perp BD$ $AO = OC$, $BO = OD$	$AB = BC$, $AD = DC$ $\angle BAD = \angle BCD$ $AC \perp BD$ $AO = OC$, $BO = OD$

Чи можете ви уявити собі ромб, у якого всі кути прямі? Трапецію, у якої дві сусідні сторони рівні? Прямокутник, сусідні сторони якого попарно рівні? Дельтоїд, у якого обидві діагоналі є бісектрисами внутрішніх кутів?

Попрактикуйтеся

174 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Будь-який ромб є квадратом.
б) Будь-який квадрат є паралелограмом.
в) Будь-який квадрат є прямокутником.
г) Існує квадрат, який не є ромбом.
д) І у квадратах, і у прямокутниках діагоналі рівні.
е) У всіх дельтоїдах діагоналі в точці перетину діляться навпіл.
ж) У всіх паралелограмах діагоналі є бісектрисами внутрішніх кутів.
и) І в ромбах, і в дельтоїдах діагоналі взаємно перпендикулярні.

175 Архітекторка проєктує незвичайну будівлю з рівними кутами. Вона хоче, щоб кожен внутрішній кут будівлі був у 6 разів більший за відповідний зовнішній кут. Скільки стін буде мати ця будівля?

176 Маємо популярну настільну гру «Хрестики-нулики». Дошка, на якій розміщена ця гра, має форму квадрата зі стороною 66 см. Кожна її сторона розділена на 3 рівні частини. Обчисліть, якого максимального діаметра можуть бути нулики для гри? Товщиною рамки можна знехтувати.

177 Швачка викроїла з тканини чотирикутник, який має бути ромбом. Як перевірити правильність виготовлення викрійки, не користуючись інструментами?

178 Плиточник, вирізаючи отвір для розетки у формі квадрата, переконався, що його діагоналі рівні й перетинаються під прямим кутом. Чи досить такої перевірки?

179 Кирило вирішив побудувати садову альтанку на своїй земельній ділянці, яка має форму прямокутника. Довжина ділянки становить 20 метрів, а ширина — 10 метрів. Одна з коротших сторін ділянки примикає до річки, а протилежна коротша сторона — до дороги. Знайдіть оптимальне місце для розміщення альтанки, так щоб доріжка від альтанки до річки і до дороги була однакової довжини. Обчисліть довжину доріжки від альтанки до річки.

180 Державний прапор України — це стяг із двох однакових горизонтальних смуг синього й жовтого кольорів. За Державним стандартом під час виготовлення забезпечується співвідношення ширини полотнища до його довжини — 2 : 3. Яка довжина прапора, якщо його ширина — 160 см?

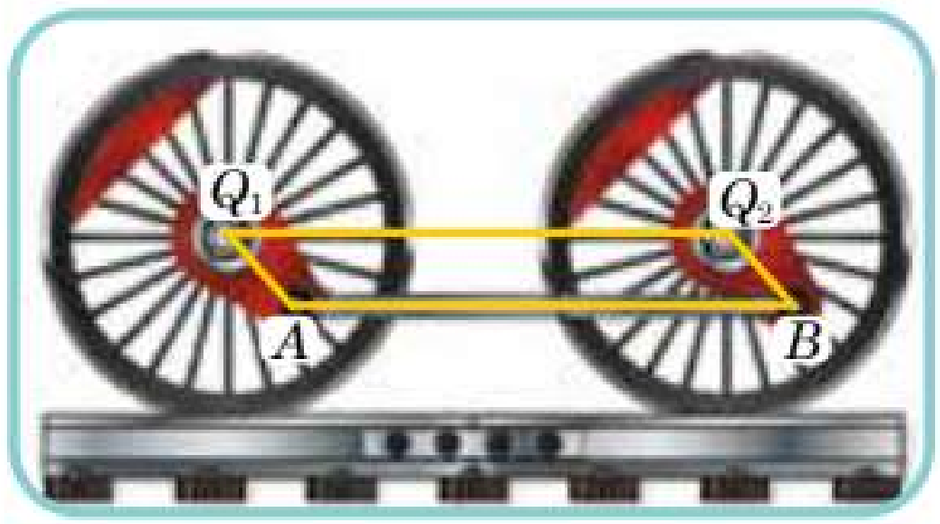
181 На фермі вирішили побудувати загін для овець у формі паралелограма. Вони планують встановити годівницю в точці, де стежка, що ділить тупий кут загону навпіл, перетинає довшу сторону. Ця точка ділить сторону на відрізки 8 метрів і 6 метрів (від гострого кута). Яка загальна довжина огорожі знадобиться?

182 Ви плануєте встановити сонячні панелі на даху свого будинку. Дах має форму паралелограма. Довжина однієї сторони паралелограма дорівнює 12 метрів, а довжина сусідньої сторони — 6 метрів. Гострий кут між цими сторонами становить 60°. Якого максимального розміру прямокутна сонячна панель поміститься на ваш дах?

183 Елемент герба на лицарському щиті має форму дельтоїда. Периметр цього елемента дорівнює 82 см, а різниця його сторін дорівнює 5 см. Знайдіть довжини сторін дельтоїда.

184 У вас є домкрат для легкових автомобілів, який має форму ромба. Його сторона дорівнює 40 см. На яку висоту можна підняти автомобіль, якщо максимальний кут між суміжними сторонами домкрата дорівнює 60°? Яку довжину він має у складеному вигляді?

185 На рисунку зображено колісну пару потяга. Радіуси обертання O_1A і O_2B рівні. Вісь тяги AB, довжина якої дорівнює відстані O_1O_2 між центрами коліс, передає рух від одного колеса до іншого. Доведіть, що відрізки AB і O_1O_2 завжди або паралельні, або лежать на одній прямій.



186 Равлик повзе на площині з незмінною швидкістю і повертає на 90° в будь-яку сторону за власним вибором кожну годину: проповз годину по прямій, повернув, ще годину повзе, знову повернув і т.д. Доведіть, що він може повернутися в точку, з якої починав рух, тільки через ціле число годин і це число кратне 4.

Проєктна робота «Прилад для вимірювання кутів довільного многокутника»

В житті ми часто зустрічаємося з многокутниками. Наприклад, з давніх-давен правильні многокутники застосовуються в архітектурі та живописі.

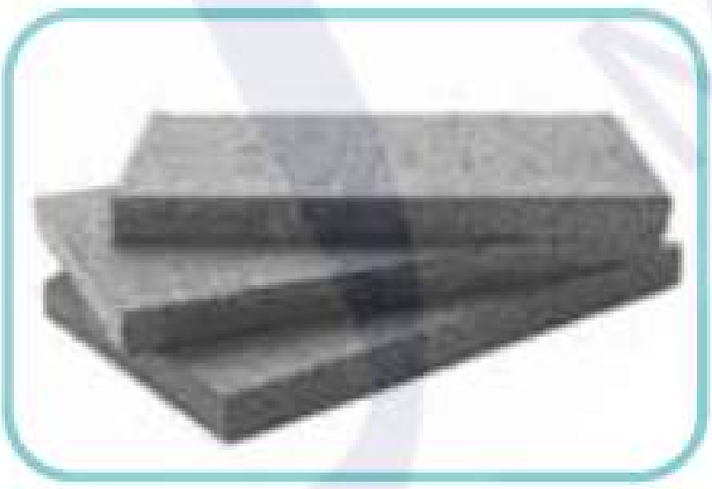
Правильні чотирикутники, шестикутники і восьмикутники зустрічаються в старовинних вавілонських і єгипетських пам'ятках у вигляді зображень на стінах, прикрас, викарбуваних з каменю.

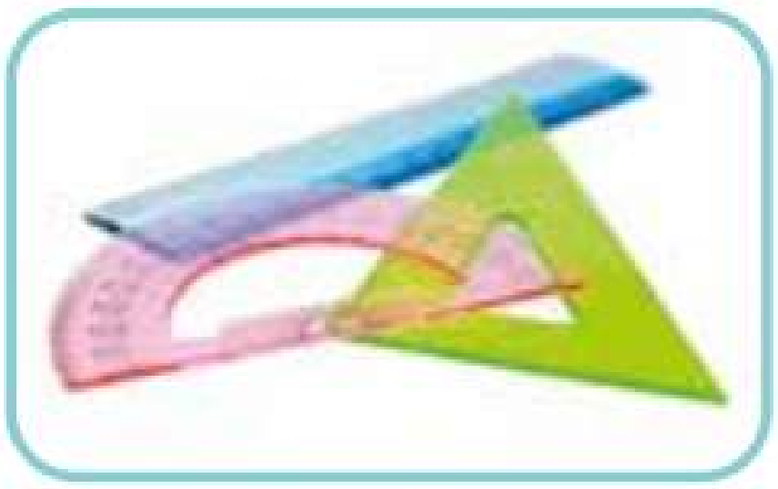
Сніжинки падають на землю правильними шестикутниками.

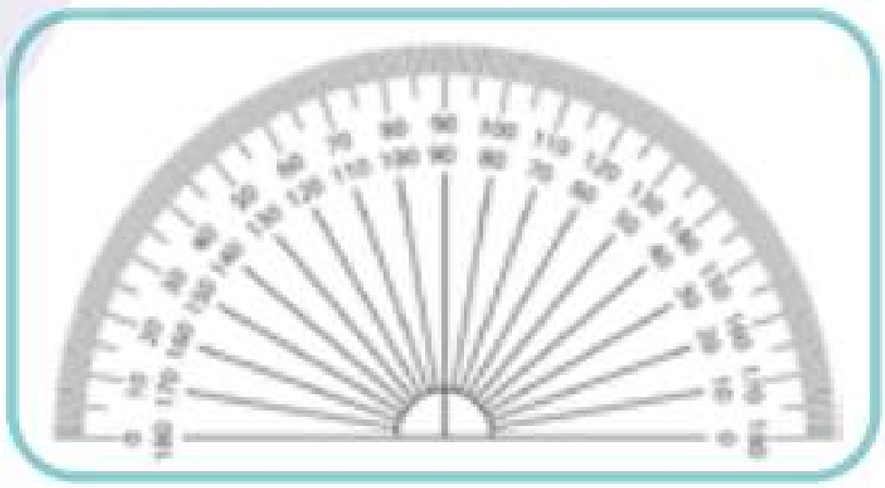
В цьому проекті пропонуємо самостійно виготовити прилад, за допомогою якого можна виміряти кути будь-якого многокутника.

Матеріали, необхідні для виконання проєкту

1) Квадрат пінопласту чи пінополіестеролу розміром 40 см на 40 см;
2) Канцелярські кнопки-цвяшки (10 шт);
3) Роздрукований на картоні шаблон транспортиру розміром приблизно 10 см (10 шт). Також можна використовувати звичайні пластикові транспортири, і тоді ваш прилад буде довговічніший.
4) Кольорова нитка.







Крок ① Даний проект рекомендуємо виконувати індивідуально або об'єднайтеся у пари.

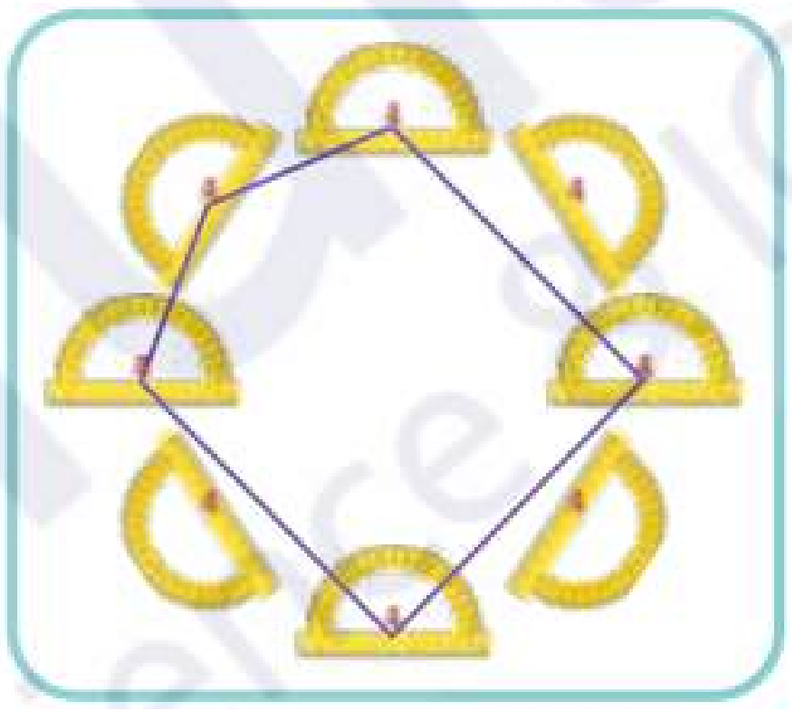
Крок ② Підготуйте всі необхідні матеріали та робоче місце.

Крок ③ На заготовці з пінопласту накресліть коло, відступаючи від країв приблизно по 5–7 сантиметрів.

Крок ④ Розставте канцелярські кнопки по колу з приблизно однаковою відстанню між сусідніми цвяшками.

Крок ⑤ Під кожною з кнопок закріпіть транспортир так, як показано на зображенні (зверніть увагу, що транспортир має бути зафіксованим таким чином, щоб мати змогу обертатися на цвяшку кнопки).

Крок ⑥ За допомогою нитки, намотуючи її на верхню частину канцелярської кнопки, утворіть довільний многокутник. Наприклад, ось такий п'ятикутник, як на зображенні.



Крок ⑦ Обертаючи кожен з транспортирів, виміряйте внутрішні кути утвореного многокутника.

Крок ⑧ Повторіть попередні два кроки декілька разів, утворюючи різні многокутники.

Крок ⑨ Перевірте роботу вашого приладу та правильність вимірювання за допомогою формули суми внутрішніх кутів опуклого многокутника.

Крок ⑩ Обговоріть підсумки проекту з однокласниками та однокласницями.

Що вдалося? Що було складним? Над чим ще потрібно працювати?

Додаткове завдання

Уявіть, що ви дизайнер/дизайнерка інтер'єру і вам потрібно спланувати розташування меблів у прямокутній кімнаті розмірами 6 м на 4 м. Ви маєте такі меблі: диван розмірами 2 м на 1 м, стіл розмірами 1,5 м на 1 м, шафа розмірами 2 м на 0,5 м, крісло розмірами 1 м на 1 м. Побудуйте план кімнати на папері, використовуючи масштаб 1 : 50 (тобто 1 см на папері відповідає 0,5 м в реальності). Розмістіть меблі на плані так, щоб залишалося достатньо простору для проходу (мінімум 0,5 м між меблями). Які властивості прямокутника допомогли вам у розв'язанні цього завдання? Як змінилося б розташування меблів, якби кімната була квадратною з тією ж площею?

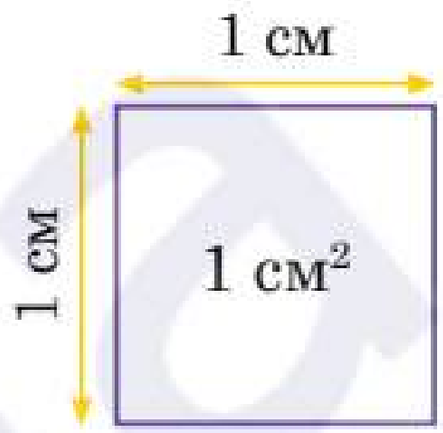
2.8. Площа многокутника

Площа — це обсяг поверхні всередині будь-якої замкнутої фігури.

Площа многокутника — це величина тієї частини площини, яку він обмежує. Що більшу частину множини обмежує многокутник, то більшою є його площа.

Многокутник розбиває площину на дві області — внутрішню і зовнішню.

За одиницю вимірювання площі беруть квадрат, сторона якого рівна одиниці вимірювання відрізків. Наприклад, якщо одиницею вимірювання відрізка є сантиметр, то одиницею вимірювання площі є квадрат зі стороною 1 см. Такий квадрат називають квадратним сантиметром і позначають см^2.



Площу геометричної фігури прийнято позначати літерою S.

Площа — це додатно-визначена величина (тобто більша за 0).

Визначити площу многокутника — означає з'ясувати, скільки одиничних квадратів у ньому вміщається.

Одиниці вимірювання площі:

1 см^2 = 1 см · 1 см = 10 мм · 10 мм = **100 мм^2**
1 дм^2 = 1 дм · 1 дм = 10 см · 10 см = **100 см^2**
1 дм^2 = 1 дм · 1 дм = 100 мм · 100 мм = **10 000 мм^2**
1 м^2 = 1 м · 1 м = 10 дм · 10 дм = **100 дм^2**
1 м^2 = 1 м · 1 м = 100 см · 100 см = **10 000 см^2**
1 км^2 = 1 км · 1 км = 1000 м · 1000 м = **1 000 000 м^2**
1 сотка = 1 ар = 10 м · 10 м = **100 м^2** (площа квадрата зі стороною 10 м)
1 га = 100 ар = 100 м · 100 м = **10 000 м^2** (площа квадрата зі стороною 100 м)

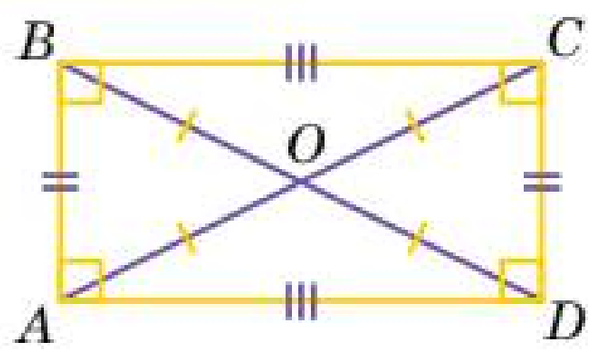
Многокутники є **рівними**, якщо вони суміщаються накладанням.

Основні властивості площі многокутника

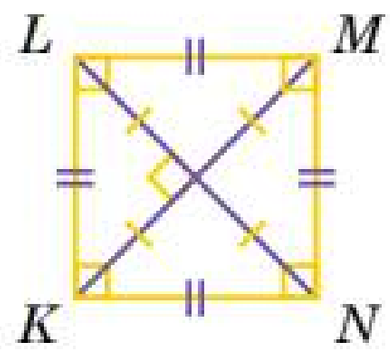
1) Кожен многокутник має площу, більшу за 0.
2) Рівні многокутники мають рівні площі.
3) Площа многокутника дорівнює сумі площ многокутників, з яких він складається.
4) Одиницею вимірювання площі є площа квадрата, що дорівнює 1 кв. од.

Многокутники, які мають рівні площі, називають **рівновеликими.**

Доведення формули площі прямокутника



Площа прямокутника:
$S_{ABCD} = AB \cdot BC$



Площа квадрата:
$S_{KLMN} = KL \cdot KL = KL^2$

Попрактикуйтеся

187 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Площею многокутника є та ділянка площини, яку обмежує ця фігура.

б) Площа може бути від'ємною, якщо фігура знаходиться у III чверті координатної площини.

в) Площу паралелограма можна порахувати, як суму площ чотирьох трикутників, які утворились у результаті перетину діагоналей.

г) Площу кімнати можна дізнатися, помноживши її ширину на довжину.

188 Використовуючи програмний засіб GeoGebra, побудуйте два рівних прямокутних трикутники. Складіть із них:

а) рівнобедрений трикутник; б) прямокутник;

в) паралелограм, відмінний від прямокутника.

Порівняйте площі отриманих фігур.

189 Побудуйте квадрат, який буде прийнято як одиницю вимірювання площі. За його допомогою побудуйте:

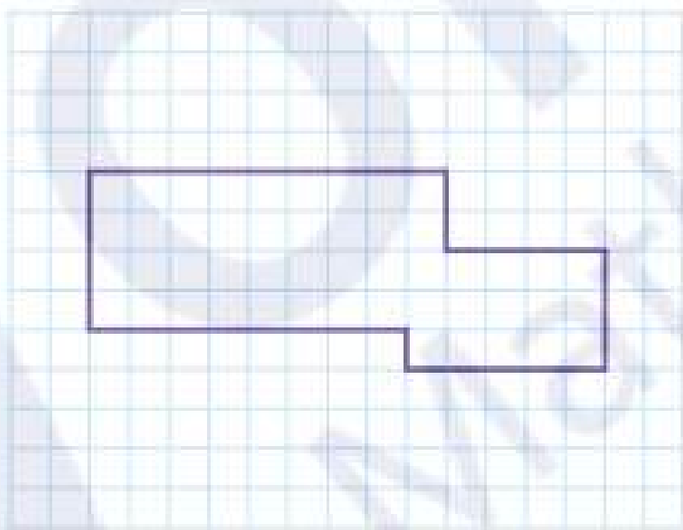
а) квадрат, площа якого дорівнює 4;

б) прямокутник, площа якого дорівнює 4 (відмінний від квадрата);

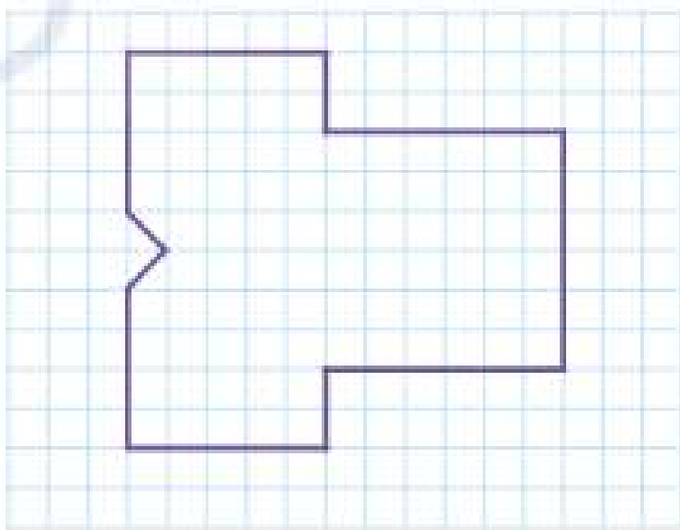
в) трикутник, площа якого дорівнює 2.

190 Обчисліть площу фігури, якщо сторона клітинки дорівнює 0,5 см.

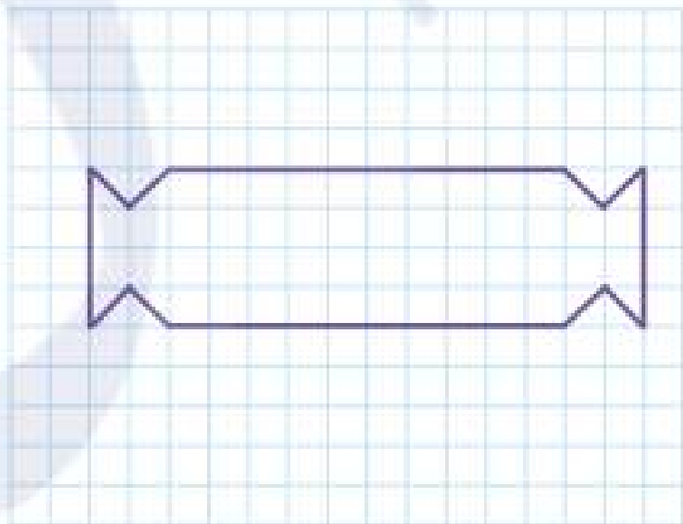
а)



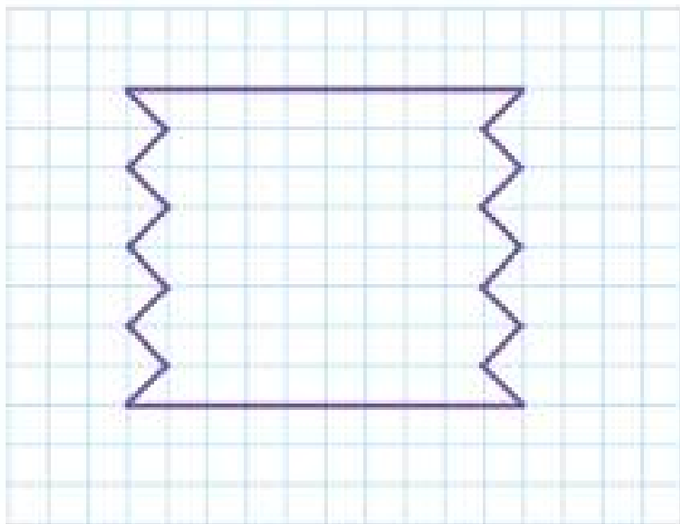
б)



в)



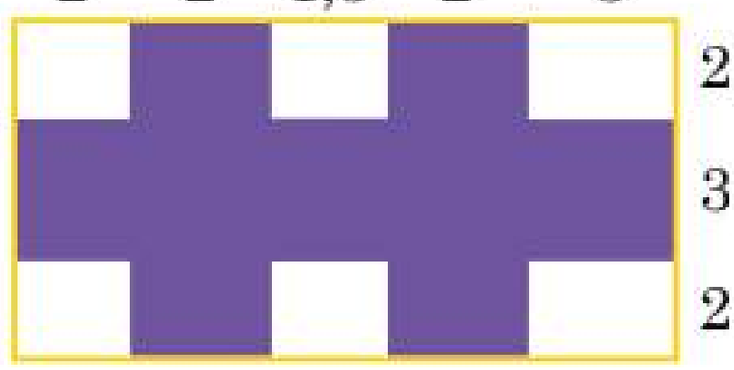
г)



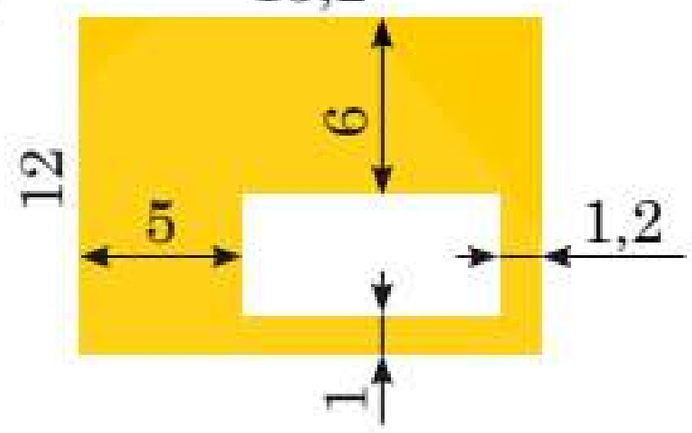
191 Обчисліть, скільки літрів бензину знадобиться, щоб скосити газонокосаркою прямокутний стадіон довжиною 112 м і шириною в 4 рази меншою за довжину. Відомо, що під час косіння парку площею 4100 м^2 витратили 20,5 л бензину.

192 Обчисліть площу зафарбованої фігури за даними на рисунках.

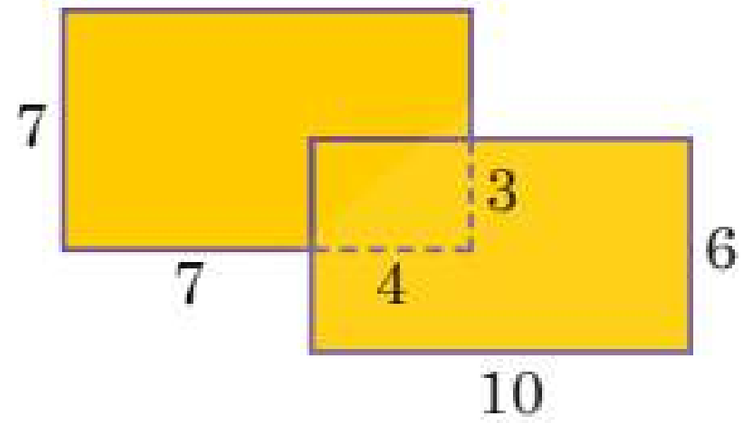
а)



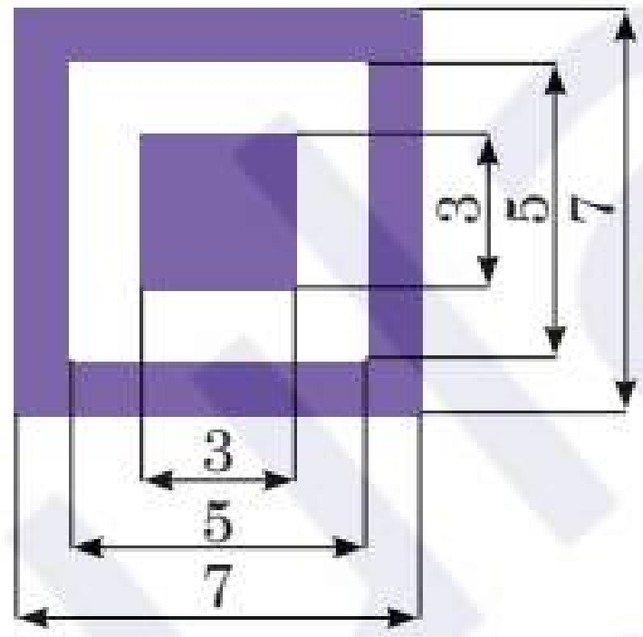
б)



в)



г)



Приклад

1 Як відносяться сторони квадратів, якщо їх площі відносяться як 36 : 49?

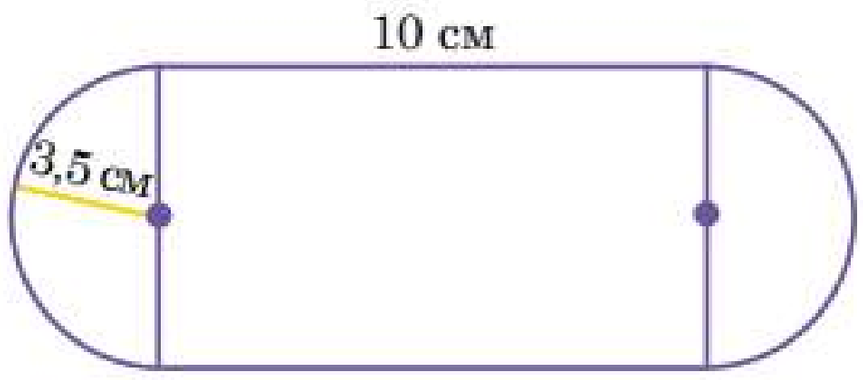
Розв'язання

Площа квадрата обчислюється за формулою $S = a^2$.
Площа першого квадрата — $S_1 = a_1^2 = a_1 \cdot a_1 = 36$. Звідси $a_1 = 6$ см.
Площа другого квадрата — $S_2 = a_2^2 = a_2 \cdot a_2 = 49$. Звідси $a_2 = 7$ см.
$S_1 : S_2 = 36 : 49$ (за умовою).
Отже, $a_1 : a_2 = 6 : 7$.
Відповідь. 6 : 7.

193 Обчисліть, як відносяться площі квадратів, якщо їх сторони відносяться як 5 : 8.

194 Обчисліть, як відносяться сторони квадратів, якщо їх площі відносяться як 36 : 144.

195 Обчисліть площу фігури, зображеної на рисунку. Радіус півкола дорівнює 3,5 см, а довжина прямокутника — 10 см.



196 Розмір футбольного поля City of Manchester Stadium — 105 м на 68 м, а стадіону «Динамо» імені Валерія Лобановського — 100 м на 75 м. Порівняйте їх площі.

197 У прямокутнику проведено бісектрису кута, яка ділить сторону у відношенні 5 : 9 починаючи від найближчої до цього кута вершини. Периметр прямокутника дорівнює 57 см. Обчисліть його площу.

198 Обчисліть периметр прямокутника, якщо його площа становить 36 см^2, а бісектриса кута ділить сторону у відношенні 1 : 3 починаючи від найближчої до цього кута вершини.

199 Сторони квадратів дорівнюють 12 см і 16 см. Обчисліть сторону квадрата, площа якого є сумою площ двох квадратів.

Наближену площу нестандартних фігур обчислюють за допомогою палетки. **Палетка** — це прозора плівка, розділена на однакові квадрати, площа яких дорівнює 1 дм^2,1 см^2 або 1 мм^2. Її накладають на фігуру, підраховують кількість повних квадратів (K) і кількість неповних квадратів (n), тоді площа фігури (S) дорівнює:

$$S = K + n : 2$$

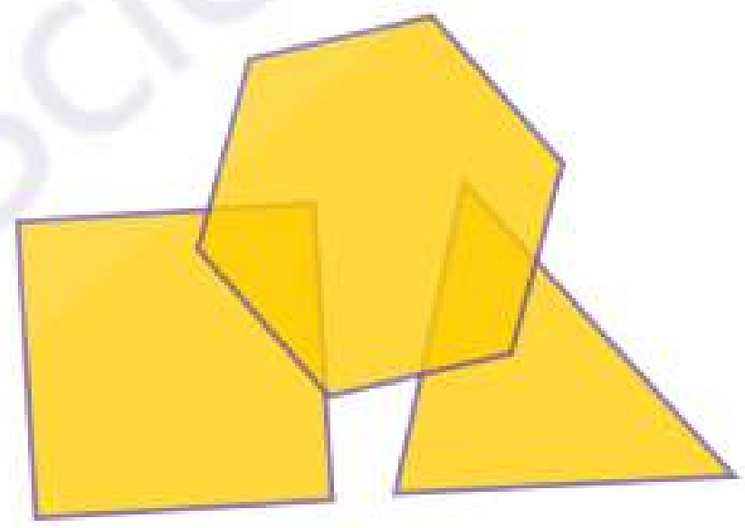
Інструкція зі створення палетки

Візьміть прозору плівку (це може бути обкладинка для зошитів або підручників) та розкресліть її на клітинки зі стороною 1 см. Розміри вашої палетки можуть бути будь-якими.

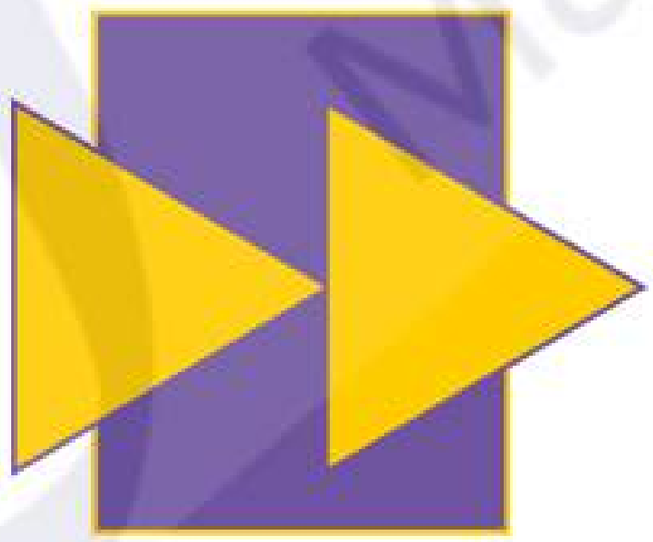
200 Зробіть палетку у клітинку зі стороною 1 см. Прикладіть її на зображення та обчисліть наближену площу фігури.

а)

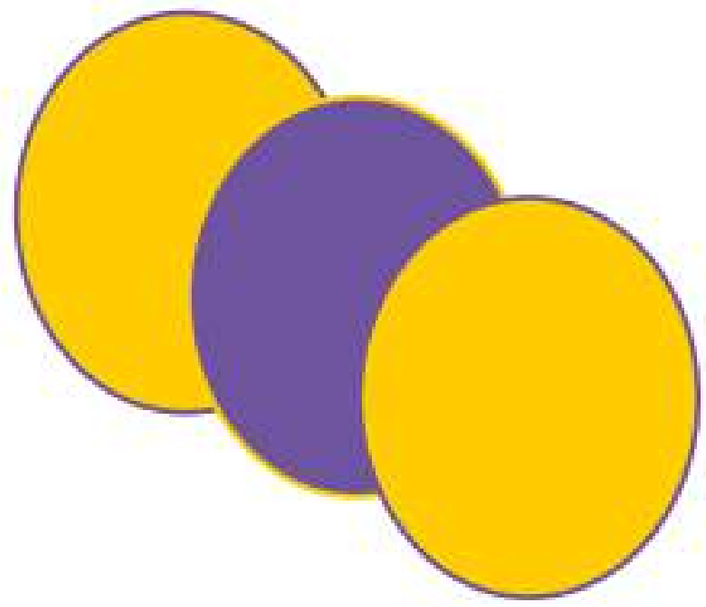
б)



в)



г)

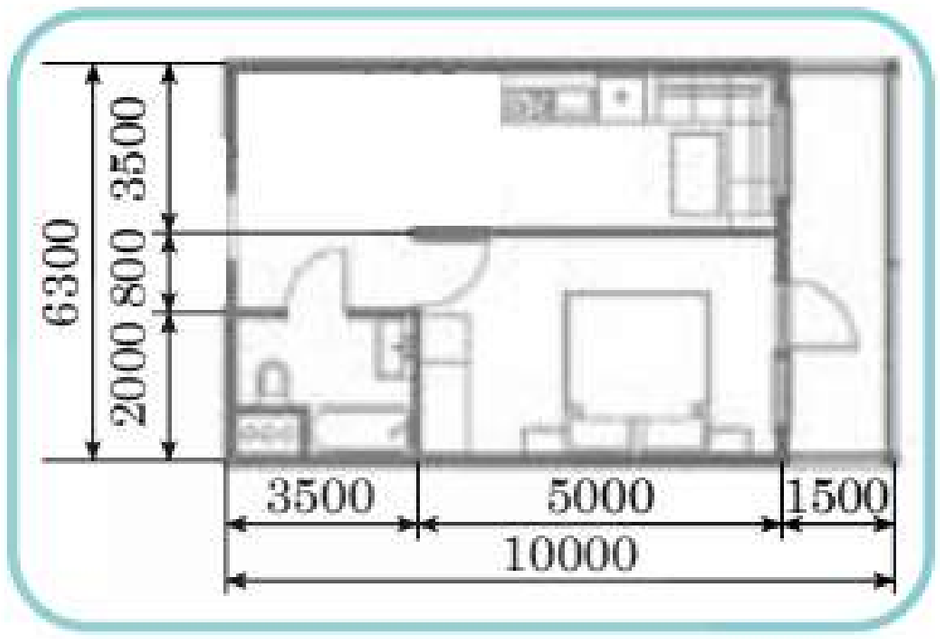


201 Знайдіть площу квадратів, якщо різниця їх площ становить 16 см^2, а різниця периметрів — 8 см.

202 Обчисліть, скільки квадратних плиток розміром 25 см на 25 см знадобиться, аби вкрити підлогу у вашому класі.

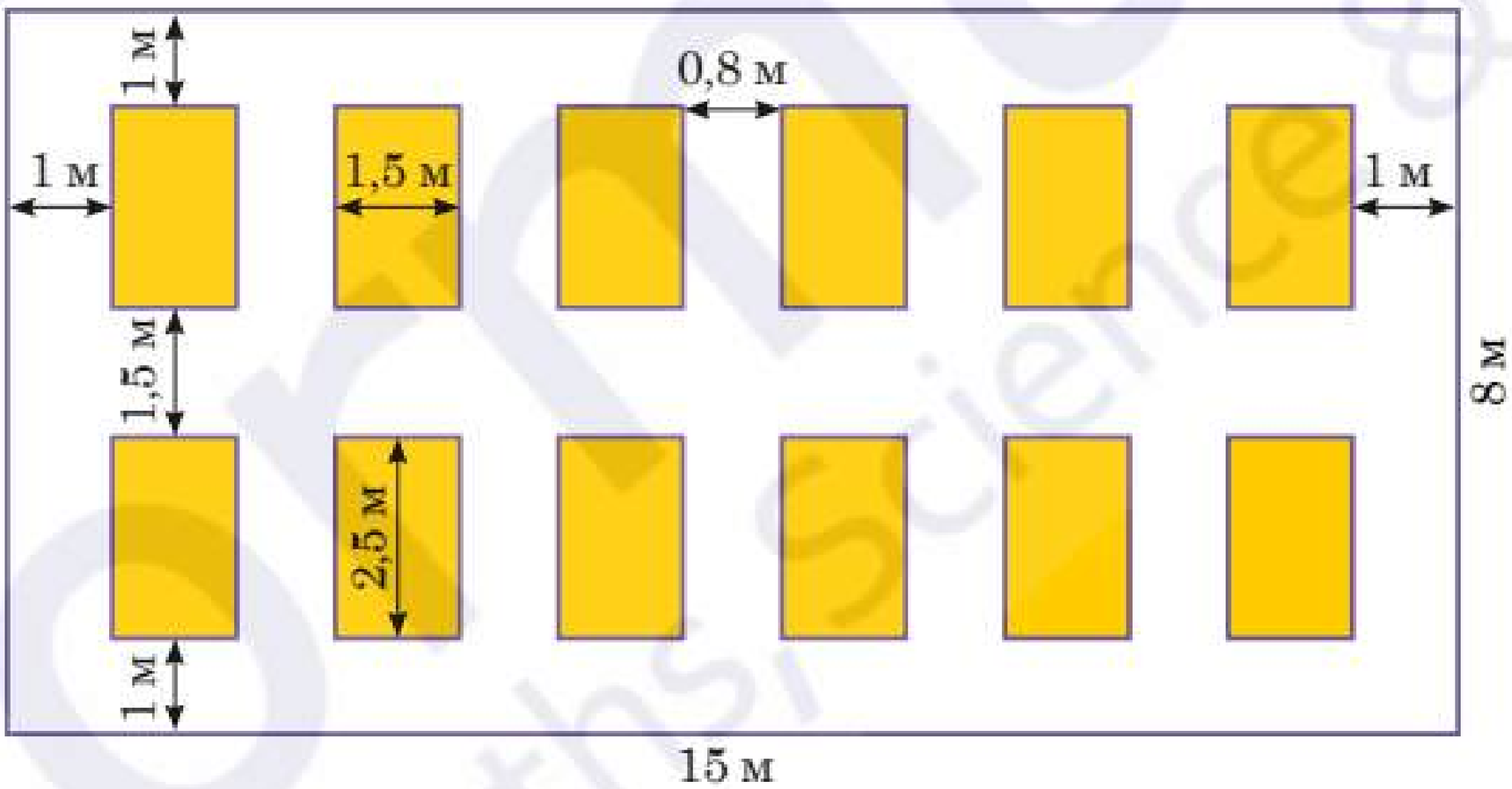
203 На плані зображено квартиру з усіма розмірами в міліметрах. Обчисліть площу житлової частини, нежитлової та загальну площу квартири, відповідь подайте у квадратних метрах.

Примітка. Житлова площа — спальні, вітальня, зала, дитяча. Нежитлова площа — коридор, санвузол, балкон, лоджія, комора, вбудована шафа.



204 Дві ділянки землі обгороджено парканом однакової довжини. Перша ділянка має форму прямокутника зі сторонами 220 м і 160 м, а друга ділянка має форму квадрата. Площа якої ділянки більша і на скільки?

205 Обчисліть, яку частину від площі стелі будуть займати світильники. Скористайтеся даними на малюнку.



206 Як зміниться площа прямокутника, якщо:

а) одну пару протилежних сторін збільшити вдвічі;
б) кожну сторону збільшити в 3 рази;
в) одну пару протилежних сторін збільшити в 4 рази, а іншу пару — зменшити в 4 рази.

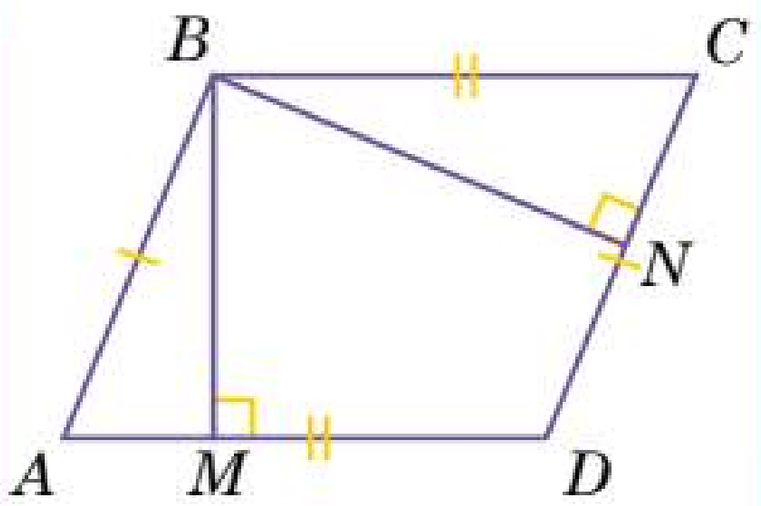
207 Скільки квадратів з периметром 10 см міститься в 1 м^2?

208 Площа земельної ділянки дорівнює 31 га. Виразіть площу цієї ділянки:

а) в квадратних метрах; б) в арах; в) в квадратних кілометрах.

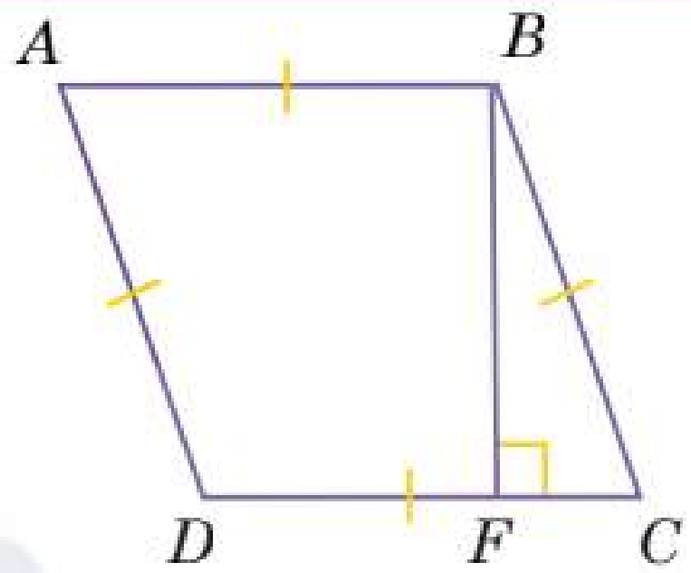
209 Доведіть, що якщо діагональ чотирикутника ділить іншу діагональ навпіл, то вона ділить даний чотирикутник на дві рівновеликі частини.

2.9. Площа паралелограма та ромба



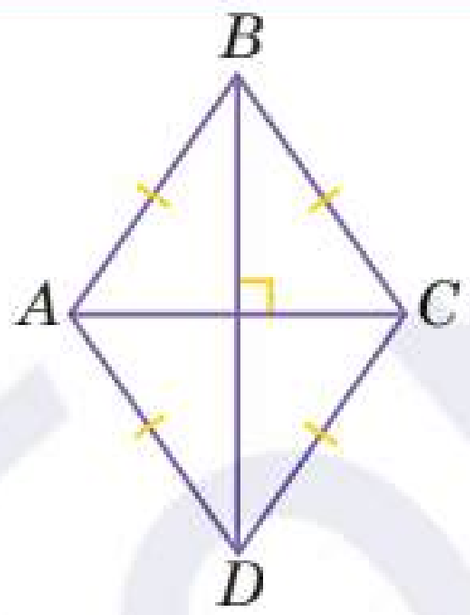
Площа паралелограма

$$S_{ABCD} = BM \cdot AD$$
$$S_{ABCD} = BN \cdot CD$$



Площа ромба

$$S_{ABCD} = BF \cdot DC$$



Площа ромба
(за діагоналями)

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$$

Доведення формули площі паралелограма

Сторони паралелограма:

$$AD = \frac{S_{ABCD}}{BM}$$
$$CD = \frac{S_{ABCD}}{BN}$$

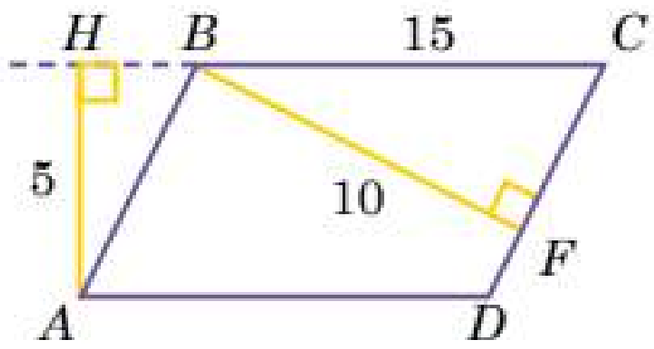
Ромб є паралелограмом, оскільки має дві пари паралельних сторін.

Всі висоти ромба рівні між собою.

Катет, що лежить проти кута 30°, дорівнює половині гіпотенузи.

Приклад

1 Висоти паралелограма дорівнюють 5 см і 10 см, а його більша сторона — 15 см. Обчисліть довжину меншої сторони.



Розв'язання

$ABCD$ — паралелограм.

Оскільки до більшої сторони проведена менша висота, то $AH \perp BC$, $BF \perp CD$.

$S = AH \cdot BC$ та $S = BF \cdot CD$.

$S = 5 \cdot 15 = 75$ см².

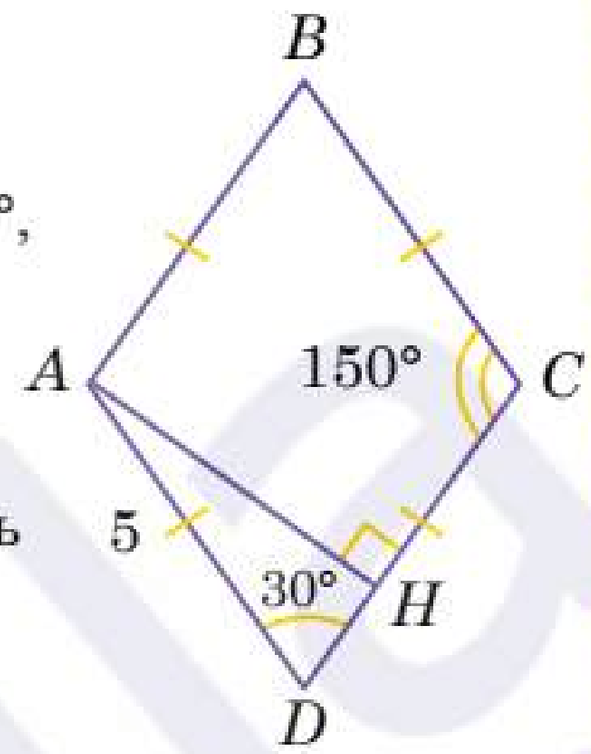
Звідси $CD = \frac{S}{BF} = \frac{75}{10} = 7{,}5$ см.

Відповідь. 7,5 см.

Приклад

2 Сторона ромба дорівнює 5 см, а тупий кут — 150°. Обчисліть площу даного чотирикутника.

Розв'язання



$ABCD$ — ромб.

За властивістю кутів ромба $\angle BAD + \angle ADC = 180°$, тоді $\angle ADC = 180° - 150° = 30°$.

Проведемо висоту AH.

Утворився ΔAHD — прямокутний.

$AH = \frac{AD}{2}$ (за властивістю катета, що лежить проти кута 30°).

$AH = \frac{5}{2} = 2{,}5$ см.

Отже, $S = DC \cdot AH = 5 \cdot 2{,}5 = 12{,}5$ см^2.

Відповідь. 12,5 см^2.

Попрактикуйтеся

210 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Якщо сторона і висота, до якої проведено цю висоту, рівні і в ромба, і в паралелограма, то їх площі теж рівні.

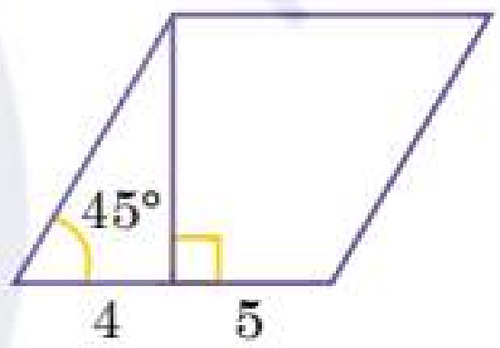
б) Трикутники, утворені діагоналями ромба, мають рівні площі.

в) Трикутники, утворені діагоналями паралелограма, мають рівні площі.

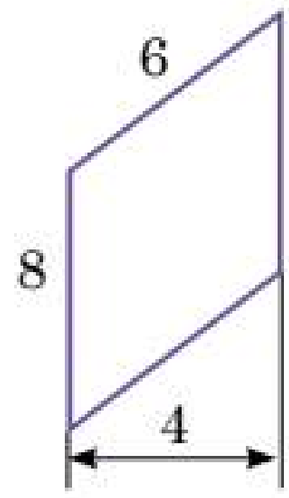
г) При збільшенні довжини висоти втричі, площа паралелограма зменшиться втричі.

211 Обчисліть площу кожної геометричної фігури, користуючись даними на рисунках.

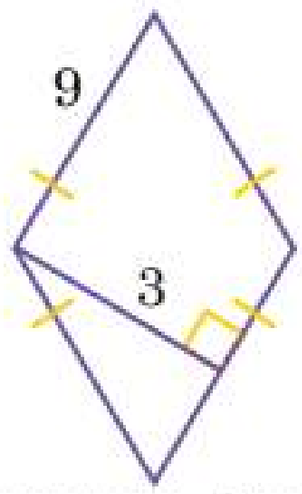
а)



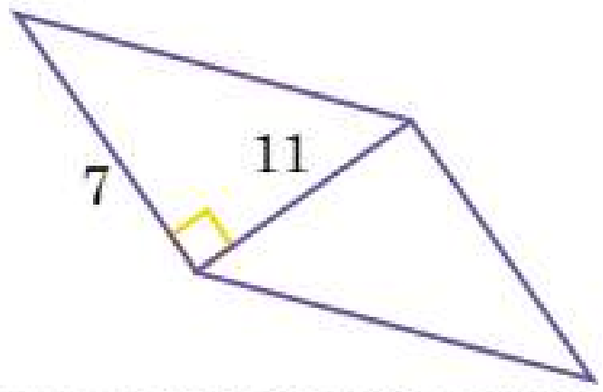
б)



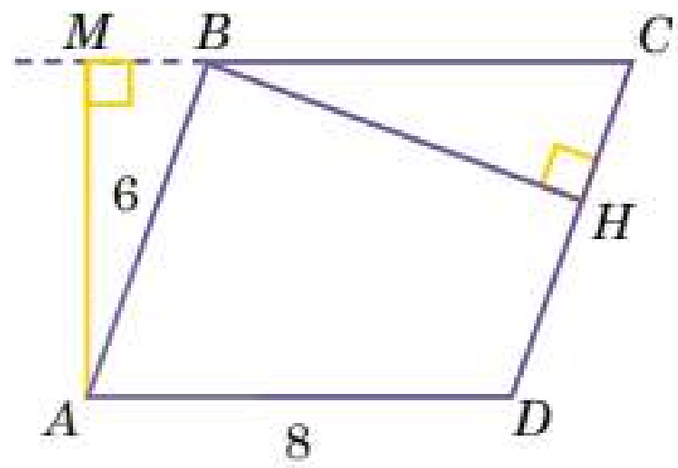
в)



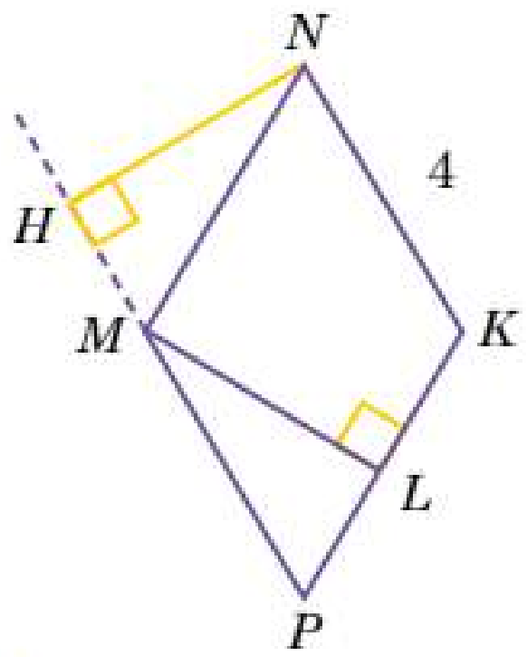
г)



212 Площа паралелограма $ABCD$ дорівнює 72 см^2. За даними на рисунку знайдіть висоту BH та AM.



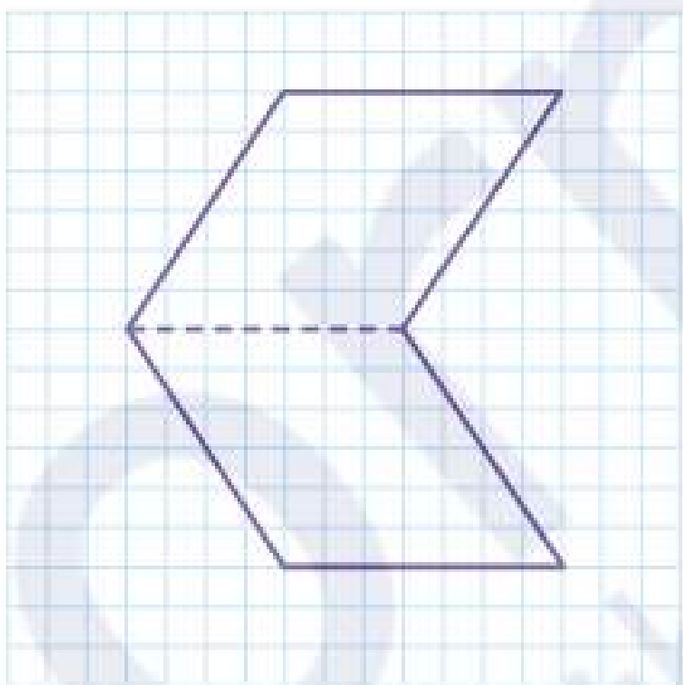
213 Знайдіть висоту NH ромба $MNKP$ за даними на рисунку, якщо площа ромба дорівнює 28 см^2.



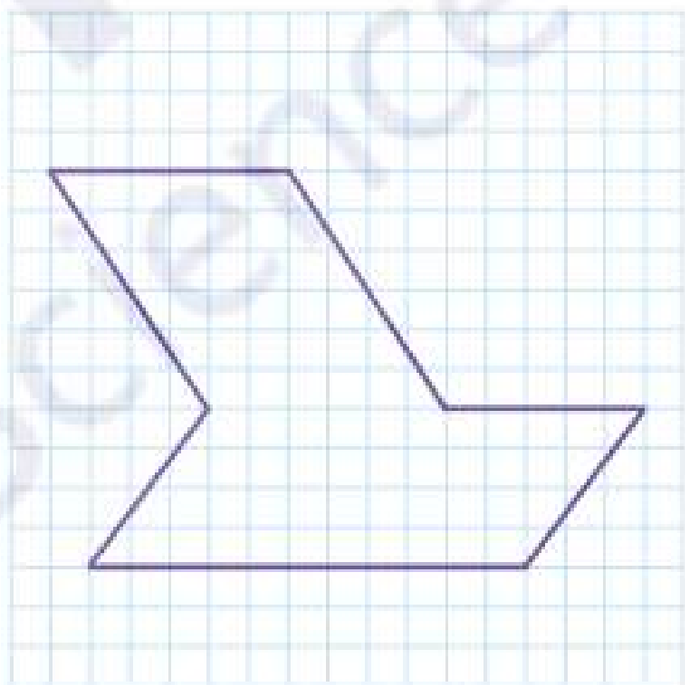
214 Використовуючи програмний засіб GeoGebra, накресліть паралелограм зі сторонами 4 см і 7 см. Які площі мають трикутники, які утворились у результаті перетину його діагоналей?

215 Знайдіть площу земельної ділянки у м^2, зображеної на плані з розмірною сіткою 1 см на 1 см. Масштаб 1 : 300.

а)

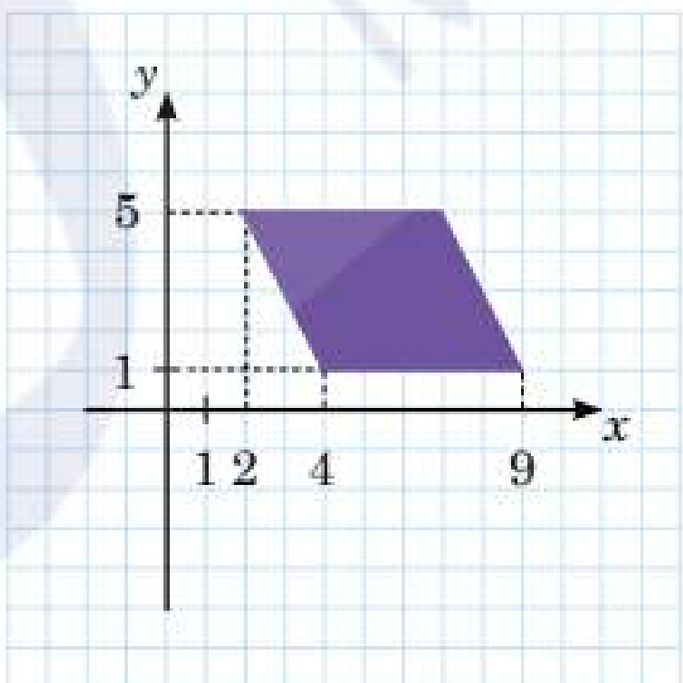


б)

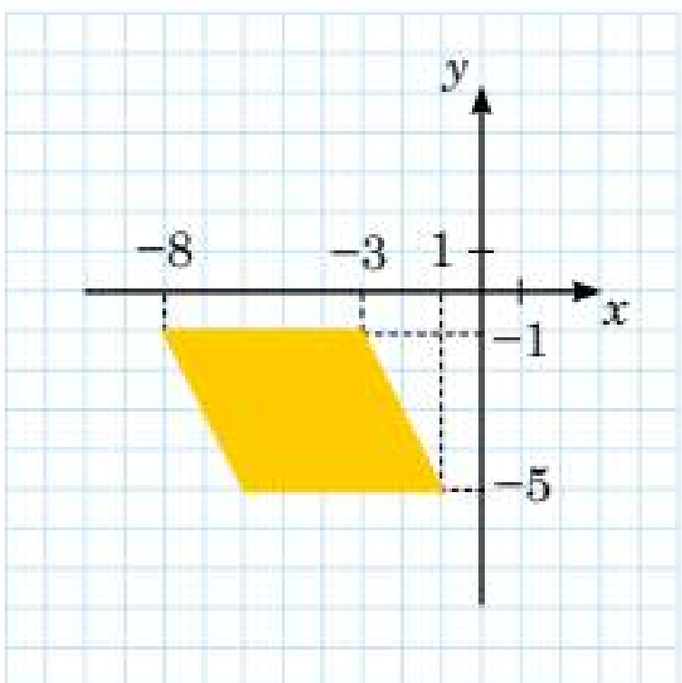


216 Обчисліть площу паралелограма, зображеного на координатній площині.

а)



б)



217 Висоти паралелограма дорівнюють 4 дм і 7 дм, а різниця між сторонами становить 9 дм. Знайдіть площу паралелограма.

218 Висоти паралелограма дорівнюють 33 см і 48 см. Відомо, що одна із сторін більша за іншу на 5 см. Знайдіть периметр паралелограма.

219 Обчисліть площу паралелограма із сторонами 6 см і 8 см та гострим кутом 30°.

220 Сторона ромба дорівнює 8 см, а тупий кут — 150°. Обчисліть його площу.

221 Площа ромба дорівнює 40,32 см^2, а його висота — 5,6 см. Знайдіть периметр ромба.

222 Порівняйте площу ромба і квадрата, якщо в них усі сторони по 4 см, а гострий кут ромба дорівнює 30°.

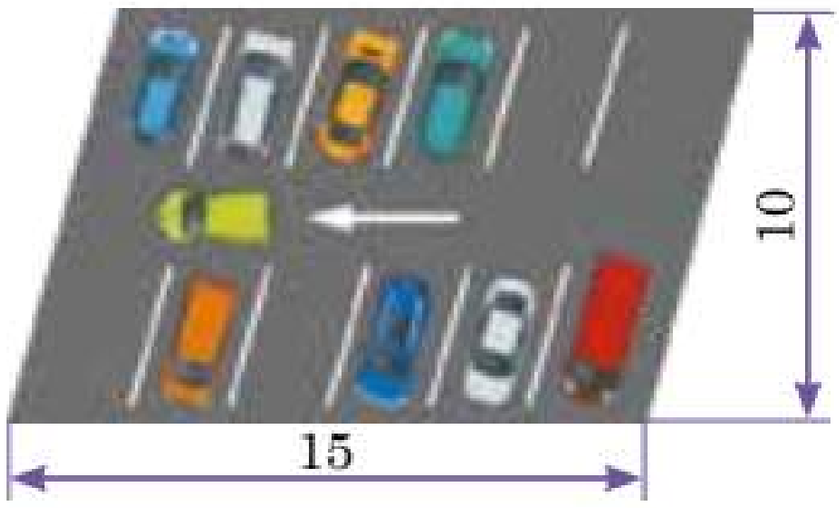
223 Обчисліть, на скільки площа прямокутника зі сторонами 14 см і 11 см більша за площу паралелограма з такими ж сторонами та тупим кутом 150°?

224 Висота паралелограма вдвічі більша за довжину сторони, до якої вона проведена. Відомо, що площа паралелограма становить 32 см^2. Знайдіть його висоту.

225 Килим складається із шести ромбів, кожен з яких має площу 3 м^2. Довша сторона килима дорівнює 6 м. Знайдіть ширину килима. (Для розв'язання накресліть схему килима.)

226 Територія кафе має розміри 250 м на 350 м. Вона поділена на три частини: зал, доріжку та барну стійку. Обчисліть ширину доріжки, якщо її довжина дорівнює 400 м і вона займає $\frac{1}{118}$ частину від площі всієї території. Обчисліть на калькуляторі, округливши відповідь до одиниць.

227 Обчисліть, яку площу займає паркінгова зона, яка має форму паралелограма. Скористайтеся даними на малюнку. Розміри вказано в метрах.



228 З аркуша картону (паперу) виріжте ромб та паралелограм з рівними площами. Результати вимірювань та обчислень запишіть у зошит.

229 Знайдіть діагоналі ромба, якщо одна з них в 1,5 рази більша другої, а площа ромба дорівнює 27 см^2.

230 Обчисліть, скільки плитки потрібно покласти у спосіб, зображений на рисунку, щоб застелити підлогу кімнати розмірами 3 м на 4 м. Розмір плитки — 30 см на 30 см.

231 Штат Теннессі має форму, схожу на паралелограм. За даними на малюнку, обчисліть орієнтовну площу цього штату. (У задачі розміри є орієнтовними.)

232 У швейній майстерні вирішили виготовити декоративні нашивки у формі ромба для одягу. Діагоналі кожної нашивки дорівнюють 8 см і 6 см. Майстерня має тканину розміром 1 м^2. Знайдіть площу однієї нашивки. Скільки нашивок можна виготовити з тканини розміром 1 м^2?

233 Одна з діагоналей ромба дорівнює 18 см, а кут між його сторонами дорівнює 90°. Обчисліть площу даного ромба.

234 * Площа дельтоїда дорівнює 70 см^2. Знайдіть його діагоналі, якщо головна діагональ на 4 см більша за іншу діагональ.

235 * Квадрат та ромб, що не є квадратом, мають однакові периметри. Порівняйте їх площі.

236 * Діагональ паралелограма має однакову довжину з його стороною. Знайдіть площу паралелограма, якщо більша сторона паралелограма дорівнює 15,2 см, а один з його кутів дорівнює 45°.

237 * Розділіть паралелограм на три рівновеликі фігури прямими, що проходять через одну й ту саму вершину.

238 * Дано два рівновеликих чотирикутники *ABCD* і *EFGH*. Відомо, що площа кожного з них дорівнює 50 см^2. Чотирикутник *ABCD* є прямокутником зі сторонами 5 см і 10 см. Знайдіть сторони чотирикутника *EFGH*, якщо він є ромбом.

2.10. Площа граней прямокутного паралелепіпеда

Паралелепіпед, у якого бічні ребра перпендикулярні площині основи, називається **прямим**.

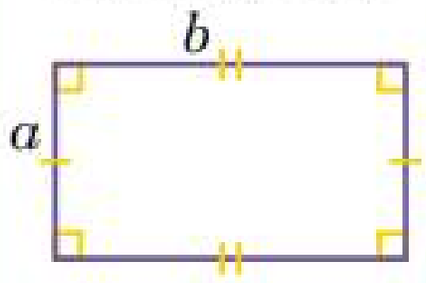
Прямий паралелепіпед, у якого основою є прямокутник, називається **прямокутним паралелепіпедом**. Усі грані прямокутного паралелепіпеда — прямокутники.

Прямокутний паралелепіпед, у якого всі ребра рівні, називається **кубом**. У куба всі грані — квадрати.

Поверхня прямокутного паралелепіпеда складається із 6 прямокутників, а поверхня куба — із 6 квадратів. Їх називають **гранями**. Протилежні грані паралелепіпеда рівні між собою.

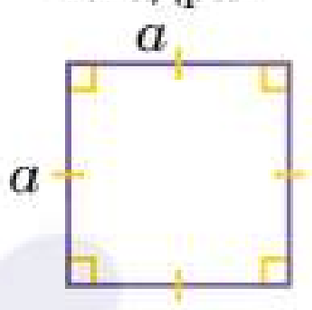
Площі граней

Прямокутник

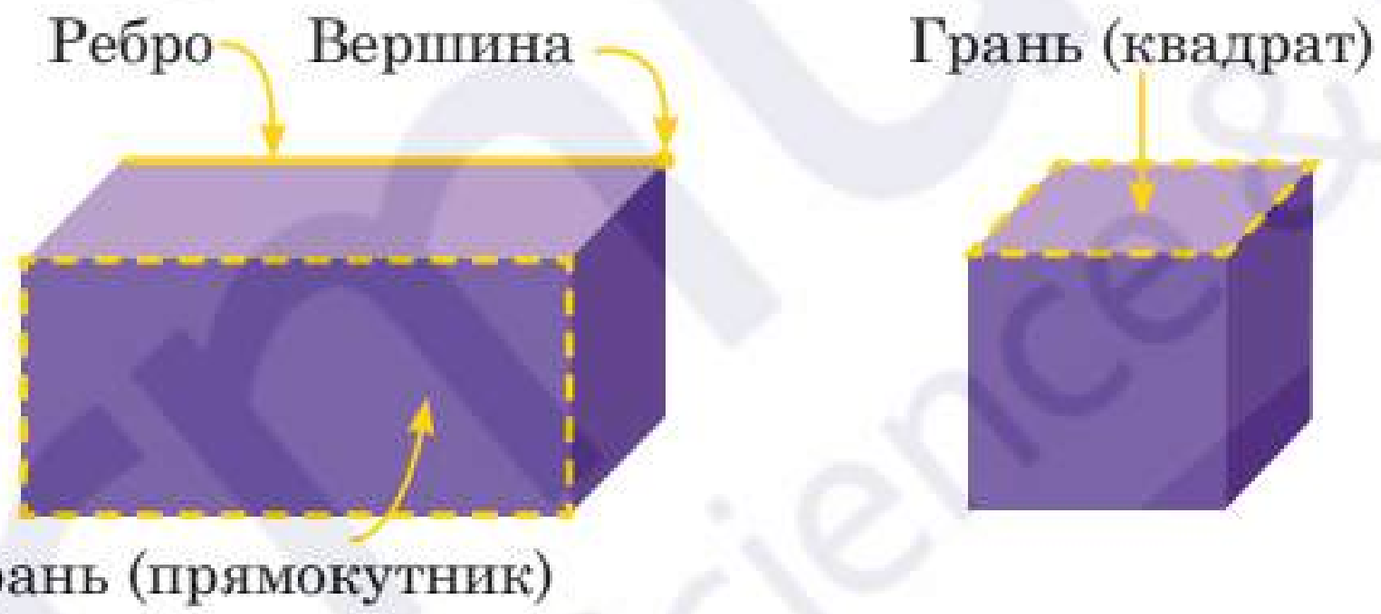


$S = a \cdot b$

Квадрат



$S = a^2$



Площа поверхні прямокутного паралелепіпеда складається з площі двох основ та площі бічної поверхні паралелепіпеда.

Позначення:
$S_{п.п.}$ — площа повної поверхні;
$S_б$ — площа бічної поверхні;
$S_{осн}$ — площа основи.

Площа поверхні	Прямокутний паралелепіпед	Куб
Бічна	$S_б = P_{осн} \cdot h$	$S_б = 4a^2$
Повна	$S_{п.п.} = 2S_{осн} + S_б$	$S_{п.п.} = 6a^2$

Приклад

1 Діагональ квадрата ділить його на два трикутники. Обчисліть площу кожного з них, якщо сторона квадрата дорівнює 12 см.

Розв'язання

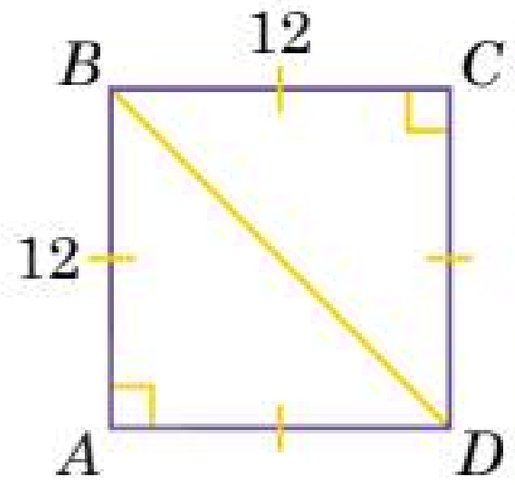
Розглянемо $ABCD$ — квадрат, BD — діагональ.
$AB = BC = CD = AD$ (за власт. квадрата).

Звідси $\Delta ABD = \Delta CBD$ (за двома катетами).

Отже, $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABD} = \frac{S_{ABCD}}{2}$ (за властивостями площі).

$S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABD} = \frac{12^2}{2} = \frac{12 \cdot 12}{2} = 12 \cdot 6 = 72$ см^2.

Відповідь. 72 см^2.



Приклад

2 Обчисліть площу повної поверхні коробки, яка має такі розміри: довжина — 10 см, ширина — 13 см, висота — 15 см.

Розв'язання

$S_{п.п.} = S_б + 2 \cdot S_{осн}$.

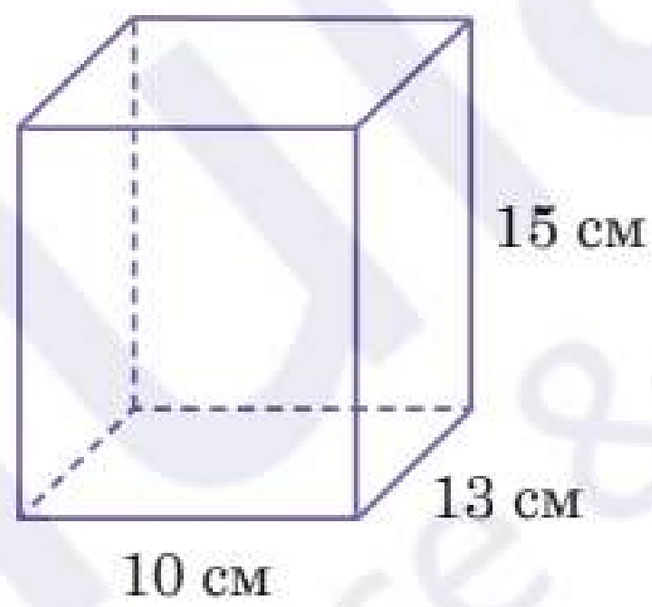
$P_{осн} = 2 \cdot (10 + 13) = 46$ см.

$S_б = P_{осн} \cdot h = 46 \cdot 15 = 690$ см^2.

$S_{осн} = 10 \cdot 13 = 130$ см^2.

$S_{п.п.} = 690 + 2 \cdot 130 = 950$ см^2.

Відповідь. 950 см^2.



Попрактикуйтеся

239 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Площа повної поверхні куба у шість разів більша за площу однієї його грані.

б) Куб є прямокутним паралелепіпедом.

в) Площа прямокутника — це добуток протилежних сторін.

г) Площа квадрата — це добуток сусідніх сторін.

240 Як зміниться площа прямокутника, якщо кожну з його сторін збільшити:

а) на 5 см; б) у 3 рази; в) на 35%.

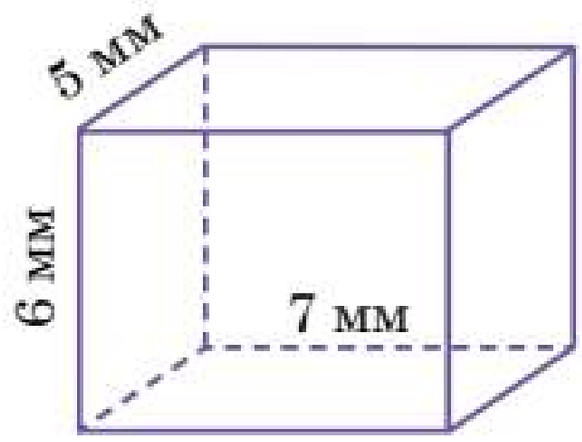
241 Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону зменшити:

а) на 8 см; б) у 2,5 раза; в) на 19%.

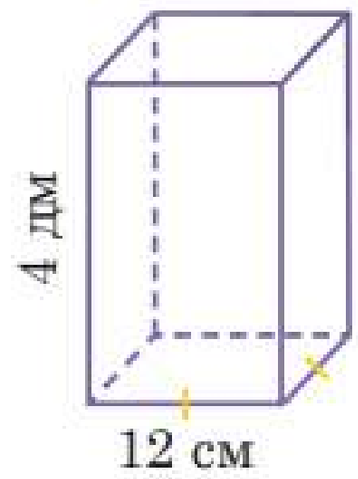
242 Використовуючи програмний засіб GeoGebra, побудуйте розгортку куба зі стороною 5 см. Збільшіть його довжину вдвічі. Як змінилася площа повної поверхні?

243 За даними на рисунках обчисліть площу кожної грані прямокутного паралелепіпеда.

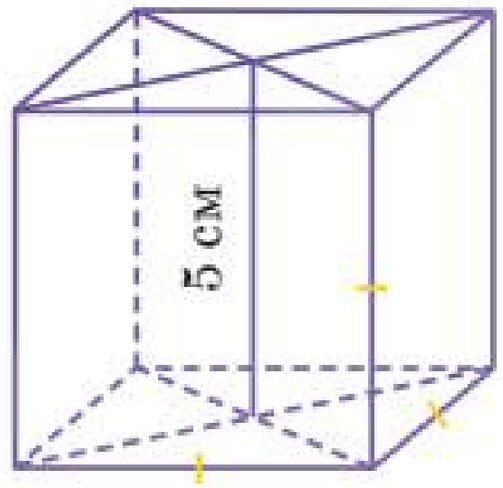
а)



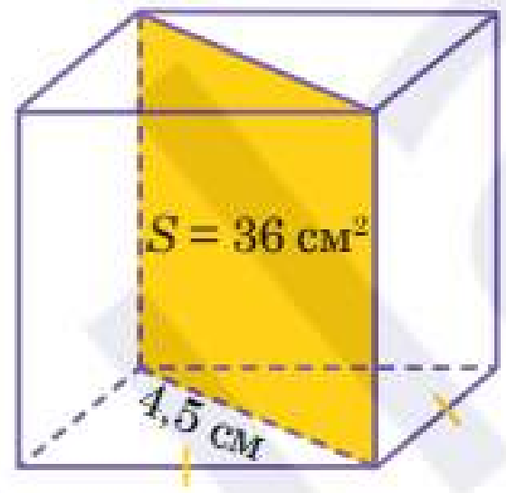
б)



в)



г)



244 Як знайти площу прямокутного трикутника зі сторонами 2 см і 5 см?

245 Порівняйте площу основи та площу бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо його ширина дорівнює 3 см, довжина — 4 см, а висота — 5 см.

246 Обчисліть площу бічної поверхні холодильника, якщо його виміри дорівнюють 0,54 м, 0,55 м та 1,7 м.

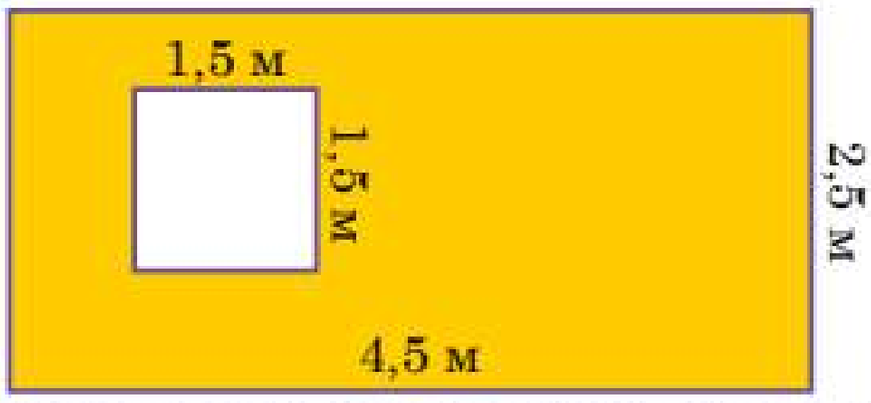
247 Яку площу повної поверхні має куб, сума ребер якого становить 36 см?

248 Знайдіть суму ребер прямокутного паралелепіпеда, якщо дві його грані — це квадрати з площею 25 см^2, решта — прямокутники із площею 20 см^2.

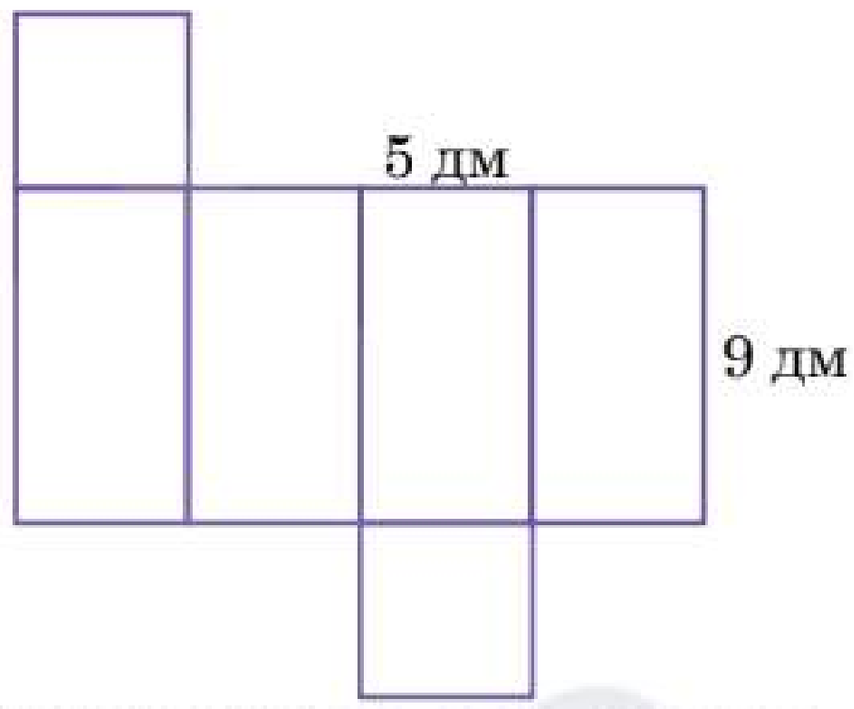
249 Сума довжин усіх ребер прямокутного паралелепіпеда дорівнює 96 см, ширина — 7 см, довжина — 12 см. Обчисліть висоту прямокутного паралелепіпеда.

250 Найбільший прапор України мав розміри 30 м на 45 м і був занесений у Книгу рекордів Гіннеса. Найперше його розгорнули в Донецьку 23 серпня 2007 року. А найбільший прапор, що майорить на флагштоці, знаходиться у Дніпрі та має розміри 12 м на 18 м. Обчисліть, яку площу землі могли б вкрити ці два прапори разом.

251 Томмі хоче пофарбувати стіну у власній кімнаті. Розгляньте наближене креслення стіни та вікна. Обчисліть скільки балончиків фарби йому знадобиться, якщо 1 балончик фарби може покрити 1,5 м^2 стіни.



252 Користуючись розгорткою, знайдіть площу повної поверхні та бічну площу коробки.



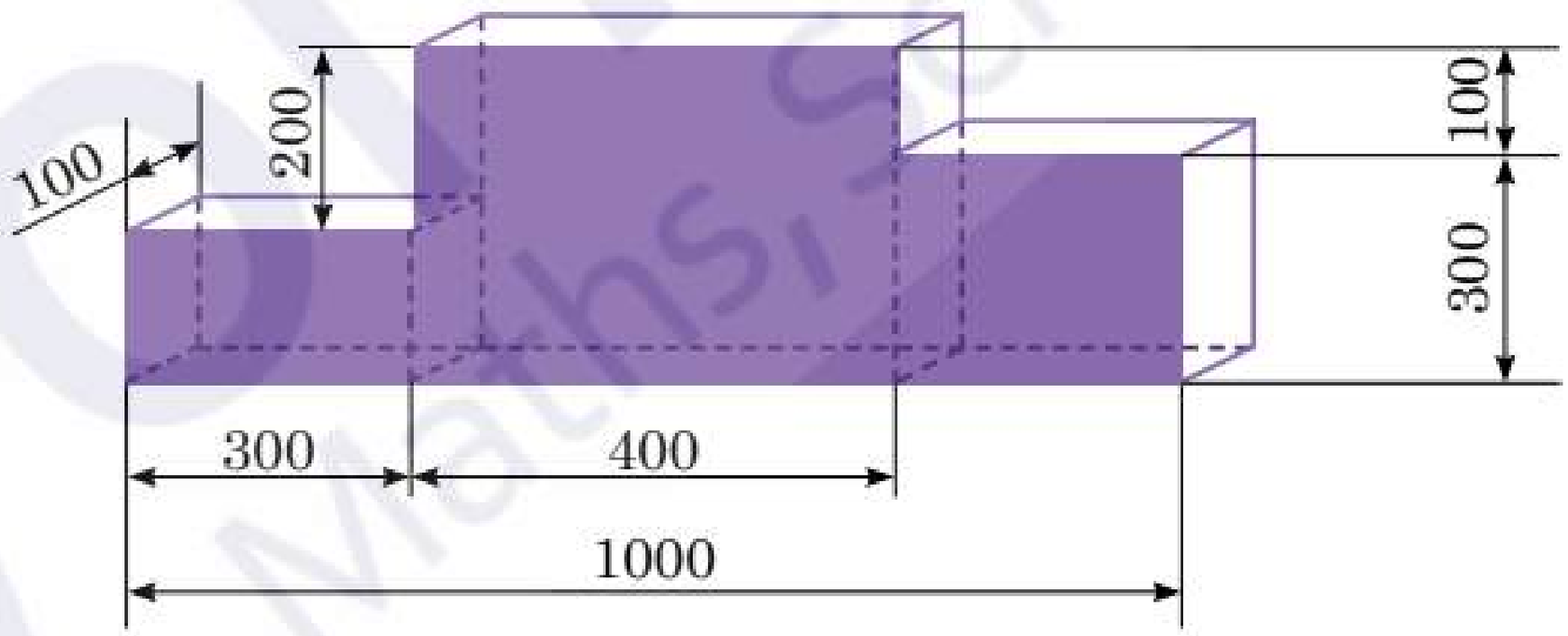
253 1000 цеглинок довжиною 23 см і шириною 13 см використано для того, щоб викласти доріжку в парку. Обчисліть довжину доріжки, яку можна викласти, якщо її ширина 0,5 м.

254 Архітектор планує побудувати сучасний офісний комплекс, що складається з трьох будівель. Кожна будівля має форму прямокутного паралелепіпеда. Перший будинок має розміри 30 м у довжину, 20 м у ширину і 50 м у висоту. Другий будинок має розміри 40 м у довжину, 25 м у ширину і 60 м у висоту. Третій будинок має розміри 35 м у довжину, 30 м у ширину і 55 м у висоту.
Для розрахунку вартості робіт, обчисліть:

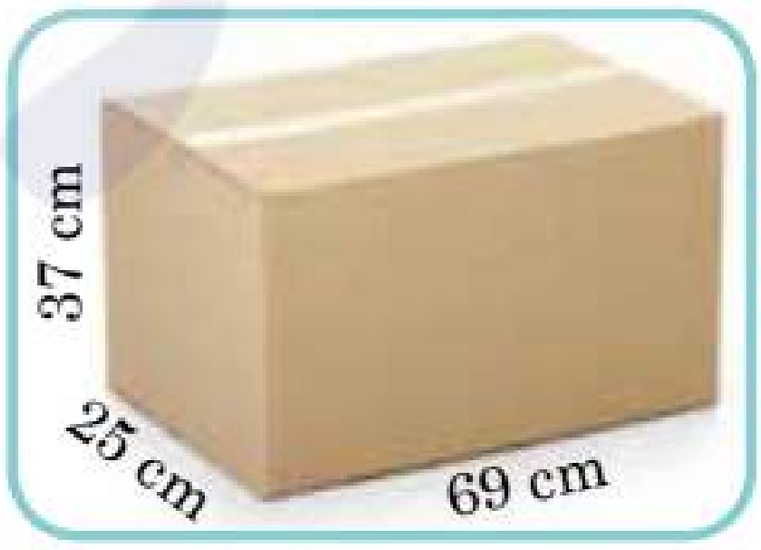
а) площу поверхні кожної будівлі для придбання оздоблення (основу будівлі враховувати не потрібно; розмірами вікон і дверей знехтуйте);
б) площу ділянки, яку займає кожна будівля.

Поміркуйте, якої форми та площі потрібно придбати ділянку, аби архітектор мав змогу зручно розмістити офісний комплекс.

255 Обчисліть площу повної поверхні п'єдесталу. Виміри на схемі подано в міліметрах.



256 Solve the real-life problem. How much paint is needed to paint the box which is 37 cm high, 25 cm wide and 69 cm long? Assume that the paint consumption is 1 g for every 100 cm^2.

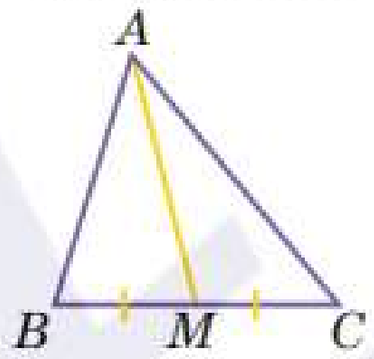


the height, width and length of the box — висота, ширина та довжина коробки
1 g for every 100 cm^2 — 1 г на кожні 100 см^2

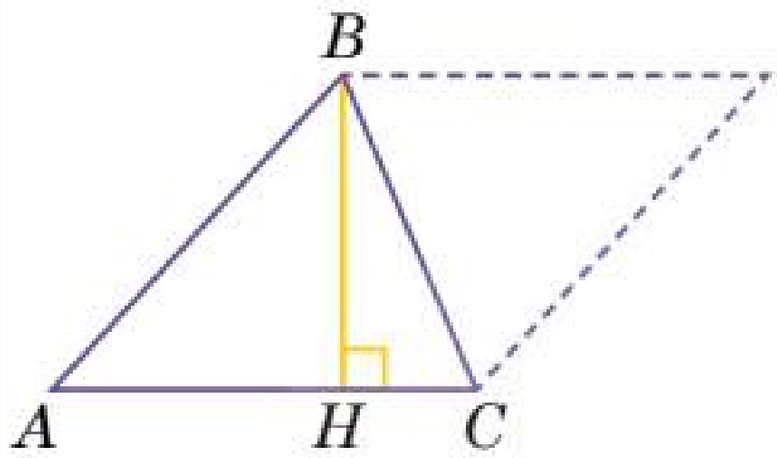
2.11. Площа трикутника

Трикутники, які мають рівні площі, називаються **рівновеликими**.

Медіана трикутника розбиває його на два рівновеликих трикутники.



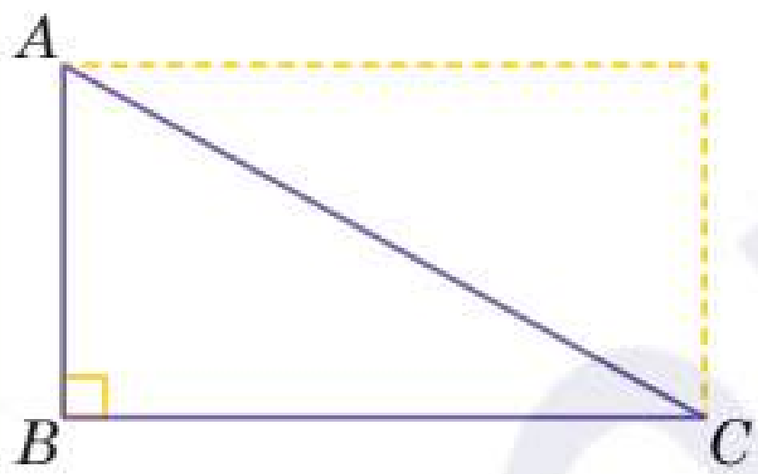
$S_{\Delta BAM} = S_{\Delta MAC}$



Площа довільного трикутника

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$$

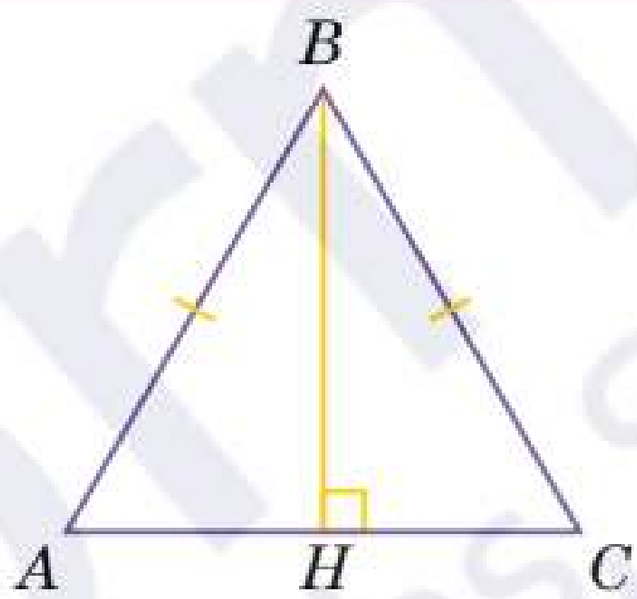
(оскільки трикутник є половиною паралелограма)



Площа прямокутного трикутника

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$$

(оскільки прямокутний трикутник є половиною прямокутника)



Площа рівностороннього трикутника

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$$

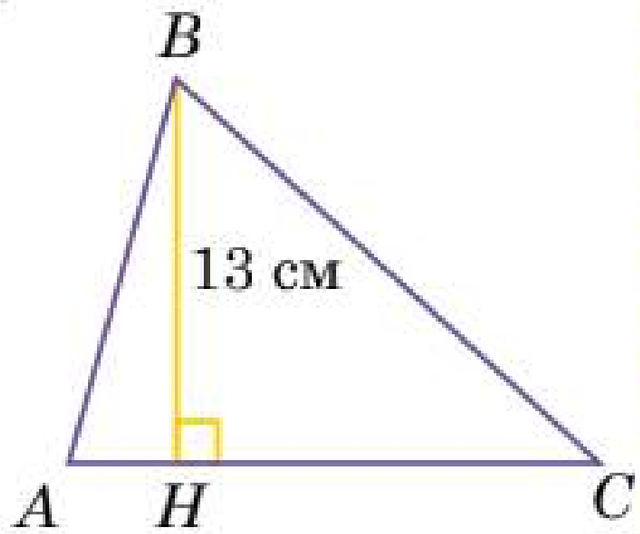
або достатньо знати лише довжину сторони

$$S = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$$

Доведення формули площі трикутника

Приклад

1 Знайдіть висоту трикутника, якщо сторона, до якої вона проведена, дорівнює 13 см, а площа трикутника становить 78 см^2.



Розв'язання

ΔABC, $BH \perp AC$.

$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$.

Звідси $BH = \frac{2 \cdot S}{AC}$,

$BH = \frac{2 \cdot 78}{13} = 2 \cdot 6 = 12$ см.

Відповідь. 12 см.

Приклад

2 Обчисліть довжину сторони рівностороннього трикутника, якщо його площа становить $324\sqrt{3}$ см^2.

Розв'язання

Оскільки це рівносторонній трикутник, то скористаємося формулою площі $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Підставимо у формулу відомі величини:

$324\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, обидві частини рівняння ділимо на $\sqrt{3}$;

$324 = \frac{a^2}{4}$;

$a^2 = 324 \cdot 4$; $a^2 = 1296$;

З таблиці квадратів чисел, $a = 36$ см.

Відповідь. 36 см.

Попрактикуйтеся

257 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

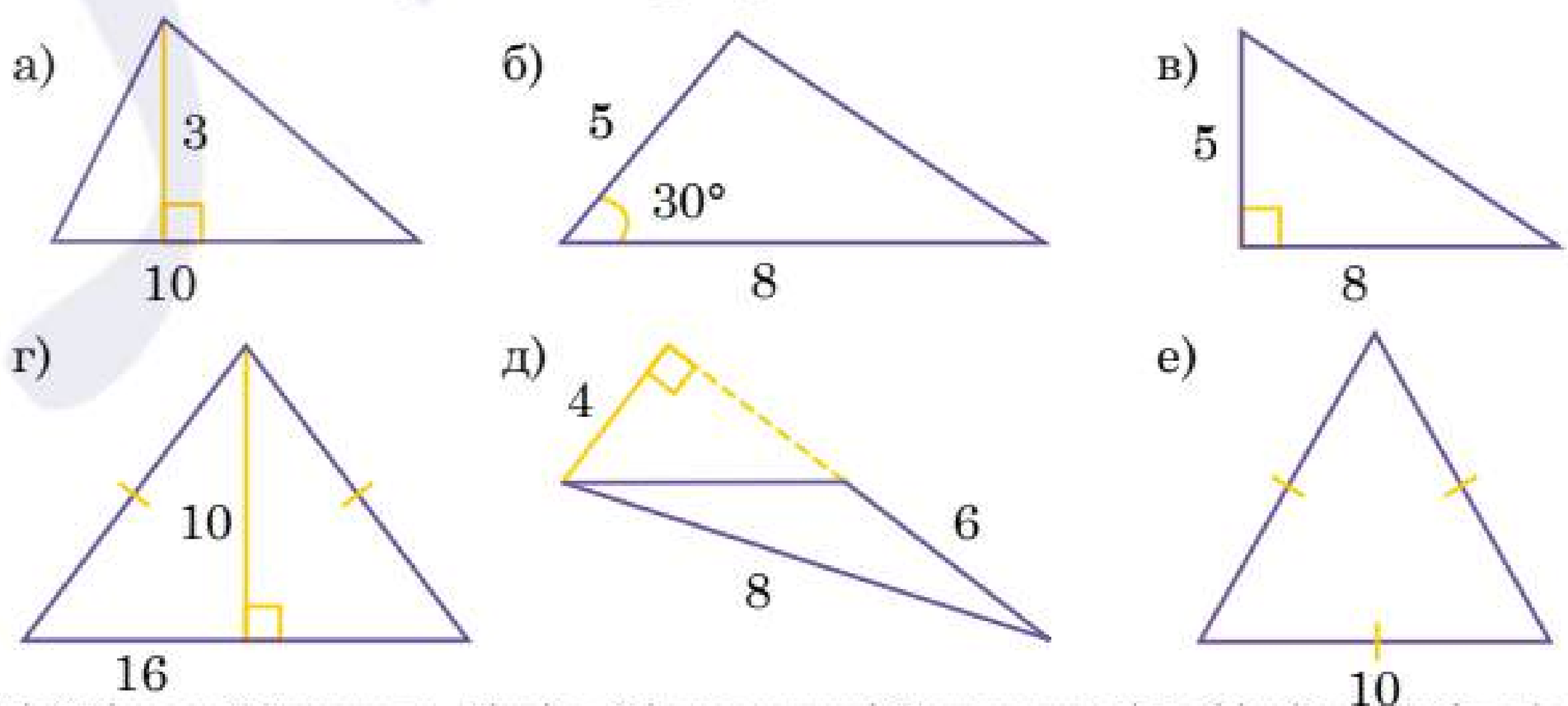
а) Площа трикутника, який утворився поділом паралелограма діагоналлю, є половиною його площі.

б) Для знаходження площі прямокутного трикутника достатньо знати два його катети.

в) Площу прямокутного трикутника не можна обчислити як половину добутку сторони та висоти, до якої вона проведена.

г) Для знаходження площі рівностороннього трикутника потрібно обов'язково знати його висоту.

258 Побудуйте в зошиті кожен з трикутників, назвавши кожну з вершин. Обчисліть площу кожного трикутника.



259 Заповніть таблицю, використовуючи формули площі.

a, см	5,4		8
h, см	3	7,1	
S, см^2		21,3	9

260 Проаналізуйте зміну площі трикутника, якщо:
а) збільшити його основу у 3 рази; б) зменшити висоту у 5 разів.

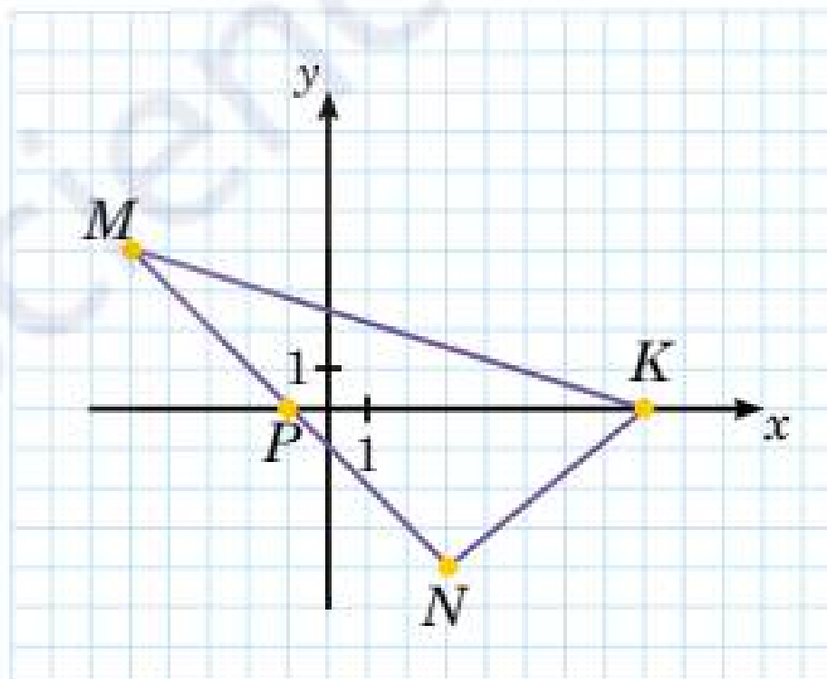
261 Висота трикутника дорівнює 10 см, а його площа — 35 см^2. Знайдіть довжину сторони, до якої проведена висота.

262 Площа трикутника зі стороною 18 од. дорівнює 90 кв.од. Знайдіть довжину висоти, проведеної до цієї сторони.

263 Використовуючи програмний засіб GeoGebra, накресліть два прямокутних трикутники площею 25 см^2 і 36 см^2. Добудуйте їх до квадратів та порівняйте площу кожного трикутника та квадрата.

264 На координатній площині відкладено точки $A(0; 5)$, $B(4;-2)$, $C(-2;-2)$, $O(0; 0)$. Знайдіть площу трикутників ABC та AOB.

265 На координатній площині зображено трикутник MNK та точку P, яка належить стороні MN. Чи правильне твердження, що:
а) площа трикутника MPK та площа трикутника PKN рівні;
б) площа трикутника MNK дорівнює 21 кв.од.?



266 Катети прямокутного трикутника мають довжини 12 см і 16 см, а гіпотенуза — 20 см. Знайдіть довжину найкоротшої висоти.

267 Сторони трикутника дорівнюють 5 см і 8 см. Менша висота — 4 см. Знайдіть довжину більшої висоти.

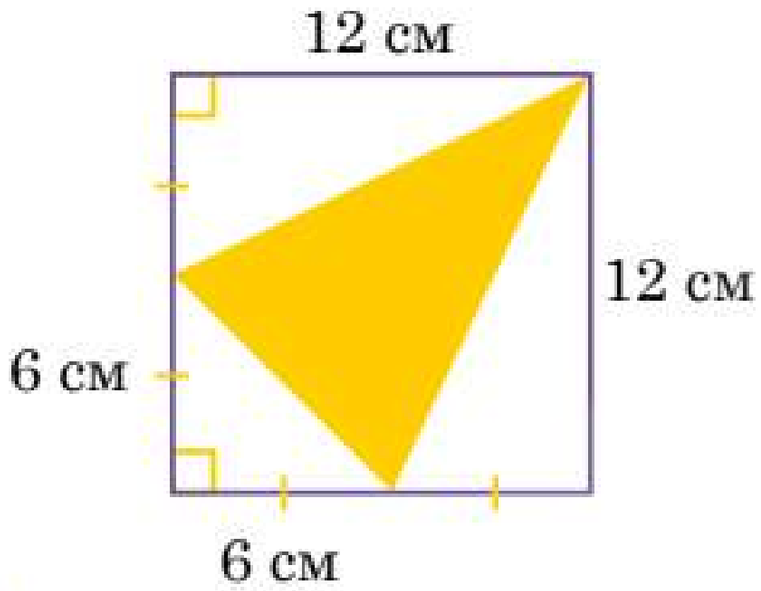
268 У трикутнику ABC кут C дорівнює 30°, сторони BC і AC — 10 см і 6 см відповідно. Знайдіть площу трикутника ABC.

269 У трикутнику MNK кут M дорівнює 45°. З вершини N проведено висоту NH так, що MH дорівнює 5 см, а HK — 11 см. Знайдіть площу трикутника MNK.

270 Порівняйте площі двох трикутників, на які поділяє даний трикутник його медіана.

271 Знайдіть площу ділянки лісу ($м^2$), зображеного на плані зі стороною одиничного квадрата 1 см. Масштаб 1 : 300.

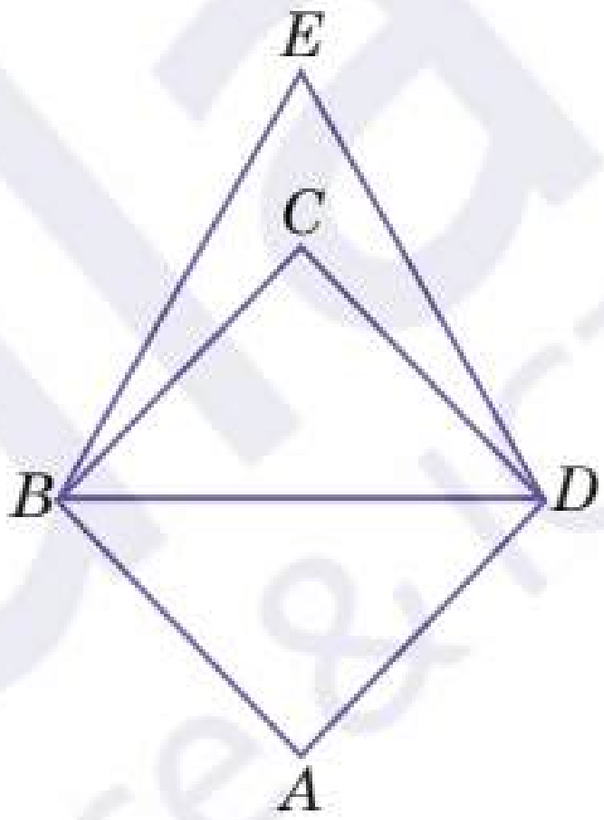
272 Знайдіть площу зафарбованої фігури.



273 Точка E не належить квадрату $ABCD$ так, що $DE = EB = DB$. Довжина сторони квадрата дорівнює 4 см. Знайдіть площу фігури $ADEB$. Для знаходження довжини діагоналі квадрата можна скористатися формулою:

$$d = a\sqrt{2},$$

де a — сторона квадрата,
d — діагональ квадрата.



274 Знайдіть периметр рівностороннього трикутника площею $225\sqrt{3}$ $см^2$.

275 Ви вирішили за допомогою мотузки обмежити ділянку землі у вигляді рівностороннього трикутника. Обчисліть, чи вистачить вам довжини мотузки 0,8 м, якщо площа ділянки становить $144\sqrt{3}$ $см^2$.

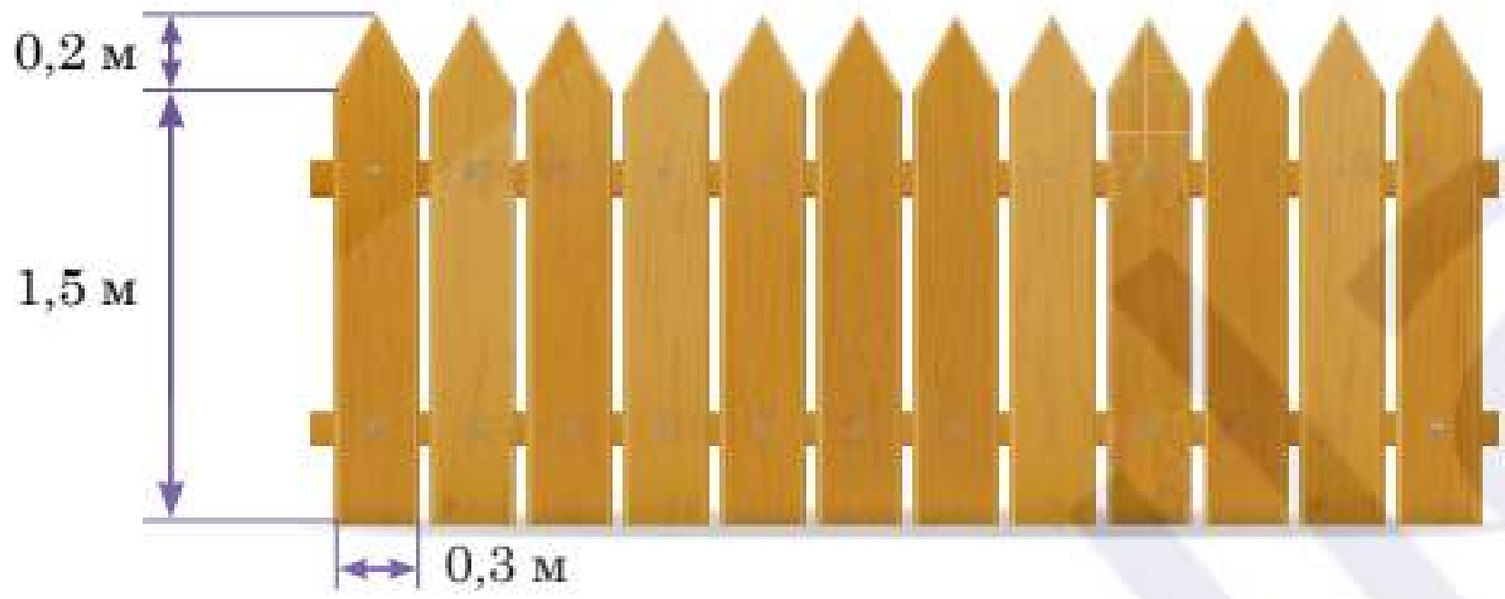
276 Площа рівнобедреного трикутника дорівнює 54 $см^2$. Обчисліть периметр трикутника, якщо висота, проведена до основи, дорівнює 9 см, а висота, проведена до бічної сторони, — 6 см.

277 Обчисліть периметр прямокутного трикутника, якщо його площа дорівнює 30 $см^2$. Один із катетів — 5 см, а висота, проведена до гіпотенузи, — 3 см.

278 Вишиванка є символом України. Здавна наші бабусі вишивали сорочки, рушники, сукні, прикрашаючи їх орнаментами. Проте, це не просто гарний візерунок — у ньому закладений певний сенс та побажання. На схемі для вишивки зображено закодоване слово «Україна». Знайдіть площу в од.кв. вишитого блакитним кольором візерунку, рахуючи клітинки на схемі. Обчисліть, скільки жовтої нитки для вишивання необхідно відрізати, якщо на один вишитий хрестик витрачається 5 мм нитки.

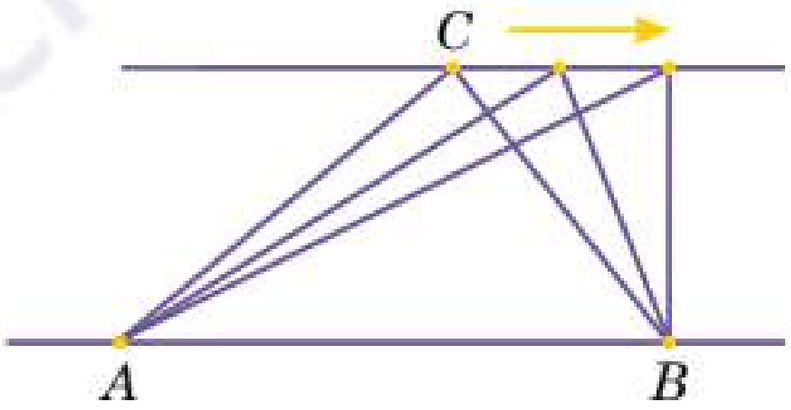
279 З паперу виріжте трикутник, виміряйте його та обчисліть площу. Розрахуйте тиск, який здійснює повітря на ваш трикутник. Відомо, що повітря тисне із силою 1,03 кг на 1 см^2.

280 Обчисліть, скільки фарби витратить Софія на фарбування паркану, якщо на 1 м^2 витрачається 50 мл фарби. Скористайтеся даними на малюнку для розрахунків.



281 Ви хочете виготовити полиці у формі рівностороннього трикутника. Для цього вам потрібно знати, якої довжини потрібно відрізати дощечки. Відомо, що полиця займає $\frac{1}{20}$ площі стіни розмірами 5 м на 2,5 м. Обчисліть довжину затраченого матеріалу. Для обчислень скористайтеся калькулятором.

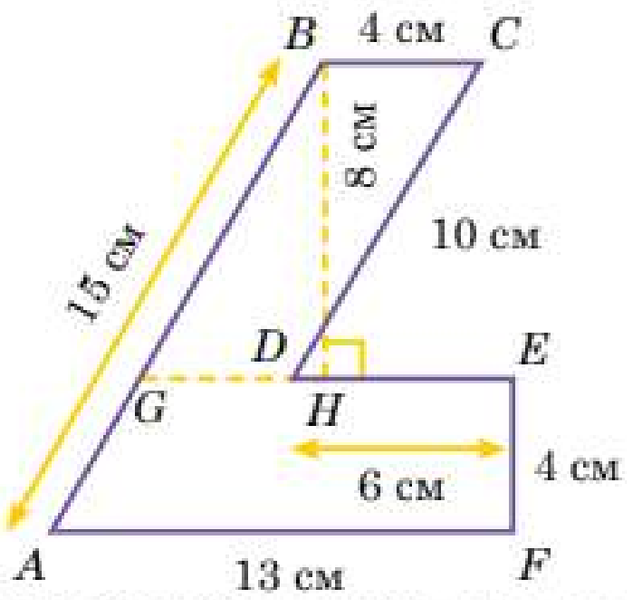
282 Дано дві паралельні прямі. На одній з даних прямих розташований нерухомий відрізок AB. Інша пряма містить точку C, яка може вільно рухатися вздовж даної прямої. Доведіть, що площа трикутника ABC залишається незмінною.



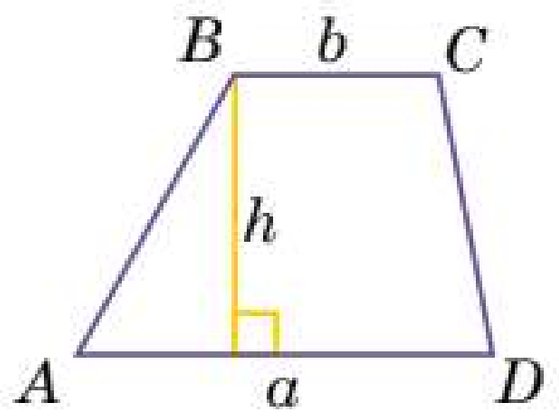
283 Побудуйте трикутник ABC. Побудуйте дві прямі через вершину A так, щоб вони розділили даний трикутник на три трикутники, що мають рівні площі.

284 Площа прямокутного трикутника дорівнює 168 см^2. Знайдіть катети, якщо відношення їх довжин дорівнює $\frac{7}{12}$.

285 Користуючись рисунком, знайдіть периметр і площу складеної фігури.

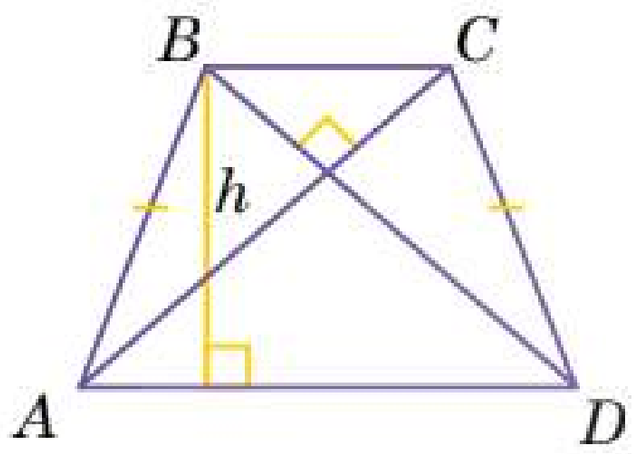


2.12. Площа трапеції



Для знаходження площі довільної трапеції користуємося такою формулою:

$$S = \frac{a + b}{2} \cdot h$$



Якщо трапеція рівнобічна і в неї діагоналі перпендикулярні, то площа такої трапеції буде рівна квадрату її висоти:

$$S = h^2$$

Приклад

1 Обчисліть більшу основу трапеції, якщо менша основа дорівнює 7 см, висота — 5 см, а площа становить 65 см^2.

Розв'язання

Площа трапеції $S = \frac{a + b}{2} \cdot h$

Виразимо звідси b — більшу основу трапеції.

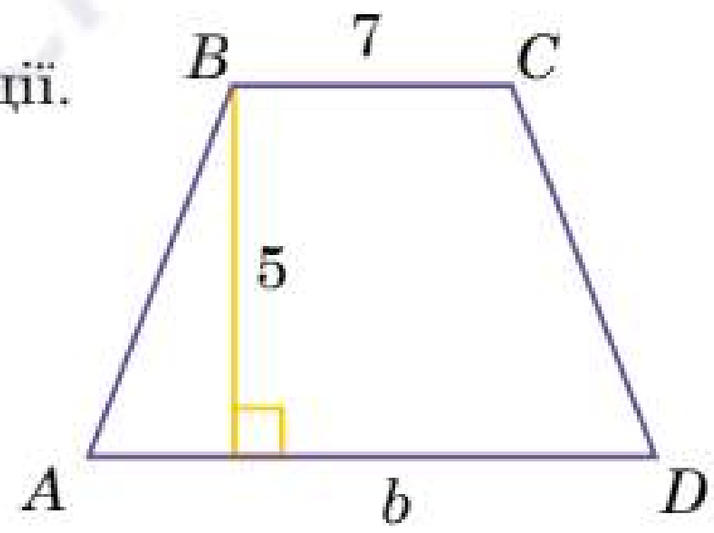
$(a + b) \cdot h = 2 \cdot S$;

$a + b = \frac{2 \cdot S}{h}$;

$b = \frac{2 \cdot S}{h} - a$;

$b = \frac{2 \cdot 65}{5} - 7 = 19$ см.

Відповідь. 19 см.



Приклад

2 Обчисліть довжину кола, вписаного в рівнобічну трапецію з основами 4 см і 16 см. Площа трапеції становить 80 см^2.

Розв'язання

$ABCD$ — рівнобічна трапеція, $K(O; OM)$ — вписане коло.

$MN = 2 \cdot r = h$ (за властивістю діаметра кола).

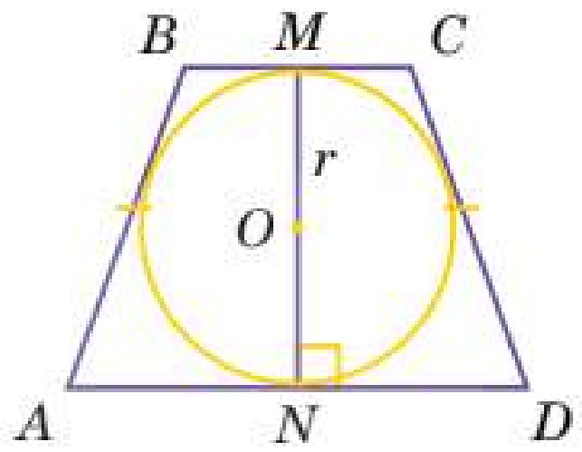
Для обчислення довжини кола потрібно знайти радіус цього кола. Тому з формули площі трапеції виражаємо висоту:

$S = \frac{a+b}{2} \cdot h;$

$h = \frac{2 \cdot S}{a+b};$

$h = \frac{2 \cdot 80}{4+16} = 8$ см.

Отже, $r = \frac{h}{2} = \frac{8}{2} = 4$ см.



Знаходимо довжину кола $C = 2 \cdot \pi \cdot r$, $C = 2 \cdot \pi \cdot 4 = 8\pi$ см.

Відповідь. 8π см.

Попрактикуйтеся

286 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Площа трапеції залежить від довжини бічних сторін.

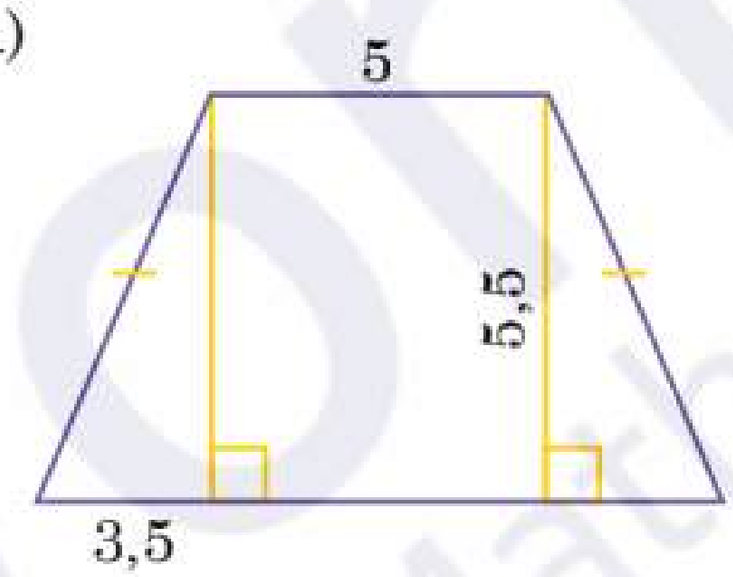
б) Площу прямокутної трапеції можна розбити на площу прямокутника та прямокутного трикутника.

в) При збільшенні висоти трапеції у 4 рази, площа збільшується у 2 рази.

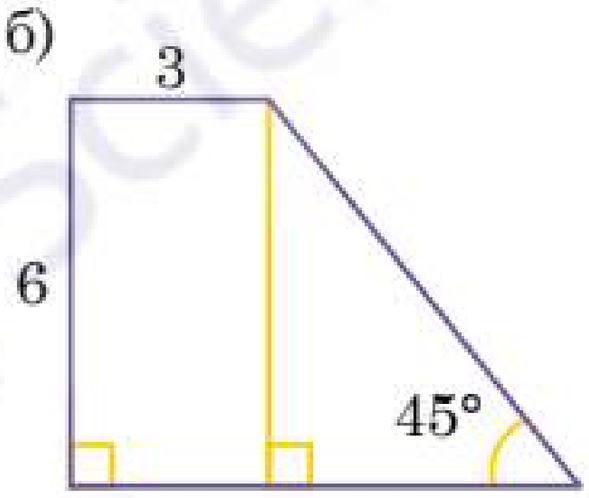
г) При зменшенні висоти вдвічі, площа також зменшується вдвічі.

287 За даними на рисунках обчисліть площу трапеції.

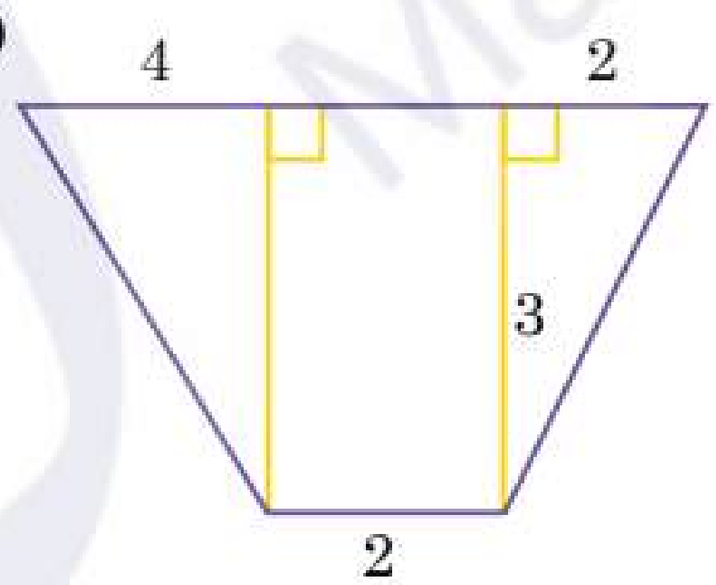
а)



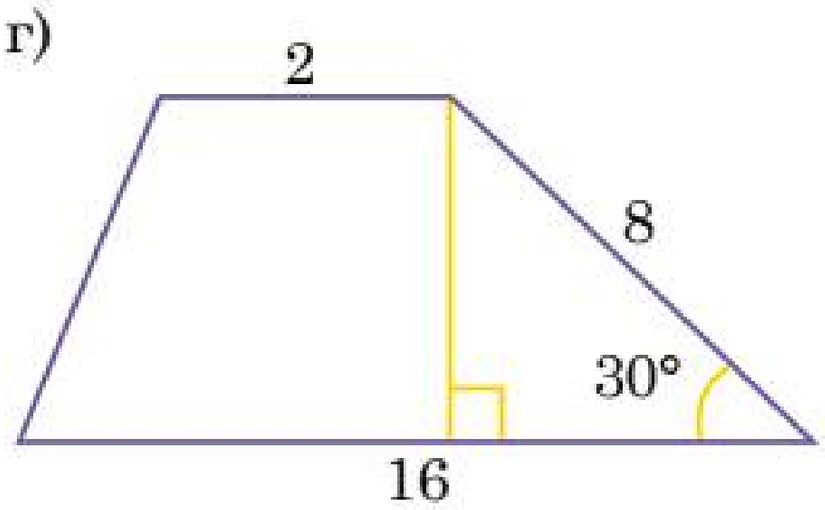
б)



в)



г)



288 Менша основа трапеції дорівнює 6 см, а висота — 3 см. Її площа дорівнює 27 см^2. Знайдіть більшу основу трапеції.

289 Більша основа трапеції дорівнює 18 см, а висота — 5,5 см. Площа трапеції дорівнює 77 см^2. Знайдіть меншу основу трапеції.

290 Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 3 см і 8 см, а кут між бічною стороною та більшою основою — 45°. Знайдіть площу трапеції.

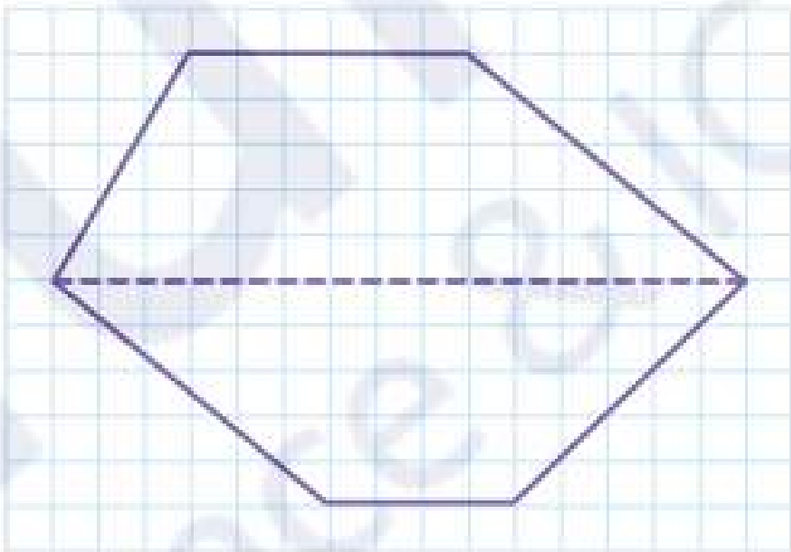
291 Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 4 см і 10 см, а кут між бічною стороною та висотою — 45°. Знайдіть площу трапеції.

292 Використовуючи програмний засіб GeoGebra, накресліть довільну рівнобічну трапецію. Дослідіть, які площі будуть мати фігури, утворені висотами, що проведені з вершин тупих кутів.

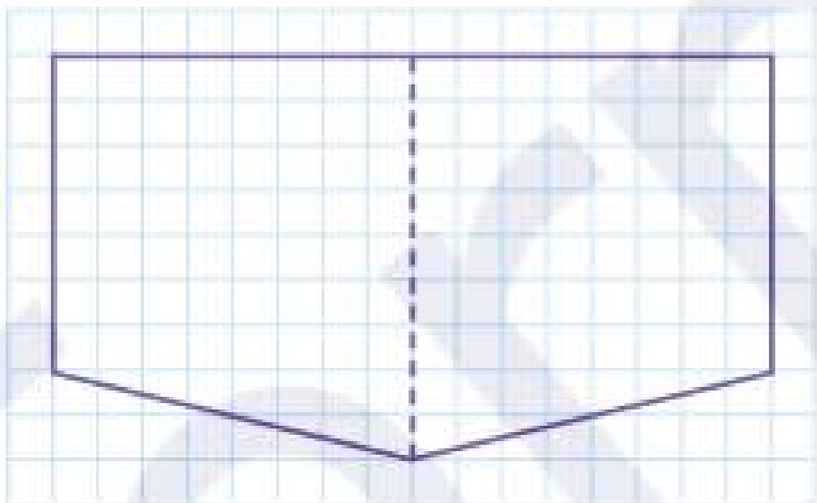
293 Дано рівнобічну трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD$), діагоналі BD і AC — перпендикулярні. Обчисліть її площу, якщо висота BH дорівнює 8 см.

294 Площа рівнобічної трапеції, діагоналі якої перетинаються під прямим кутом, становить 225 см^2. Обчисліть висоту трапеції.

295 Знайдіть площу земельної ділянки у м^2, зображеної на плані з розмірною сіткою 1 см на 1 см. Масштаб 1 : 3000.



296

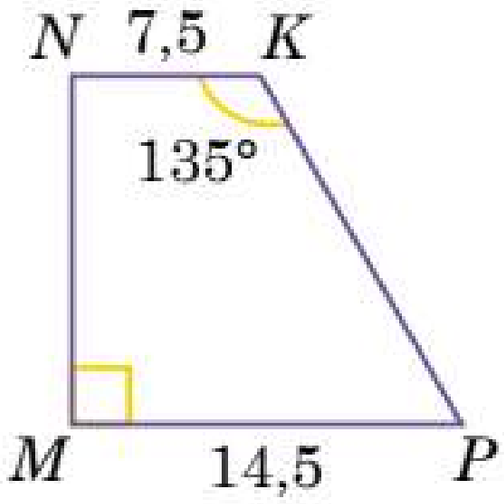


Яку площу займає будинок у м^2, зображений на плані з розмірною сіткою 1 см на 1 см. Масштаб 1 : 3000.

297 На координатній площині дано точки $A(-3; 4)$, $B(4; 4)$, $C(1; -2)$, $D(-1; -2)$. Обчисліть площу утвореної фігури.

298 На координатній площині дано точки $A(-1; 2)$, $B(2; 2)$, $C(5; -2)$, $D(0; -2)$. Обчисліть площу утвореної фігури.

299 Обчисліть площу трапеції $MNKP$ за даними на рисунку.



300 Знайдіть площу трапеції $ABCD$, якщо $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle D = 45°$. $AB = 15$ см, $BC = 13$ см.

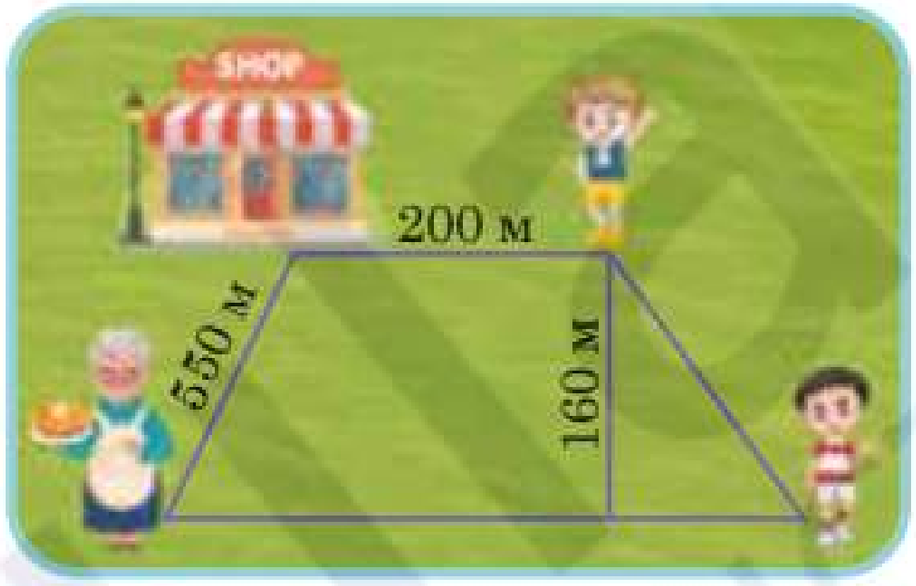
301 У рівнобічної трапеції бічна сторона має довжину 7 см, а висота — 4 см. Її площа дорівнює 50 см^2. Знайдіть периметр трапеції.

302 Периметр рівнобічної трапеції дорівнює 85 см, а бічна сторона — 10 см. Знайдіть площу трапеції, якщо висота становить 8 см.

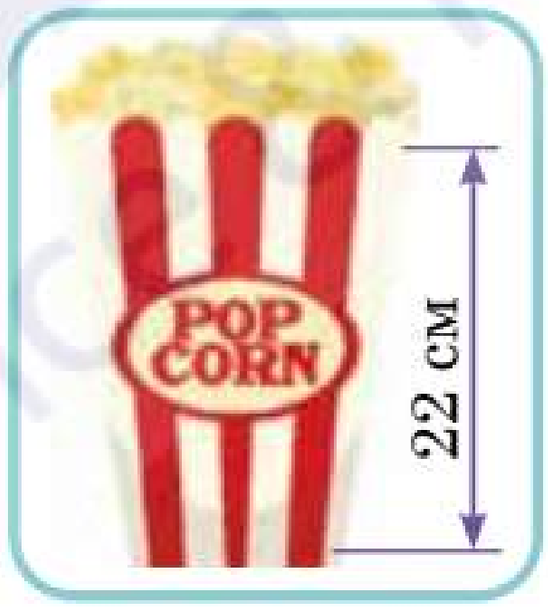
303 У трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) з вершини тупого кута B проведено відрізок BM, паралельно до бічної сторони CD, який ділить основу AD у відношенні 1 : 3. Площа трикутника ABM становить 12 см^2, а висота трапеції CH — 4 см. Знайдіть площу трапеції.

304 Відрізок, проведений з вершини тупого кута, паралельний бічній стороні трапеції, ділить основу у відношенні 2 : 5. Відомо, що площа утвореного паралелограма дорівнює 25 см^2, а висота трикутника — 5 см. Знайдіть площу трапеції.

305 У суботній день Марк мав багато планів: зайти до магазину, навідати бабусю та прийти в гості до Андрія. На малюнку показано план його маршруту. Обчисліть скільки покаже крокомір Марка, якщо 1 крок — 0,6 м. Площа утвореної фігури є $16 \cdot 10^4$ м^2.

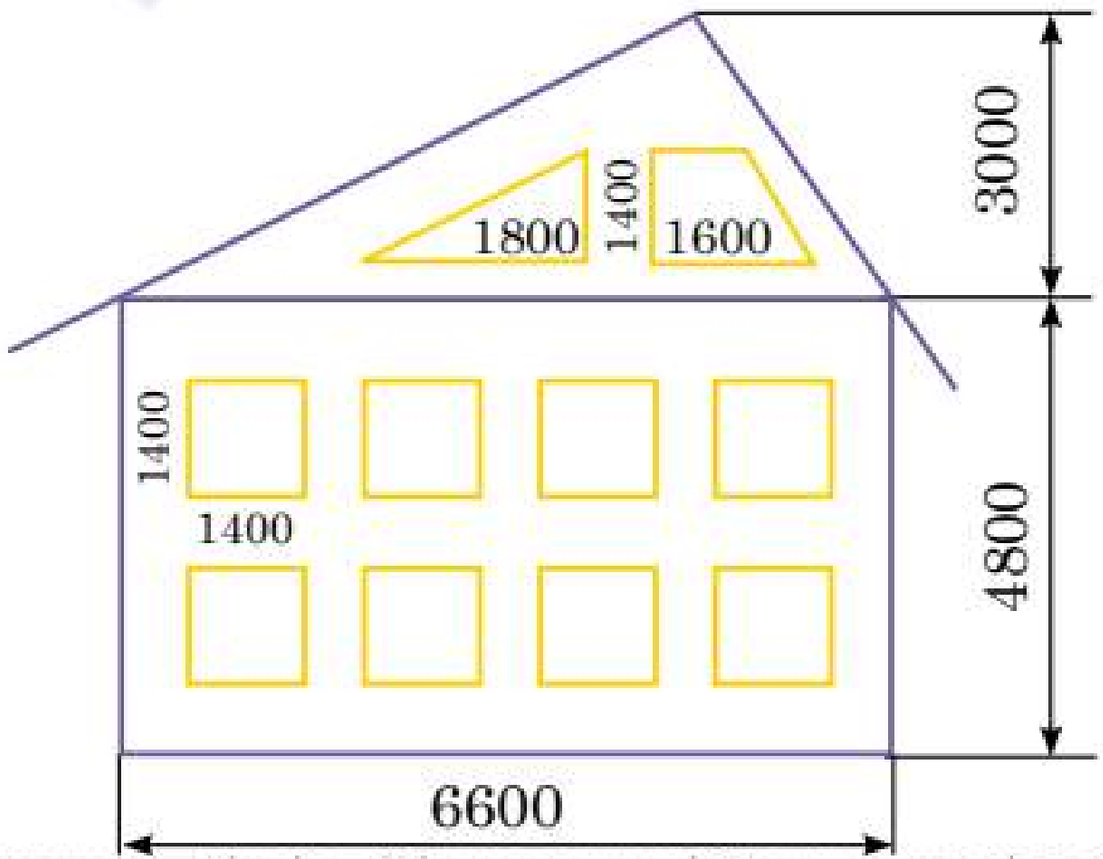


306 Бічна грань коробки для попкорну має форму рівнобічної трапеції. Дно коробки — квадрат зі стороною 7 см, а верх — квадрат зі стороною 12 см. Скориставшись малюнком, накресліть розгортку коробки та обчисліть її площу.



307 Поверхня шкільної парти має форму рівнобічної трапеції з розмірами основ 76 см і 60 см, відстань між якими 66 см. З'ясуйте, чи зможе там поміститися ватман формату А3 (297 мм на 420 мм). Якщо так, то яка частина площі поверхні парти залишиться вільною (відповідь округліть до сотих)?

308 Обчисліть, яку площу поверхні стіни будинку потрібно пофарбувати у м^2. Розміри зазначені на схемі у мм.



2.13. Розв'язування задач практичного змісту

309 Шкільна клумба має форму чотирикутника із стороною, що дорівнює найменшому двоцифровому числу, а сусідні з нею сторони — удвічі більші. Знайдіть довжину четвертої сторони клумби, якщо її периметр дорівнює 58 см.

310 Знайдіть вартість огорожі присадибної ділянки чотирикутної форми, одна сторона якої дорівнює 80 м. Сусідні з нею сторони становлять 20% та 25% від довжини першої сторони, а довжина четвертої сторони дорівнює найменшому трицифровому числу. Відомо, що один метр погонний огорожі коштує 225 гривень.

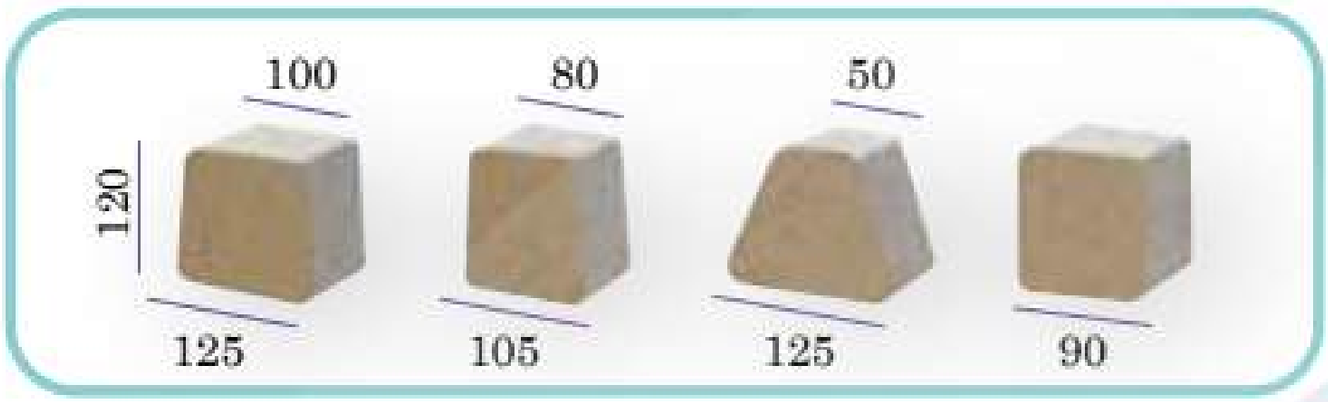
311 Туристичний маршрут між чотирма містами України Чернівці – Івано-Франківськ – Тернопіль – Хмельницький – Чернівці позначено на мапі масштабом 1 : 6000000 у формі чотирикутника із сторонами 2,5 см, 3 см, 2 см та 3,5 см відповідно. Обчисліть вартість поїздки мандрівника, якщо він подорожує власним авто і витрачає 6 л пального вартістю 56 грн/л на кожні 100 км шляху.

312 Навколо житлового мікрорайону, що має форму чотирикутника, збудовано об'їзну дорогу, найкоротша ділянка якої 3 км, що становить 60% від найдовшої ділянки цієї дороги. Знайдіть довжину об'їзної дороги, якщо дві інші ділянки дороги рівні між собою і становлять 40% від суми довжин попередніх двох ділянок дороги.

313 Ви вирішили оновити підлогу у своїй кімнаті, яка має форму паралелограма. Довжина однієї стіни кімнати становить 5 метрів, а відстань між цією стіною та протилежною їй (тобто висота паралелограма) — 3 метри. Обчисліть, скільки квадратних метрів лінолеуму вам потрібно купити для покриття всієї підлоги?

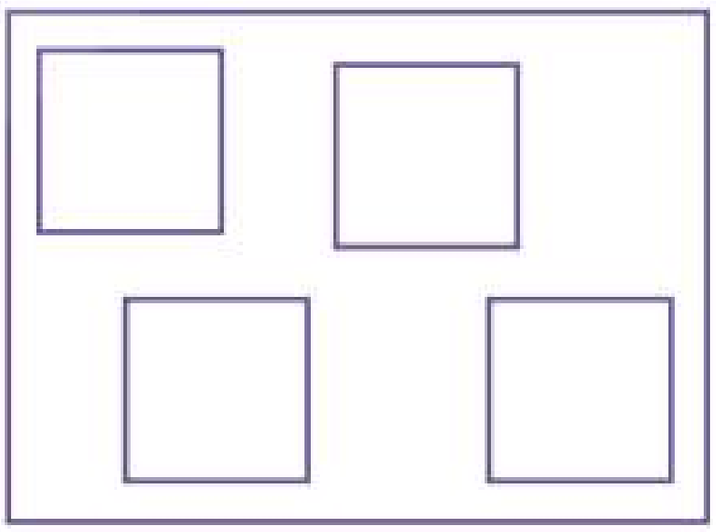
314 Для укладання доріжки використали плити двох кольорів прямокутної та квадратної форм. Ширина прямокутника є суміжною стороною квадрата периметром 60 см, а його довжина у 2 рази більша за ширину. Обчисліть загальну вартість доріжки шириною 1,2 м та довжиною 120 м, якщо ціна плитки квадратної форми 40 гривень, а прямокутної — 75 грн, а під час укладання двох рядів доріжки використовують 5 прямокутних та 6 квадратних плит.

315 На малюнку подано реальні розміри бруківочної плитки «Трапеція» у міліметрах. Обчисліть площу кожної плитки бруківки та знайдіть, скільки квадратних метрів бруківки можна вистелити, якщо використати 40 плиток кожної форми.

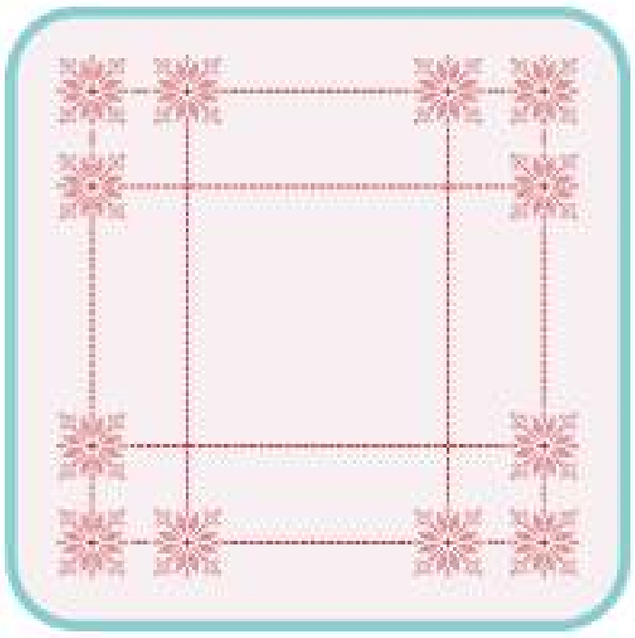


316 Картинна галерея організовує дитячу виставку малюнків на українську тематику. Всі експонати мають однакові розміри: довжину — 44 см, ширину — 76 см, та поміщені в спеціально заготовлені до цієї події рами шириною 3 см. Обчисліть, скільки картин можна розмістити на стінах виставкової зали картинної галереї розміром 25,8 м на 19,8 м, якщо відстань між картинами становить 10 см, а відступи від кута стін — 30 см (усі картини вертикального типу).

317 Блок марок Укрпошти «Героїчні професії. Залізні люди» має розміри 96 мм на 63 мм та містить 4 квадратні марки розміром 38,3 мм на 38,3 мм, які присвячені людям героїчних професій. Обчисліть, яка площа паперу залишиться від 10 блоків, якщо марки з них наклеєно на конверти для відправки адресатам?



318 Середина вишитої серветки — квадрат, утворений накладанням двох великих прямокутників. Знайдіть площу кожного квадрата і великого прямокутника (дивись малюнок), якщо площа малого прямокутника дорівнює 120 см², а його ширина становить $\frac{1}{24}$ площі.



319 Обчисліть скільки плиток квадратної форми з стороною 15 см необхідно придбати, щоб оздобити нею частину стіни, що має форму прямокутника зі сторонами 3 м та 2,7 м.

320 Приватний будинок має вальмовий чотирисхилий дах, дві частини якого рівносторонні трапеції з основами 15 м та 10 м, а інші дві — рівнобедрені трикутники з основами 12 м. Прорахуйте площу металочерепиці, необхідної для перекриття даху, якщо трикутники та трапеція мають рівні висоти довжиною 8 м, а 12 % від загальної площі даху мають подвійне перекриття.

Чотирьохскатний (вальмовий) дах

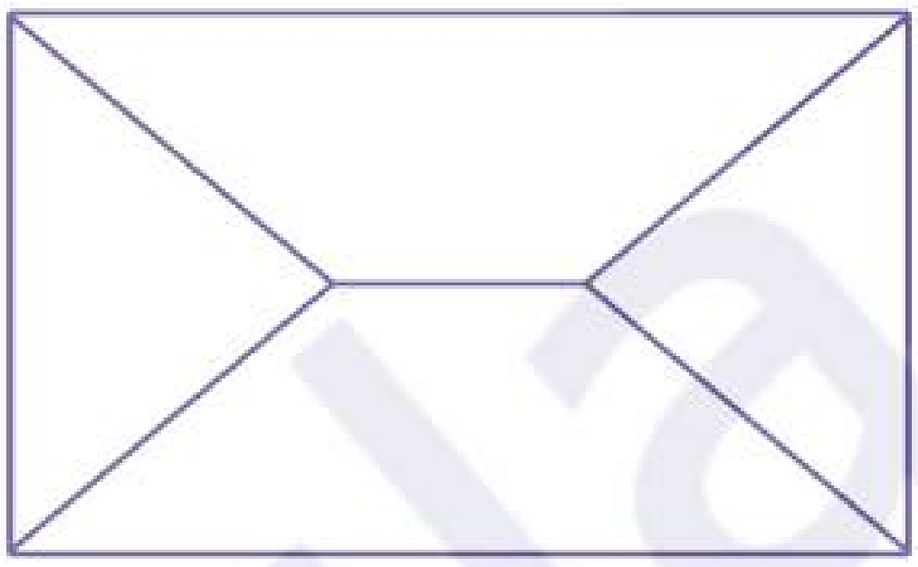


Схема вальмового даху (вид зверху)

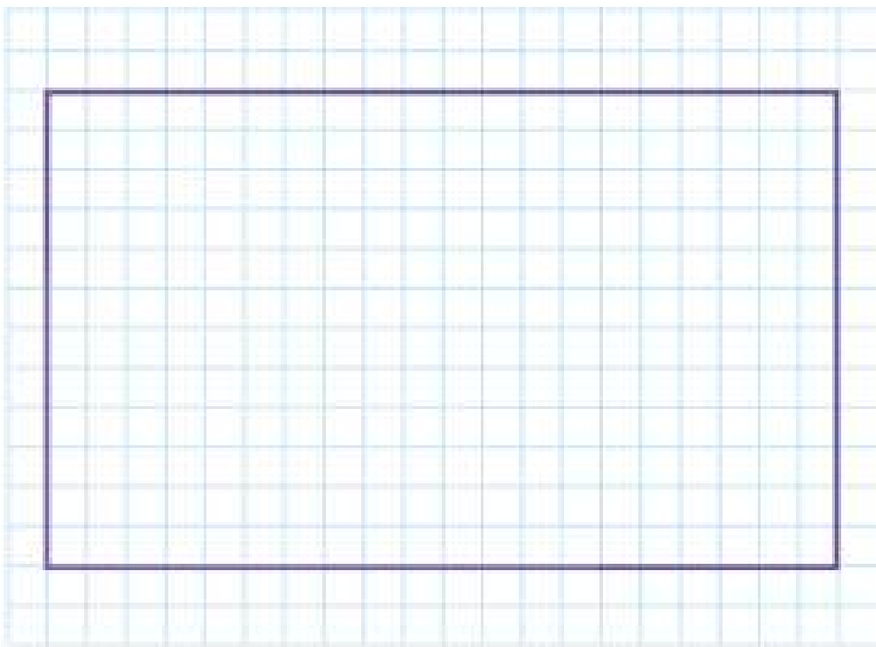
321 Одним із елементів української вишиванки є ромб. Майстер порахував, що його орнамент для вишиванки містить 750 хрестиків у довжину та 260 хрестиків у ширину, якщо вибрати канву, довжина хрестика на якій становить 0,8 мм. Яку площу займуть ромби на вишивці, якщо довжина довшої діагоналі ромба 125 хрестиків, а коротшої — 65 хрестиків і для вишиванки обрано канву, довжина хрестика на якій становить 0,8 мм.

Ромб є одним з основних символів українських вишиванок. У народному розумінні цей архаїчний знак пов'язують із плодючістю людини і землі.

322 Спортивний комплекс має басейн у формі прямокутного паралелепіпеда довжиною 80 м, шириною 15 м та глибиною 3 м. Під час ремонту вирішили замінити внутрішнє покриття басейну плитками розміром 25 см на 25 см. Скільки квадратних метрів плитки потрібно для заміни покриття басейну, якщо 0,5 м над водою — це бордюр, який покривати плиткою не потрібно. Чи вистачить 250 000 гривень бюджетних коштів, виділених на ремонт басейну, якщо вартість 1 м^2 плитки коштує 350 грн, водостійкого клею — 400 грн за мішок (вистачає на 20 м^2 плитки), а майстри беруть 60% вартості матеріалів?

323 Фотографія розміром 40 см на 25 см поміщається в рамку, в якій між фотографією та рамкою по всьому периметру залишається вільний простір шириною 4 см. Обчисліть площу цього вільного простору навколо фотографії.

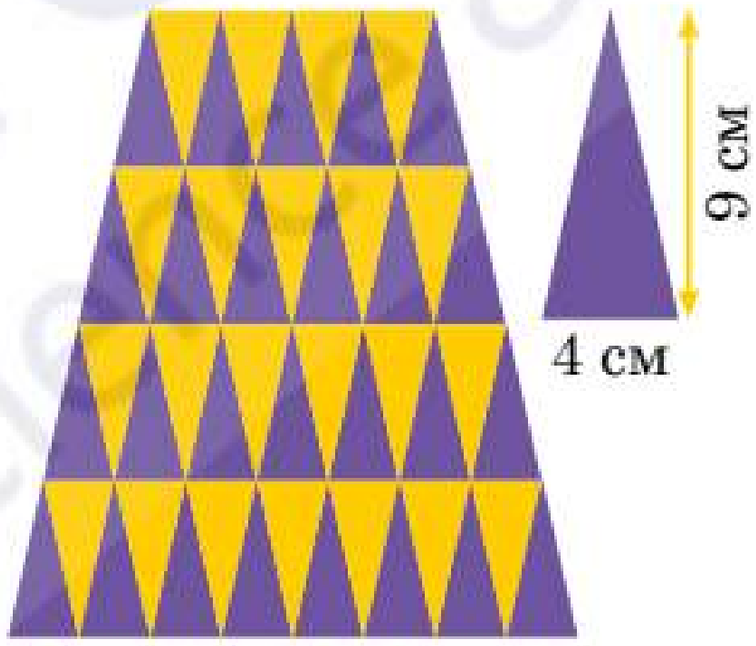
324 Як розрізати прямокутник, зображений на рисунку, на три нерівні фігури однакової площі? Запропонуйте кілька способів.



325 Чи однакову площу мають трикутнику, зображені на рисунку? Чому?

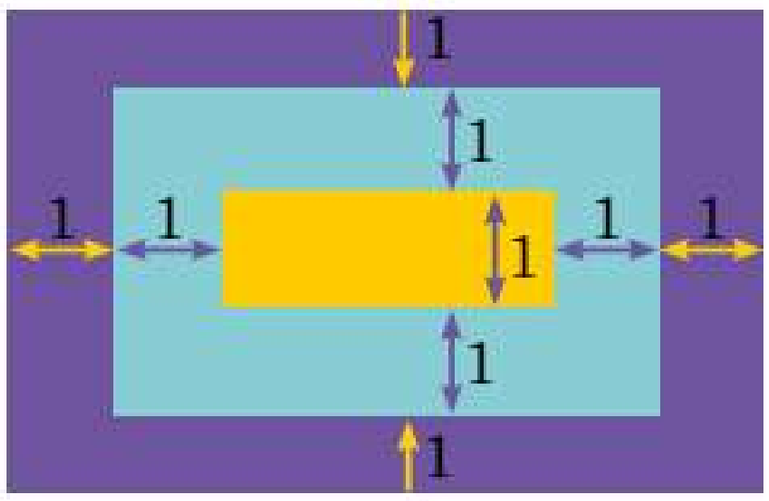
326 Обчисліть, скільки дерев можна посадити на ромбоподібній ділянці довжиною 100 м і висотою 40 м, якщо для росту кожного дерева потрібна площа 8 м^2.

327 Ви вирішили власноруч виготовити килим, зшивши однакові трикутники тканини. Скільки фіолетової тканини (в см^2) знадобиться для створення такого виробу.



328 * На складі будівельної фірми є дерев'яні бруси довжиною 3 м, 4 м та 5 м. Для облаштування чотирикутних пісочниць на дитячих майданчиках вирішили використати бруси всіх довжин, але не більше ніж три бруси однієї довжини на одну пісочницю. Дослідіть, скільки різних чотирикутних пісочниць виготовили для дитячих майданчиків міста та яка загальна довжина дерев'яних брусів.

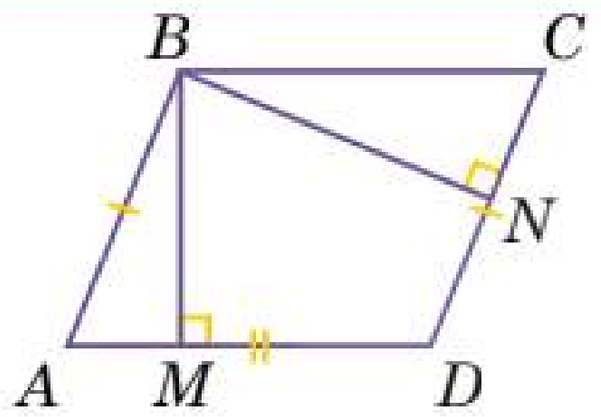
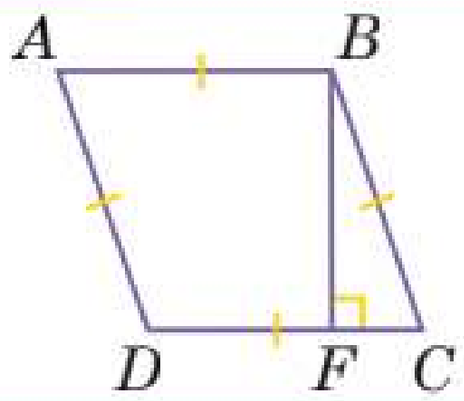
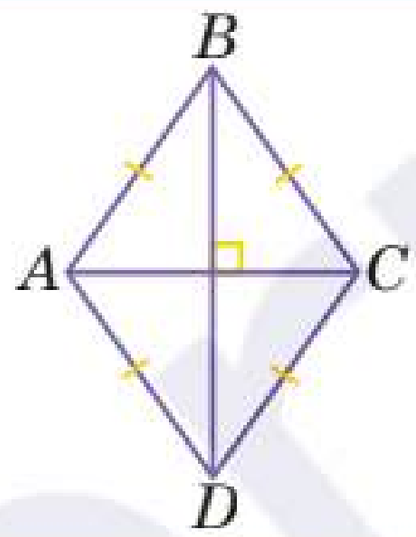
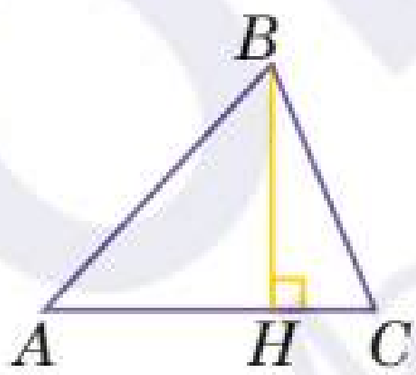
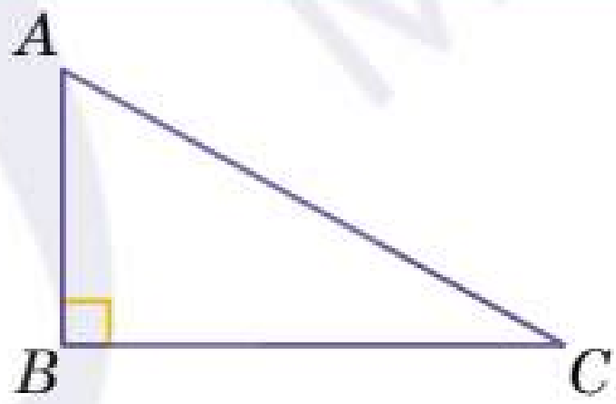
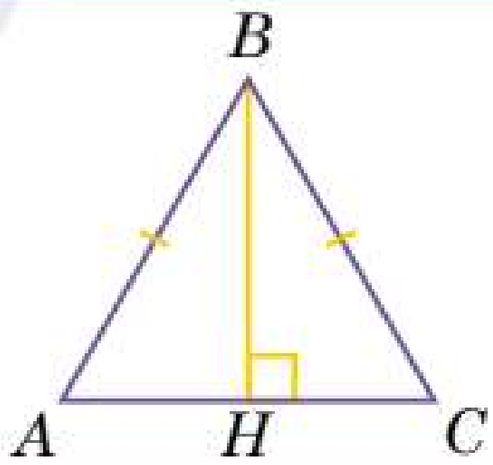
329 EN Real-life problem. A rug is designed with three different colors, as shown. The areas of the three differently colored regions form an arithmetic progression. The inner rectangle is 1 foot wide. Each of the two shaded regions surrounding the inner rectangle is 1 foot wide on all four sides. Find the length of the inner rectangle (in feet).

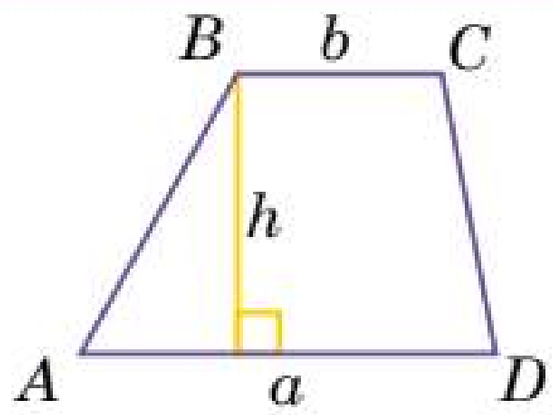


form an arithmetic progression — утворюють арифметичну прогресію
inner rectangle — внутрішній прямокутник
shaded regions — заштрихована (замальована) область

Короткий огляд розділу

Пошук площі фігури — одна з основ шкільної геометрії. Для кожної окремої фігури існує окрема формула.

	**Площа паралелограма** $S_{ABCD} = BM \cdot AD$ $S_{ABCD} = BN \cdot CD$
	**Площа ромба** $S_{ABCD} = BF \cdot DC$
	**Площа ромба (за діагоналями)** $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$
	**Площа довільного трикутника** $S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$
	**Площа прямокутного трикутника** $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$
	**Площа рівностороннього трикутника** $S = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$



Для знаходження площі довільної трапеції користуємося такою формулою:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Площа поверхні прямокутного паралелепіпеда складається з площі двох основ та площі бічної поверхні паралелепіпеда.

Площа поверхні	Прямокутний паралелепіпед	Куб
Бічна	$S_б = P_{осн} \cdot h$	$S_б = 4a^2$
Повна	$S_{п.п.} = 2S_{осн} + S_б$	$S_{п.п.} = 6a^2$

Теорема Піка

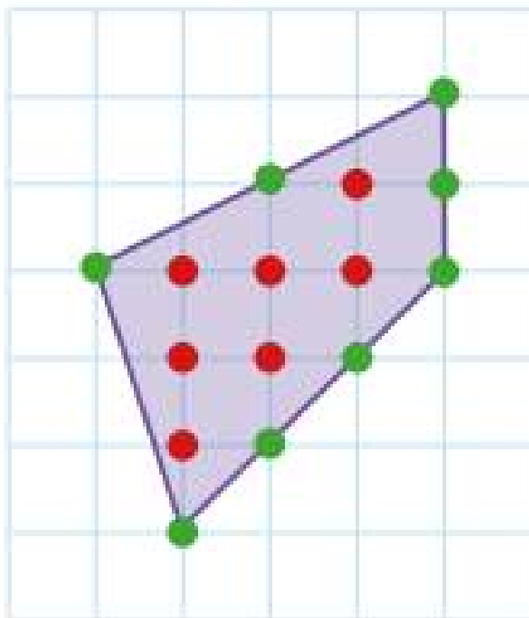
Якщо розглянути довільний многокутник, побудований на аркуші в клітинку, вершини якого знаходяться в точках перетину сітки, то площу цієї геометричної фігури можна обчислити за формулою:

$$S = a + \frac{b}{2} - 1$$

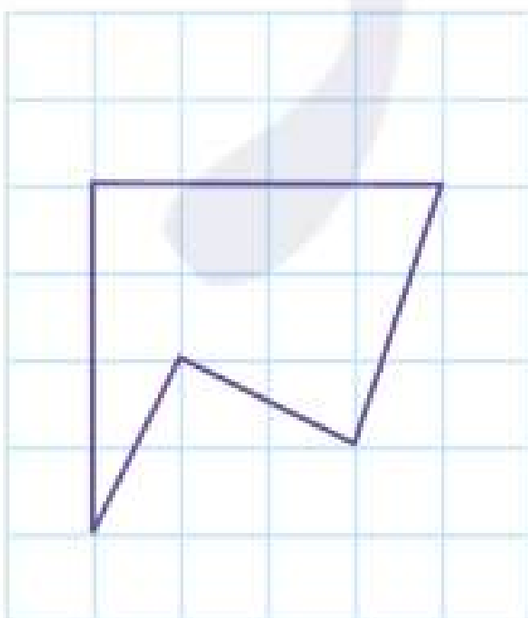
де: a — кількість точок на сітці в середині многокутника;
b — кількість точок на сітці, розміщених по периметру многокутника.

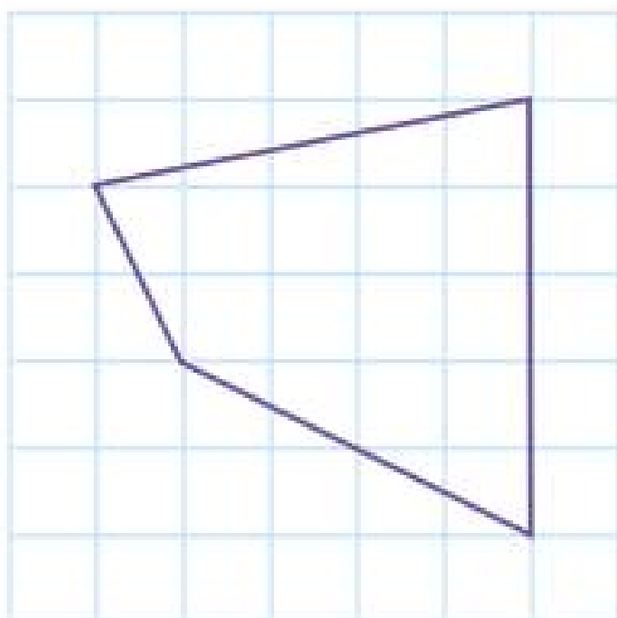
Наприклад, обчислимо площу фігури, зображеної на рисунку:

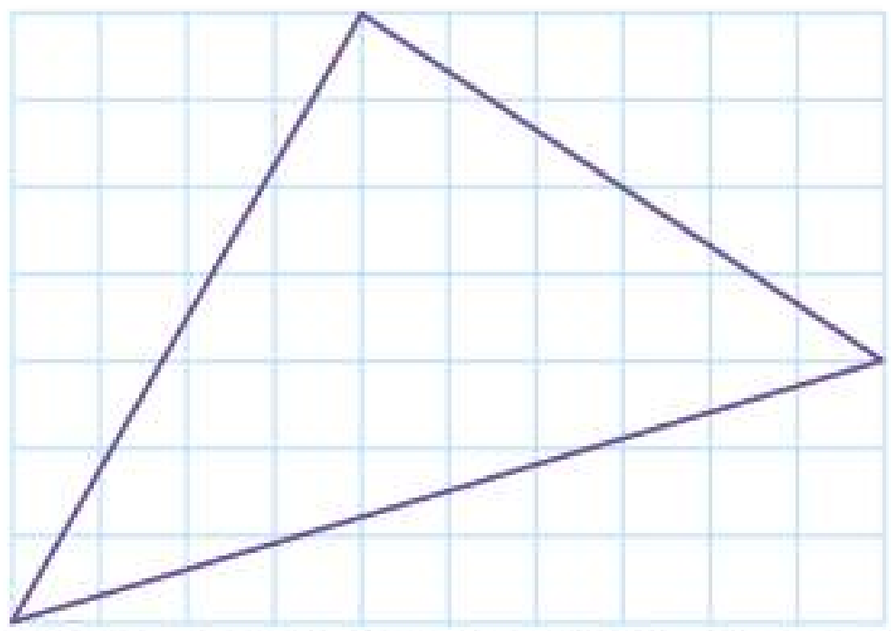
$a = 7$; $b = 8$. Отже, $S = 7 + \frac{8}{2} - 1 = 10$ кв.од.



Спробуйте за допомогою даної формули знайти площі наступних фігур:







Перевірте свої досягнення

1 Оберіть формулу, за якою можна знайти висоту трапеції, знаючи її площу та основи.

а) $h = \frac{a+b}{2S}$; б) $h = \frac{2S}{a+b}$; в) $h = \frac{a+b-S}{2}$; г) $h = S - \frac{a+b}{2}$.

2 Висота трикутника у 3 рази більша за сторону, до якої вона проведена. Оберіть формулу, за якою можна обчислити площу трикутника, якщо сторона трикутника — a.

а) $S = \frac{4a}{2}$; б) $S = \frac{3a}{2}$; в) $S = \frac{3a^2}{2}$; г) $S = 3a^2$.

3 Площа прямокутного трикутника становить 45 см^2. Обчисліть один із його катетів, якщо інший дорівнює 9 см.

а) 10 см; б) 20 см; в) 5 см; г) 6 см.

4 Площа квадрата зі стороною 5 см утричі менша за площу прямокутника, одна із сторін якого дорівнює стороні квадрата. Обчисліть другу сторону прямокутника.

а) 25 см; б) 9 см; в) 15 см; г) 75 см.

5 Обчисліть меншу висоту паралелограма, якщо його сторони дорівнюють 6 см і 8 см, а більша висота — 14 см.

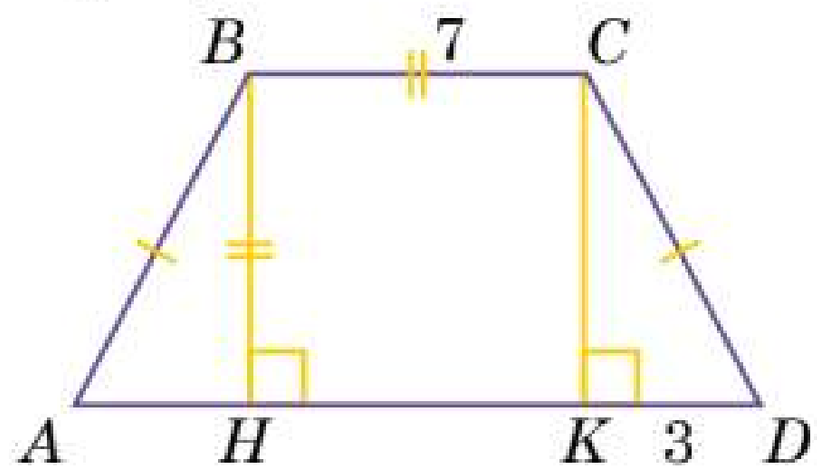
а) 18,6 см; б) 10,5 см; в) 3,4 см; г) 11 см.

6 Обчисліть суму основ трапеції, якщо її площа становить 150 см^2, а висота — 15 см.

а) 10 см; б) 20 см; в) 15 см; г) 30 см.

7 Установіть відповідність між величиною (1–4) та її числовим значенням (А–Г), користуючись рисунком.

1. CK А. 59,5
2. AD Б. 70
3. S_{ABCD} В. 7
4. S_{HBCD} Г. 13



8 Обчисліть площу рівностороннього трикутника, довжина сторони якого дорівнює 6 см.

9 Обчисліть площу ромба, периметр якого становить 60 см, а висота — 12 см.

10 Прямокутник зі сторонами 6 дм і 8 дм розділили на квадрати зі стороною 2 см. Обчисліть кількість утворених квадратів.

Проєктна робота «Виготовлення повітряного змія»

Дельта-змій — різновид каркасних повітряних зміїв дельтоподібної форми.

Змій має конструкцію, наближену до геометричної фігури дельтоїда. Каркас складається з двох ребер — центрального поздовжнього, яке утримує центральні передню і задню точки повітряного змія, та поперечного, яке утримує бокові ребра.

Матеріали, необхідні для виконання проєкту:

1) Дві бамбукові, дерев'яні або пластмасові палички 20 см та 30 см і діаметром 2–3 мм;

2) Металева чи картонна смужка;

3) Тонкий папір, поліетиленова плівка (наприклад, сміттєвий пакет) або тонка легка синтетична тканину (наприклад, від старої парасольки).

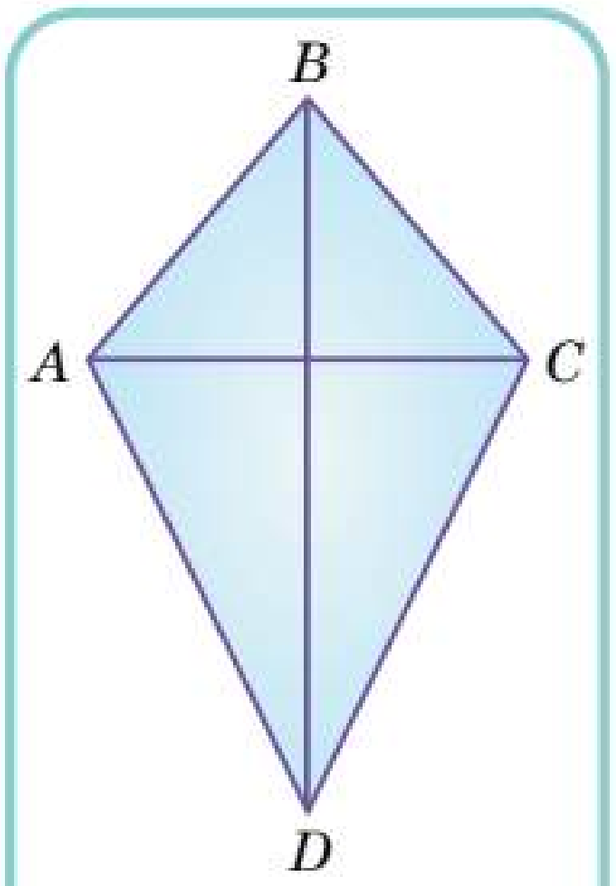
4) Кольорова нитка.

5) Основа для намотування нитки, яку зручно тримати в руці (наприклад, прямокутний шматок картону чи невелика дощечка).

6) Ножиці, лінійка, скотч, клей.

Виготовлення повітряного змія

Крок 1 Пригадайте основні властивості дельтоїда. За даним кресленням обчисліть площу дельтоїда, щоб розрахувати кількість необхідного матеріалу для обтягування повітряного змія. Врахуйте, що на підгортання, припуски та склеювання необхідно додатково додати матеріалу близько 10% площі.



$AC = 20$ см
$AD = 30$ см

Крок 2 Підготуйте всі необхідні матеріали та робоче місце.

Крок 3 Визначте середину меншої палички за допомогою лінійки та поставте позначку. Більшу паличку поділіть у відношенні 1 : 2 і також залиште позначку.

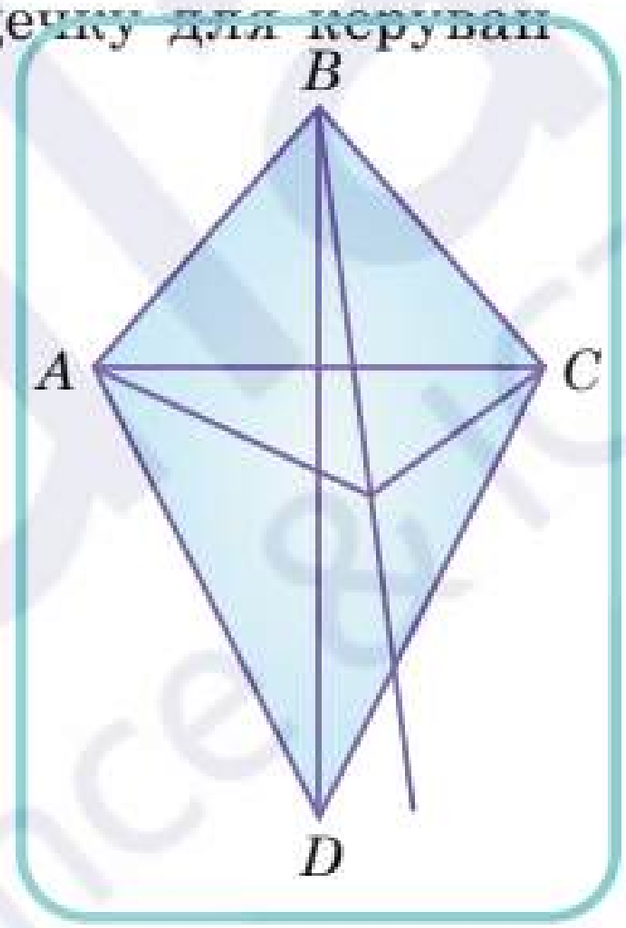
Крок 4 Накладіть палички одна на одну під прямим кутом в місці позначок. Під меншу з двох прямих, що перетинаються, в місці перетину підкладіть металеву чи картонну смужку. З'єднайте таким чином дві палички за допомогою нитки. Для міцності нитки промажте клеєм та залиште підсохнути.

Крок 5 На кінцях паличок зробіть невеликі прорізи. Натягніть нитку по периметру дельтоїда, фіксуючи її на кінцях паличок за допомогою прорізів. Зверху зафіксуйте клеєм або скотчем, аби нитка не вислизнула з прорізу.

Крок 6 Покладіть каркас на матеріал для обтягування змія. Обведіть каркас по периметру, додаючи близько 1,5 см з кожного боку на підгинання. Виріжте заготовку по накресленому контуру.

Крок 7 Поліетиленовий пакет, папір, або тканину ретельно закріпіть на каркасі за допомогою скотчу або супер-клею, загинаючи при цьому краї. Основа дельта-змія готова.

Крок 8 Наступним етапом виготовимо вуздечку для керування цим літальним апаратом. Для цього на краях короткої палиці в точках A і C (див. креслення) прив'язуємо по два відрізка нитки довжиною, рівній стороні AB — це будуть бічні частини вуздечки. Кінець довгої нитки прив'яжіть в точці B. Інші кінці бічних частин вуздечки закріпіть на центральній нитці так, щоб утворилися два рівносторонні трикутники. Не забувайте додавати припуск нитки на прив'язування. Всі вузли для надійності промастіть клеєм.



Крок 9 Довгу нитку намотайте на основу, яку зручно тримати в руці.

Крок 10 Виготовимо хвіст повітряного змія. Він потрібен не стільки для краси, скільки для правильного балансування. Саме регулюючи довжину і вагу хвоста (прив'язуючи або відв'язуючи від нього шматочки) можна поліпшити польотні якості повітряного змія. Візьміть смужку матеріалу, з якого виготовлений ваш змій, довжиною 1,5–2 м і шириною 2 см та прикріпіть її в точці D за допомогою клею або скотчу.

Крок 11 За бажанням, прикрасьте чи розмалюйте ваш літальний апарат.

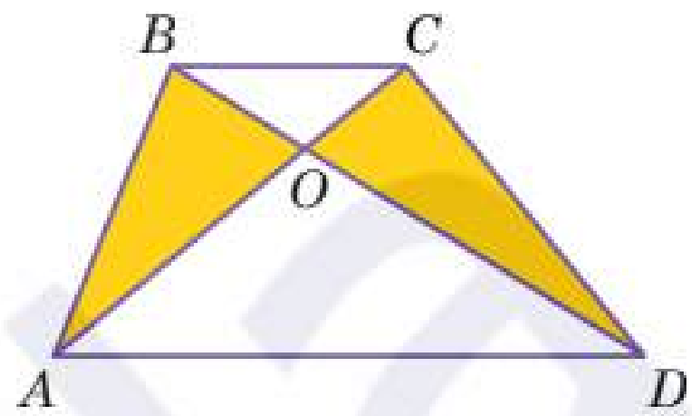
Запуск «дельта-змія»

Ви виготовили іграшку, тепер прийшла пора запускати змія. Ідеальним місцем є відкритий простір без дерев, будівель, проводів або інших перешкод. Якщо є дерева або будівлі, то переконайтеся, що ви перебуваєте досить далеко від них, щоб на повітряний змій не впливала турбулентність, створювана вітром, при зіткненні його з перешкодами. Щодо вітру зазначимо, що для польоту нашого змія швидкість вітру повинна бути приблизно 3–6 м/с. Людина, яка буде запускати змія, повинна стояти так, щоб вітер дув їй в спину.

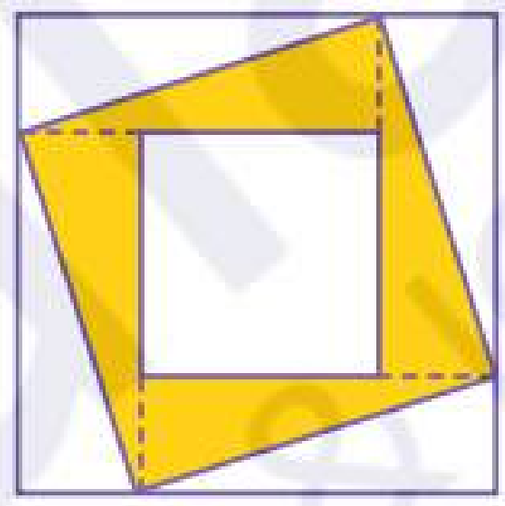
Додаткові завдання до розділу

330 Площа квадрата (у квадратних метрах) і його периметр (у метрах) мають однакові значення, тобто виражені одним і тим самим числом. Визначте площу та периметр даного квадрата.

331 * Діагоналі трапеції $ABCD$ ($AB \parallel CD$) перетинаються в точці O. Обчисліть площу трапеції, якщо площі трикутників, основою яких є бічні сторони трапеції, дорівнюють S_1 та S_2 відповідно.



332 * Площа найбільшого квадрата на рисунку дорівнює 16 кв.од., а площа найменшого квадрата — 4 кв.од. Знайдіть площу кольорової частини квадрата.



333 Маємо квадратний басейн, на кутах якого ростуть чотири пальми. Яким чином можна збільшити площу басейна вдвічі, не зачіпаючи дерев? Чи можна залишити басейн за нових умов квадратним?

334 * В квадраті зі стороною 1 довільно обирають 101 точку (не обов'язково в середині квадрату, а також частина з них може бути на сторонах). Причому жодна з трьох точок не лежать на одній прямій. Доведіть, що існує трикутник з вершинами в цих точках, площа якого не більше $\frac{1}{100}$.

335 EN Real-life problem. The library recently added a new rectangular area that is 20 yards long and 13 yards wide. The librarians plan to install bookshelves along both long walls and one short wall of the area. Each bookshelf is 6 feet wide. Draw a diagram to represent the dimensions of the area and the placement of the bookshelves. Determine how many bookshelves the library can install.

Measure long — міра довжини; **measure wide** — міра ширини
1 yards (ярд) = 3 feet (фут)
along both of the long walls — вздовж довгих стін
to represent the dimensions of the area — для відображення площі

3

Вписані та описані геометричні фігури

Ми вже знаємо, що є різні види кутів, як-от відповідні, суміжні, прямі тощо. Ми стикаємося з кутами у повсякденному житті в багатьох сферах: в інженерії, мистецтві й навіть у спорті. Знання про властивості кутів, вписаних у коло або півколо, можна застосовувати до будь-яких предметів, які мають круглу форму.

Наприклад, ми можемо використовувати знання про ці властивості, щоб описати кут між стрілками годинника, які показують певний час доби, або щоб описати кути, які створює акробат під час руху.

У цьому розділі ми:

- пригадаємо основні знання про кути та коло;
- навчимося обчислювати градусну міру дуги;
- класифікуватимемо вписані та описані чотирикутники;
- застосовуватимемо ознаки вписаного та описаного чотирикутника;
- застосовуватимемо набуті знання до розв'язування задач практичного змісту.

Ключові слова

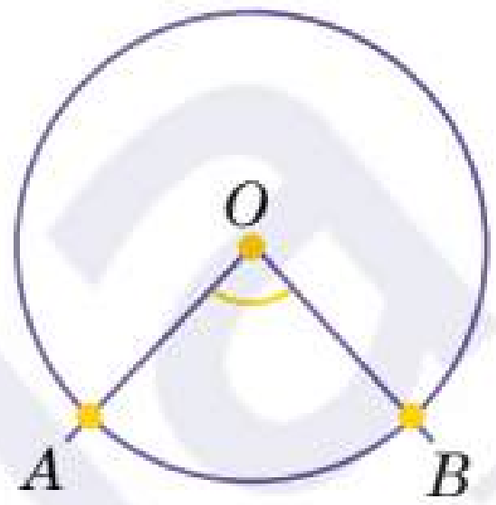
- Дуга кола (*arc of a circle*)
- Вписаний кут (*inscribed angle*)
- Центральний кут (*central angle*)
- Градусна міра (*degree measure*)
- Вписаний (*inscribed*)
- Описаний (*described*)

3 Вписані та описані геометричні фігури

3.1. Центральні та вписані кути

Дуга кола — частина кола, яка сполучає дві точки на колі.

Центральний кут — це кут, вершина якого є центром кола, а сторони проходять через пару точок на колі, тим самим спираючись на дугу кола між цими двома точками.



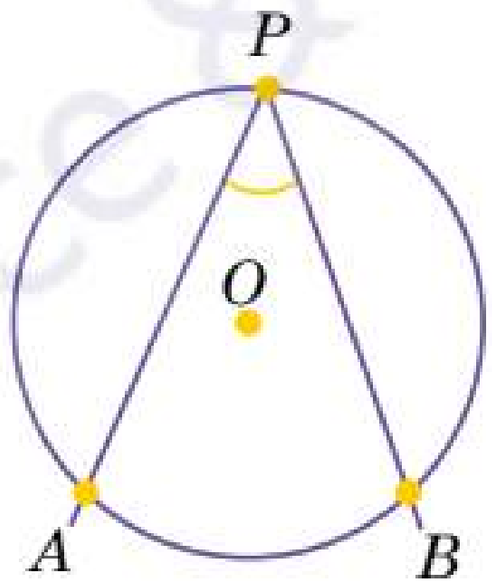
У колі з центром у точці O, центральним кутом є $\angle AOB$, який спирається на дугу AB.

Центральний кут вимірюється дугою, на яку він спирається.

Говорять: дуга, що відповідає центральному куту; центральний кут, що спирається на дугу.

$$\angle AOB = \smile AB$$

Вписаний кут — це кут, вершина якого розташована на колі, а сторони кута — січні, тобто перетинають це коло.



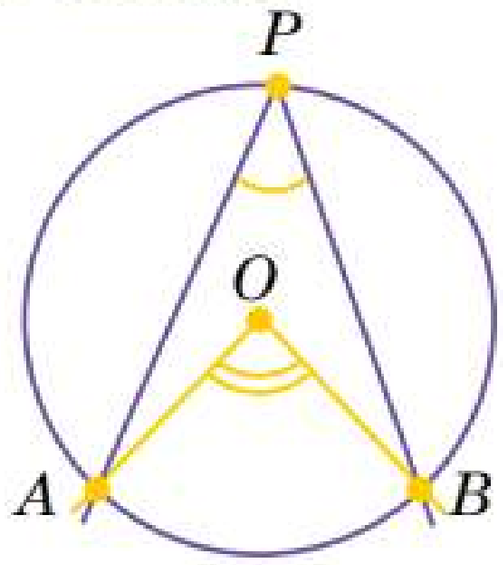
$\angle APB$ — вписаний кут, що спирається на $\smile AB$.

Говорять: вписаний кут , що спирається на дугу.

$$\angle APB = \frac{1}{2} \smile AB$$

Щоб визначити співвідношення між центральним та вписаним кутом, виконайте такі дії:

1. Побудуйте коло з центром O.
2. Позначте довільно на колі точки A, P і B.
3. З'єднайте точки A, P, O та B, щоб побудувати відрізки OA, OB, AP та BP.
4. Виміряйте $\angle AOB$ та $\angle APB$.

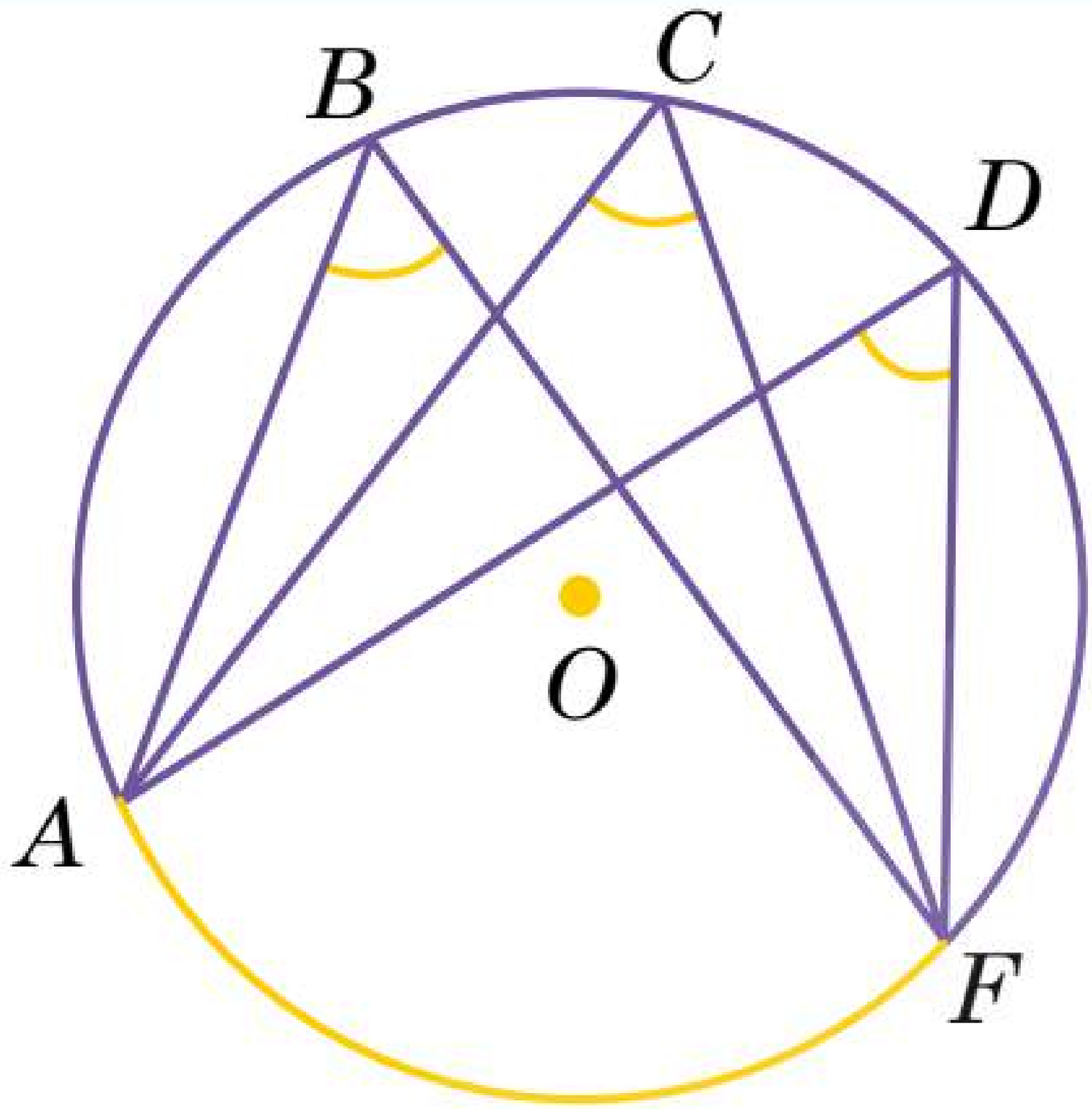


Доведення теореми про вписаний кут

Центральний кут удвічі більший за вписаний, якщо вони спираються на одну й ту саму дугу.

Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

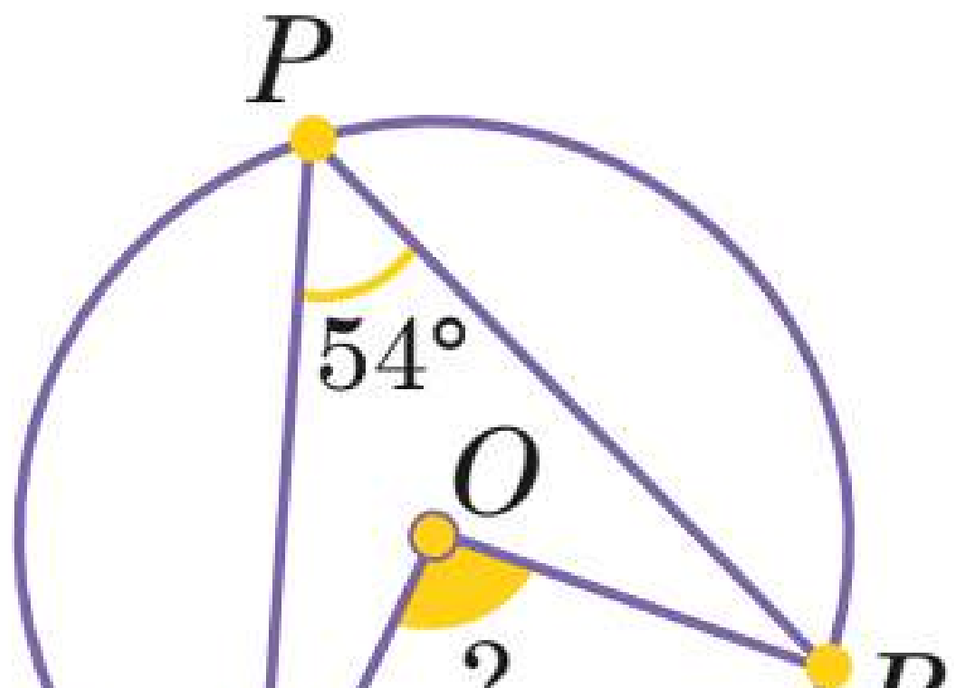
Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, — рівні.



Приклад

1 O — центр кола. Обчисліть вел

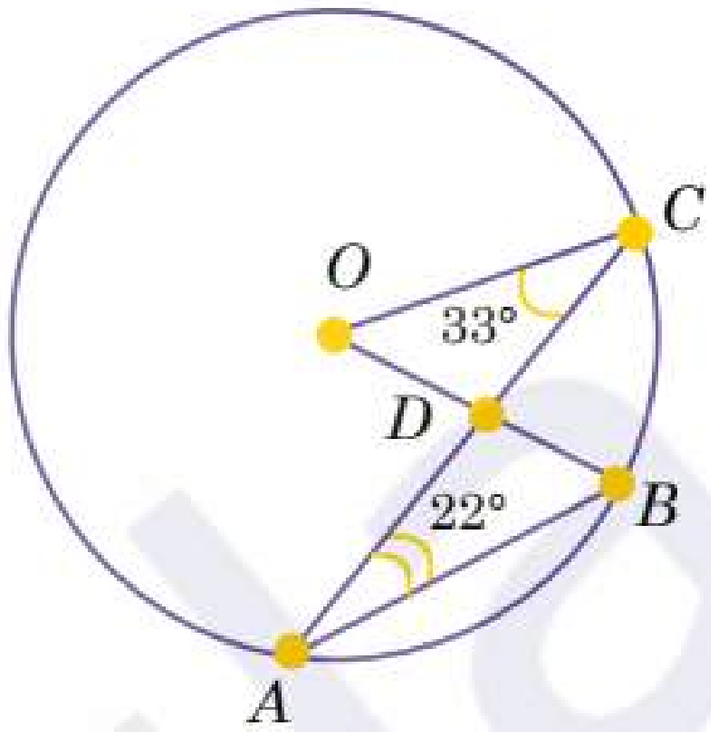
а)



Приклад

3 O — центр кола. $\angle CAB = 22°$, $\angle OCA = 33°$. Обчисліть величину $\angle BDC$.

Розв'язання



$\angle BOC = 2\angle BAC = 2 \cdot 22° = 44°$ (за власт. центрального та вписаного кута).

Оскільки, зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох внутрішніх кутів, не суміжних із ним, то:

$\angle BDC = \angle BOC + \angle OCA = 44° + 33° = 77°$.

Відповідь. 77°.

Попрактикуйтеся

336 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

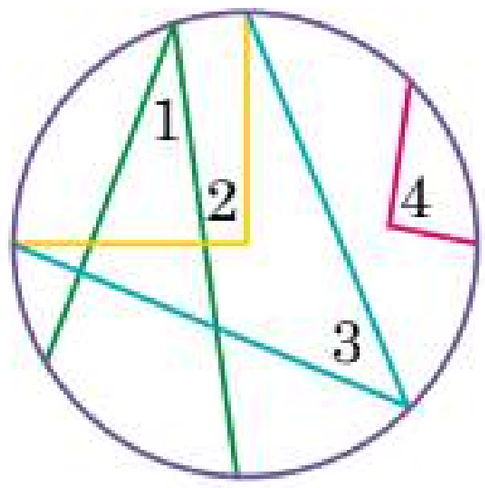
а) Центральний кут дорівнює половині вписаного кута, що спирається на одну й ту ж саму дугу.

б) Центральний кут четвертої частини кола дорівнює 90°.

в) Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, дорівнюють половині її градусної міри.

г) Вписаний кут, що спирається на дугу, яка є половиною кола, дорівнює 180°.

337 Користуючись рисунком, назвіть вписані та центральні кути. Чи є якась залежність між певними кутами? Якщо так, то назвіть її.



338 Визначте градусну міру вписаного кута, якщо:

а) центральний кут, що спирається на ту ж саму дугу, дорівнює 78°;

б) дуга, на яку він спирається, дорівнює 115°.

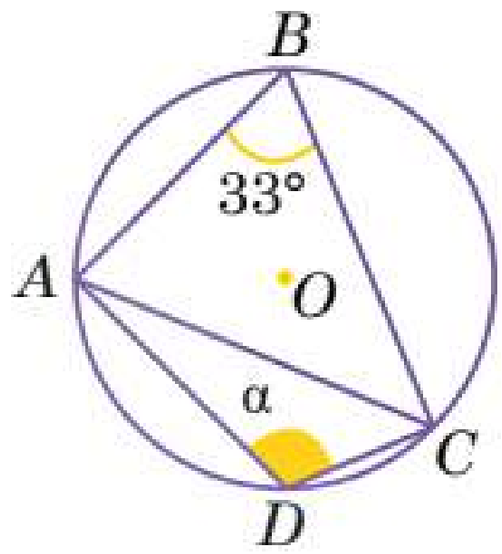
339 Визначте градусну міру центрального кута, якщо:

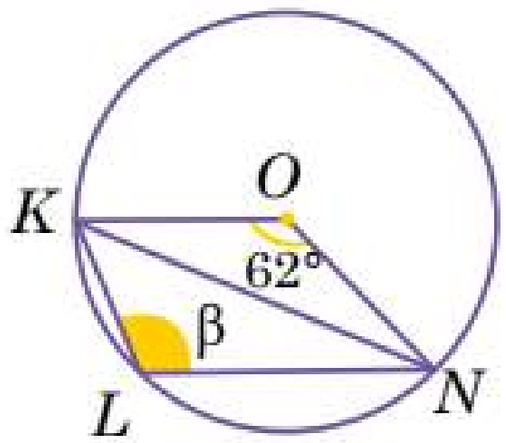
а) вписаний кут, що спирається на одну й ту ж саму дугу, дорівнює 54°;

б) дуга, на яку він спирається, дорівнює 109°.

340 Центральний кут AOB на 30° більше вписаного кута, що спирається на дугу AB. Знайдіть ці кути.

341 Знайдіть кут α за даними на рисунку.



342 

Знайдіть кут β за даними на рисунку.

343 У колі проведено дві хорди AB та AD. Знайдіть градусні міри $\angle BAD$. Відомо, що дуги AB та AD мають градусні міри 25° та 47° відповідно.

344 Знайдіть кут між дотичними до кола, якщо кут між двома радіусами, що проведені в точки дотику, дорівнює 105°.

345 Хорда поділила дуги кола у відношенні 3 : 5. Знайдіть градусні міри вписаних кутів, що спираються на ці дуги.

346 Трикутник, вписаний в коло, має градусні міри кутів 20°, 60°, 100°. Знайдіть градусні міри дуг, на які вершини трикутника розбили коло.

347 Дуги, на які вершини вписаного трикутника поділили коло, відносяться як 2 : 3 : 4. Знайдіть градусні міри кутів трикутника.

348 Основа рівнобедреного трикутника є діаметром півкола, яке сторони трикутника поділили на три частини. Знайдіть градусні міри утворених дуг, якщо кут при основі трикутника дорівнює 42°.

349 Півколо спирається на основу рівнобедреного трикутника. Знайдіть градусні міри кутів трикутника, якщо частини дуги, на яку поділили сторони трикутника півколо, відносяться як 2 : 6 : 2.

350 Чи можна за допомогою одного косинця знайти центр круга? Виріжте з паперу круг довільного радіуса та покажіть побудову.

351 За допомогою програми GeoGebra накресліть дугу градусною мірою 30° для кіл радіусом 5 см, 10 см та 15 см. Проаналізуйте, як змінюється довжина такої дуги.

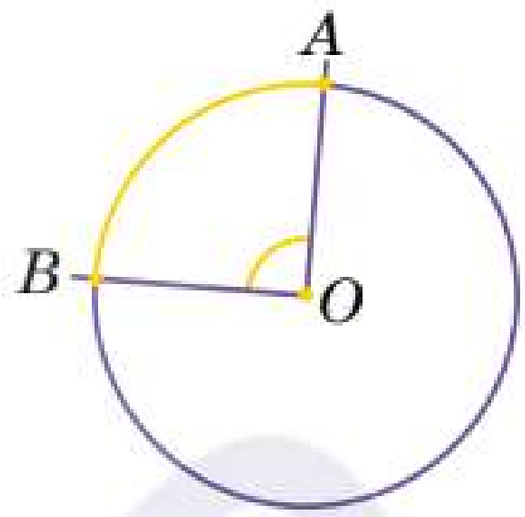
352 * Доведіть, що градусні міри дуг кола, що лежать між двома паральними хордами, рівні.

353 Відомо, що на котушку, діаметр якої дорівнює 12 см, намотано 3,8 м дроту. Обчисліть, скільки зроблено повних витків?

3.2. Градусна міра дуги кола

Дуга кола — частина кола, яка сполучає дві точки на колі.

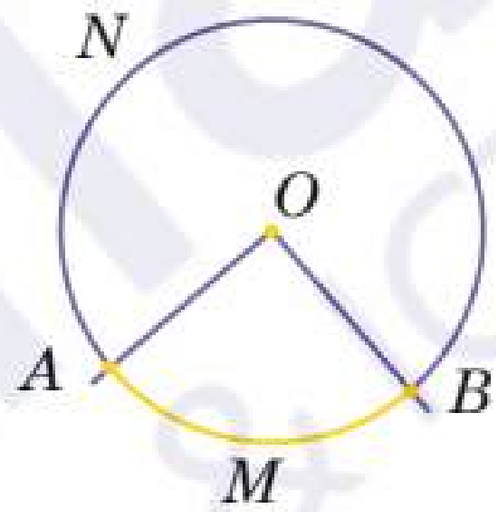
Ми можемо побудувати коло за допомогою циркуля. Якщо ми накреслимо два радіуси, то побачимо, що вони утворюють два кути з вершинами в центрі кола. Кожен кут відповідає певній дузі кола, тому ми можемо сказати, що центральний кут спирається на певну дугу.



Наприклад, $\angle AOB$ спирається на дугу AB.

Градусна міра дуги — кут між двома радіусами, які обмежують цю дугу.

Дугу кола позначають символом ◡, який записують перед назвою дуги або над нею. Щоб уточнити, про яку саме з двох дуг, на які центральний кут поділив коло, йдеться, на кожній з них позначають довільну точку, відмінну від кінців дуги:



$$\smile AMB \text{ та } \smile ANB$$

Людина охоплює своїм зором трохи більше ніж 180°

Птахи ж охоплюють своїм зором близько 340°

Дугу кола вимірюють у градусах. **Градусна міра дуги** — кут між двома радіусами, які обмежують цю дугу.

Точки A та B ділять коло на дві дуги. Сума градусних мір двох дуг зі спільними кінцями дорівнює 360°:

$$\smile AMB + \smile ANB = 360°$$

Якщо відрізок, що з'єднує кінці дуги, є діаметром кола, то дугу називають **півколом**. Градусна міра півкола дорівнює 180°.

Градусна міра дуги кола не залежить від радіуса кола.

Попрактикуйтеся

354 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Градусна міра дуги кола, яка є третиною від довжини цього кола, становить 120°.

б) Градусна міра дуги кола дорівнює половині центрального кута, на яку він спирається.

в) Довжина дуги кола залежить від діаметра цього кола.

3

3.2. Градусна м

Ми можемо
за допомогою цир
креслимо два рад
що вони утворюю
шинами в центр
відповідає певні
ми можемо сказа
ний кут спираєть
Наприклад, 4
на дугу AB.

Дуга кола — частина кола, яка сполучає дві точки на колі.

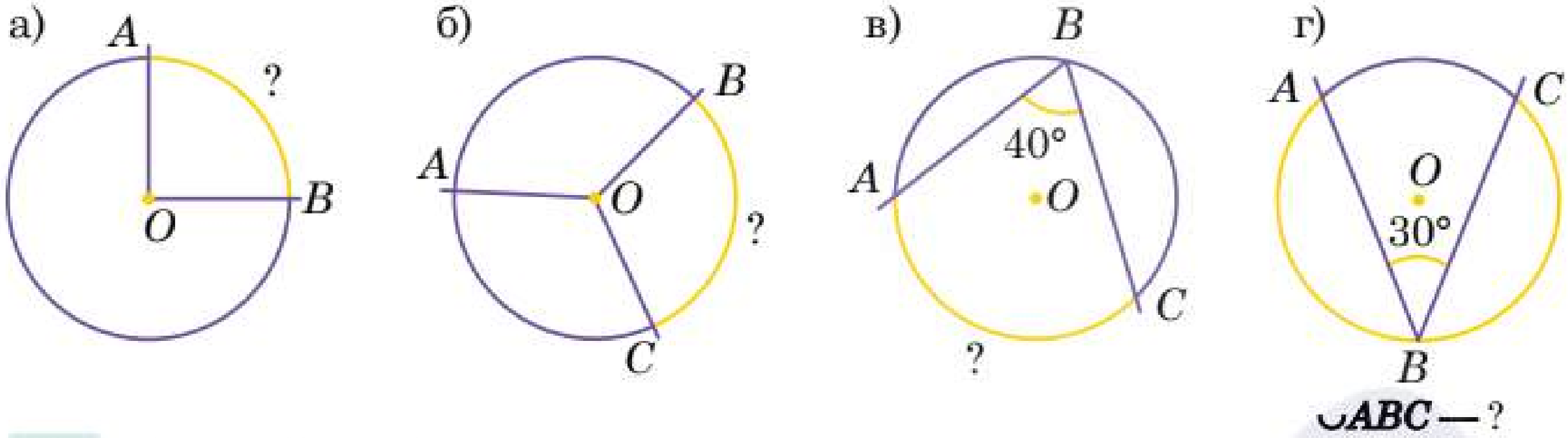
Дугу кола п
волом $\smile$, який
назвою дуги аб
уточнити, про як
на які централь
коло, йдеться, на
значають довільн
від кінців дуги:

Градусна міра дуги — кут між двома радіусами, які обмежують цю дугу.

$\smile AMB$ т

Дугу кола, вим

355 За даними на рисунках знайдіть градусну міру дуги кола.



356 Заповніть таблицю.

C, см Довжина кола	96		102	
α, ° Центральний кут	45	90	60	120
l, см Довжина дуги		35		12

357 Заповніть таблицю.

r, см	12		5	
α, °	90	120	60	45
l, см		35		11

358 Довжина кола становить 36π см. Знайдіть, яку градусну міру має дуга довжиною 6π см.

359 Довжина дуги градусною мірою 30° дорівнює 10π см. Обчисліть довжину кола.

360 Градусна міра дуги кола становить 37°. Обчисліть градусну міру вписаного кута, який спирається на дану дугу.

361 Градусна міра вписаного кута становить 48°. Обчисліть градусну міру більшої дуги кола.

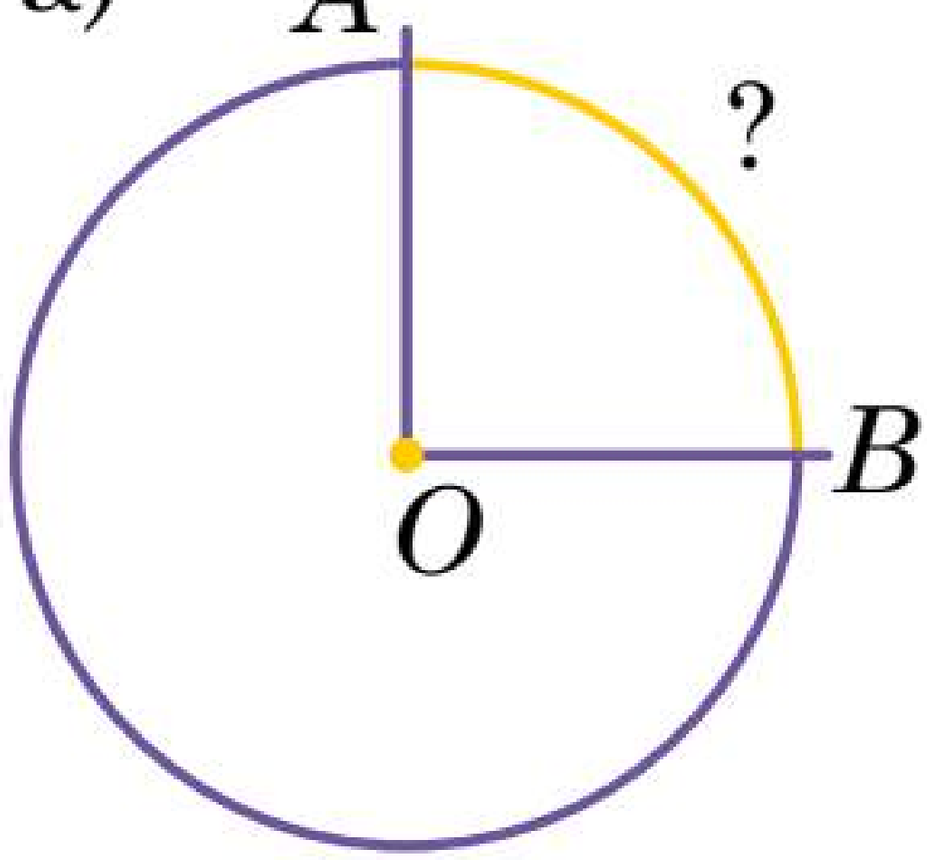
362 Годинна та хвилинна стрілки вказують на 3 та 8 на циферблаті годинника. Обчисліть градусну міру дуги між стрілками.

363 Піцу розрізали на 8 рівних частин. Обчисліть градусну міру дуги між двома сусідніми розрізами.

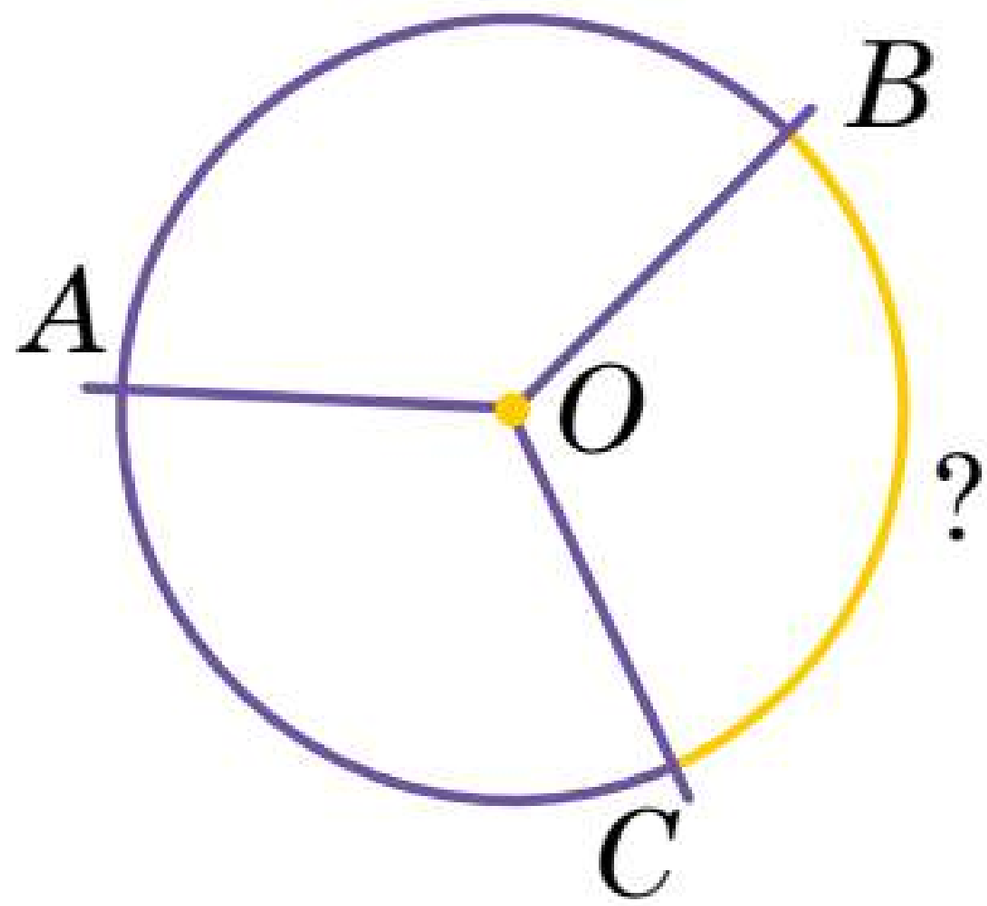
364* На півколі AB розміщені точки C та D таким чином, що $\smile AC = 37°$, $\smile BD = 23°$. Знайдіть хорду CD, якщо радіус кола дорівнює 15 см.

355 За даними на рисунках знайдіт

а)



б)



356 Заповніть таблицю.

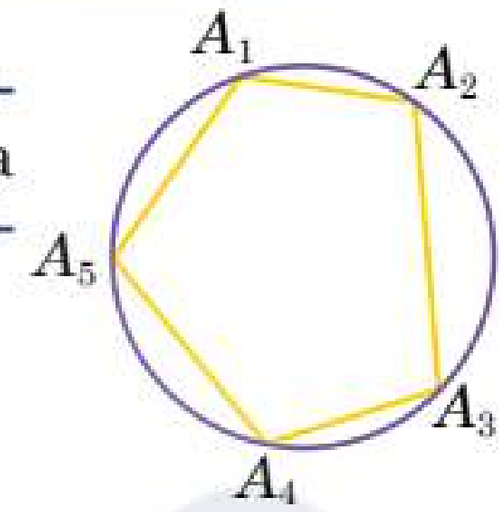
***C*, см** **Довжина кола**	96
***α*, °** **Центральний кут**	45
***l*, см** **Довжина дуги**	

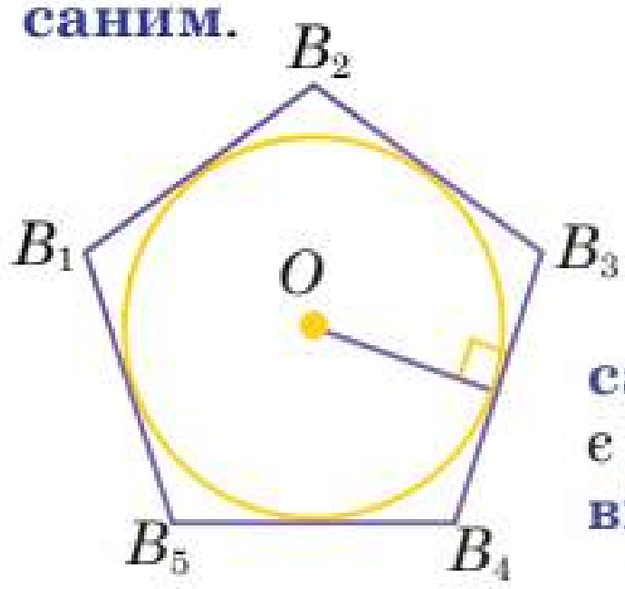
357 Заповніть таблицю.

***r*, см**	12	

3.3. Вписані та описані многокутники

Многокутник називають **вписаним**, якщо кожна його вершина лежить на колі. Коло тоді буде **описаним**.

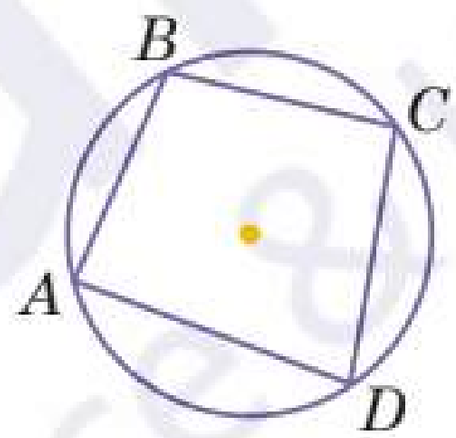




Многокутник називають **описаним**, якщо кожна його сторона є дотичною до кола. Коло тоді буде **вписаним**.

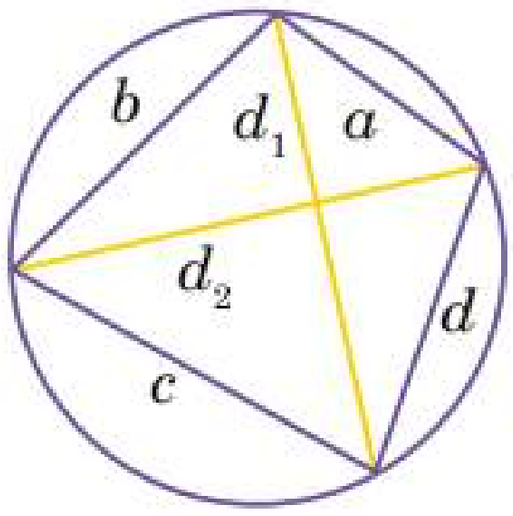
Вписаними та описаними можуть бути лише опуклі чотирикутники, тобто ті, у яких усі внутрішні кути менші за 180°.

Центр вписаного у многокутник кола — перетин бісектрис кутів многокутника. А центром описаного навколо многокутника кола є перетин серединних перпендикулярів сторін.

Якщо чотирикутник є вписаним у коло, то сума його протилежних кутів дорівнює 180°	
Наприклад, прямокутник, рівнобічна трапеція, квадрат	$\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$

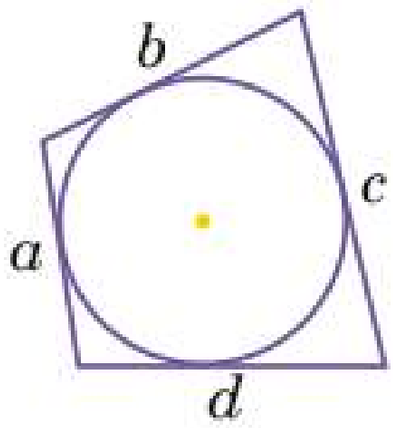
Ознака вписаного чотирикутника: якщо сума протилежних кутів чотирикутника дорівнює 180°, то навколо нього можна описати коло.

Корисна властивість вписаного чотирикутника: добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін.



$$d_1 \cdot d_2 = a \cdot c + b \cdot d$$

Доведення властивостей вписаного та описаного чотирикутника

В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні між собою	
Наприклад, квадрат, ромб	$a + c = b + d$

Ознака описаного чотирикутника: якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в нього можна вписати коло.

Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло. Якщо трапеція вписана в коло, то вона рівнобічна.

Приклад

1 Трапецію вписано в коло. Відомо, що один із кутів трапеції на 57° менший за інший. Знайдіть кути трапеції.

Розв'язання

Якщо трапецію вписано в коло, то сума протилежних її кутів дорівнює 180°.

Така трапеція буде рівнобічною (за властивістю трапеції, вписаної у коло), тому достатньо знайти лише два кути.

Нехай один із кутів буде x, а інший — $(x + 57)°$. Складемо рівняння:

$x + x + 57° = 180°$.

$2x + 57° = 180°$;

$2x = 180° - 57°$;

$2x = 123°$;

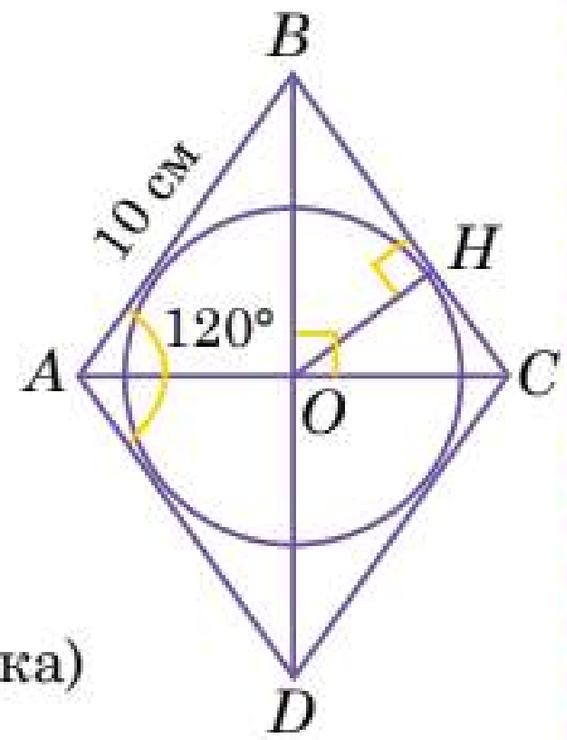
$x = 61{,}5°$.

Звідси перший кут дорівнює 61,5°, а тоді інший кут відповідно — 118,5°.

Відповідь. 61,5°; 118,5°.

Приклад

2 У ромб вписано коло, яке точкою дотику поділило сторону на дві частини. Знайдіть кожну з них, якщо сторона ромба дорівнює 10 см. Тупий кут ромба дорівнює 120°.



Розв'язання

Нехай $ABCD$ — ромб. O — центр вписаного кола.

$\angle BAD = \angle BCD = 120°$ (за умовою)

Звідси $\angle BCO = \angle OCD = \frac{1}{2}\angle BCD = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60°$

$AB = BC = 10$ см (за умовою)

$OH \perp BC$ (за властивістю описаного чотирикутника)

Розглянемо ΔBOC — прямокутний,

$\angle BOC = 90°$ (за власт. діагоналей ромба)

$\angle BCO = 60°$

Звідси, $\angle OBC = 90° - \angle BCO = 30°$ (за власт. гострих кутів прямо-кутного трикутника).

$BC = 10$ см (за умовою)

Отже, $OC = \frac{1}{2}BC = 5$ см (за властивістю катета, що лежить проти кута 30°).

Розглянемо ΔOHC — прямокутний, $\angle OHC = 90°$ (за властивістю перпендикуляра).

$\angle HCO = \angle BCO = 60°$ Звідси $\angle HOC = 90° - \angle HCO = 30°$ (за власт. гострих кутів прямокутного трикутника).

$OC = 5$ см (за умовою)

Отже, $HC = \frac{1}{2}OC = 2{,}5$ см (за властивістю катета, що лежить проти кута 30°).

$BC = BH + HC$ (за власт. вимірювання відрізків)

Звідси $BH = BC - HC = 10 - 2{,}5 = 7{,}5$ см.

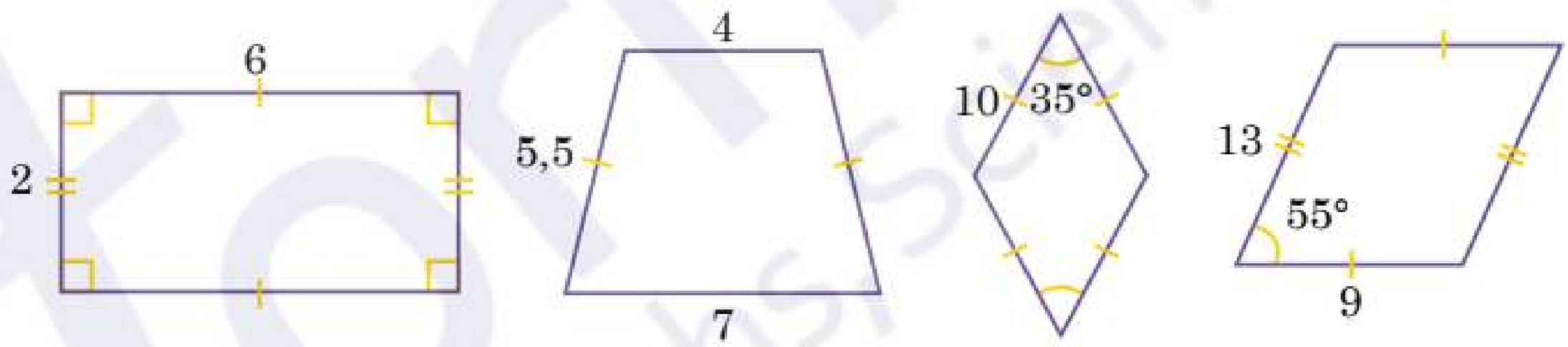
Відповідь. 2,5 см і 7,5 см.

Попрактикуйтеся

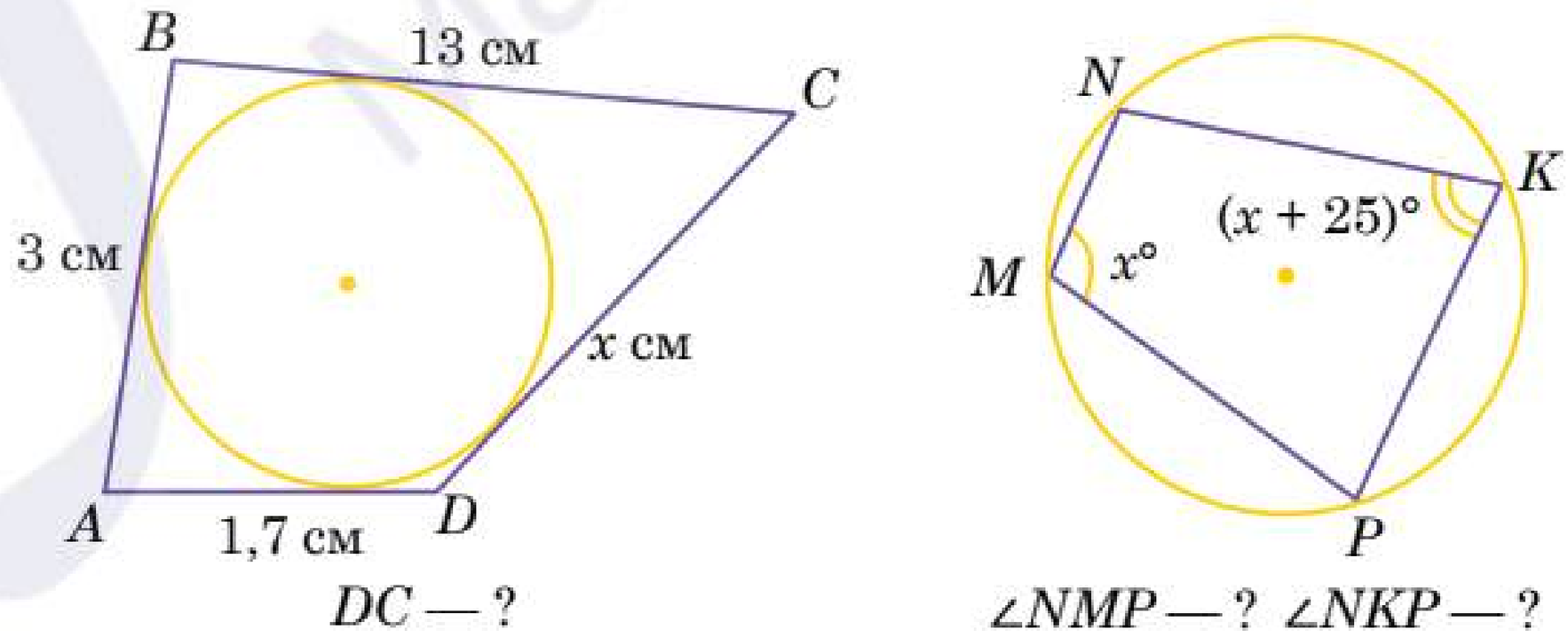
365 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Навколо паралелограма можна описати коло.
б) Квадрат може бути вписаним та описаним.
в) Ромб може бути лише описаним.
г) Тільки прямокутна трапеція може бути вписаною.

366 За допомогою даних на рисунку перевірте, чи даний чотирикутник є вписаним чи описаним або не є ні тим, ні тим.



367 Знайдіть невідомі сторони та кути за даними на рисунках.



368 Чи можна описати чотирикутник, якщо:

а) його сторони становлять 10 см, 15 см, 20 см, 15 см;
б) його сторони відносяться як 2 : 1 : 3 : 4?

369 Чи можна описати чотирикутник, якщо:

а) його сторони становлять 9 см, 17 см, 23 см, 13 см;
б) його сторони відносяться як 3 : 2 : 8 : 9?

370 Чи можна вписати чотирикутник, якщо:

а) його кути становлять 15°, 48°, 165°, 132°;
б) його кути відносяться як 3 : 4 : 5 : 3?

371 Чи можна вписати чотирикутник у коло, якщо:

а) його кути становлять 54°, 92°, 126°, 88°;
б) його кути відносяться як 4 : 2 : 4 : 6?

372 У рівнобічну трапецію вписано коло. Знайдіть периметр трапеції з бічною стороною 6 см.

373 Доведіть, що навколо будь-якої рівнобічної трапеції можна описати коло. І навпаки, якщо навколо трапеції можна описати коло, то ця трапеція — рівнобічна.

374 Трапецію вписано в коло. Відомо, що один із кутів на 43° менший за інший. Знайдіть кути трапеції.

375 Основи трапеції відносяться як 2 : 5, а бічна сторона дорівнює 14 см. Знайдіть основи трапеції, якщо в неї можна вписати коло.

376 У ромб вписано коло, яке точкою дотику поділило сторону на дві частини, знайдіть кожну з них, якщо сторона ромба дорівнює 9 см, а тупий кут ромба дорівнює 120°.

377 * Описаний ромб має довжину сторони 12 см та гострий кут 60°. Знайдіть, у якому відношенні ділить коло точкою дотику сторону ромба.

378 З картону виріжте квадрат. Поясніть, як з нього вирізати круг найбільшого радіусу.

379 ⚡ У шкільному дворі планують побудувати декоративний ставок у формі чотирикутника. Навколо ставка хочуть прокласти кругову доріжку, щоб учні й учениці могли прогулюватися навколо. Однак, щоб доріжка була симетричною і гармонійною, потрібно переконатися, що навколо ставка можна описати коло.
Чи можна побудувати навколо ставка кругову доріжку, враховуючи, що довжини сторін ставка становлять 15 м, 20 м, 25 м і 30 м, а діагоналі цього чотирикутника мають довжини 28 м і 36 м?

380 * Доведіть, що можна описати коло навколо:

а) будь-якого прямокутника;
б) будь-якої рівнобедреної трапеції.

3.4. Розв'язування задач практичного змісту

381 Піца якого діаметра поміститься в коробку квадратної форми площею 625 см^2?

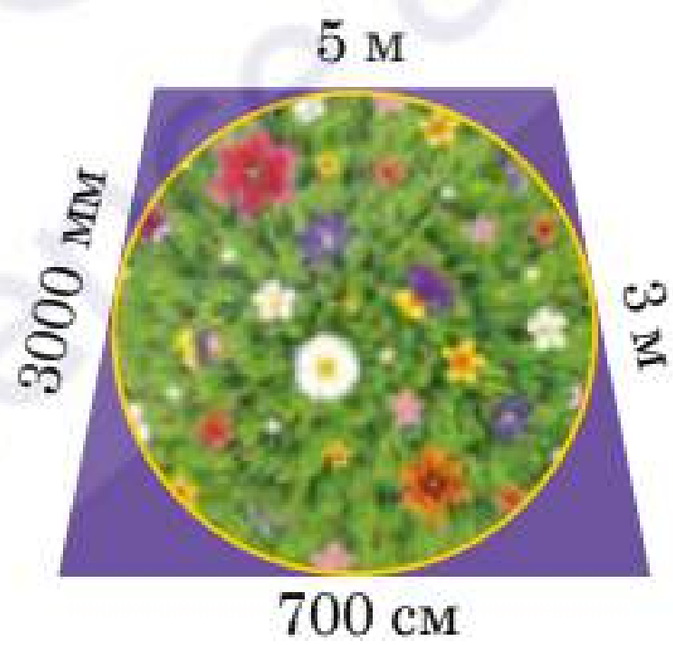
382 Ви хочете огородити квітник круглої форми маленьким парканом, проте для цього вам потрібно встановити стовпчики на однаковій відстані. Обчисліть, скільки стовпчиків необхідно вкопати, аби відстань між ними була 0,5 м, а діаметр квітника — 8 м.

383 Хвилинна стрілка годинника має довжину 2,5 см. Обчисліть градусну міру дуги, яку описує стрілка за 15 хв.

384 Стрілецький лук є дугою кола. Знайдіть радіус цього кола, якщо довжина лука становить 103 см і має градусну міру 120°.

385 Коза, прив'язана мотузкою до кілка, пасеться по колу. Знайдіть, скільки повних обертів вона пройшла за 15 хв, якщо довжина дуги кола 60° становить 2 м, за 1 хв вона проходить 3,5 м.

386 Ділянка між автомобільними дорогами має форму чотирикутника з відповідними розмірами. Чи можливо висадити клумбу круглої форми так, аби вона займала максимум цієї ділянки?



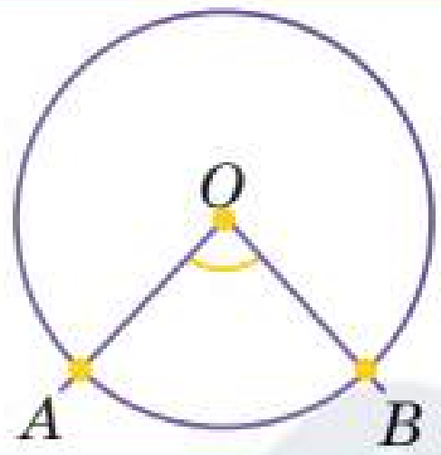
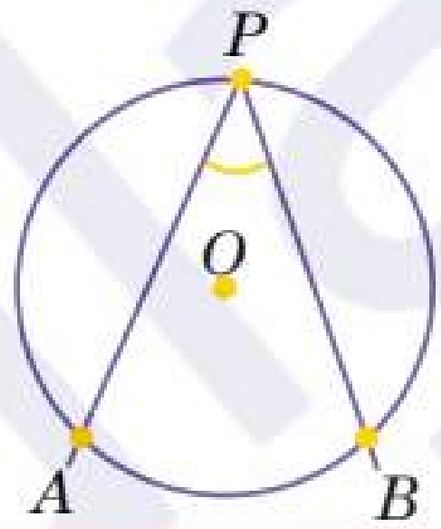
387 З квадратного металевого листа розміром 25 см на 25 см потрібно вирізати диск найбільшого радіуса. Поясніть, у який спосіб ви знайдете центр диска за допомогою лише косинця та якого радіуса буде диск.

388 Мешканці багатоповерхівок вирішили встановити дитячий майданчик так, щоб відстань до кожного з будинків до майданчика була однаковою. Накресліть схему їх розташування, якщо будинки знаходяться у вершинах рівнобічної трапеції.

389 На повітряному змії у формі ромба хочуть надрукувати круглий напис (вписане коло). Обчисліть площу, яку займе малюнок, якщо змій має висоту 24 см.

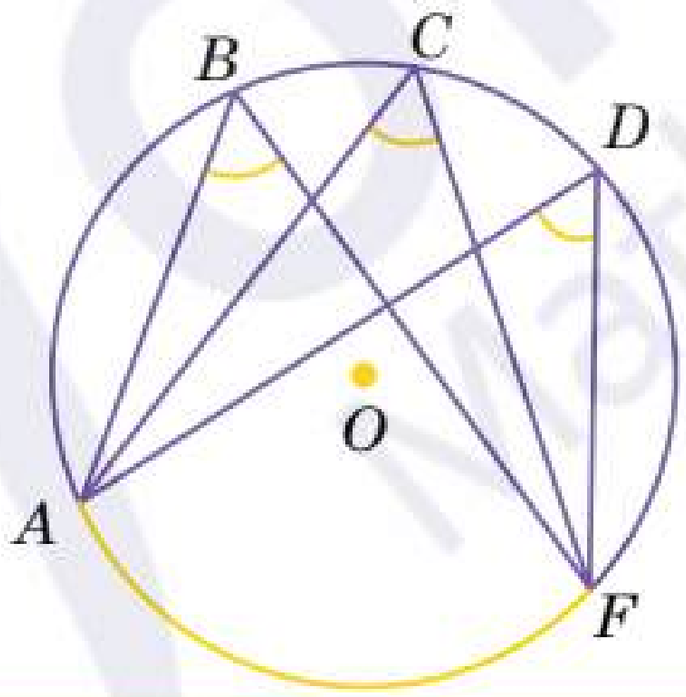
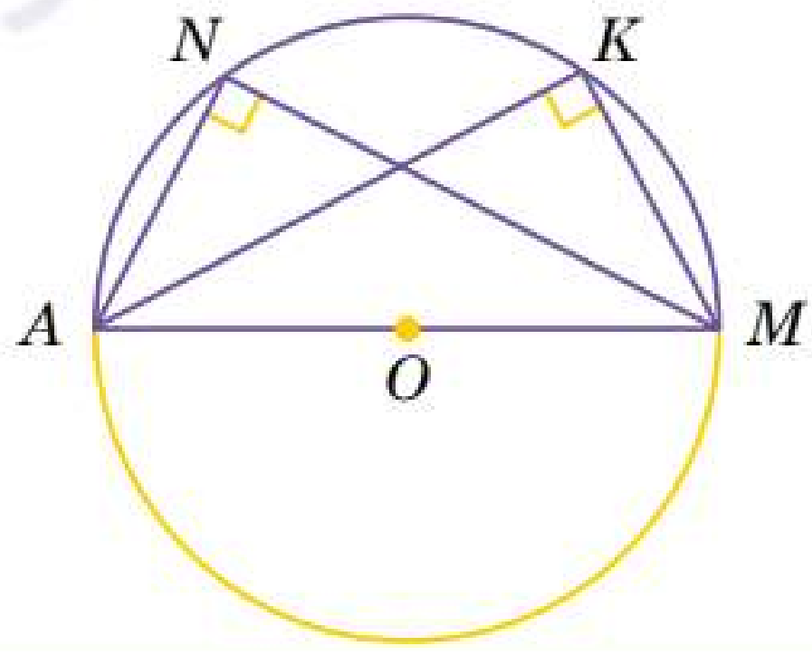
390 У дворі школи планують установити круглу клумбу посеред прямокутного майданчика. Відомо, що одна пара протилежних сторін майданчика має довжину 12 метрів, а інша — 16 метрів. Обчисліть, якого найбільшого радіуса може бути ця клумба.

Короткий огляд розділу

Центральний кут — це кут, вершина якого є центром кола, і сторони проходять через пару точок на колі	
Вписаний кут — це кут, вершина якого розташована на колі, а сторони кута — січні, тобто перетинають це коло	

Центральний кут удвічі більший за вписаний, якщо вони спираються на одну й ту саму дугу.

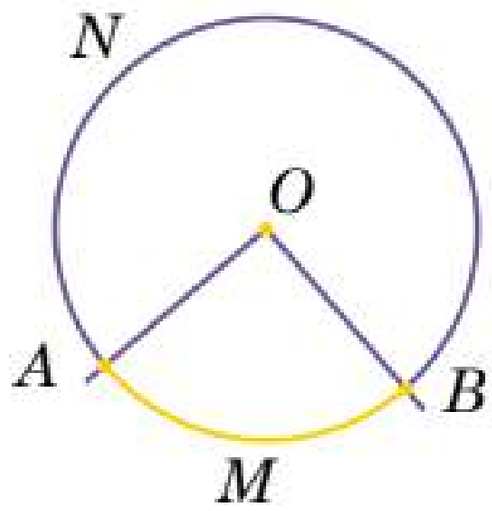
Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

Вписані кути, які спираються на одну й ту саму дугу, — рівні.	**Вписаний кут, який спирається на діаметр (півколо), — прямий.**
	

Дугу кола позначають символом $\smile$, який записують перед назвою дуги або над нею.

Дугу кола вимірюють у градусах. Градусна міра дуги — кут між двома радіусами, які обмежують цю дугу.

Точки A та B ділять коло на дві дуги. Сума градусних мір двох дуг зі спільними кінцями дорівнює 360°.



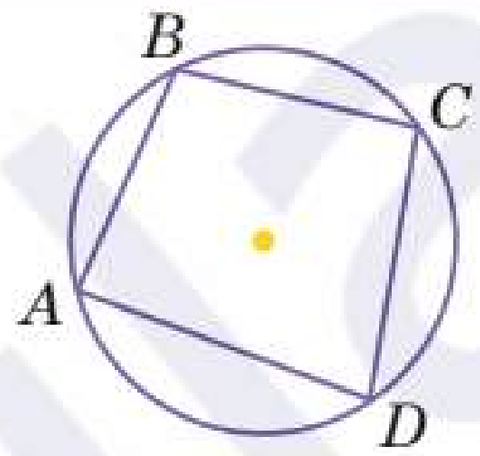
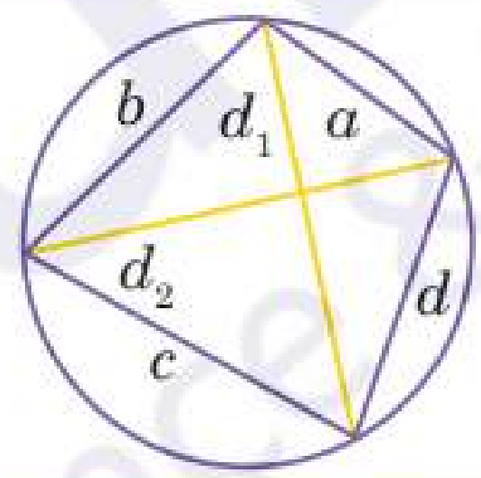
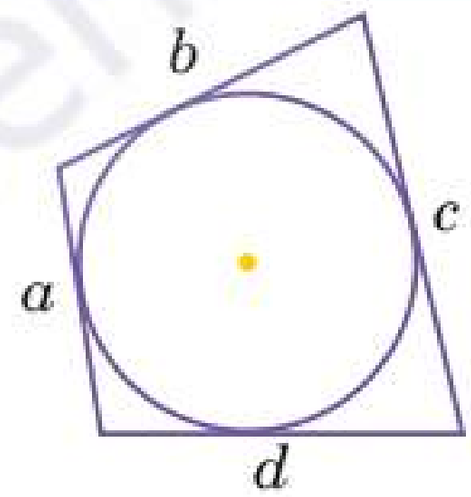
$$\smile AMB + \smile ANB = 360°$$

Якщо відрізок, що з'єднує кінці дуги, є діаметром кола, то дугу називають півколом. Градусна міра півкола дорівнює 180°.

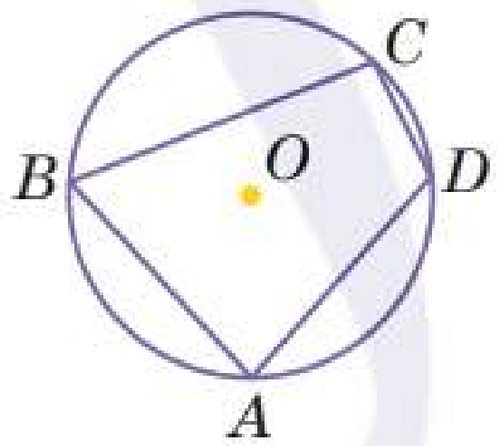
Градусна міра дуги кола не залежить від радіуса кола.

Многокутник називають вписаним, якщо кожна його вершина лежить на колі.

Многокутник називають описаним, якщо кожна його сторона є дотичною до кола.

Якщо чотирикутник є вписаним у коло, то сума його протилежних кутів дорівнює 180° $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$	
Добуток діагоналей вписаного чотирикутника дорівнює сумі добутків його протилежних сторін $d_1 \cdot d_2 = a \cdot c + b \cdot d$	
В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні між собою $a + c = b + d$	

Необхідна і достатня умова вписаного чотирикутника



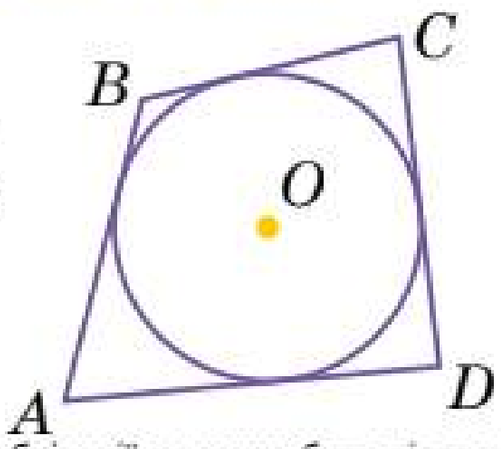
Для того, щоб чотирикутник був вписаним необхідно і достатньо, щоб сума його протилежних кутів дорівнювала 180°.

Тобто $ABCD$ — вписаний $\Leftrightarrow \angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$.

Необхідна і достатня умова описаного чотирикутника

Для того, щоб чотирикутник був описаним необхідно і достатньо, щоб сума його протилежних сторін були рівними.

Тобто $ABCD$ — описаний $\Leftrightarrow AB + CD = BC + AD$.



Перевірте свої досягнення

1 Обчисліть градусну міру дуги кола, якщо її довжина становить $\frac{1}{6}$ довжини кола.

а) 60°; б) 30°; в) 120°; г) 70°.

2 Обчисліть, скільки градусів містить центральний кут кола, який спирається на дугу, що становить $\frac{5}{6}$ кола.

3 Довжина кола становить 60π см. Обчисліть градусну міру дуги кола, якщо її довжина становить 15π.

а) 90°; б) 45°; в) 180°; г) 60°.

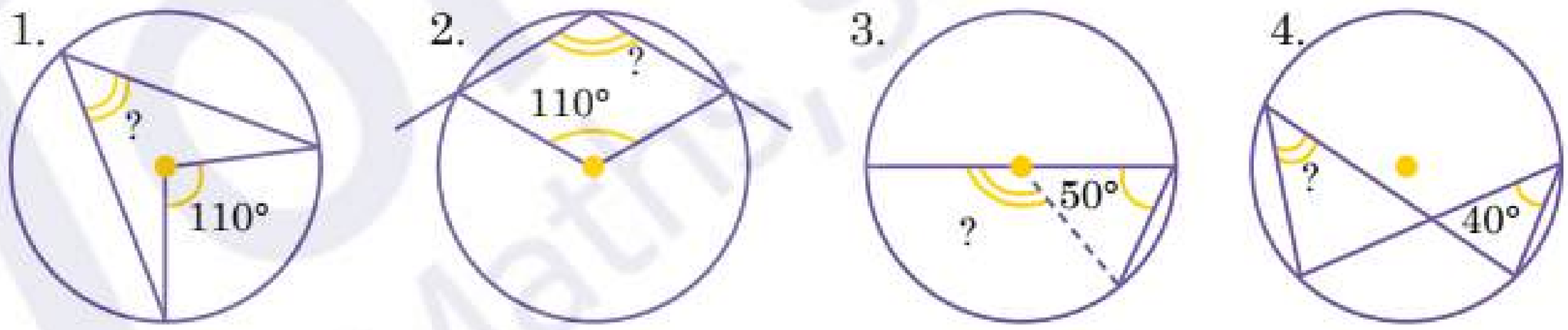
4 Обчисліть градусну міру вписаного кута, якщо відповідний йому центральний кут дорівнює 36°.

а) 36°; б) 108°; в) 72°; г) 18°.

5 Обчисліть градусну міру меншої з двох дуг кола, на які його поділяють дві точки, якщо градусні міри цих дуг відносяться як 5 : 7.

а) 150°; б) 100°; в) 210°; г) 180°.

6 Установіть відповідність між рисунком (1–4) та значенням невідомого кута на рисунку (А–Г).



А. 40° Б. 125° В. 55° Г. 100°

7 Обчисліть невідому сторону описаного чотирикутника, якщо три його послідовні сторони дорівнюють 85 см, 91 см, 65 см.

8 Чи можна описати коло навколо чотирикутника $MNKP$, якщо кут M дорівнює 38°, а кут K — 142°. Відповідь аргументуйте.

9 Основи рівнобічної описаної трапеції дорівнюють 8 см і 16 см. Обчисліть її периметр.

10 Знайдіть сторону рівностороннього трикутника, якщо радіус описаного навколо нього кола дорівнює 10 см.

Проєктна робота «Дизайн інтер'єру»

Сучасний інтер'єр приміщення — це самовираження власника дому. Має відповідати внутрішньому стану людини, радувати око і задовільнять естетичні вимоги. Дизайнер — одна із розповсюджених професій сьогодення. Уявіть собі, що Ви, як професіонал цієї справи, отримали замовлення на оформлення спальної кімнати. Однією з обов'язкових вимог, щоб на стіні були фото в рамці (не стандартне) з фотографією родини. Замовник обрав рамки наведені нижче з відповідними розмірами. Ваша мета обчислити розміри фото, які необхідно замовити, щоб можна було його обрізати під рамку не порушивши загальної композиції.

Крок 1 Даний проєкт рекомендуємо виконувати індивідуально або об'єднайтеся у пари.

Крок 2 Виконайте такі завдання:

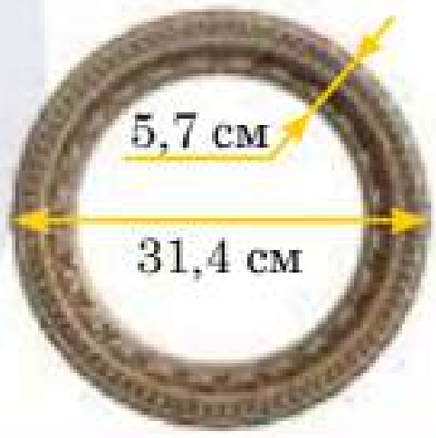
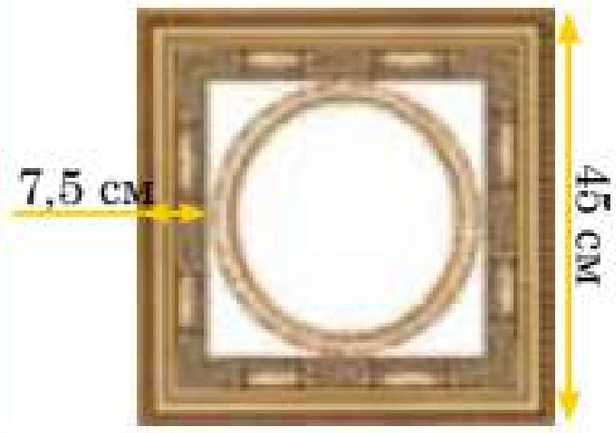
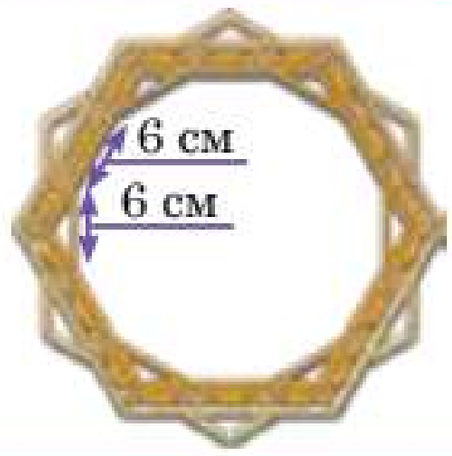
а) використовуючи дані в першій таблиці, обчисліть радіуси кіл фото для рамок;

б) знаючи радіуси кіл, знайдіть розміри квадрату в який можна вписати це коло (дані будуть орієнтиром для вибору розмірів друку);

в) використовуючи таблицю 2, оберіть найменш затратний варіант друку при умові, що будуть 2 фото у рамці 1, 1 фото у рамці 2 і 5 фото у рамці 3;

г) зробіть замальовку дизайну використовуючи дані пункту (в).

Крок 3 На етапі підведення підсумків кожен учень або пара учнів має отримати заповнену таблицю 1, підрахунки менш затратного варіанту замовлення друку і розроблений дизайн оформлення інтер'єру.

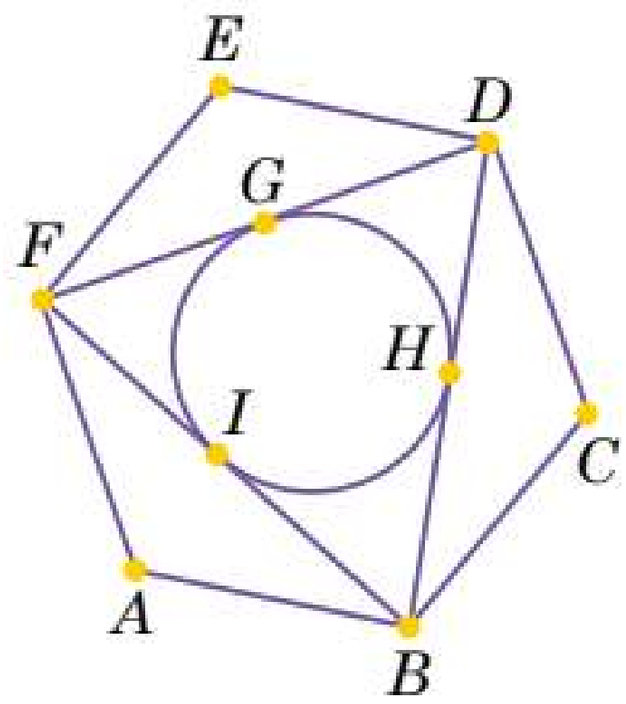
Види рамок			
Радіус фото (см)			

Розмір	Формат	Ціна
9 см × 13 см	B7	12.00 грн
10 см × 15 см	A6	12.00 грн
13 см × 18 см	B6	24.00 грн
15 см × 20 см	A5	24.00 грн
20 см × 30 см	A4	48.00 грн
30 см × 40 см	A3	90.00 грн
30 см × 45 см	A3	99.00 грн
На D-Lab		
10 см × 15 см	A6	14.00 грн
15 см × 21 см	A5	28.00 грн
20 см × 30 см	A4	56.00 грн

Крок 4 Обговорити підсумки проєкту цілим класом.
Що вдалося? Що було складним? Над чим ще потрібно працювати?

Додаткові завдання до розділу

391 В правильний шестикутник вписано правильний трикутник, в який вписано коло як на рисунку. Знайди периметр шестикутника, якщо радіус кола дорівнює 4 см.



392 У колі, радіус якого дорівнює 10 см проведено хорду завдовжки 5 см. Через кінці даної хорди проведено дотичну і січну паралельну дотичній. Знайдіть відстань між дотичною і січною.

393 Сторона правильного трикутника вписаного в коло дорівнює 8 см. Обчисли периметр квадрата, вписаного в те саме коло.

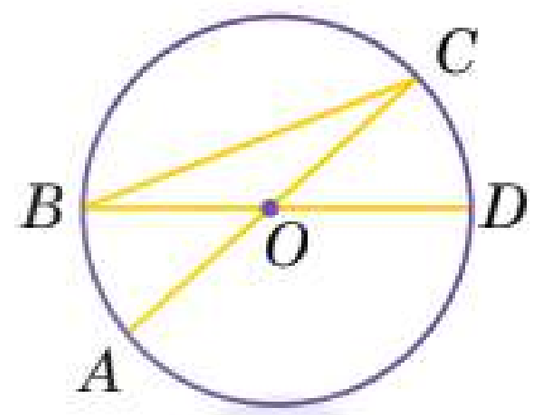
394 За допомогою програмного засобу GeoGebra побудуйте три трикутники: тупокутний, прямокутний та рівносторонній. Для кожного з цих трикутників побудуйте описане коло.

395 За допомогою програмного засобу GeoGebra побудуйте три трикутники: гострокутний, прямокутний та тупокутний. В кожен з цих трикутників впишіть коло.

396 В коло вписаний рівнобедрений трикутник ABC з основою BC. Знайдіть кути трикутника, якщо:

а) $\smile BC = 134°$; б) $\smile AC = 70°$.

397 Центральний кут AOD дорівнює 110°.Знайдіть градусну міру вписаного кута ACB.



398 В трапецію з основами a і b можна вписати коло і навколо даної трапеції можна описати коло. Знайдіть радіус вписаного кола.

399 * Точки A, B, C та D лежать на колі. Доведіть, що якщо $\smile AB = \smile CD$, то $AB = CD$.

400 * Доведіть, що якщо навколо навколо паралелограма можна описати коло, то даний паралелограм — прямокутник.

401 * Доведіть, що якщо в прямокутник можна вписати коло, то даний прямокутник — квадрат.

402 * Доведіть, що в будь який ромб можна вписати коло.

403 Інженеру потрібно розрахувати площу ромбоподібного металевого листа, який буде використаний для виготовлення опорної пластини в механізмі. Відомо, що одна з діагоналей ромба дорівнює 60 см, а інша діагональ у 2 рази коротша. Обчисліть площу ромба та визначте, чи вистачить матеріалу, якщо у вас є лист металу площею 0,2 м².

404 * Виріжте з аркуша в клітинку квадрат, сторона якого дорівнює 12 см. Тоді відріжте кути квадрата таким чином, щоб утворився правильний восьмикутник (лінію відрізу можна знайти складанням паперу). Вимірряйте довжину сторони утвореного восьмикутника та знайдіть його периметр.

405 * Відрізок AB — діаметр кола, а хорди BC та AD — паралельні. Доведіть, що хорда CD також є діаметром даного кола.

406 * Доведіть, що якщо в опуклому чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в даний чотирикутник можна вписати коло.

407 * Доведіть, що якщо не всі кути опуклого чотирикутника рівні, то хоча б один з кутів — тупий.

408 * Доведіть, що для описаного навколо кола шестикутника зі сторонами a, b, c, d, e, f виконується рівність:

$$a - b + c - d + e - f = 0.$$

Чи є ця рівність необхідною умовою для того, щоб в шестикутник можна було вписати коло? Чи є ця рівність достатньою умовою для того, щоб в шестикутник можна було вписати коло?

4

Подібність геометричних фігур

Карта — зменшене узагальнене зображення великої ділянки земної поверхні. Масштаб карти ретельно розробляється та підбирається, щоб відстані на карті умовно відповідали відстаням між об'єктами у реальній місцевості.

В архітектурі та інженерії, завдяки знанням про подібні фігури, дизайнери й дизайнерки можуть створювати конструкції різних розмірів, використовуючи один і той самий план. Знання про подібність фігур активно застосовуються у будівництві.

У світі мистецтва та дизайну геометрична подібність часто використовується для створення візуальної гармонії. У творах художників і художниць подібні фігури та візерунки створюють відчуття рівноваги.

Загалом знання про геометричну подібність має широке застосування у різних сферах людської діяльності. Це потужний інструмент, за допомогою якого ми можемо аналізувати та знаходити взаємозв'язки між різними об'єктами та конструкціями.

У цьому розділі ми:

- дізнаємося, що таке подібність фігур;
- будемо обчислювати відстані, використовуючи масштаб;
- на основі ознак подібності будемо визначати,
- чи многокутники є подібними, а також обчислюватимемо невідомі сторони та кути;
- дізнаємося, що існує три ознаки, за якими ми можемо визначити, чи два трикутники є подібними;
- будемо розв'язувати математичні задачі та виконувати завдання з повсякденного життя, використовуючи знання про властивості подібних фігур.

Ключові слова

- Подібність (*similarity*)
- Коефіцієнт (*coefficient*)
- Пропорція (*proportion*)
- Теорема Фалеса (*Thales theorem*)
- Середня лінія (*middle line*)
- Ознака подібності (*a sing of similarity*)
- Медіана (*median*)
- Бісектриса (*bisectors*)
- Висота (*height*)

4 Подібність геометричних фігур

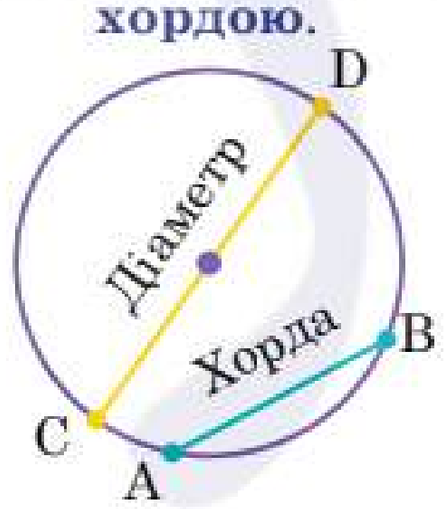
4.1. Пропорційні відрізки

Співвідношення — це порівняння двох величин, виражене у вигляді звичайного дробу або натурального числа.

Ми НЕ використовуємо одиниці вимірювання у співвідношенні.

Щоб записати співвідношення відрізків, необхідно два відрізки.
Щоб знайти пропорційні відрізки, необхідно дві пари відрізків.

Відрізок, який сполучає будь-які дві точки на колі, називається **хордою**.



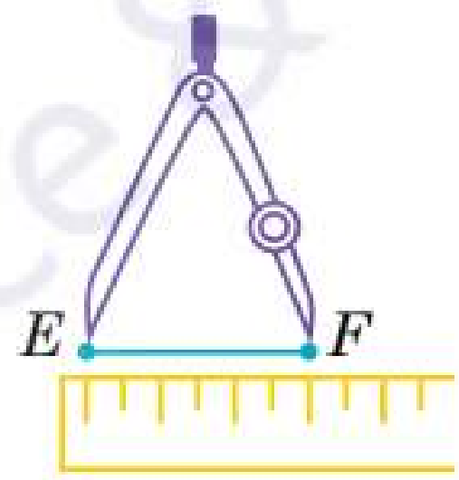
Діаметр — це найбільша хорда.

Ми вже ознайомилися з таким поняттям, як пропорційні величини. За допомогою лінійки та циркуля ми можемо побудувати пропорційні відрізки.

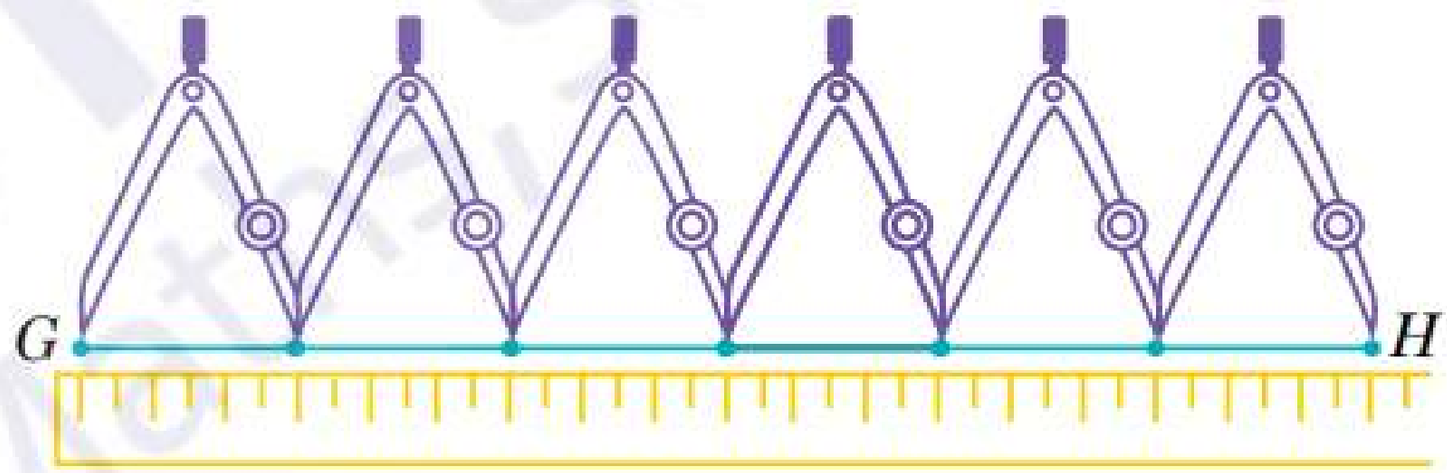
Два відрізки називають **пропорційними**, якщо при збільшенні одного з них у кілька разів інший збільшується у стільки ж разів. Це означає, що ми можемо використовувати співвідношення пропорційних відрізків для обчислення довжини невідомого відрізка.

Наприклад, накресліть відрізок EF довільної довжини.

Після цього за допомогою лінійки проведіть пряму, що містить відрізок EF. За допомогою циркуля виміряйте довжину відрізка EF.



Використовуючи циркуль, відміряйте на прямій довжину, рівну шістьом відрізкам EF. Назвемо новий відрізок GH.

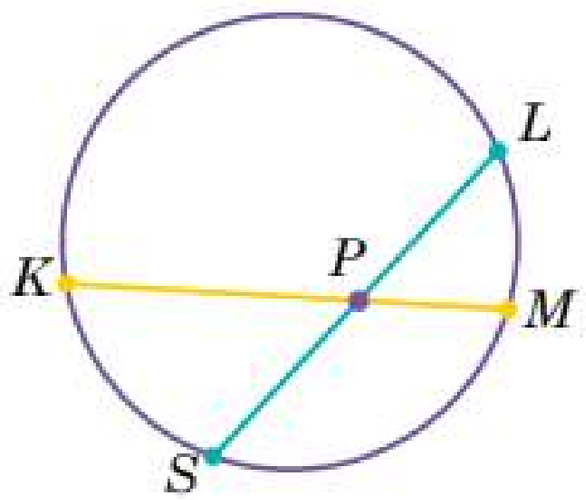


Довжина відрізка GH у 6 разів більша, ніж довжина відрізка EF, тому $GH = 6 \cdot EF$. Отже, **співвідношення відрізків** GH і EF дорівнює 6 : 1. Це можна записати так: $\frac{GH}{EF} = \frac{6}{1}$.

Можна також сказати, що співвідношення відрізків EF і GH дорівнює 1 : 6, тобто $\frac{EF}{GH} = \frac{1}{6}$.

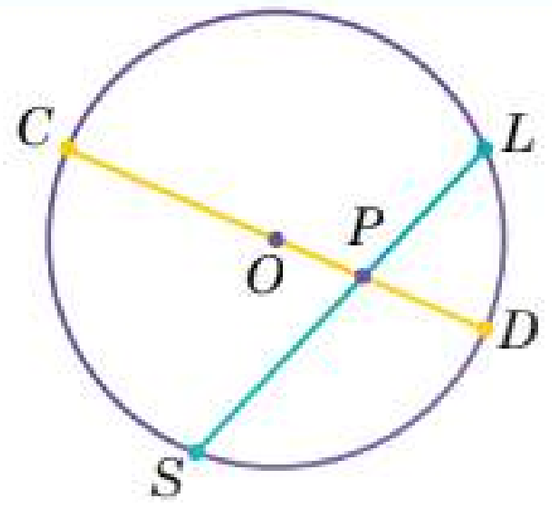
Якщо співвідношення відрізків a і b дорівнює співвідношенню відрізків c і d, то ці відрізки називаються **пропорційними**.

Пропорційність відрізків хорд



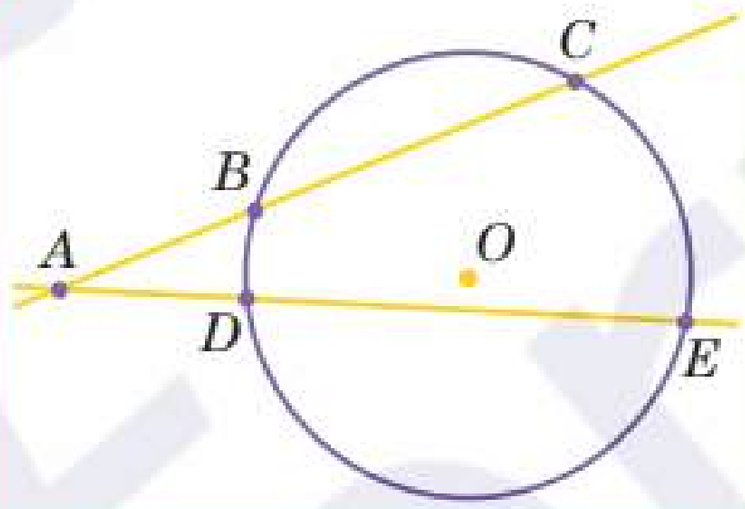
При перетині двох хорд добуток відрізків, на які ділиться одна з них точкою перетину, дорівнює добутку відрізків, на які ділиться інша.

Тобто якщо хорди SL та KM перетинаються в точці P, то $SP \cdot PL = KP \cdot PM$



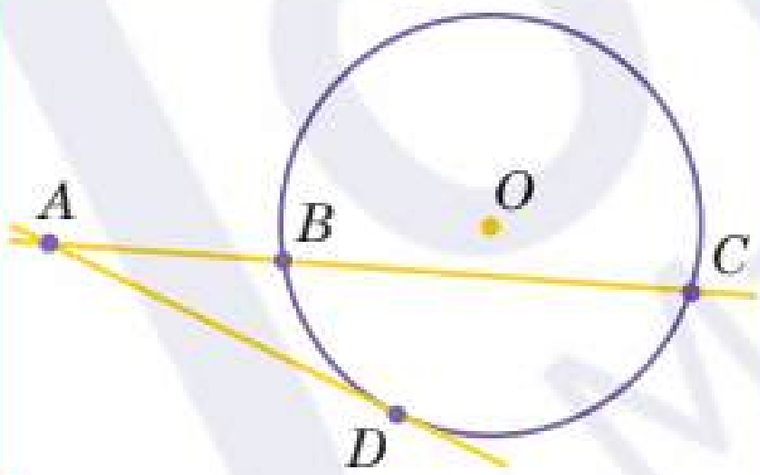
Якщо хорда SL перетинає діаметр CD в точці P, то $SP \cdot PL = R^2 - PO^2$, де O — центр кола, а R — його радіус

Пропорційність відрізків січної і дотичної



Якщо з точки, що лежить зовні кола, проведені дві січні, то добуток довжини однієї січної на довжину її зовнішньої частини дорівнює такому ж добутку довжин для будь-якої іншої січної.

$AB \cdot AC = AD \cdot AE$



Якщо з однієї точки проведені до кола дотична і січна, то добуток всієї січної на її зовнішню частину дорівнює квадрату дотичної.

$AD^2 = AB \cdot AC$

Приклад

1 Відомо, що відрізок BC дорівнює 32 см. Знайдіть довжину відрізків AB і AC, якщо відношення AB до BC дорівнює 3 : 8.

Розв'язання

Відомо, що відношення AB до BC дорівнює 3 : 8. Тобто $\frac{AB}{BC} = \frac{3}{8}$.
$BC = 32$ см (за умовою).

Звідси $\frac{AB}{32} = \frac{3}{8}$;

$8 \cdot AB = 96$;

$AB = 12$ см.

Точка B — внутрішня точка, що розташована між точками A і C. $AC = AB + BC$ (за властивістю вимірювання відрізків).

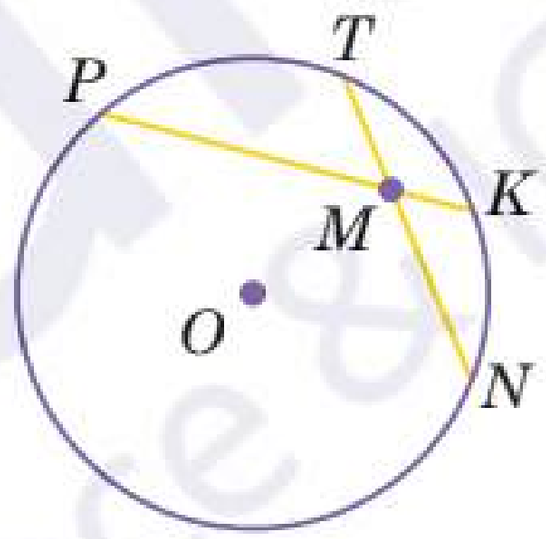
Звідси, $AC = 12$ см $+ 32$ см $= 44$ см.

Відповідь. 12 см; 44 см.

Приклад

2 У колі проведено дві хорди, що перетинаються. Точка перетину ділить першу хорду на відрізки 6 см і 4 см, а другу — на два відрізки, один з яких дорівнює 3 см. Знайдіть довжину другої хорди.

Розв'язання



Дано коло. PK і TN — хорди кола. PK перетинається з TN у точці M.

Відомо, що $TM = 4$ см; $MN = 6$ см; $MK = 3$ см.

$TM \cdot MN = PM \cdot MK$ (при перетині двох хорд добуток відрізків, на які ділиться одна з них точкою перетину, дорівнює добутку відрізків, на які ділиться інша).

Підставимо вже відомі значення в попередню рівність:

$4 \cdot 6 = PM \cdot 3$.

Звідси $PM = 24 : 3 = 8$ см.

Отже, хорда $PK = PM + MK = 8 + 3 = 11$ см.

Відповідь. 11 см.

Попрактикуйтеся

409 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Якщо $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{KL} = \frac{3}{4}$, то відрізки AB і CD та MN і LK — пропорційні.

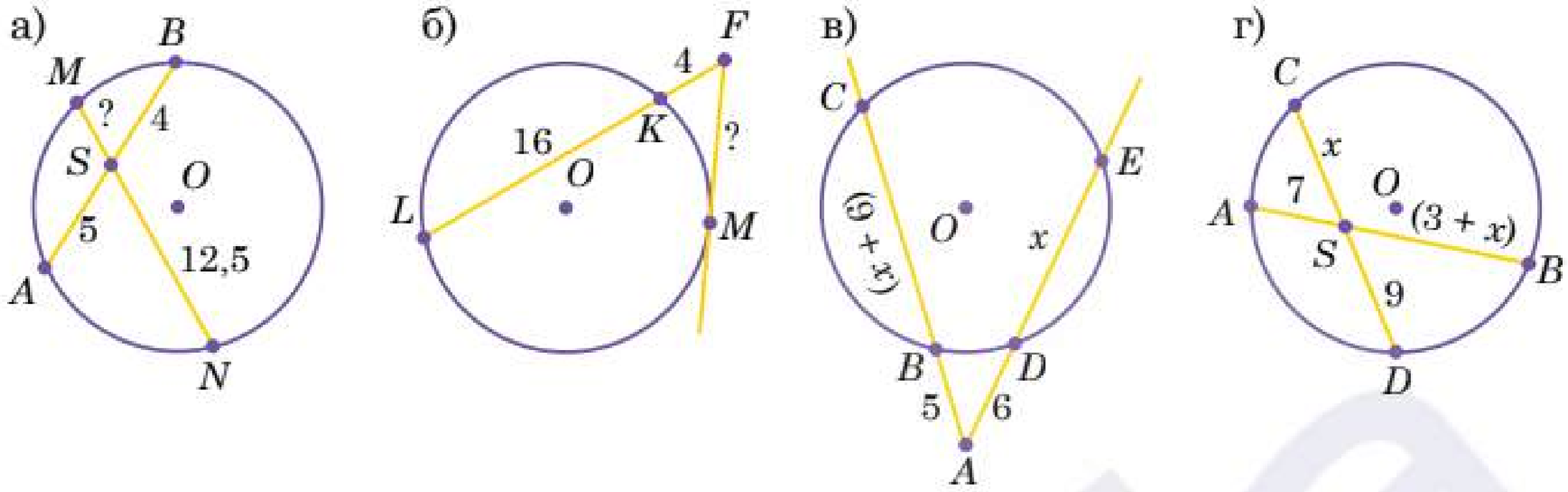
б) Якщо довжина першого відрізка більша за довжину другого відрізка у 2 рази, то такі відрізки пропорційні.

в) Якщо довжина першого відрізка на 5 см більша за довжину другого відрізка, то такі відрізки пропорційні.

г) Якщо $\frac{AB}{CD} = \frac{2}{3}$, а $\frac{MN}{KL} = \frac{4}{6}$, то такі пари відрізків пропорційні.

410 Знайдіть відношення відрізків EF та KM, якщо їх довжини дорівнюють 27 см та 60 см. Чи зміниться відношення, якщо довжину відрізків записати в кілометрах?

411 За даними на рисунку знайдіть невідомі відрізки.

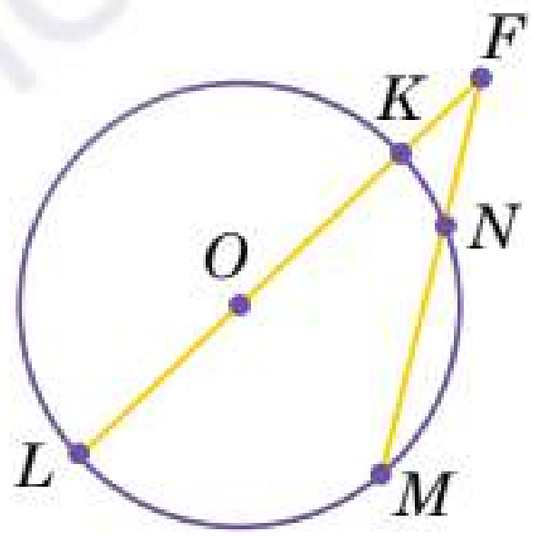


412 За допомогою програми GeoGebra накресліть відрізки довжиною 5 см, 10 см, 12 см, 14 см, 16 см. З'ясуйте пари пропорційних відрізків.

413 За допомогою програми GeoGebra накресліть дві хорди, що перетинаються, та перевірте теорему про їх пропорційність.

414 Хорда AB довжиною 12 см перетинає хорду MN у точці K так, що AK дорівнює 3 см, MK — 5 см. Знайдіть довжину MN.

415 Перетин двох хорд розділив одну з них на відрізки 4 см і 7 см, а довжина одної із частин іншої хорди — 8 см. Обчисліть довжину другої хорди.



416 Користуючись рисунком, знайдіть діаметр кола, якщо $FK = 2$ см, $FN = 3$ см, а $MN = 5$ см.

417 Користуючись рисунком, обчисліть площу круга, якщо $FK = 4$ см, $FN = 6$ см, а $MN = 12$ см.

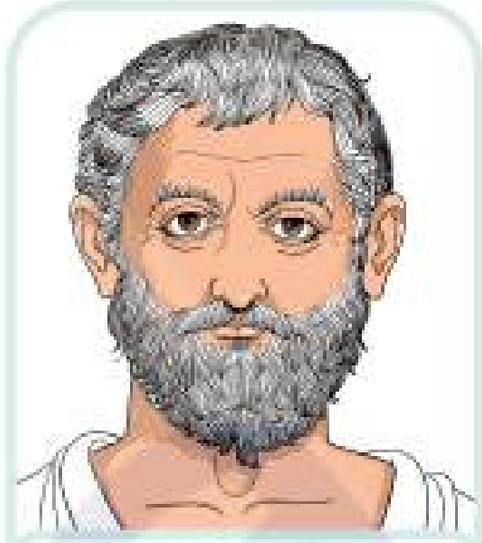
418 Хорди AB і CD перетинаються у точці S так, що $CS = 36$ см, $SD = 48$ см, а співвідношення $AS : BS = 3 : 4$. Обчисліть довжину іншої хорди.

419 Обчисліть висоту дерева, якщо відомо, що відстань між дівчинкою та деревом становить 5 м, а між деревом та будинком — 7 м. Зауважте, що зріст дівчинки — 150 см. Відрізки є пропорційними.

4.2. Теорема Фалеса

Доведення теореми Фалеса

Фалеса Мілетського відносять до так званих «семи мудреців» світу: він був одним з найвидатніших математиків свого часу.

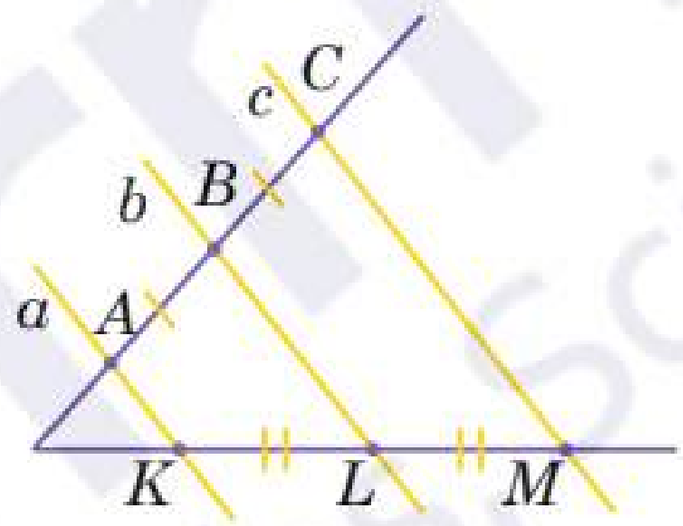


Фалес Мілетський

Він самостійно обчислив висоту єгипетських пірамід за їхньою тінню, чим немало здивував єгипетського фараона Амазіса. Фалес знайшов також розв'язання задачі на визначення відстані від корабля, що перебуває в морі, до гавані без безпосереднього вимірювання цієї відстані. Також він визначив тривалість року (365 днів), а ще час сонцестояння та рівнодення.

Теорема Фалеса

Якщо прямі відтинають на одній стороні кута рівні між собою відрізки і на другій стороні кута рівні між собою відрізки, то такі прямі паралельні.

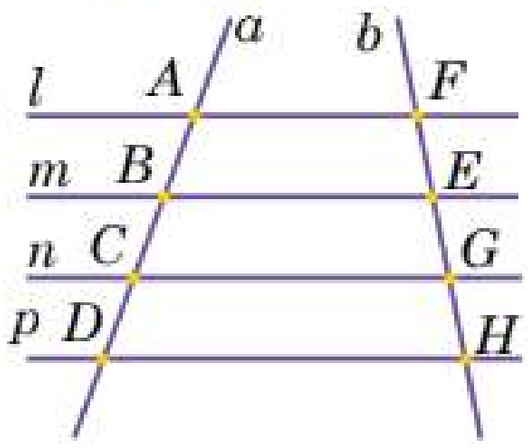


Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки й на іншій стороні кута.

Якщо $a \parallel b \parallel c$, $KL = LM$, то $AB = BC$

Наслідок — це твердження, що є результатом доказу іншої теореми й не потребує складного доведення.

Узагальнена теорема Фалеса



Маємо чотири паралельні прямі l, m, n та p, тобто $l \parallel m \parallel n \parallel p$. Вони перетинають пряму а в точках A, B, C та D відповідно.

За даним рисунком прямі l, m, n та p розташовані на однаковій відстані одна від одної.

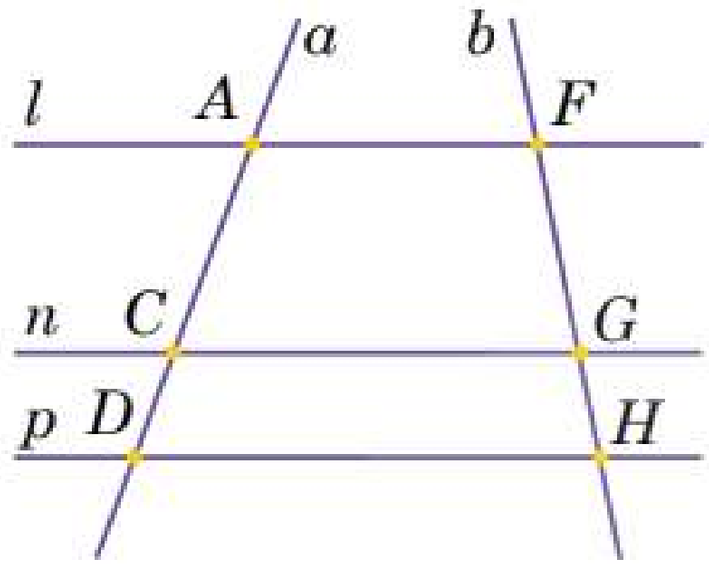
За допомогою циркуля ми можемо переконатися, що відрізки на прямій a мають однакову довжину.

Тобто $AB = BC = CD$.

Якщо пряму b також перетинають паралельні прямі l, m, n та p у точках F, E, G та H відповідно, то ми за допомогою циркуля можемо переконатися, що $FE = EG = GH$.

Якщо три або більше паралельні прямі, що перетинають дві задані прямі, відтинають на одній прямій рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на іншій прямій.

$$AB = BC = CD; \quad FE = EG = GH.$$



Якщо три або більше паралельні прямі перетинають дві довільні прямі, тоді відрізки, утворені на одній прямій, пропорційні відповідним відрізкам, утвореним на іншій прямій.

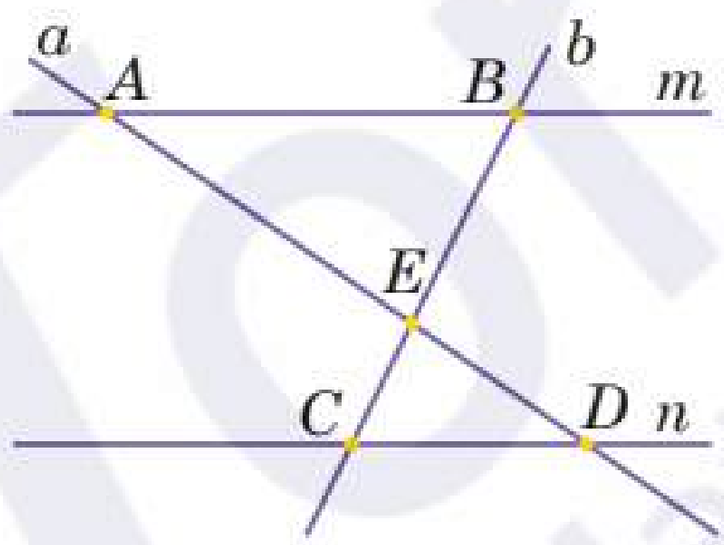
Якщо $l \parallel n \parallel p$,

то $\frac{AD}{FH} = \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

Наслідок з теореми Фалеса

Маємо дві паралельні прямі m і n та прямі a і b, які перетинаються в точці E. Прямі a і b перетинають паралельні прямі m і n у точках A, B, C та D.

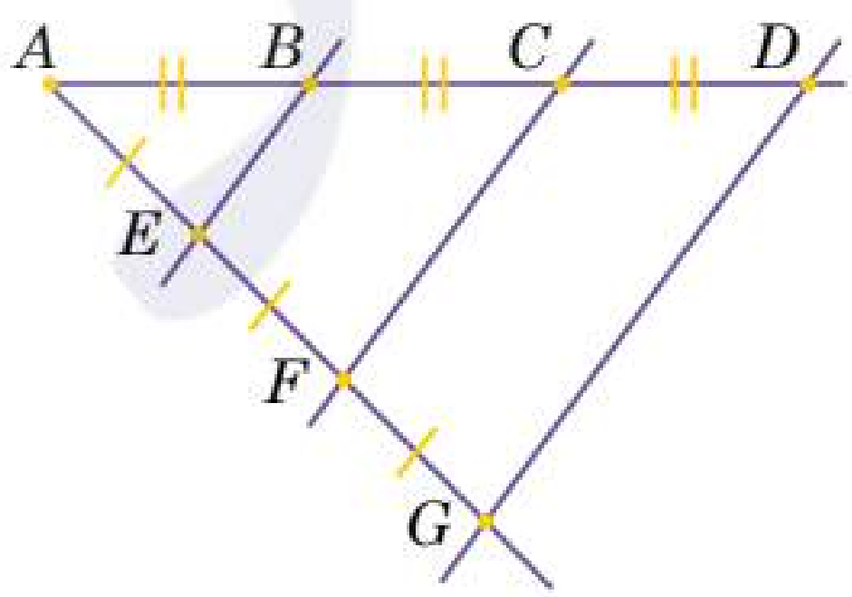
Уявімо, що пряма, паралельна прямим m і n, проходить через точку E. Отже, за теоремою Фалеса істинним буде таке твердження:



Якщо $m \parallel n$, а прямі a і b перетинають ці прямі, то

$$\frac{AE}{BE} = \frac{DE}{CE}$$

За теоремою Фалеса можна поділити відрізок на будь-яку кількість рівних частин, використовуючи лінійку без поділок.



Якщо на одній стороні кута відкласти рівні між собою відрізки і через їхні кінці провести паралельні прямі, то вони відтинають на другій стороні кута рівні між собою відрізки.

Якщо $AE = EF = FG$,

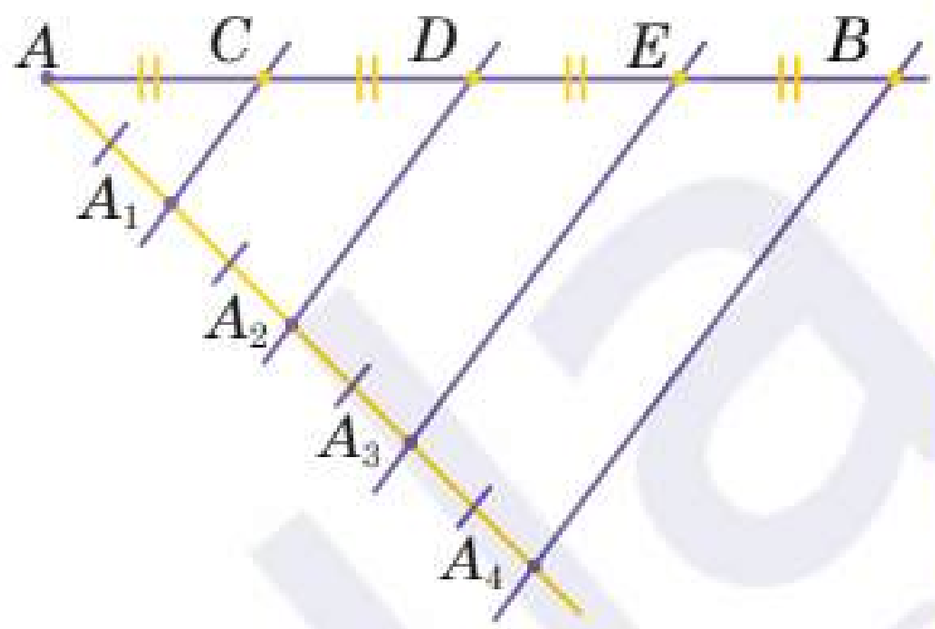
а також $EB \parallel FC \parallel GD$,

то $AB = BC = CD$

Приклад

1 Поділіть заданий відрізок AB на 4 рівних частини, не використовуючи вимірювальних приладів.

Розв'язання



Нехай AB — заданий відрізок.

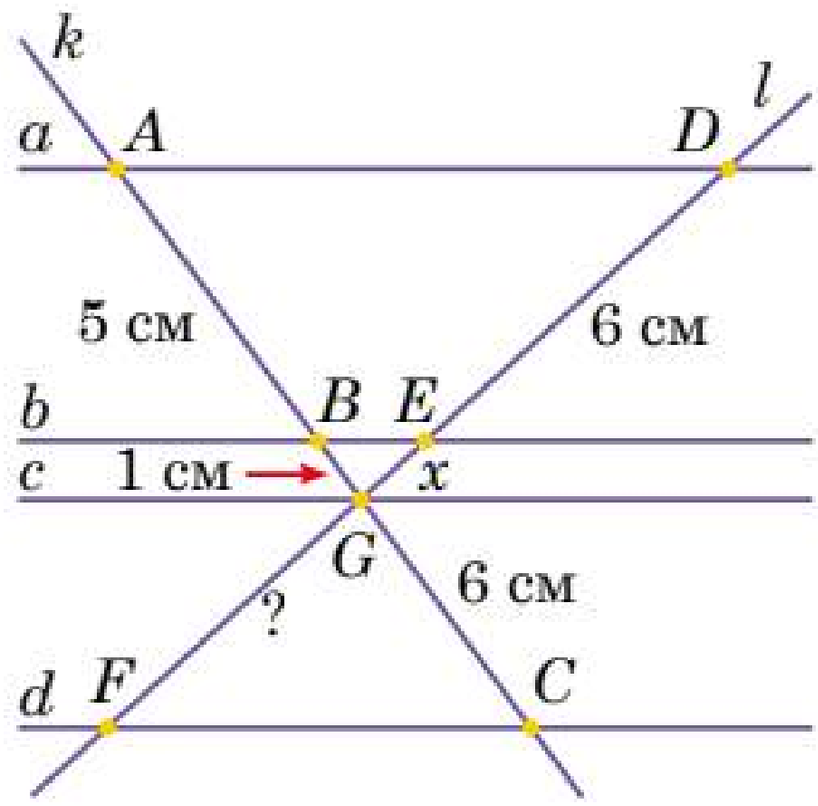
1) Проведемо довільний промінь з точки A і відкладемо на ньому циркулем послідовно 4 рівних відрізки:
$AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$.
2) Через точку A_4 та B проведемо пряму.
3) Через точки A_1, A_2, A_3 проведемо прямі, паралельні прямій A_4B (за допомогою косинця та лінійки).
4) За теоремою Фалеса ці прямі поділять відрізок AB на 4 рівних між собою частини:

$$AC = CD = DE = EB.$$

Приклад

2 Відомо, що $a \parallel b \parallel c \parallel d$. $AB = 5$ см, $BG = 1$ см, $DE = 6$ см, $GC = 4$ см. Обчисліть довжину відрізків EG та FG.

Розв'язання



Нехай $EG = x$ см. За теоремою Фалеса та наслідком з неї, маємо рівність:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BG}{EG}.$$

Підставимо вже відомі значення відрізків та отримаємо рівняння:

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{x};$$

$5x = 6$;

$x = 1{,}2$.

Звідси $EG = 1{,}2$.

Аналогічно можна знайти FG (виконайте це самостійно).

Попрактикуйтеся

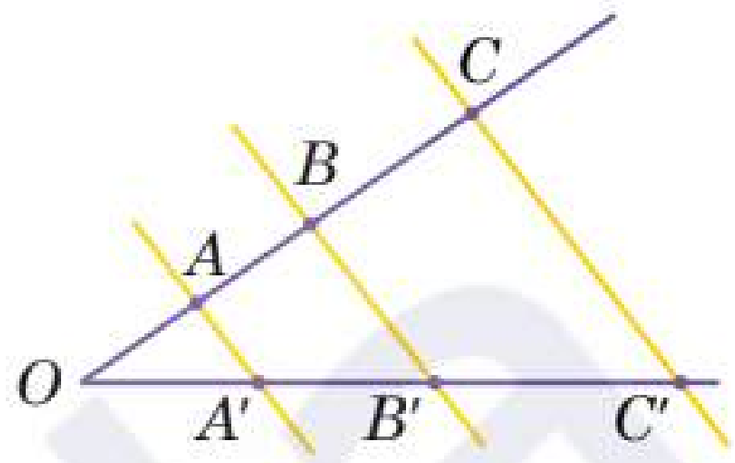
420 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Якщо $OA = AB$, то $OA' = A'B'$.

б) Якщо $OA : AC = 2 : 3$, то $OA' : A'C' = 2 : 3$ також.

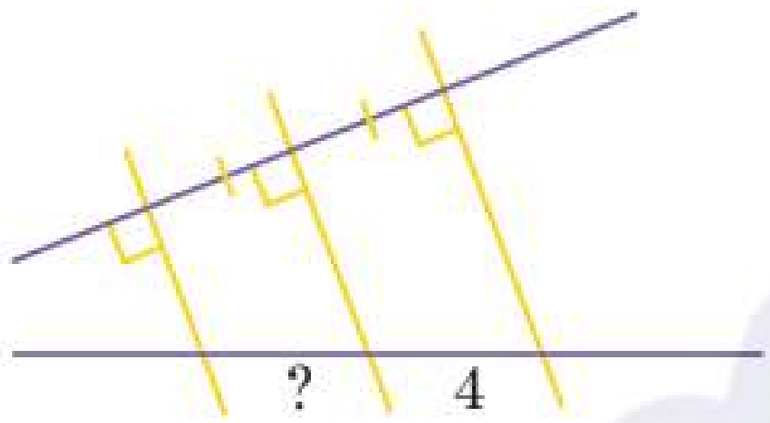
в) Якщо $OA = 5$, $A'B' = 3$ і $OA = AB$ та $OA' = A'B'$, то $AB = 5$, $OA' = 3$.

г) Якщо $OA : AC = 3 : 4$ і $OA = 2$ см, то $AC = 6$ см.

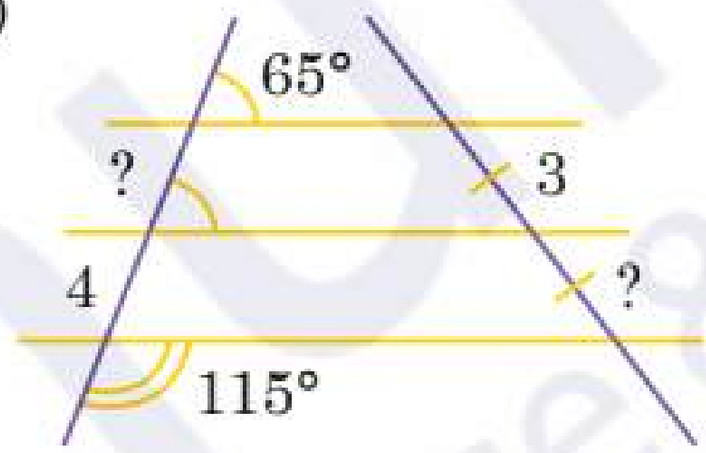


421 Знайдіть невідомі відрізки за даними на рисунках.

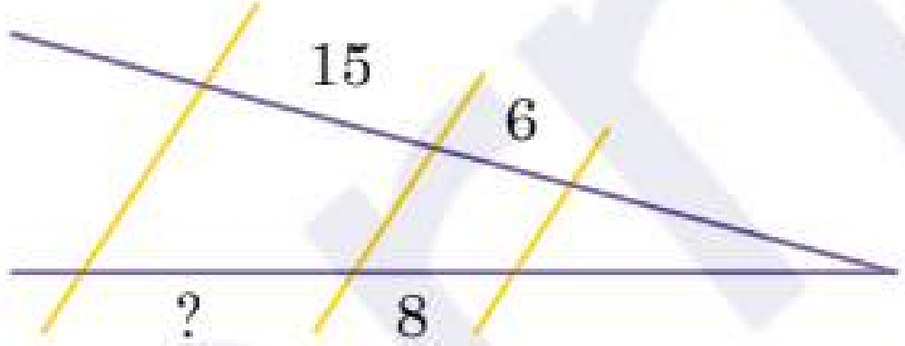
а)



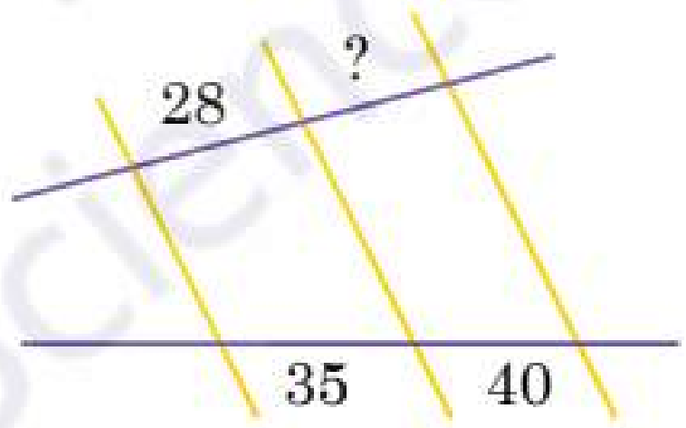
б)



в)



г)



422 За допомогою програми GeoGebra дослідіть, чи всі паралельні прямі, що перетинають кут, відтинають пропорційні відрізки.

423 За допомогою програми GeoGebra накресліть паралельні прямі, що відтинають на стороні кута відрізки довжиною 7 см. Чи будуть рівними відрізки між прямими на іншій стороні кута?

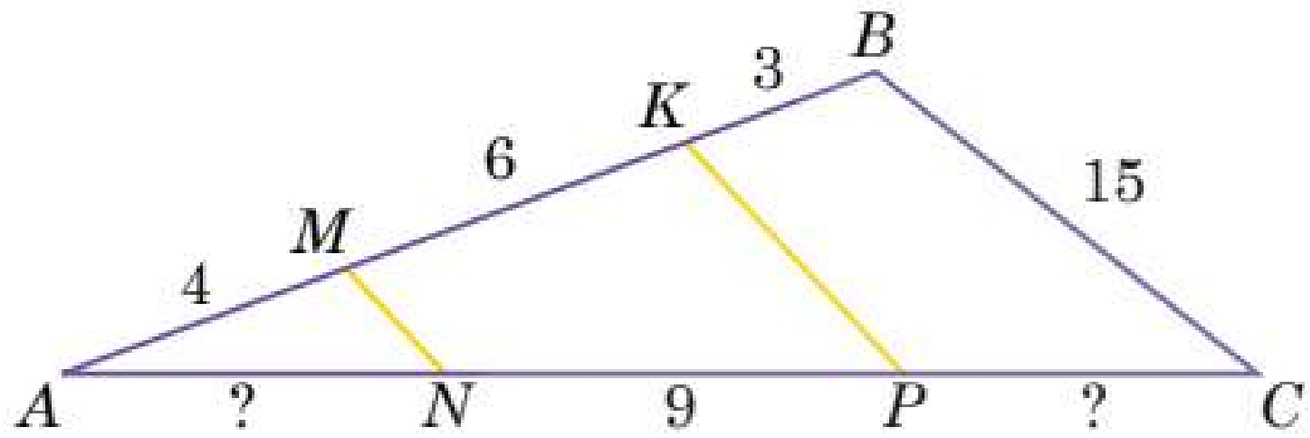
424 На стороні AB кута BAC позначено точки M та N, а на стороні AC — точки P та K. Доведіть, що $MP \parallel NK$, якщо:

а) $AM = MN$, $AP = PK$;

б) $\frac{AM}{MN} = \frac{AP}{PK}$.

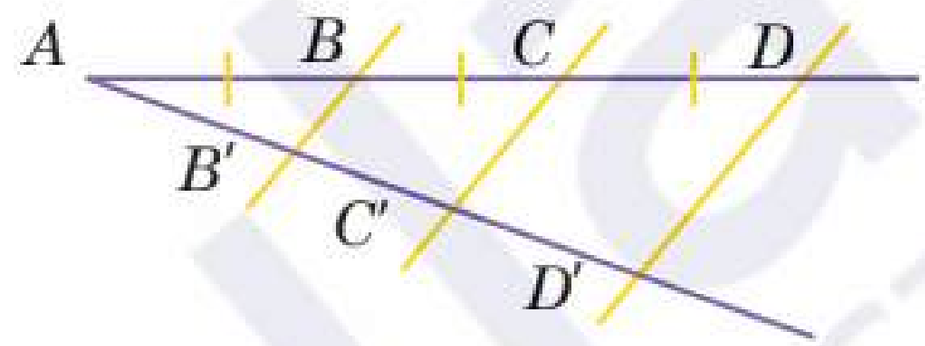
425 На підприємстві необхідно встановити новий складальний конвеєр паралельно до існуючого, але без прямого вимірювання відстані між ними через наявність перешкод (наприклад, обладнання або стіни). Як можна розрахувати місце для встановлення нового конвеєра, використовуючи теорему Фалеса?

426 Обчисліть периметр трикутника ABC, якщо $MN \parallel KP \parallel BC$, $AM = 4$ см, $MK = 6$ см, $KB = 3$ см, $BC = 15$ см, $NP = 9$ см.

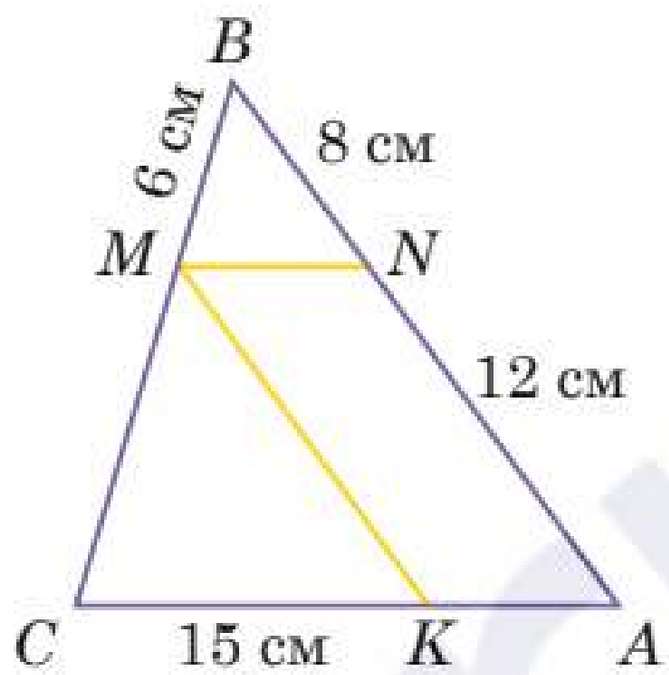


427 Відомо, що $AB' = B'C' = C'D'$, $BB' \parallel CC' \parallel DD'$.
Обчисліть:

а) AC, якщо $AD - AB = 9$ см;
б) BC, якщо $AD - AB = 7$ см;
в) BD, якщо $AD - BC = 4$ см.



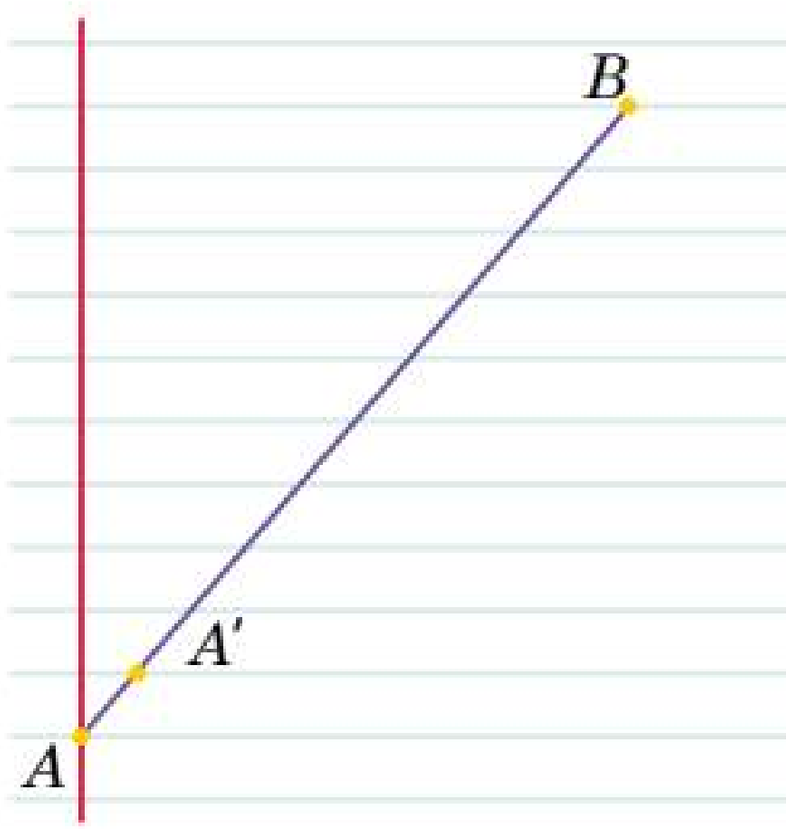
428



На рисунку зображено трикутник ABC, периметр якого дорівнює 64 см. $ANMK$ — паралелограм. $BM = 6$ см, $BN = 8$ см, $NA = 12$ см, $CK = 15$ см. Обчисліть відрізки CM, AK.

429 У трикутнику MNK проведено бісектрису MT та відрізок TS до сторони MN, паралельний стороні MK. Відомо, що $SN = 3$ см, а $NT : TK = 2 : 3$. Обчисліть відрізок MS.

430 За рисунком поясніть, чому $AA' = \frac{1}{10}AB$.



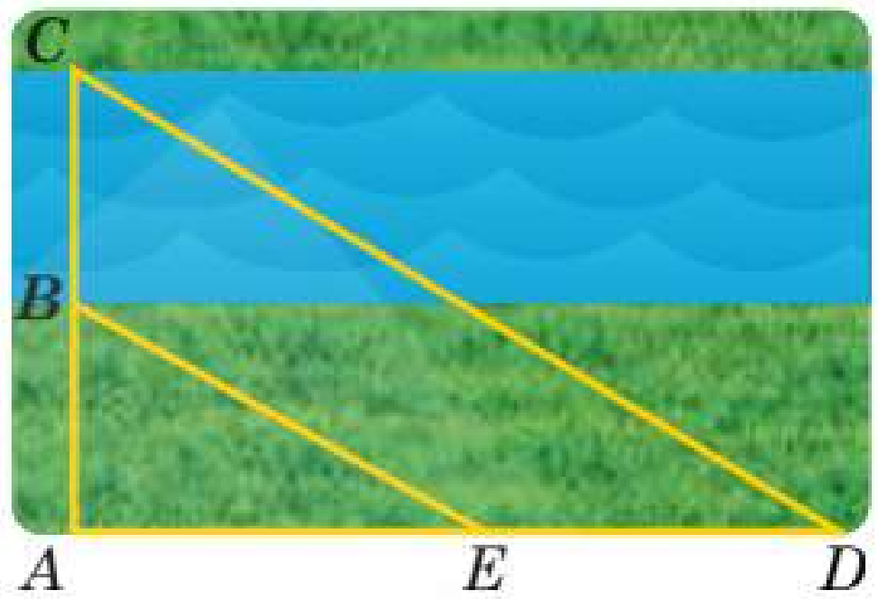
431 За допомогою креслярських інструментів та аркуша в лінійку поділіть відрізок довільної довжини на 8 частин.

432 Через точку M трикутника ABC проведено відрізок MN, паралельний стороні AC. Обчисліть довжину відрізка AM, якщо:

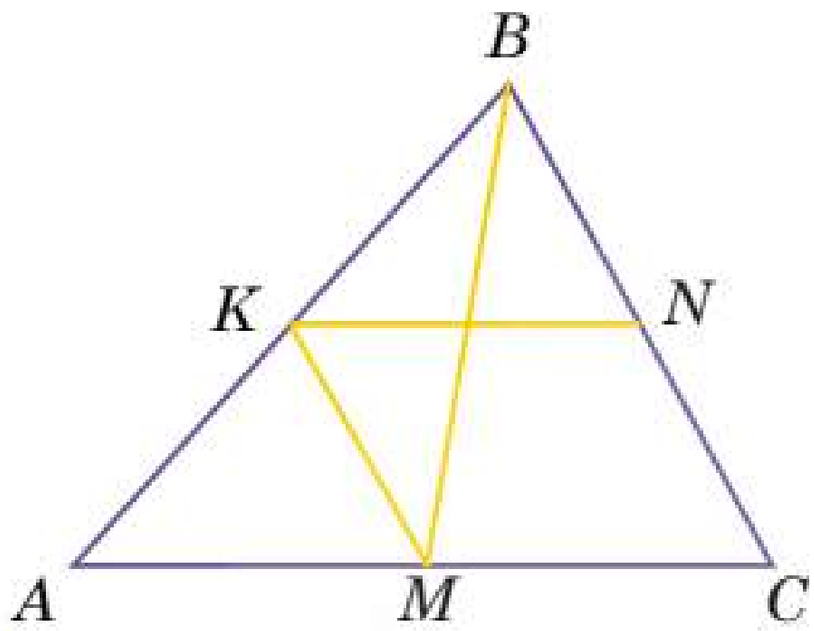
а) $\frac{BN}{NC} = \frac{2}{3}$, $AB = 20$ см;
б) $\frac{BN}{NC} = \frac{3}{5}$, $AB = 8$ дм.

433 Через середину D сторони AB трикутника ABC проведено пряму, яка паралельна AC і перетинає сторону BC у точці E. Знайдіть BC, якщо $BE = 8$ см.

434 На малюнку зображено план місцевості з річкою. Обчисліть ширину річки, якщо на місцевості провели певні вимірювання: $AB = 2$ м, $AD = 7$ м, $AE = 3$ м.



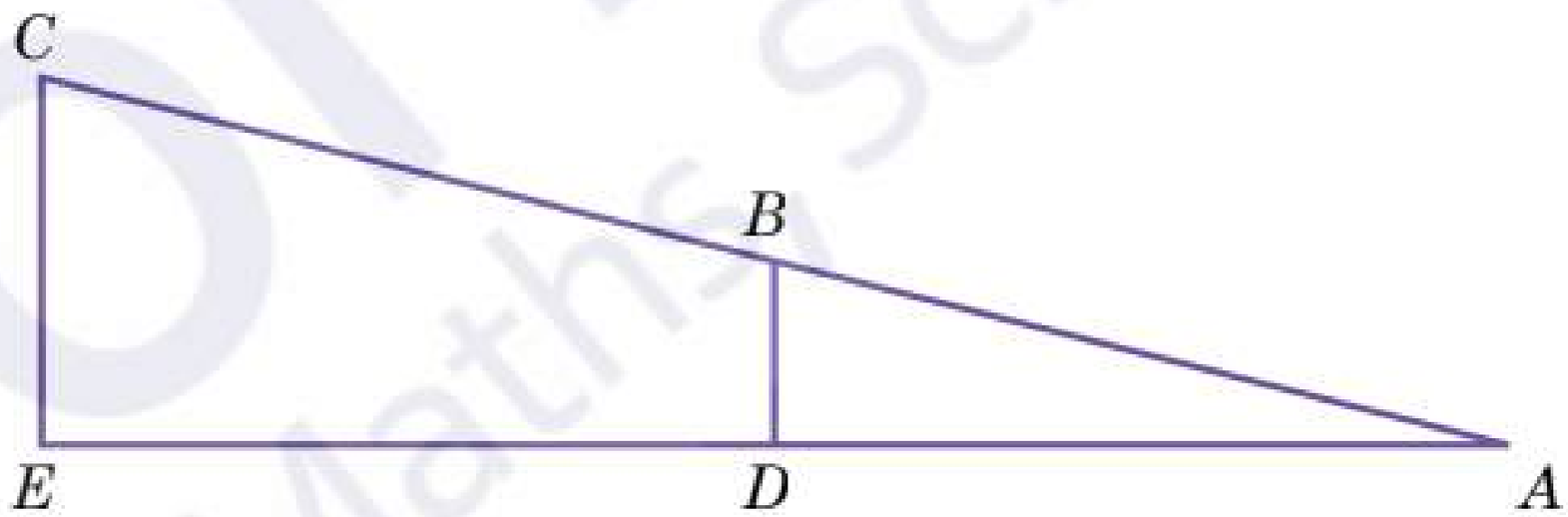
435



У трикутнику ABC проведено медіану BM, $MK \parallel BC$ та $KN \parallel AC$. Знайдіть периметр чотирикутника $AKNC$, якщо $KB = 7$ см, $NB = 6$ см та $MC = 8$ см.

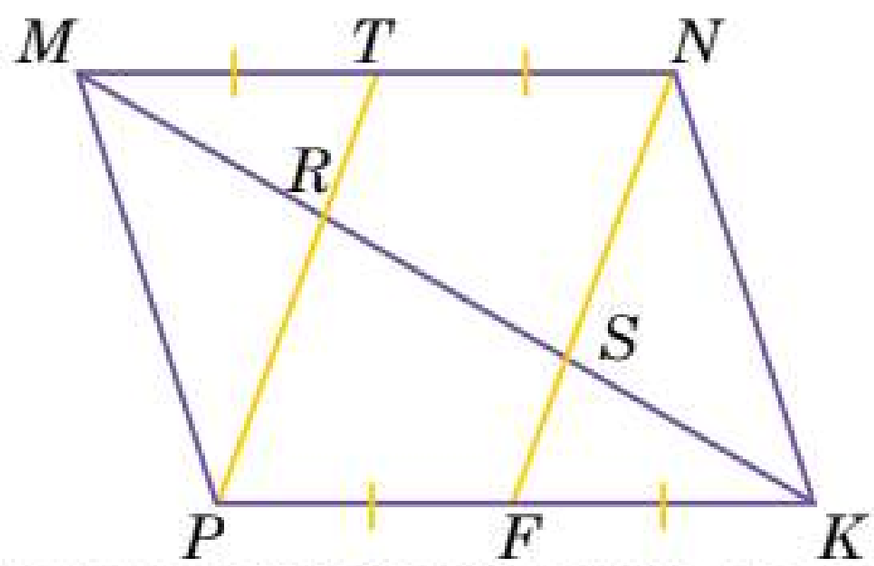
436 На будівельному майданчику необхідно визначити висоту споруди без прямого вимірювання. Інженерна компанія встановила стовп висотою 1,5 м на відстані 6 м від підніжжя будівлі. Довжина тіні стовпа становить 2 м, а тіні від споруди — 8 м. Знайдіть висоту споруди.

437 Інженери хочуть сконструювати трикутну ферму. Знайдіть відстань між верикальними балками BD та CE, якщо відстань між двома точками A та B становить 1,5 м, а між точками C та B — 2 м, $DA = 4$ м. Відомо, що ,що $CE \parallel BD$.



438 Дано три точки A, B, C на прямій, причому A лежить між B і C. Нехай D, E та F — точки на іншій прямій розташовані так, що D лежить між точками E та F. Відомо, що відрізки AB та BC пропорційні відповідно відрізкам DE і EF. Доведіть, що якщо через D і E провести пряму, яка перетинає відрізок EF у точці F, то вона також буде паралельна прямій через A, B і C.

439 Дано: $MNKP$ — паралелограм;
$MT = TN = PF = FK$;
MK — діагональ.
Доведіть: $MR = RS = SK$.



4

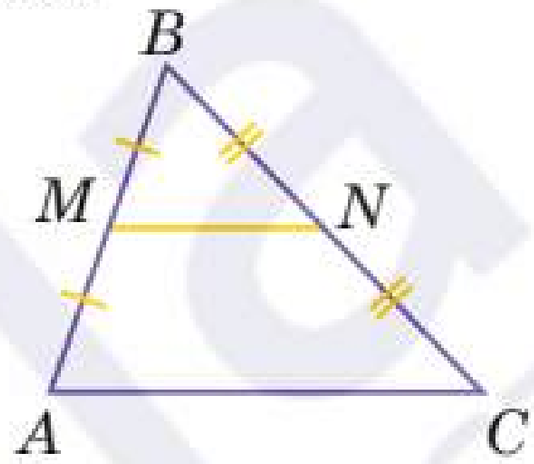
4.3. Середня лінія трикутника та її властивості

Середня лінія трикутника — відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника та є паралельним третій стороні.

Доведення теореми про середню лінію трикутника

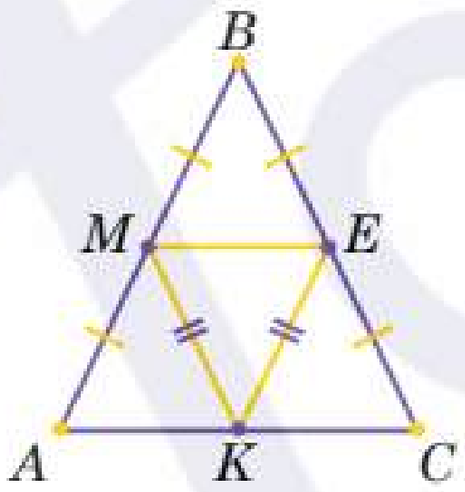
У ΔABC: $AM = MB$, $BN = NC$, $MN \parallel AC$.
Тоді MN — середня лінія ΔABC.

$$MN = \frac{1}{2}AC$$
(половина паралельної сторони)

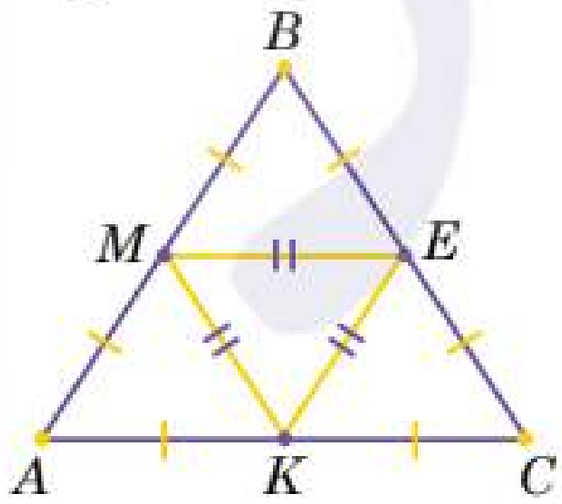


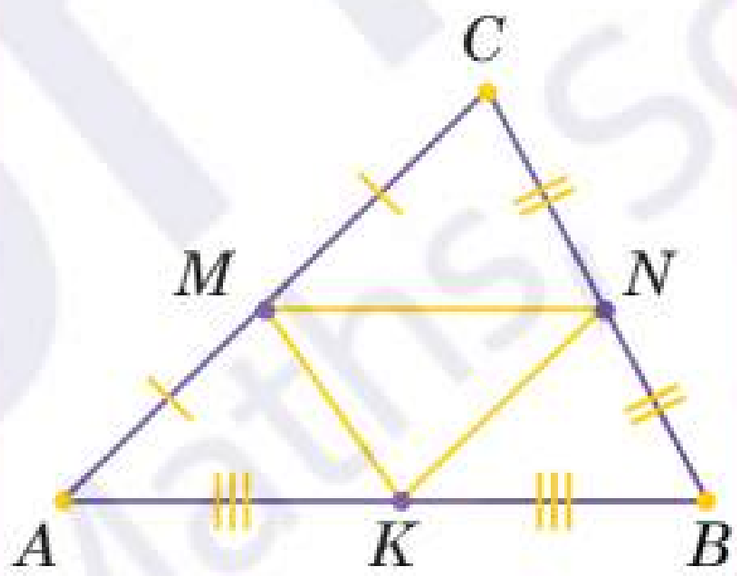
Властивості середньої лінії трикутника

Якщо дві середні лінії трикутника рівні між собою, то трикутник — рівнобедрений.



Якщо всі середні лінії трикутника рівні між собою, то трикутник — рівносторонній.





У будь-якому трикутнику можна провести три середні лінії.
***MN*, *MK*, *NK* — середні лінії трикутника**

Три середні лінії трикутника ділять його на чотири рівні трикутники.
$\Delta AMK = \Delta MCN = \Delta KNB = \Delta NKM$

Периметр трикутника, утвореного всіма середніми лініями трикутника, дорівнює половині периметра цього трикутника.
$$P_{\Delta MNK} = \frac{1}{2}P_{\Delta ACB}$$

Приклад

1 Відношення сторін трикутника дорівнює 2 : 5 : 11. Обчисліть довжини його сторін, якщо трикутник, утворений його середніми лініями, має периметр 45 см.

Розв'язання

Периметр великого трикутника буде вдвічі більшим, оскільки середні лінії вдвічі менші за сторони, до яких вони паралельні. Тоді периметр трикутника буде $45 \cdot 2 = 90$ см.

Складемо рівняння, скориставшись відомим відношенням сторін:

$2x + 5x + 11x = 90$;

$18x = 90$;

$x = 5$.

Отже, сторони трикутника будуть дорівнювати: $2 \cdot 5 = 10$ см, $5 \cdot 5 = 25$ см та $11 \cdot 5 = 55$ см.

Відповідь. 10 см, 25 см та 55 см.

Попрактикуйтеся

440 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Середня лінія ділить трикутник на два рівних трикутники.

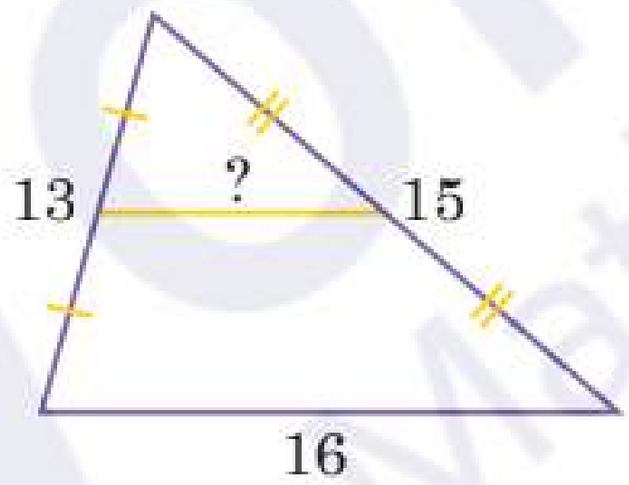
б) Середня лінія трикутника вдвічі менша за будь-яку із сторін трикутника.

в) Три середні лінії трикутника утворюють трикутник, периметр якого вдвічі менший за даний.

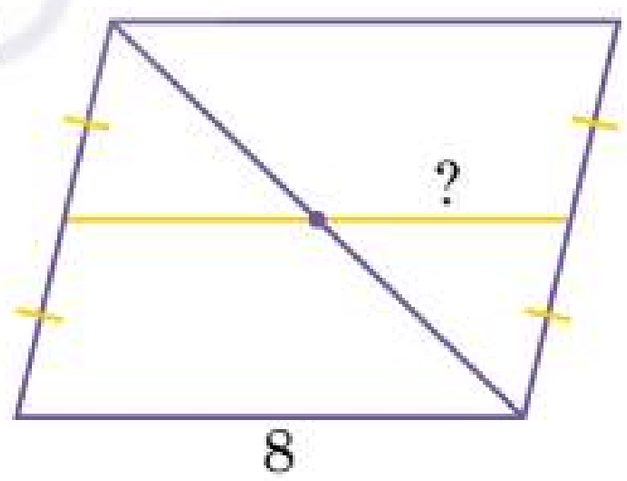
г) Відрізок, паралельний одній із сторін трикутника, є середньою лінією.

441 За даними на рисунку визначте довжину невідомих відрізків.

а)



б)



442 Доведіть вид трикутника, якщо:

а) дві середні лінії трикутника рівні;

б) три середні лінії трикутника рівні;

в) три середні лінії трикутника різні.

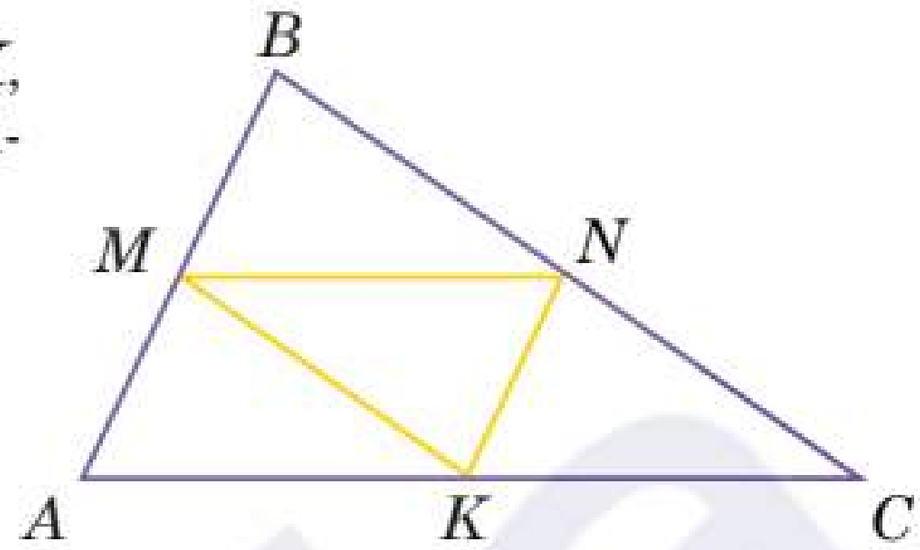
443 Знайдіть периметр рівностороннього трикутника, якщо середня лінія становить 15 см.

444 Обчисліть периметр трикутника, утвореного середніми лініями трикутника з периметром 26 см.

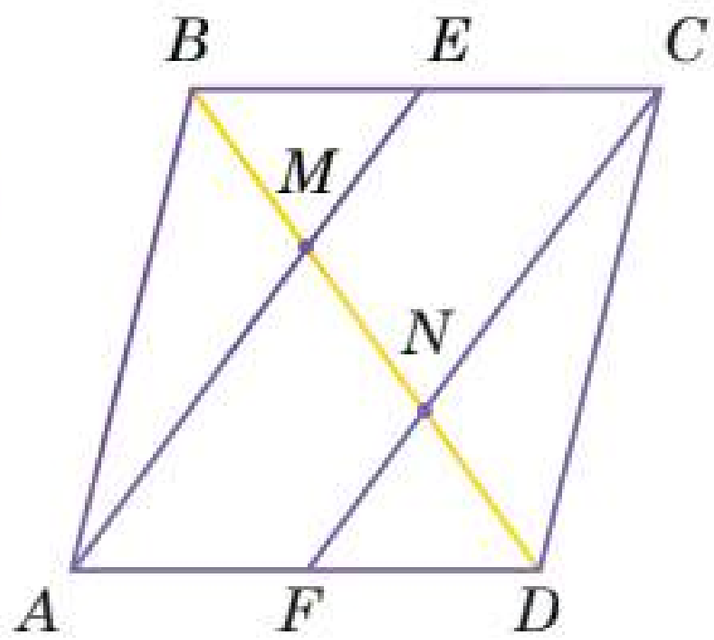
445 Визначте периметр трикутника, якщо периметр трикутника, вершинами якого є середини сторін великого трикутника, дорівнює 18 см.

446 Відношення сторін трикутника дорівнює 4 : 5 : 7. Обчисліть довжини його сторін, якщо трикутник, утворений середніми лініями, має периметр 64 см.

447 * Доведіть рівність трикутників *AMK*, *MBN*, *NKC*, *MNK*, утворених середніми лініями *MN*, *NK*, *KM*.

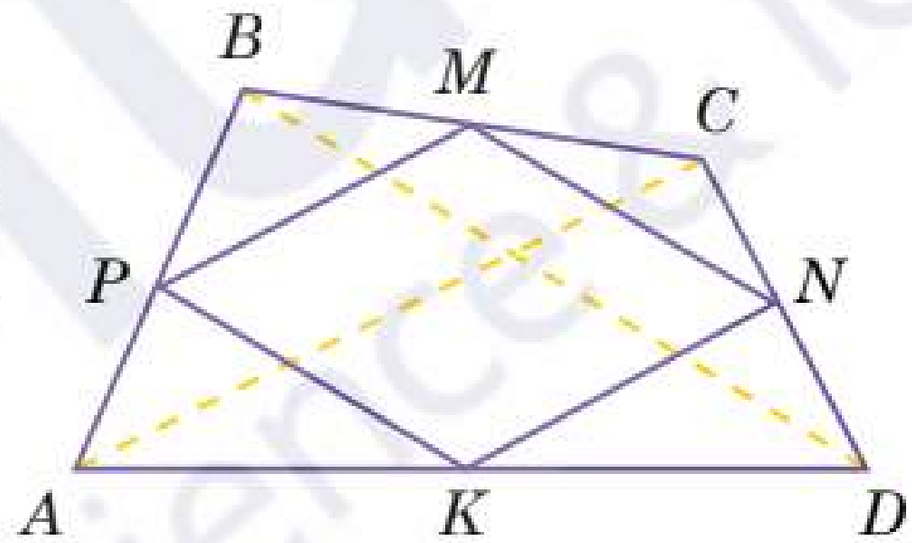


448 *



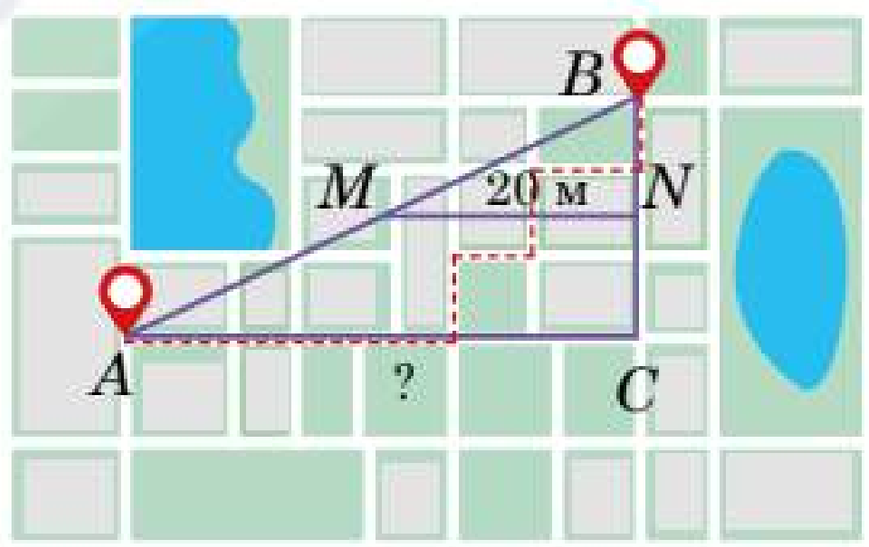
У паралелограмі *ABCD* точки *E* та *F* — середини сторін *BC* та *AD*, *BD* — діагональ. Доведіть, що *BM* = *MN* = *ND*.

449 Точки *P*, *M*, *N*, *K* — середини сторін чотирикутника *ABCD*. Обчисліть периметр чотирикутника *PMNK*, якщо *AC* = 12 см, *BD* = 10 см.



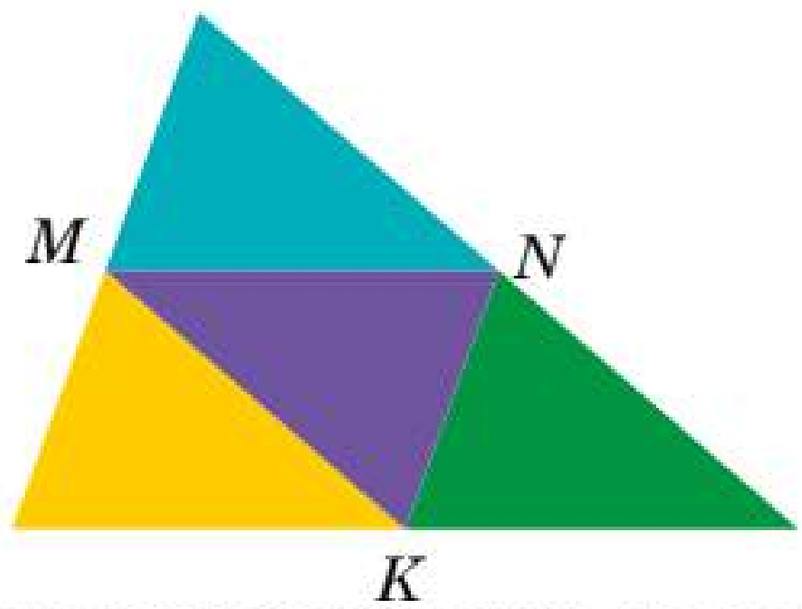
450 За допомогою програми GeoGebra накресліть трикутники різних видів та побудуйте їх середні лінії.

451 Обчисліть відстань від пункту *A* до пункту *B*, якщо відстані між пунктами *A* і *M*, *M* і *B* рівні, а також рівні відстані між *B* і *N*, *N* і *C*. Відповідь обґрунтуйте.



452 Як потрібно розрізати трикутник, щоб скласти з нього прямокутник, квадрат? Чи важливий нам вид трикутника при цьому? Відповідь обґрунтуйте.

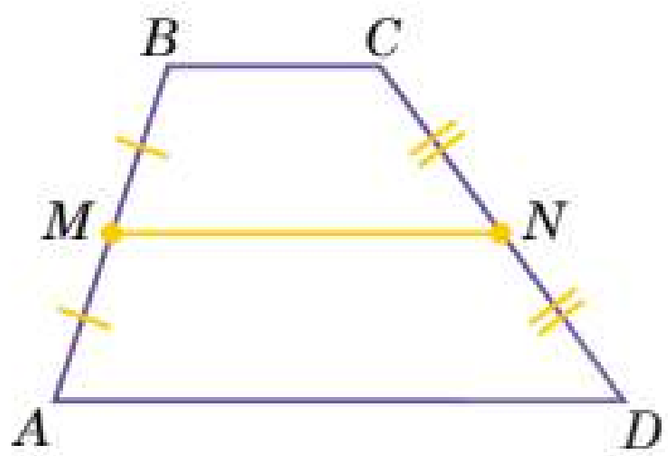
453 Обчисліть площу трикутної ділянки, яку поділено на сектори, як на малюнку. Відомо, що площа одного сектора становить 35 м^2. Точки *M*, *N*, *K* є серединами сторін ділянки. Відповідь обґрунтуйте.



4.4. Середня лінія трапеції та її властивості

4

Середня лінія трапеції — відрізок, що сполучає середини бічних сторін, та є паралельний основам.



$ABCD$ — трапеція, $AD \parallel DC$,
$AM = MB$, $CN = ND$,
MN — середня лінія трапеції.

$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

(півсума основ трапеції)

У механіці та архітектурі середню лінію трапеції часто застосовують для визначення центрів ваги фігур трапецієподібної форми. Вона також сприяє оптимізації розподілу навантажень у будівельних конструкціях.

За допомогою середньої лінії трапеції можна також знайти її площу.

Площа трапеції розраховується за формулою:

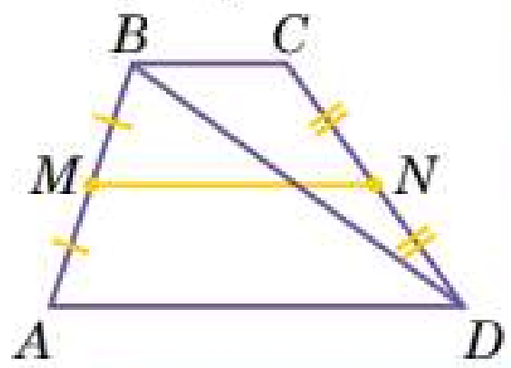
$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

де $\frac{a+b}{2}$ — півсума основ, а за визначенням це середня лінія трапеції.

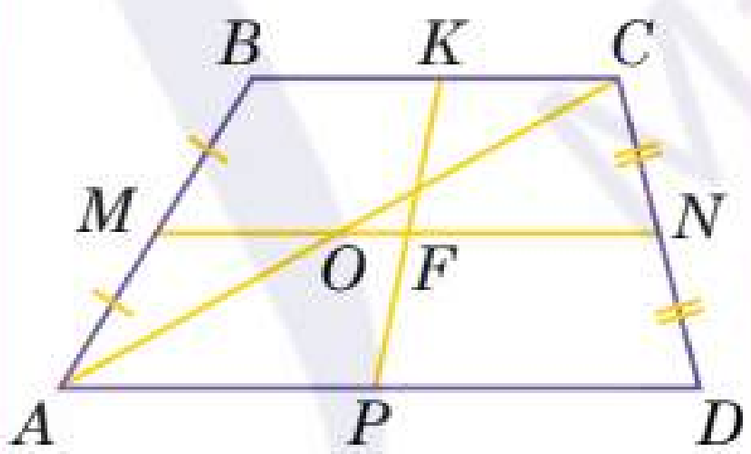
Звідси **площу трапеції можна обчислити за такою формулою:**

$S = m \cdot h$, де m — середня лінія трапеції.

Якщо у трапеції провести діагональ, то її середня лінія стане середньою лінією для утворених трикутників:

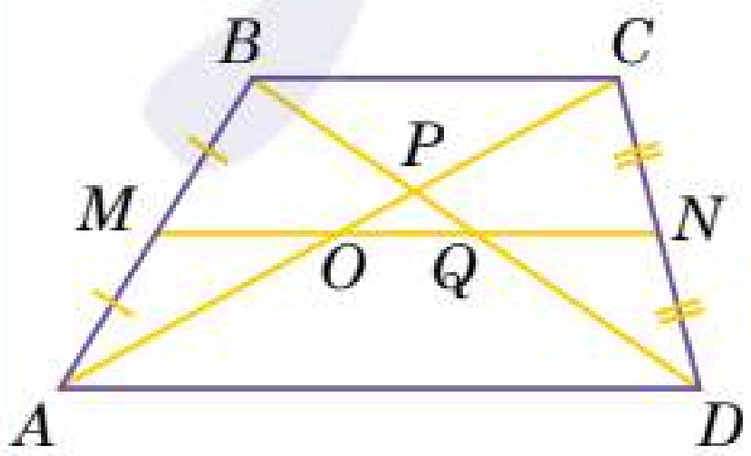


Властивості середньої лінії трапеції



Середня лінія трапеції ділить навпіл будь-який відрізок, кінці якого знаходяться на її основах.

$$KF = FP = \frac{KP}{2}$$



Діагоналі точкою перетину із середньою лінією діляться навпіл.

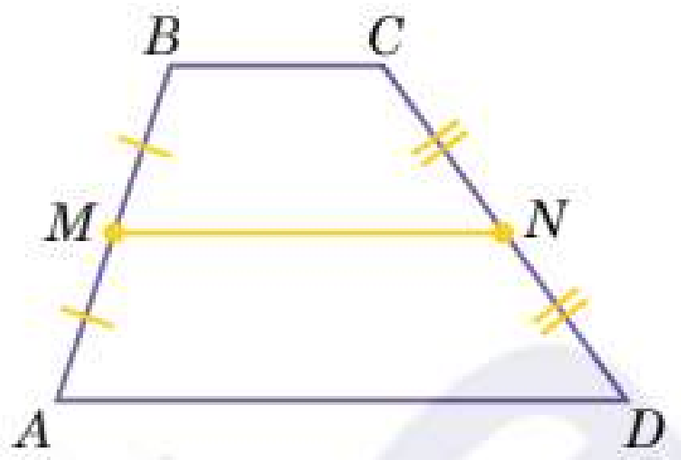
$AC \cap NM = P$, $AP = PC$
$BD \cap NM = Q$, $BQ = QD$

Доведення теореми про середню лінію трапеції

Приклад

1 Периметр трапеції становить 85 см, а її бічні сторони — 15 см і 14 см. Обчисліть середню лінію трапеції.

Розв'язання



$ABCD$ — трапеція, $AD \parallel DC$,
$AB + BC + CD + AD = 85$ см.
$AB + CD = 14 + 15 = 29$ см,

Звідси $BC + AD = 85 - 29 = 56$ см.

Середня лінія $MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{56}{2} = 28$ см.

Відповідь. 28 см.

Приклад

2 Обчисліть площу трапеції, якщо її середня лінія дорівнює 25 см, а висота — 13 см.

Розв'язання

Оскільки площа трапеції дорівнює добутку середньої лінії на висоту $S = m \cdot h$, то $S = 25 \cdot 13 = 325$ см^2.

Відповідь. 325 см^2.

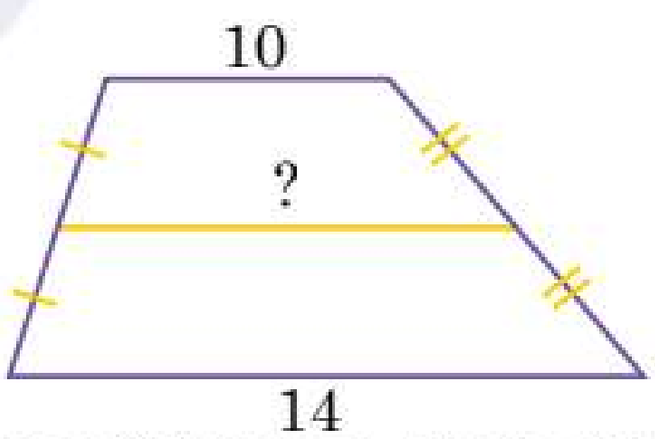
Попрактикуйтеся

454 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

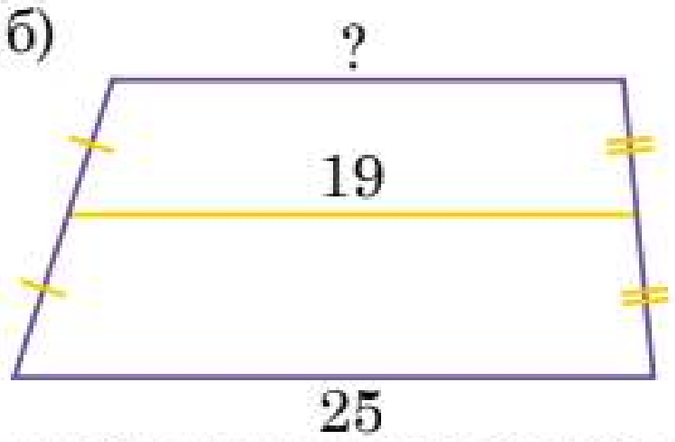
а) Середня лінія трапеції залежить від довжини бічних сторін.
б) Площа трапеції залежить від середньої лінії.
в) Якщо відрізок паралельний двом основам, то це середня лінія трапеції.
г) Відрізок, що з'єднує середини бічних сторін трапеції, завжди паралельний її основам.

455 Користуючись рисунками, обчисліть довжину невідомих відрізків.

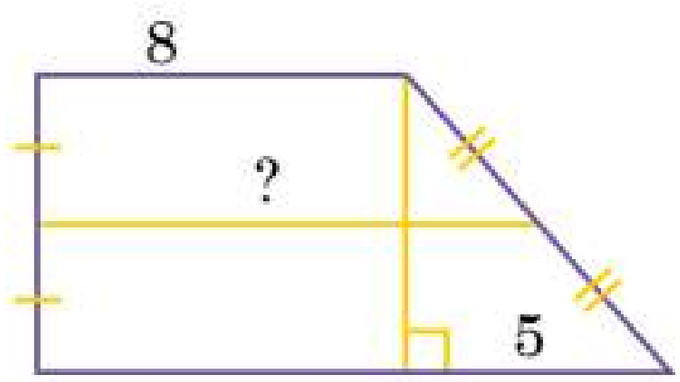
а)



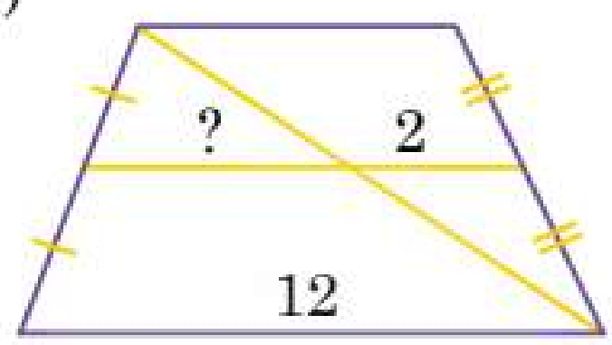
б)



в)



г)



456 Обчисліть основи трапеції a та b, середня лінія якої дорівнює 40 см, якщо:

а) $a = b + 5$; б) $b = \frac{a}{3}$; в) $a : b = 2 : 3$.

457 Обчисліть основи трапеції, середня лінія якої дорівнює 36 см, якщо:

а) одна з основ менша на 3 см;
б) одна з основ утричі більша;
в) їх відношення дорівнює 5 : 4.

458 За допомогою програми GeoGebra побудуйте трапецію, середню лінію та одну діагональ. Проаналізуйте доведення теореми про середню лінію трапеції. Як вона пов'язана із середньою лінією трикутника?

459 Бічна сторона рівнобічної трапеції дорівнює 12 см, середня лінія — 9 см. Обчисліть периметр такої фігури.

460 Периметр трапеції становить 100 см, її бічні сторони дорівнюють 25 см і 15 см. Обчисліть середню лінію.

461 Висота рівнобічної трапеції, проведена з вершини тупого кута, ділить основу на відрізки 15 см і 3 см. Обчисліть середню лінію трапеції.

462 Обчисліть площу трапеції, якщо її середня лінія становить 12 см, а висота — 5 см.

463 Обчисліть висоту трапеції, якщо її площа становить 162 см^2, а середня лінія дорівнює 18 см.

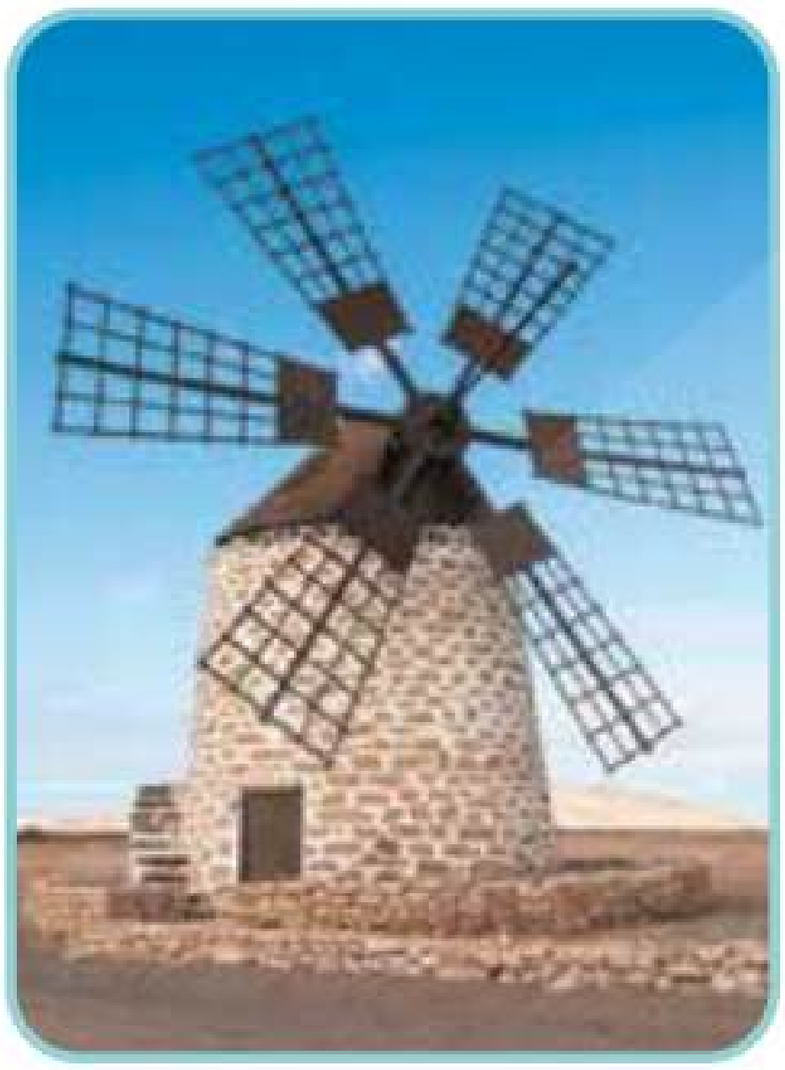
464* У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) бічну сторону поділено на три рівні частини та проведено відрізки A_1D_1 та A_2D_2 паралельно до основ. Відомо, що $AD = 11$ см, $BC = 8$ см. Обчисліть довжини відрізків A_1D_1 та A_2D_2.

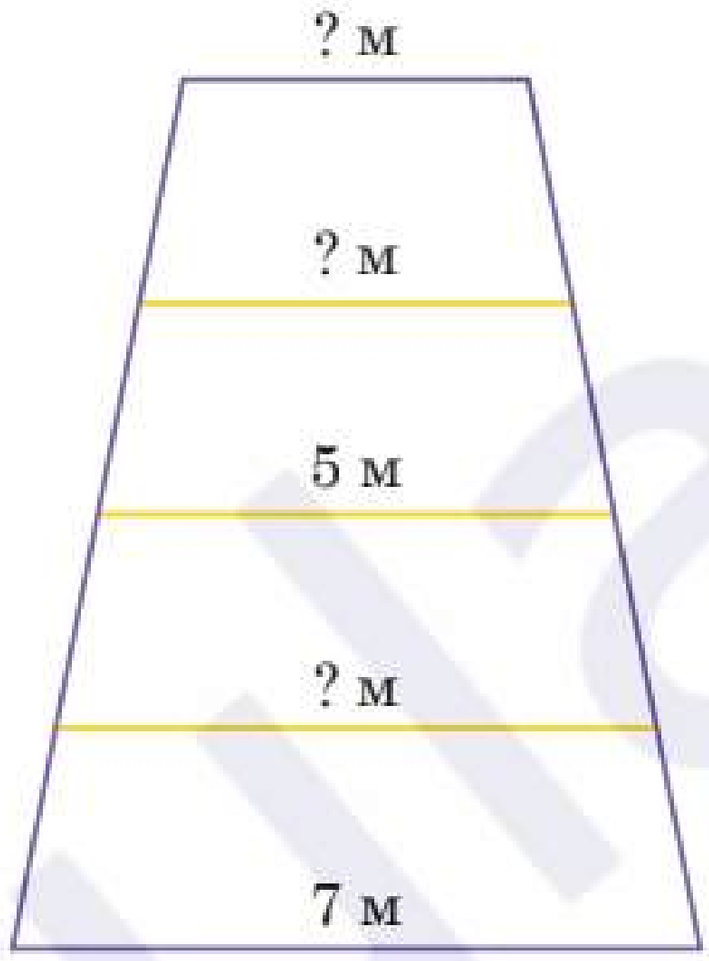
465* Обчисліть периметр рівнобічної трапеції, якщо діагональ є бісектрисою гострого кута і ділить середню лінію на відрізки довжиною 4 см і 6 см.

466 Прямокутна трапеція ділиться діагоналлю на рівносторонній трикутник зі стороною a і прямокутний трикутник. Обчисліть середню лінію трапеції.

467 У трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) діагональ BD поділила середню лінію MN на відрізки, пропорційні числам 5 : 1, $AD = 24$ см. Обчисліть BC.

468 Обчисліть ширину лопаті вітряка на різних відстанях, якщо відомо, що кожна наступна ширина є середньою лінією трапеції, яка утворюється двома іншими широтами.





469 Обчисліть, на скільки вужчим буде дно коробки для попкорну порівняно з верхівкою, якщо середня лінія стінки коробки, що має вигляд трапеції, дорівнює 12 см, а ширина дна вдвічі вужча за середню лінію.

470 Доведіть, що з однакових плиток, які мають форму рівнобедренної трапеції, можна скласти паркет, який повністю покриває будь-яку частину підлоги.

471 Середня лінія трапеції дорівнює 7 см, а одна з її основ на 4 см більша від другої. Знайдіть основи трапеції.

472 Рівнобічну трапецію із довжиною середньої лінії 10 см описали навколо кола. Знайдіть довжину бічної сторони трапеції.

473 Висота, проведена з вершини тупого кута рівнобічної трапеції, ділить більшу основу на частини, що мають довжини c і d ($c > d$). Знайдіть середню лінію трапеції.

474 Розріжте рівнобічну трапецію на дві частини так, щоб з них можна було скласти паралелограм, кути якого дорівнюють кутам даної трапеції. Обгрунтуйте, чому утворена фігура має такі властивості.

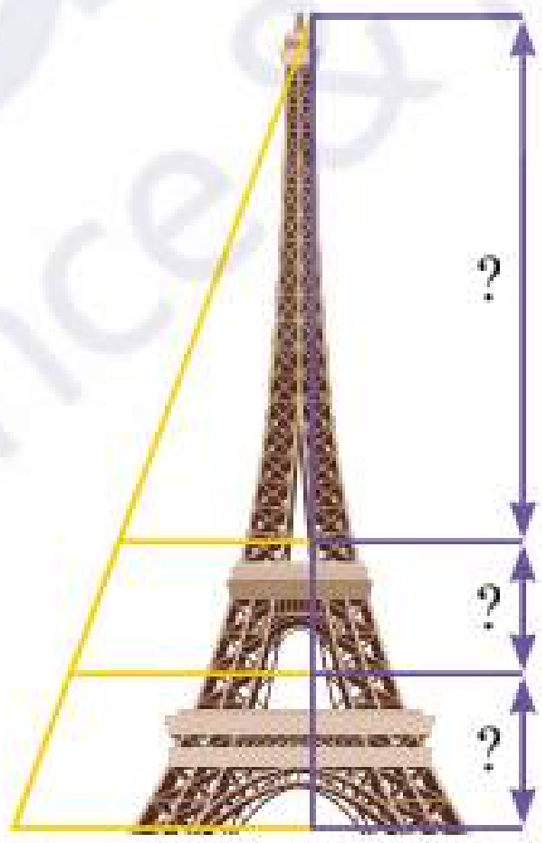
475 Доведіть, що якщо прямі, на яких лежать основи трапеції, дотикаються до кола і точки дотику належать основам, то середня лінія трапеції проходить через центр кола.

4.5. Розв'язування задач практичного змісту

476 На мапі виміряйте відстань між Житомиром і Києвом. Обчисліть дійсну відстань між містами у кілометрах, якщо масштаб мапи 1 : 2000000.

477 Висоти плодових дерев у саду відносяться як 2 : 3 : 5 : 7, висота найнижчого з них становить 0,76 м. Обчисліть висоти решти дерев.

478 Одним із символів Франції незмінно залишається Ейфелева вежа висотою 325 м. Обчисліть відстані між поверхами вежі. Конструкцію сприймайте у вигляді рівнобедреного трикутника. Відношення довжини бічного ребра є 1 : 1 : 3,6, починаючи з основи. Відповідь округліть до сотих.



479 Тінь, яку відкидає Київська телевежа висотою 380 м, становить 240 м. Обчисліть довжину тіні, яку відкидає Харківська телевежа висотою 240,7 м у той самий час дня. Відповідь округліть до сотих.

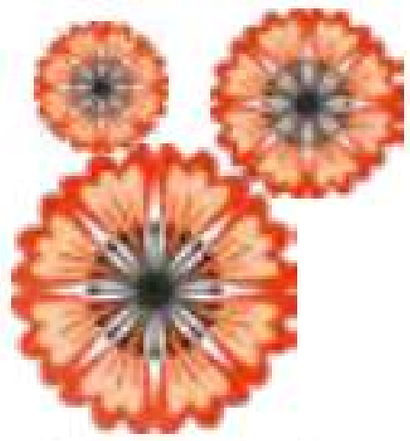
480 Обчисліть розміри нижньої полички для книг, користуючись даними на малюнку. Довжина верхньої полички становить 30 см.

481 На фермі планують побудувати загін у формі рівнобічної трапеції з довжиною однієї основи 12 м, а іншої основи — 6 м. Вони хочуть прокласти доріжку вздовж середньої лінії. Обчисліть, якої довжини буде ця доріжка. Чи можна розмістити в цьому загоні додаткову прямокутну ділянку для корму, розміри якої 3 м на 4 м, за умови, що бічні сторони трапеції дорівнюють 5 м кожна?

482 Як потрібно скласти хустинку у вигляді рівностороннього трикутника, щоб її розміри стали меншими, проте форма залишилася без змін? Виріжте трикутник з паперу та продемонструйте.

483 За допомогою програми GeoGebra побудуйте трикутник та поділіть його на три трапеції і трикутник. Відповідь аргументуйте.

4.6. Подібність геометричних фігур



Іноді ми можемо побачити фігуру, наприклад квітку, у зменшеному вигляді, яка є меншою за оригінал, або у збільшеному вигляді, яка є більшою за оригінал. Але в загальному кожна з них є подібною до іншої.

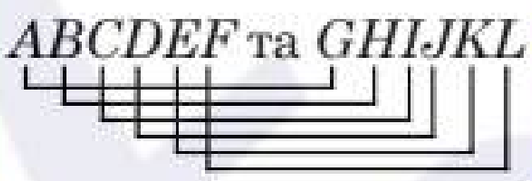
Подібність — це властивість мати спільні риси.

Подібними фігурами можуть бути не тільки квіти. Якщо змінити (збільшити або зменшити) всі розміри будь-якої плоскої фігури в одну й ту ж кількість разів, тоді стара і нова фігури називаються подібними за умови, що у двох подібних фігурах будь-які відповідні кути рівні.

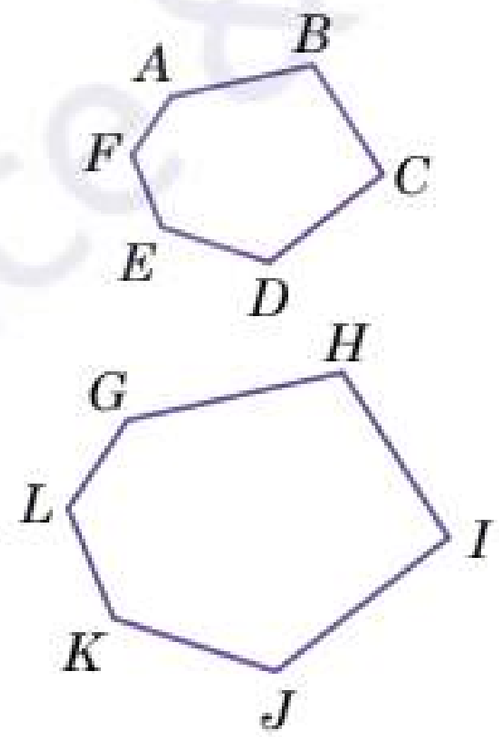
Фігури є подібними, якщо вони мають однакову форму, але різний розмір.

Називаючи подібні фігури, ми можемо розставити назви вершин у такій послідовності, щоб вони відповідали одна одній. Наприклад, ми пишемо:

ABCDEF та *GHIJKL*



Шестикутники мають однакову форму, але різний розмір. Отже, многокутник *ABCDEF* та многокутник *GHIJKL* — подібні.



Якщо фігури є подібними, то їх відповідні сторони пропорційні.

Якщо фігури є подібними, то їх відповідні кути рівні.

Оскільки шестикутник *ABCDEF* та шестикутник *GHIJKL* — подібні, то:

$$\frac{AB}{GH} = \frac{BC}{HI} = \frac{CD}{IJ} = \frac{DE}{JK} = \frac{EF}{KL} = \frac{FA}{LG}$$

$$\angle ABC = \angle GHI;\ \angle GLK = \angle AFE;\ \ldots$$

Властивості подібних геометричних фігур:

Кути між відповідними сторонами подібних фігур рівні
Відрізки переходять у відрізки, промені — в промені, прямі — в прямі. Зберігається розміщення точок на прямій
Будь-яка фігура подібна сама собі
Якщо перша фігура подібна другій фігурі, то друга фігура також подібна першій фігурі
Якщо перша фігура подібна другій фігурі, а друга фігура подібна третій фігурі, то перша фігура подібна третій фігурі

З геометричних фігур завжди подібні

Квадрати | Рівносторонні трикутники | Кола

Коефіцієнт подібності

Коефіцієнт подібності є числом, яке встановлює пропорційний зв'язок між сторонами подібних геометричних фігур. Наприклад, якщо сторона першої фігури вдвічі довша за відповідну їй другу сторону подібної фігури, то й інша сторона буде вдвічі більшою за подібну до неї в другій фігурі. А 2 — це і є коефіцієнт подібності для цього прикладу.

Число, якому дорівнює відношення відповідних сторін подібних геометричних фігур, називають коефіцієнтом подібності й позначають k.

$$k = \frac{\text{сторона подібної фігури}}{\text{сторона поданої фігури}}$$

Якщо коефіцієнт подібності менший ніж 1, то подібна фігура менша за дану фігуру.

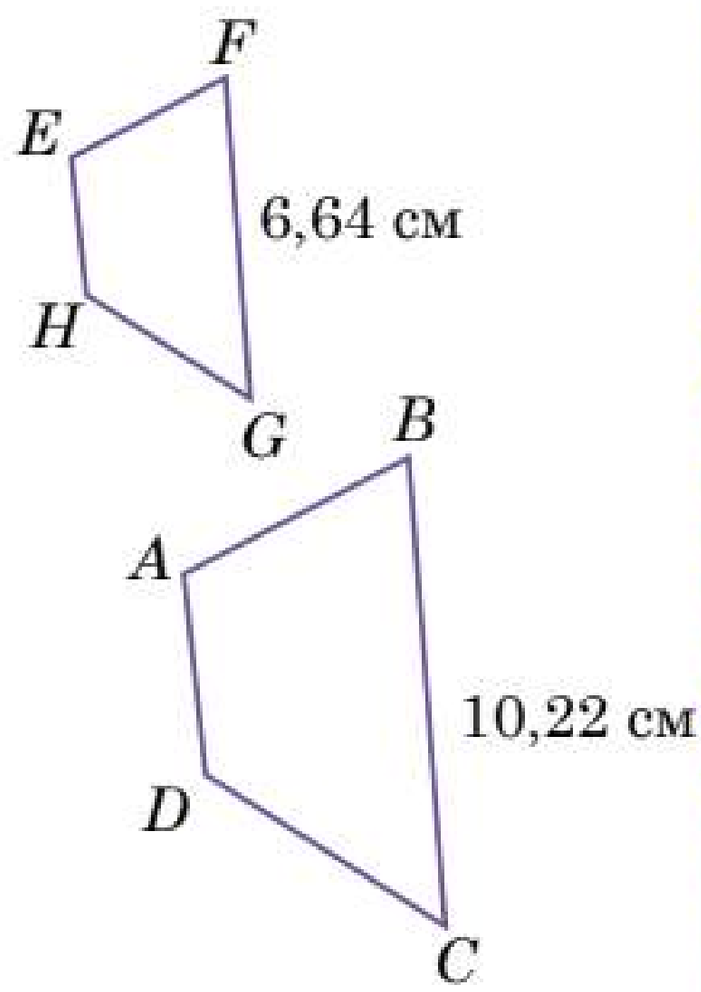
Якщо коефіцієнт подібності більший ніж 1, то подібна фігура більша від даної фігури.

Якщо коефіцієнт подібності рівний 1, то подібна фігура рівна з даною фігурою.

Приклад

1 Запишіть співвідношення відповідних сторін подібних чотирикутників $ABCD$ та $EFGH$. Знайдіть коефіцієнт подібності цих чотирикутників (відповідь потрібно округлити до 2 знаків після коми).

Розв'язання



Запишемо відношення відповідних сторін подібних чотирикутників:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE}.$$

Обчислимо коефіцієнт подібності даних чотирикутників.

Оскільки BC та FG — відповідні сторони даних чотирикутників, то

$BC = 13{,}2$ см; $FG = 6{,}4$ см (за умовою).

Звідси знайдемо коефіцієнт подібності:

$$k = \frac{BC}{FG} = \frac{13{,}2}{6{,}4} = 2{,}0625 \approx 2{,}06.$$

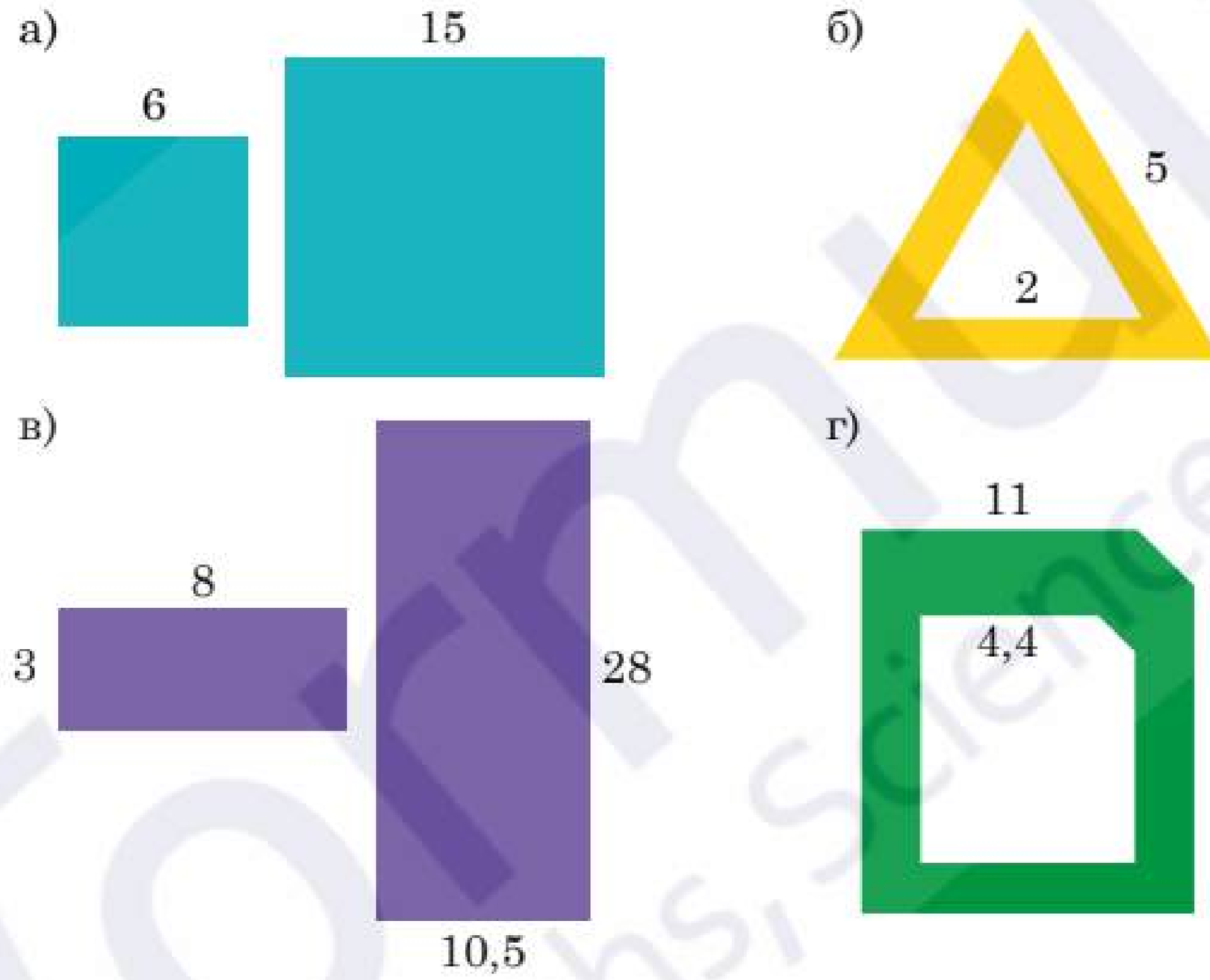
Відповідь. $k = 2{,}06$.

Попрактикуйтеся

484 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) У подібних фігур кути пропорційні.
б) У подібних фігур сторони пропорційні.
в) Квадрат є подібний іншому квадрату.
г) Рівносторонній трикутник подібний довільному трикутнику.

485 За даними на рисунку визначте співвідношення подібних фігур.



486 За допомогою програми GeoGebra накресліть довільний n–кутник та побудуйте подібні до нього фігури (більші, менші).

487 Обчисліть співвідношення довжини та ширини державного стягу України, якщо найбільший з них має розміри 30 м на 45 м.

488 Шестикутник $ABCDEFG$ подібний до шестикутника $MNKPRS$. Заповніть пропуски.

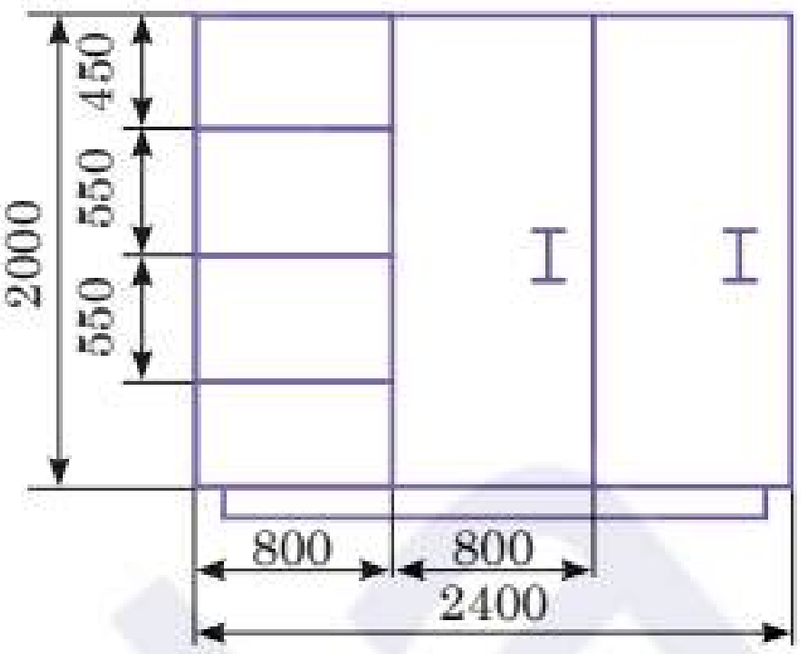
а) $\angle A = \angle \square$, $\angle P = \angle \square$; б) $\frac{PR}{\square} = \frac{\square}{CD}$.

489 Обчисліть коефіцієнт подібності двох правильних чотирикутників із площами 25 см^2 і 49 см^2.

490 У трикутнику ABC проведіть середню лінію MN, паралельну стороні AC. Обчисліть коефіцієнт подібності двох трикутників.

491 У трикутнику ABC проведіть MN, паралельну стороні AC так, що $AM : MB = 3 : 2$. Знайдіть відношення $AB : MB$.

492 Користуючись схемою шафи та її розмірами в міліметрах, знайдіть подібні фігури та обчисліть коефіцієнт подібності. Для розрахунків скористайтеся калькулятором.



493 За допомогою програми GeoGebra накресліть два подібних квадрати. Знайдіть їх коефіцієнт подібності, а також проаналізуйте коефіцієнт подібності площ цих квадратів, виконавши потрібні обчислення.

494 Протяжність України із заходу на схід наближено дорівнює 1270 км, а з півночі на південь — 900 км. Який необхідно взяти масштаб, щоб намалювати карту України найбільш можливого розміру на аркуші учнівського зошита?

495 Знайдіть відношення відрізків AB і CD, якщо $AB = 15$ см, а $CD = 20$ см. Чи зміниться це відношення, якщо довжину відрізків виразити в метрах та кілометрах?

496 Побудуйте три прямокутники, подібні до прямокутника зі сторонами 1 см та 3 см.

497 * Дано три довільні фігури: F_1, F_2 та F_3. Відомо, що коефіцієнт подібності фігури F_1 до фігури F_2 дорівнює 3, а коефіцієнт подібності F_2 до F_3 дорівнює k. Чому дорівнює коефіцієнт подібності F_1 до F_3?

498 * Доведіть, що фігура, подібна колу, є коло.

499 * Доведіть, що бісектриса кута трикутника ділить протилежну сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам трикутника.

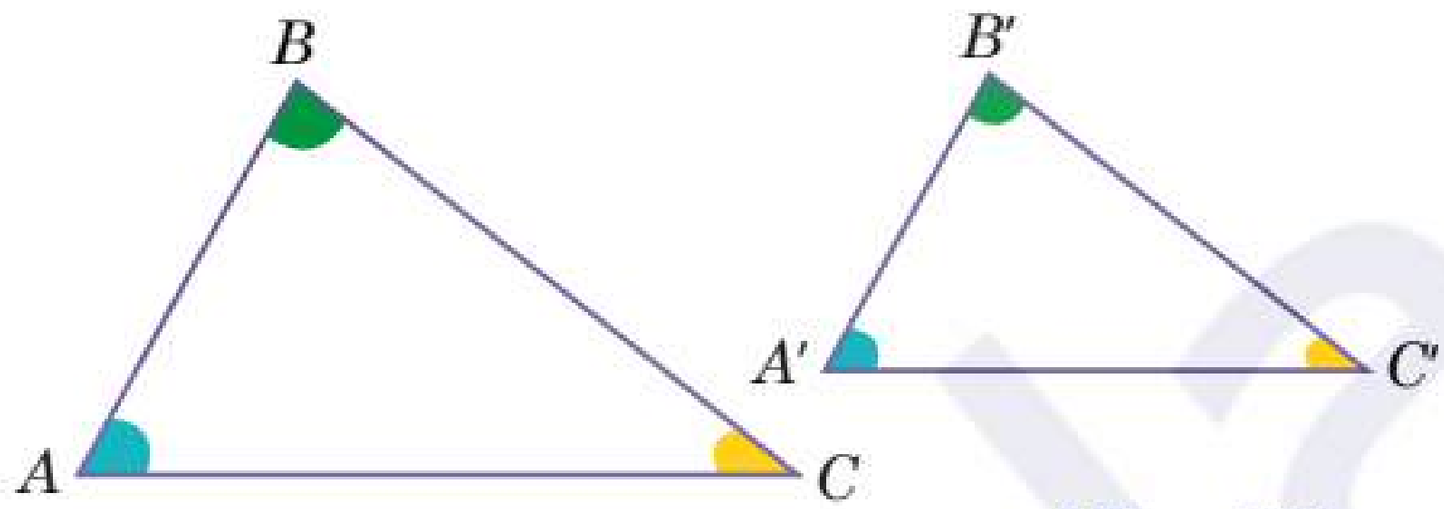
500 EN Given the line segment PQ, an internal point R divides the segment such that the ratio of PR to PQ is 2 : 5. If $PR = 40$ cm, find the length of PQ and RQ.

line segment — відрізок
the internal point — внутрішня точка
ratio — співвідношення
equal — рівні

4

4.7. Подібність трикутників. Ознаки подібності трикутників

Трикутники називають **подібними**, якщо вони мають рівні кути та пропорційні відповідні сторони.



$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$ і $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$

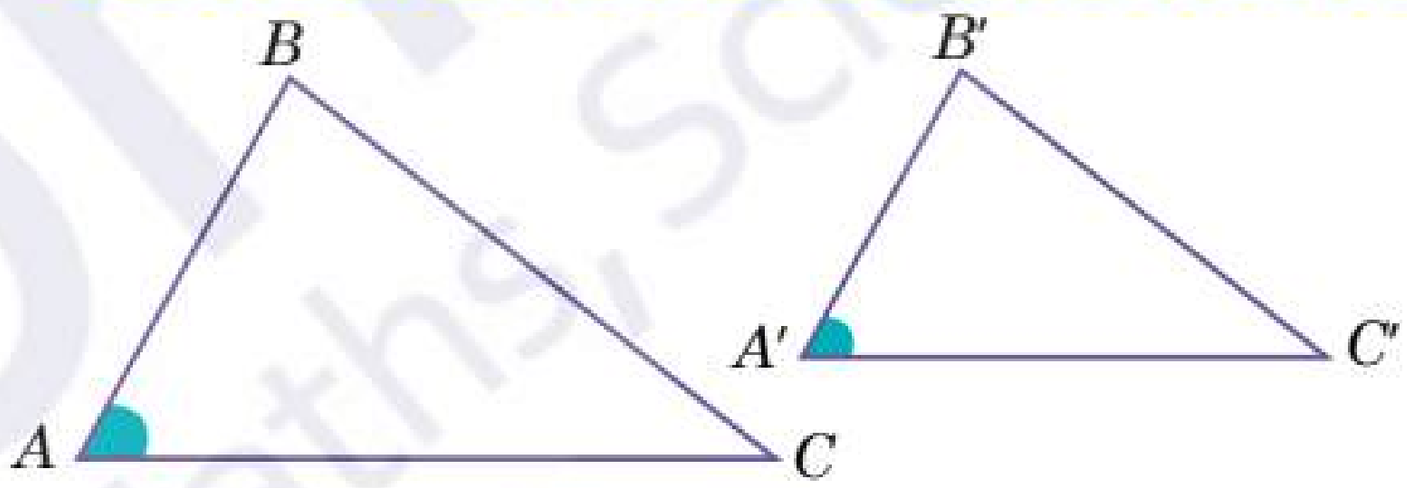
Подібність трикутників часто використовують у будівництві та архітектурі під час проєктування споруд або металевих конструкцій.

Ознаки подібності трикутників

І ознака (за двома сторонами та кутом між ними)

Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого та кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники є подібними.

Можемо для запам'ятовування ввести абревіатури: І ознака – СКС, де К – кут, С – сторона.

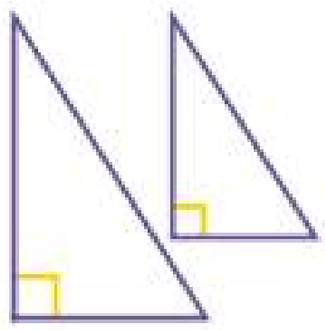
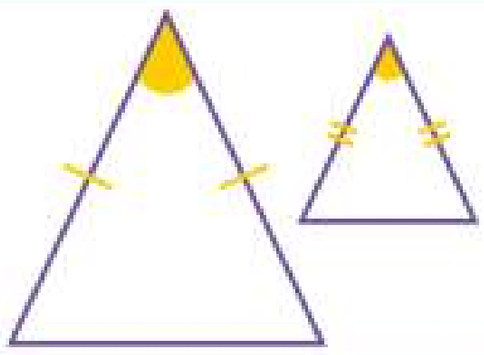


$\angle A = \angle A'$ і $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, то $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

ІІ ознака – КК.

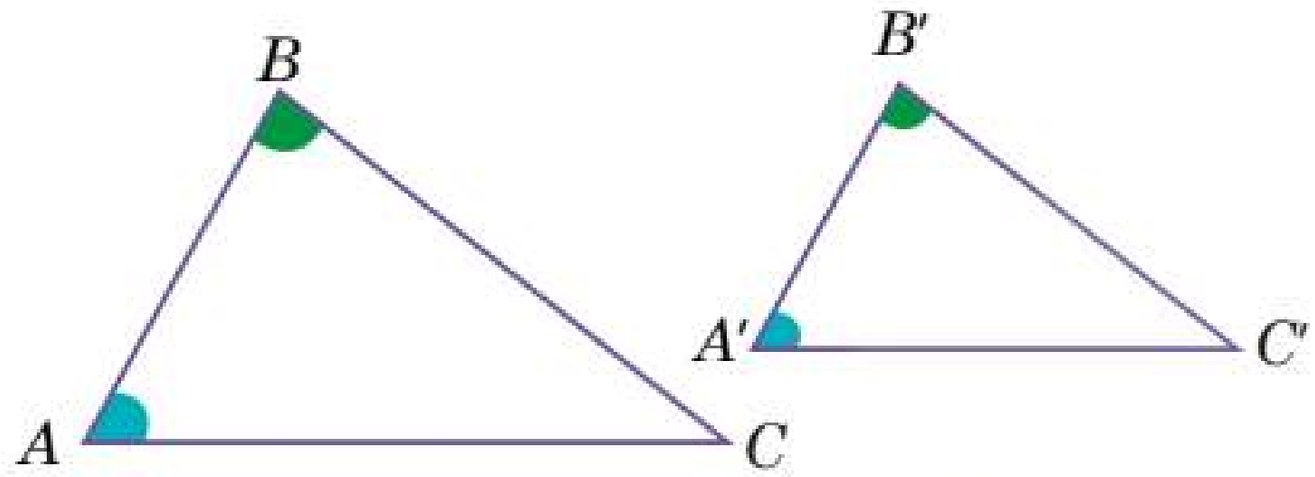
ІІІ ознака – ССС.

Наслідки

	Якщо катети одного прямокутного трикутника пропорційні катетам іншого, то такі трикутники подібні
	Якщо кут при вершині одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при вершині іншого, то такі трикутники подібні

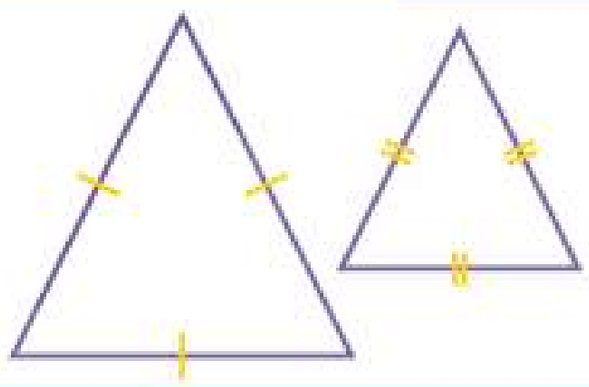
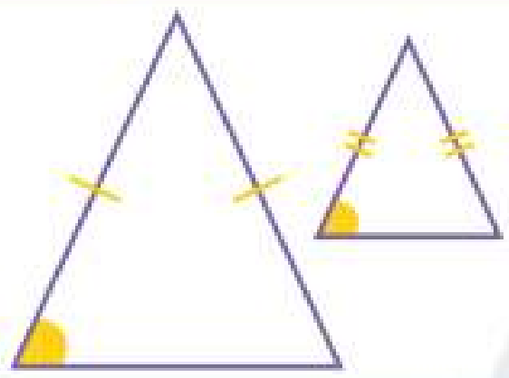
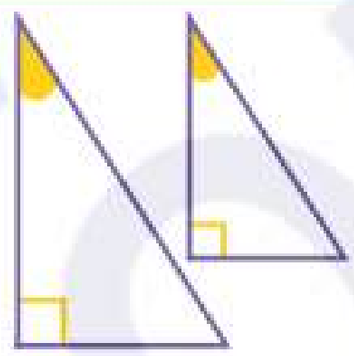
Доведення ознак подібності трикутників

II ознака (за двома кутами)
Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам іншого, то такі трикутники є подібними.

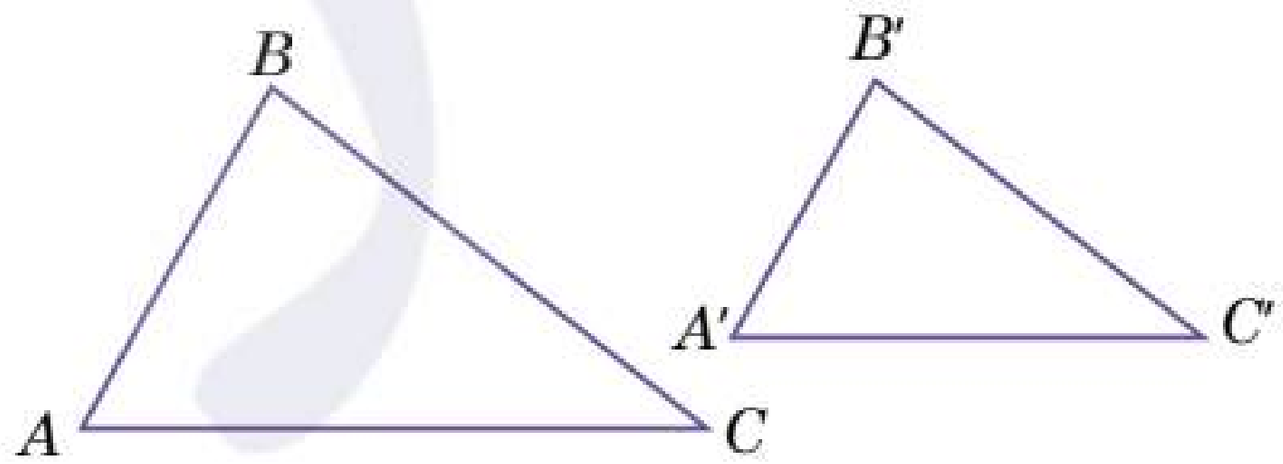


$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$,
то $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Наслідки

	Два рівносторонні трикутники є подібними
	Якщо кут при основі одного рівнобедреного трикутника дорівнює куту при основі іншого, то такі трикутники подібні
	Якщо гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнює гострому куту іншого, то такі трикутники є подібними

III ознака (за трьома сторонами)
Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого, то такі трикутники є подібними.



$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$, то
$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

Щоб розв'язати багато життєвих завдань, використовують подібність трикутників, а саме ознаки подібності трикутників. Ці ознаки аналогічні до ознак рівності трикутників. Для доведення всіх трьох ознак подібності трикутників використовується певна ознака рівності трикутників.

Приклад

1 Обчисліть сторони подібного трикутника до трикутника зі сторонами 9 см, 11 см і 14 см, якщо менша сторона подібного трикутника дорівнює 18 см.

Розв'язання

Оскільки трикутники подібні, то відношення їх сторін запишемо як:
$\frac{9}{18} = \frac{11}{x} = \frac{14}{y}$.

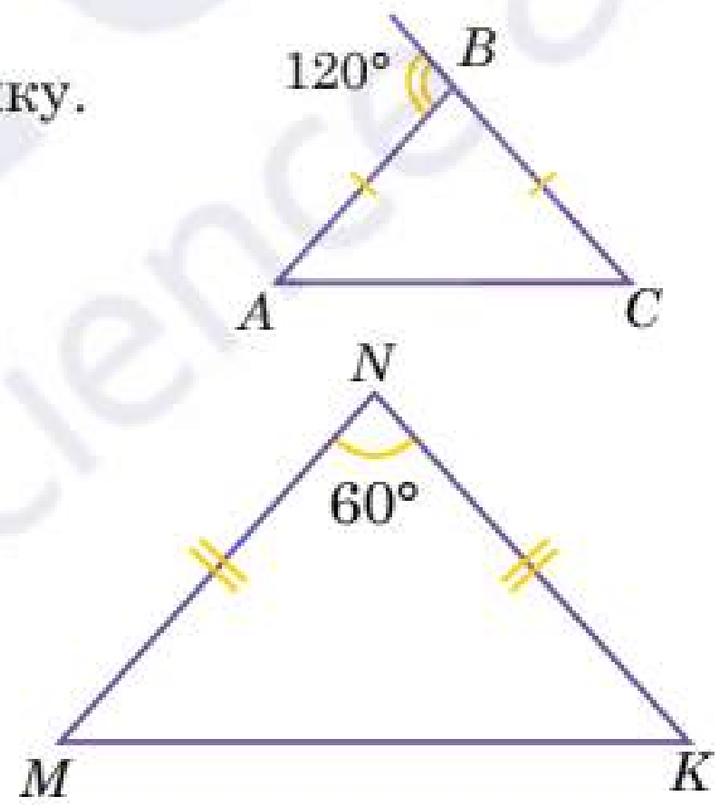
Звідси знайдемо x: $\frac{9}{18} = \frac{11}{x}$;
$x = \frac{18 \cdot 11}{9} = 22$ (см).

Аналогічно шукаємо y: $y = \frac{18 \cdot 14}{9} = 28$ см.

Відповідь. 22 см та 28 см.

Приклад

2 Доведіть подібність трикутників на рисунку.



Розв'язання

ΔABC та ΔMNK — рівнобедрені,
$\angle ABC = 180° - 120° = 60°$.

Відповідно, кути при основі в обох трикутниках рівні, тому $\Delta ABC \sim \Delta MNK$ за двома кутами.

Доведено.

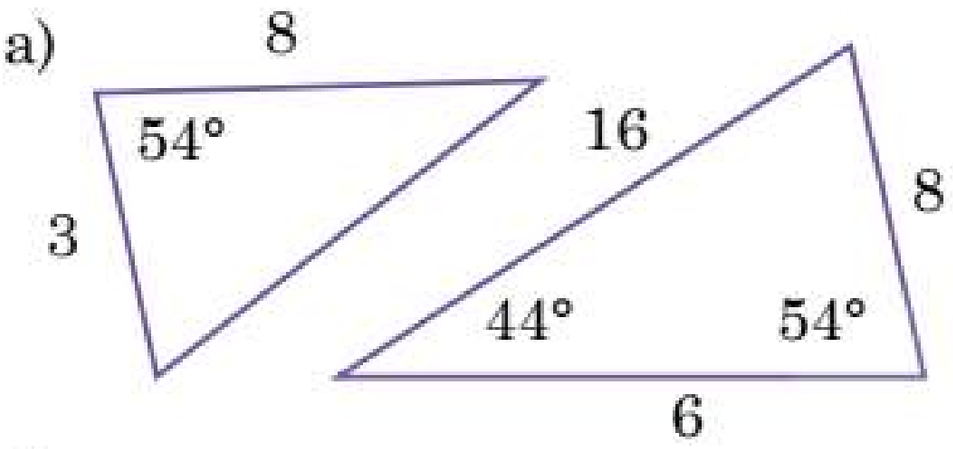
Попрактикуйтеся

501 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

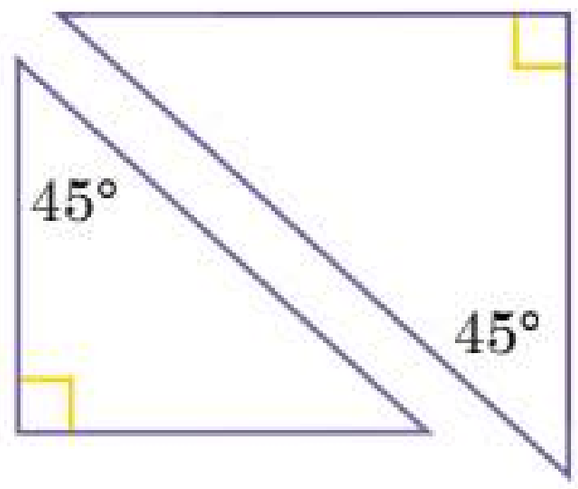
а) Два рівносторонніх трикутники завжди є подібними.
б) Два рівнобедрених трикутники завжди є подібними.
в) Трикутники зі сторонами 2 см, 5 см, 7 см та 7 см, 17,5 см, 24,5 см є подібними.
г) Прямокутні рівнобедрені трикутники є подібними.
д) У подібних трикутників відповідні сторони пропорційні.
е) У подібних трикутників всі сторони пропорційні.
ж) Два рівнобедренні трикутники подібні, якщо в них рівні кути при вершині.

502 Користуючись рисунками, визначте, чи є подібними дані трикутники. Відповідь аргументуйте.

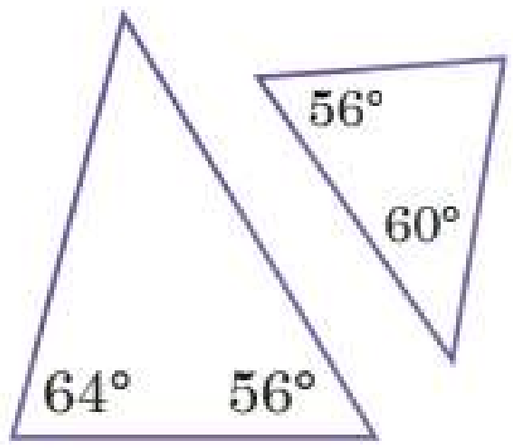
а)



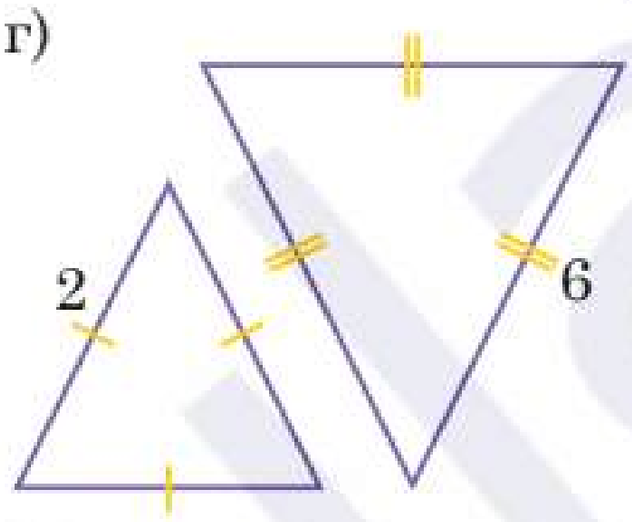
б)



в)



г)



503 Чи подібні трикутники ABC та $A'B'C'$, якщо:

а) $\angle A = \angle A'$, $\angle C = \angle C'$;

б) $\angle A = 45°$, $\angle B = 90°$, $\angle B' = 90,°$ $\angle A' = 45°$;

в) $AB = 3$, $BC = 5$, $AC = 6$, $A'B' = 3$, $A'C' = 5$, $B'C' = 6$?

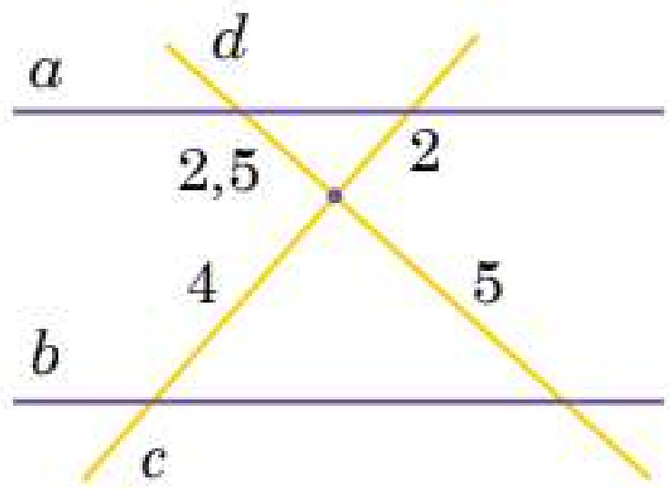
504 Чи подібні трикутники ABC та $A'B'C'$, якщо:

а) $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$;

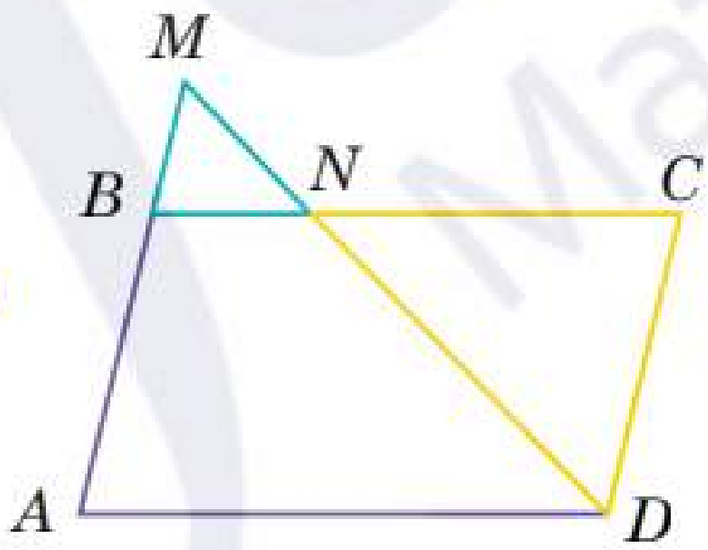
б) $\angle A = 30°$, $\angle B = 90°$, $\angle B' = 90,°$ $\angle A' = 30°$;

в) $AB = 4$, $BC = 5$, $AC = 7$, $A'B' = 4$, $A'C' = 5$, $B'C' = 7$?

505 Користуючись рисунком, доведіть, що прямі a та b паралельні.



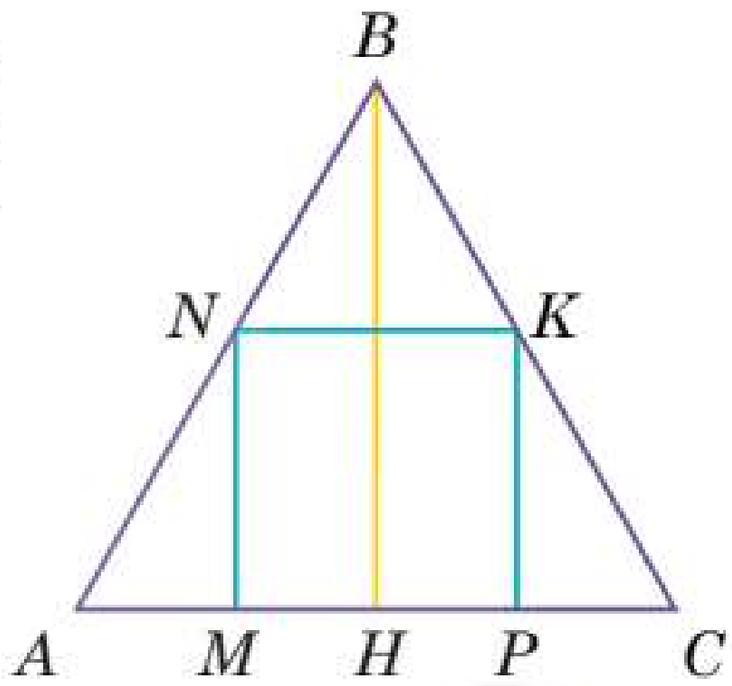
506 *



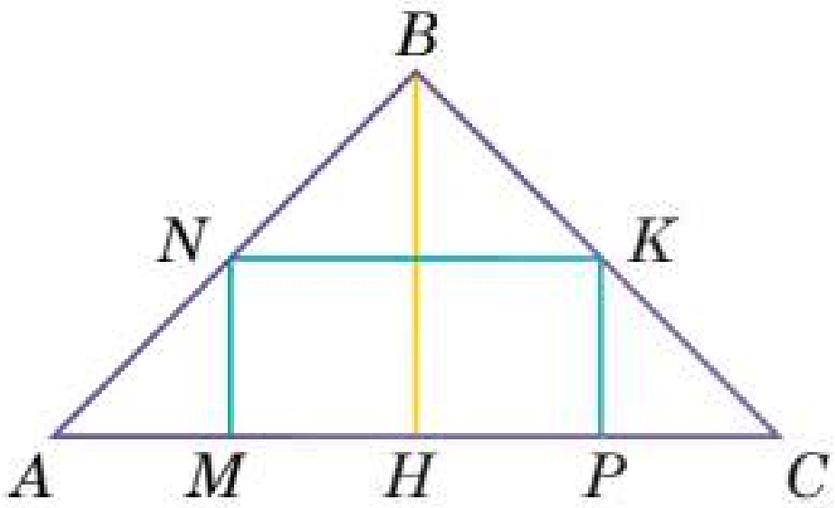
$ABCD$ — паралелограм. Доведіть, що трикутники CND та BNM подібні.

507 На карті з'єднайте міста Чернігів та Тернопіль, Кропивницький та Харків, Чернігів та Кропивницький, Тернопіль та Харків. Обчисліть відстань між Кропивницьким та Харковом, якщо відстань між Черніговом та Тернополем по прямій дорівнює 7,5 см. Масштаб карти 1 : 5000000.

508 У рівносторонній трикутник ABC вписано квадрат $MNKP$. Відомо, що AC дорівнює 12 см, а висота BH — 8 см. Обчисліть периметр квадрата.



509



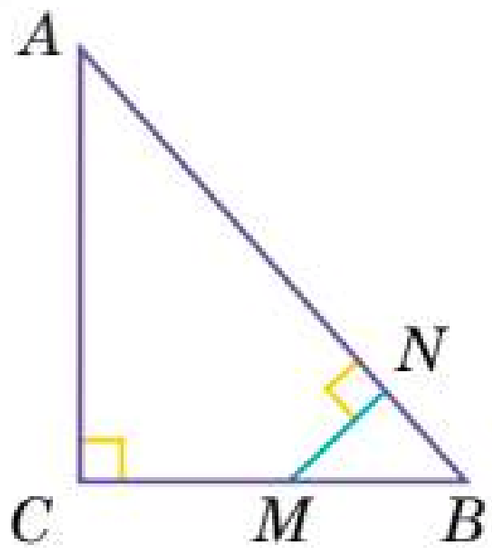
Прямокутник $MNKP$ вписано у рівнобедрений трикутник ABC. Сторони прямокутника відносяться як 2 : 5. AC дорівнює 20 см, а висота BH — 12 см. Обчисліть периметр прямокутника.

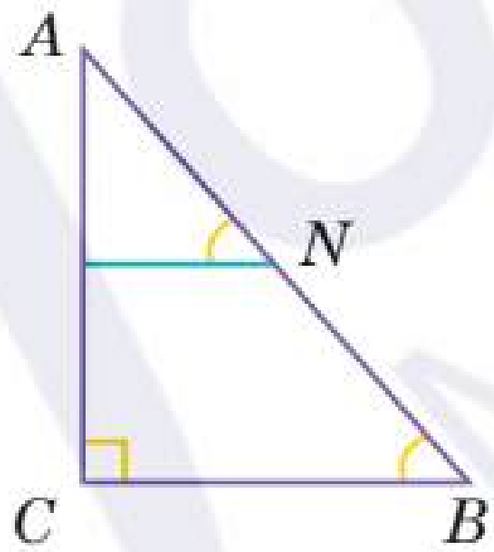
510 За допомогою програми GeoGebra виконайте побудову двох трикутників із двома однаковими кутами та перевірте, чи будуть вони подібними.

511 Які сторони може мати трикутник, подібний до трикутника зі сторонами 10 см, 13 см та 19 см? Наведіть декілька прикладів.

512 Обчисліть кути рівнобедреного трикутника ABC (AC — основа), якщо бісектриса AM відтинає трикутник, подібний даному.

513 Доведіть подібність трикутників на рисунку.





514 Доведіть подібність трикутників на рисунку.

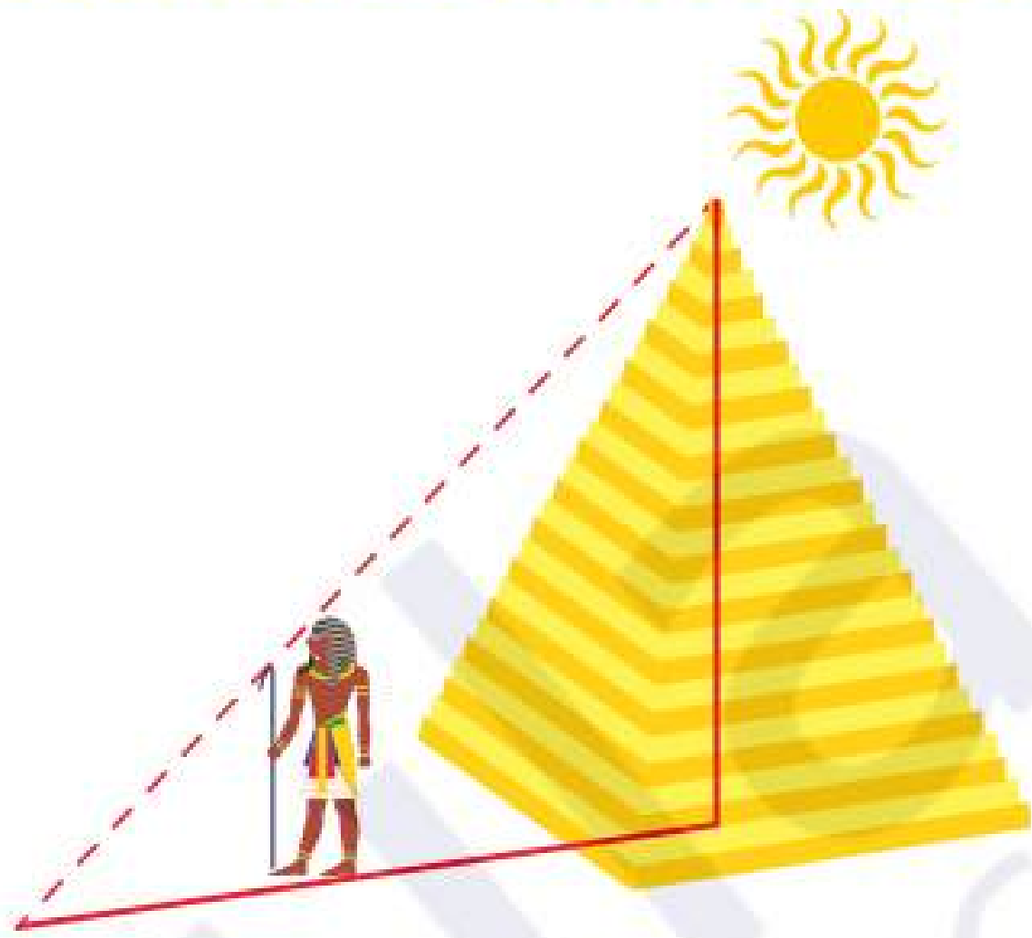
515 Діагоналі рівнобічної трапеції точкою перетину діляться у відношенні 3 : 5. Одна з основ менша за другу на 5 см. Обчисліть основи трапеції.

516 Обчисліть сторони подібного трикутника до трикутника зі сторонами 10 см, 25 см і 15 см, якщо менша сторона подібного трикутника дорівнює 18 см.

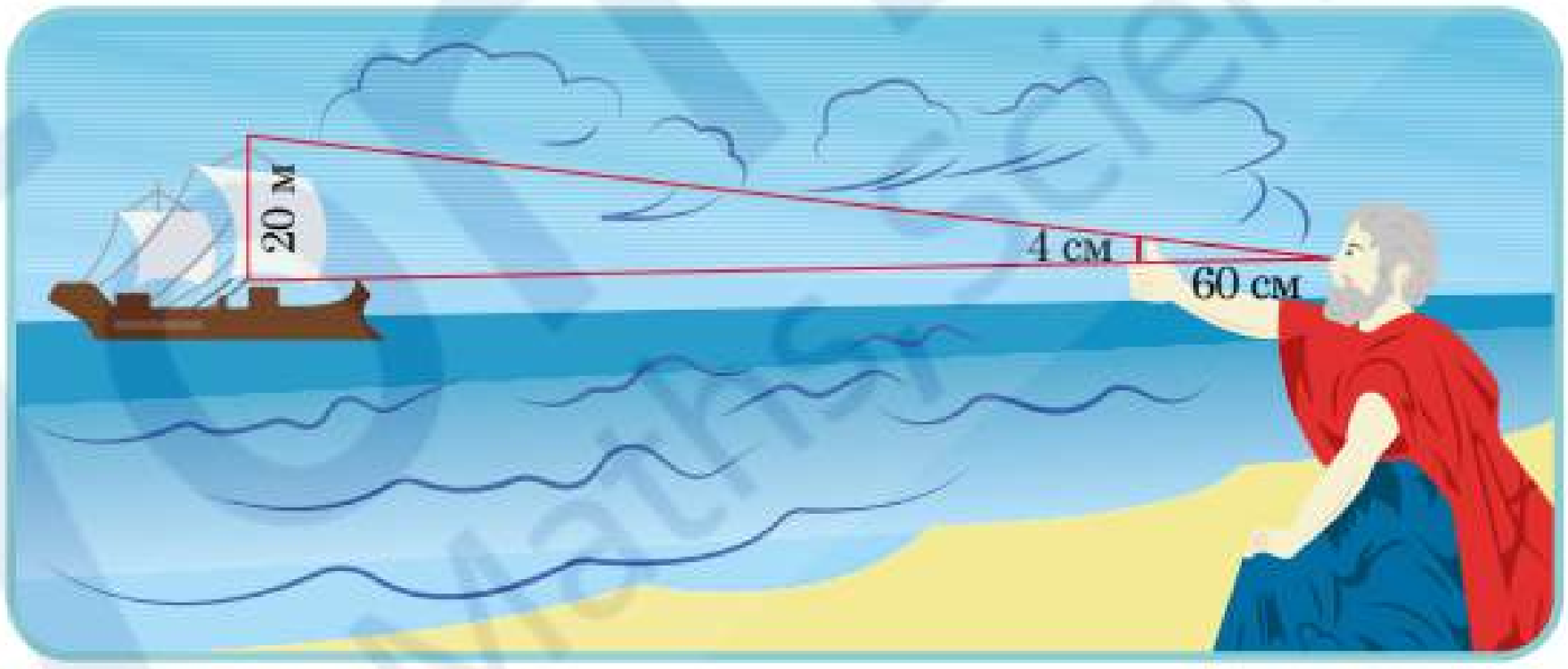
517 Знайдіть пару подібних трикутників, якщо їх сторони дорівнюють 12 см, 16 см, 18 см; 36 см, 48 см, 72 см та 18 см, 24 см, 27 см й обчисліть коефіцієнт подібності.

518 BH та CK — висоти гострокутного трикутника ABC. Доведіть, що трикутники ABC та AKH — подібні.

За допомогою подібності трикутників можна знайти висоту стовпа, башти, колони, водоспаду, дерева, скелі, піраміди, ширину річки, зріст людини і т. д. Перший спосіб найлегший і найдавніший, той, за допомогою якого грецький учений Фалес (за 6 століть до н. е.) виміряв висоту піраміди в Єгипті. Він використав її тінь. Фалес вибрав день і годину, коли його власна тінь дорівнювала його зросту. У цей момент і довжина тіні піраміди дорівнює її висоті. Фалес виконав цю задачу за допомогою властивостей подібності рівнобедрених прямокутних трикутників.



519 (Задача Фалеса) Визначте відстань від берега до корабля в морі, знаючи висоту щогли — 20 м, довжину великого пальця — 4 см і відстань від очей до руки — 60 см.



520 Людина зростом 170 см стоїть біля дерева та відкидає тінь завдовжки 2 м. Обчисліть, на скільки довшу тінь відкидає дерево, ніж людина, якщо дерево має висоту 5,1 м.

521 Комунальне підприємство вирішило в парку висадити тюльпани різних кольорів так, як зображено на схемі. Відомо, що на 1 м^2 припадає 15 тюльпанів. Розрахуйте, яку кількість тюльпанів потрібно висадити, якщо ділянка має правильну трикутну форму, а коефіцієнт подібності між трикутниками 1 та 2 і 2 та 3 становить 1,5. Для обчислень скористайтеся калькулятором, площу округліть до сотих.

4.8. Властивість медіани, бісектриси та висоти трикутника

Медіана трикутника

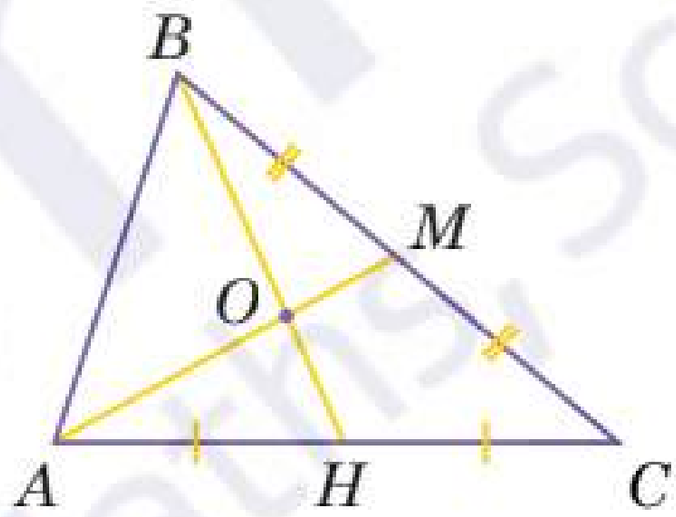
Медіана — відрізок, що сполучає вершину кута та середину протилежної сторони.

Доведення властивостей бісектриси та медіан трикутника

У трикутнику можна побудувати три медіани, які перетинаються в одній точці і мають такі властивості:

1. Медіани трикутника перетинаються в точці, яка є його центром мас.
2. Медіана поділяє трикутник на два трикутники з рівними площами (рівновеликі), а три проведені медіани — на шість рівновеликих.
3. Медіана прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.
4. У рівнобедреному трикутнику медіана кута, протилежного до основи трикутника, є його бісектрисою та висотою.

Усі медіани трикутника проходять через одну точку і точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1, починаючи з вершини.



ΔABC,
AM, BH — медіани.
$AM \cap BH = O$.
$AO : OM = BO : OH = 2 : 1$

Висота — відрізок, що виходить з вершини трикутника та є перпендикулярним до протилежної сторони.

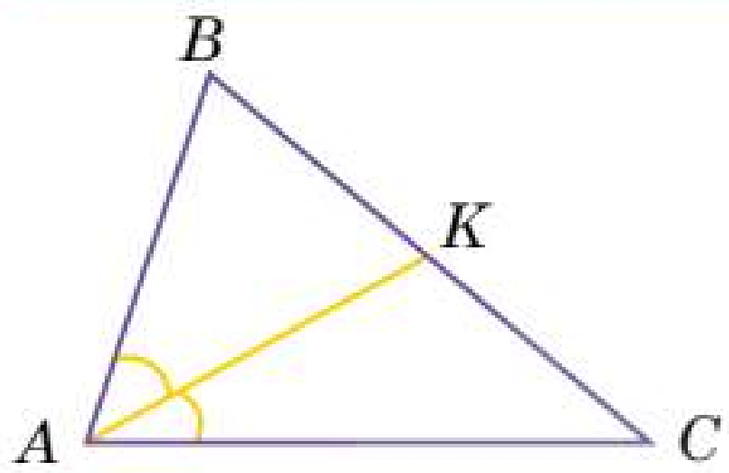
Бісектриса трикутника

У трикутника є три бісектриси, які перетинаються в одній точці і мають такі властивості:

1. Бісектриси внутрішніх кутів трикутника перетинаються в одній точці — інцентрі — центрі вписаного в цей трикутник кола.
2. Якщо в трикутнику дві бісектриси рівні, то трикутник — рівнобедрений.
3. У рівнобедреному трикутнику бісектриса кута, протилежного до основи трикутника, є медіаною та висотою.
4. Відстані від сторін кута до будь-якої точки бісектриси однакові.

Бісектриса — відрізок, що виходить із вершини кута трикутника та ділить його навпіл.

Бісектриса кута трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на пропорційні відрізки до двох інших сторін.



ΔABC,
AK — бісектриса.

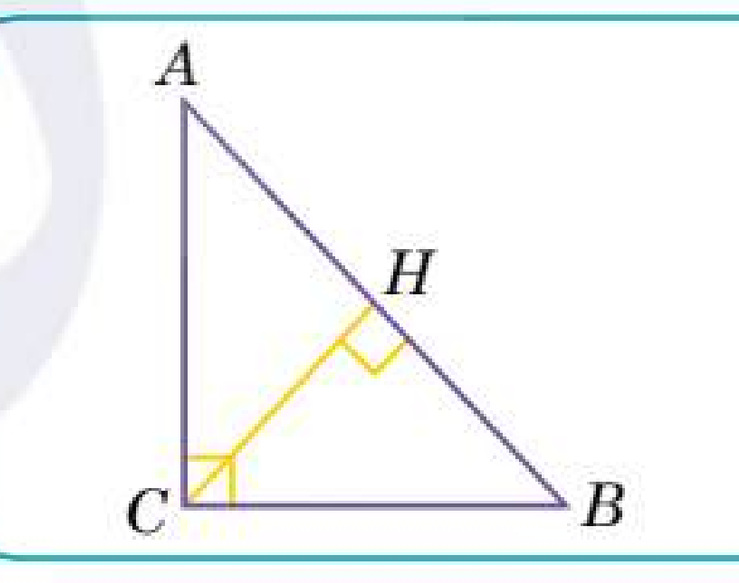
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{KC}$$

Висота трикутника

Так само, як медіани і бісектриси, трикутник має три висоти, які перетинаються в одній точці і мають такі властивості:

1. Точку перетину висот трикутника називають ортоцентром. У гострокутному трикутнику він знаходиться всередині трикутника.
2. Якщо трикутник має прямий кут, то сторони, що утворюють прямий кут, можна назвати висотами, оскільки вони перпендикулярні одна до іншої. Точкою перетину висот є спільна вершина перпендикулярних сторін. Отже, у прямокутному трикутнику ортоцентр збігається з вершиною прямого кута.
3. Якщо трикутник має тупий кут, то висоти, опущені з вершин гострих кутів, знаходитимуться за межами трикутника. Прямі, на яких розташовані висоти, матимуть перетин за межами трикутника. Отже, у тупокутному трикутнику ортоцентр лежить поза межами трикутника.
4. Якщо з однієї і тієї самої вершини провести медіану, бісектрису й висоту, то медіана виявиться найдовшим відрізком, а висота — найкоротшим.

У прямокутному трикутнику висота, проведена з вершини прямого кута, ділить трикутник на подібні йому трикутники.



$\Delta ABC \sim \Delta CBH \sim \Delta ACH$

У будь-якому трикутнику можна провести три медіани, три висоти та три бісектриси. В залежності від виду трикутника, дані відрізки можуть співпадати або між собою, або з сторонами трикутника.

Приклад

1 При перетині медіан одна з них поділилася на відрізки. Менший з них дорівнює 5 см. Обчисліть довжину медіани.

Розв'язання

За теоремою медіани перетинаються у відношенні 2 : 1. Тоді складаємо пропорцію $\frac{2}{1} = \frac{x}{5}$, де x — невідома частина медіани.

Відповідно $x = 10$ см.

Отже, довжина медіани становить $10 + 5 = 15$ см.

Відповідь. 15 см.

Приклад

2 Бісектриса BD трикутника ABC поділила сторону AC у відношенні 2 : 3. Обчисліть довжину сторони AB, якщо BC дорівнює 21 см.

Розв'язання

Нехай $AD : DC = 2 : 3$, то $AD = 2x$, $DC = 3x$.

Оскільки бісектриса ділить протилежну сторону на пропорційні відрізки до сторін трикутника, то $\frac{21}{3x} = \frac{AB}{2x}$.

$AB = \frac{21 \cdot 2x}{3 \cdot x} = 14$ см.

Відповідь. 14 см.

Попрактикуйтеся

522 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Точка перетину висот рівнобедреного трикутника ділить їх у відношенні 2 : 1.

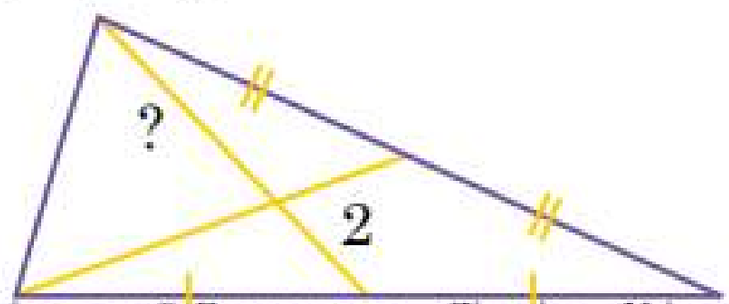
б) Точка перетину висот будь-якого трикутника ділить їх у відношенні 2 : 1.

в) Якщо дві бісектриси трикутника рівні, то такий трикутник буде рівнобедреним.

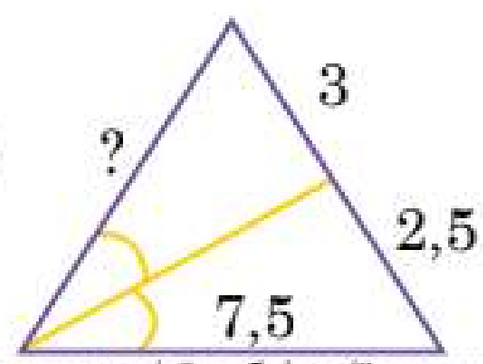
г) Медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

523 Обчисліть довжини невідомих відрізків, користуючись даними на рисунку.

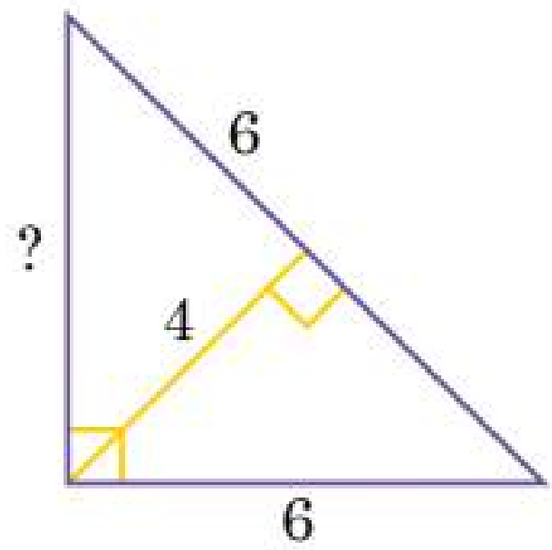
а)



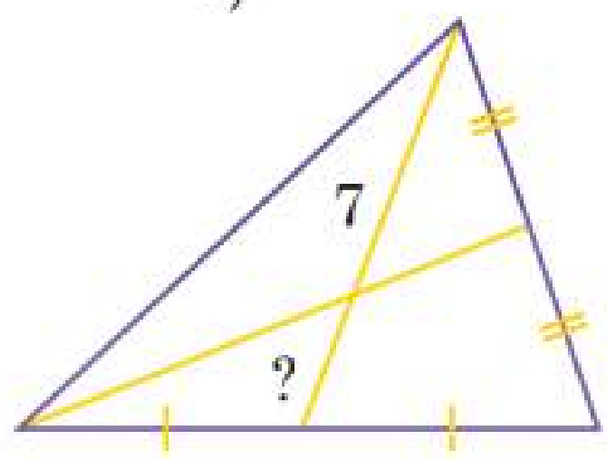
б)



в)



г)



524 За допомогою програми GeoGebra накресліть трикутник та проведіть у ньому медіани. Перевірте чи справджується співвідношення 2 : 1.

525 За допомогою програми GeoGebra накресліть трикутник та перевірте теорему про бісектрису трикутника.

526 При перетині медіан одна з них поділилася на відрізки. Більший з них дорівнює 5 см. Обчисліть довжину медіани.

527 У трикутнику ABC : BD — бісектриса, $AB = 8$ см, $BC = 13$ см. Менший з відрізків, на які бісектриса поділила сторону, дорівнює 3 см. Обчисліть довжину третьої сторони трикутника.

528 У трикутнику MNK : NH — бісектриса, $MN = 14$ см, $NK = 18$ см. Більший з відрізків, на які бісектриса поділила сторону, дорівнює 5 см. Обчисліть довжину третьої сторони трикутника.

529 Обчисліть довжину бісектриси рівностороннього трикутника, якщо менша з її частин, утворена при перетині бісектрис, дорівнює 9 см.

530 Бісектриса BD трикутника ABC поділила сторону AC у відношенні 3 : 4. Обчисліть довжину сторони AB, якщо BC дорівнює 15 см.

531 Бісектриса трикутника ділить протилежну сторону так, що різниця між поділеними частинами дорівнює 5 см. Обчисліть довжину цієї сторони, якщо довжина решти сторін становить 10 см і 12 см.

532 Команда ландшафтних дизайнерів та дизайнерок вирішили встановити фонтан у центрі трикутної зони парку. Опишіть, як саме можна визначити оптимальне місце для встановлення фонтану. Підказка: скористайтеся таким поняттям, як центроїд.

533 Будівельна фірма збирається встановити підйомний кран так, щоб він був рівновіддалений від трьох будинків. Опишіть, як саме можна визначити місце розташування крана. Підказка: скористайтеся таким поняттям, як центроїд.

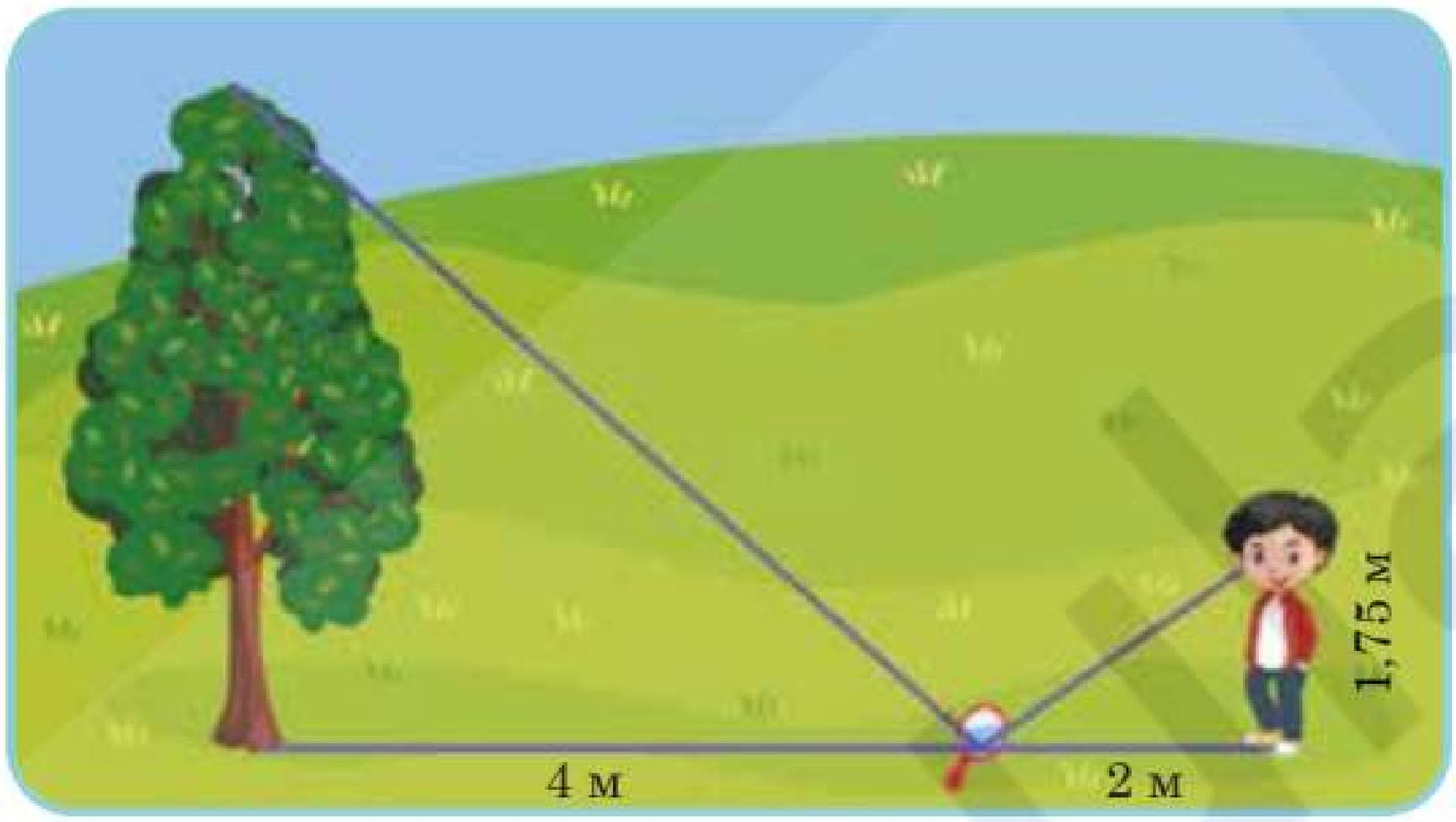
534 У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC і протилежним кутом 36° проведено бісектрису AD.

а) Доведіть подібність ΔABC та ΔCAD.

б) Знайдіть основу ΔABC, якщо його бічна сторона дорівнює a.

4.9. Розв'язування задач практичного змісту

535 За поданим малюнком визначте висоту дерева.



536 За допомогою дзеркала та метрової стрічки визначте висоту стелі у класі.

537 Відстань між трьома населеними пунктами на карті становить 9 см, 12 см та 15 см. Знайдіть відстань між іншими населеними пунктами, якщо найменша відстань на місцевості становить 25 км.

538 Визначаємо ширину річки: на протилежному боці берега оберіть точку A. На цьому боці від вашого початкового положення у точці B пройдіть 100 кроків та відмітьте точку C. У тому ж напрямку пройдіть ще 50 кроків до точки D. Потім перпендикулярно до берега пройдіть 20 кроків, коли точки A та C накладаються, та зазначте точку E. За допомогою подібних трикутників обчисліть ширину річки, якщо ваш крок дорівнює 0,75 м.

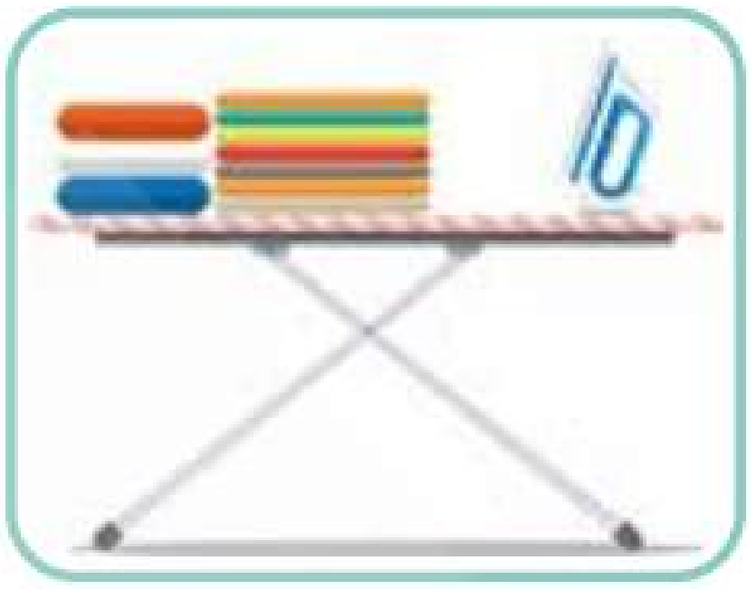
539 Шлагбаум закріплений так, що більше плече дорівнює 3,5 м, а коротше — 1 м. Обчисліть, на яку висоту підійметься більше плече, якщо коротке опустити на 0,75 м.

540 Чи можна виміряти висоту дерева по тіні від сонця? По тіні від ліхтаря? Відповідь аргументуйте.

541 На якій відстані від стовпа стоїть людина, якщо її зріст становить 1,8 м, довжина тіні стовпа — 2,2 м, а висота стовпа — 3 м? Для обчислень скористайтеся калькулятором, відповідь округліть до сотих.

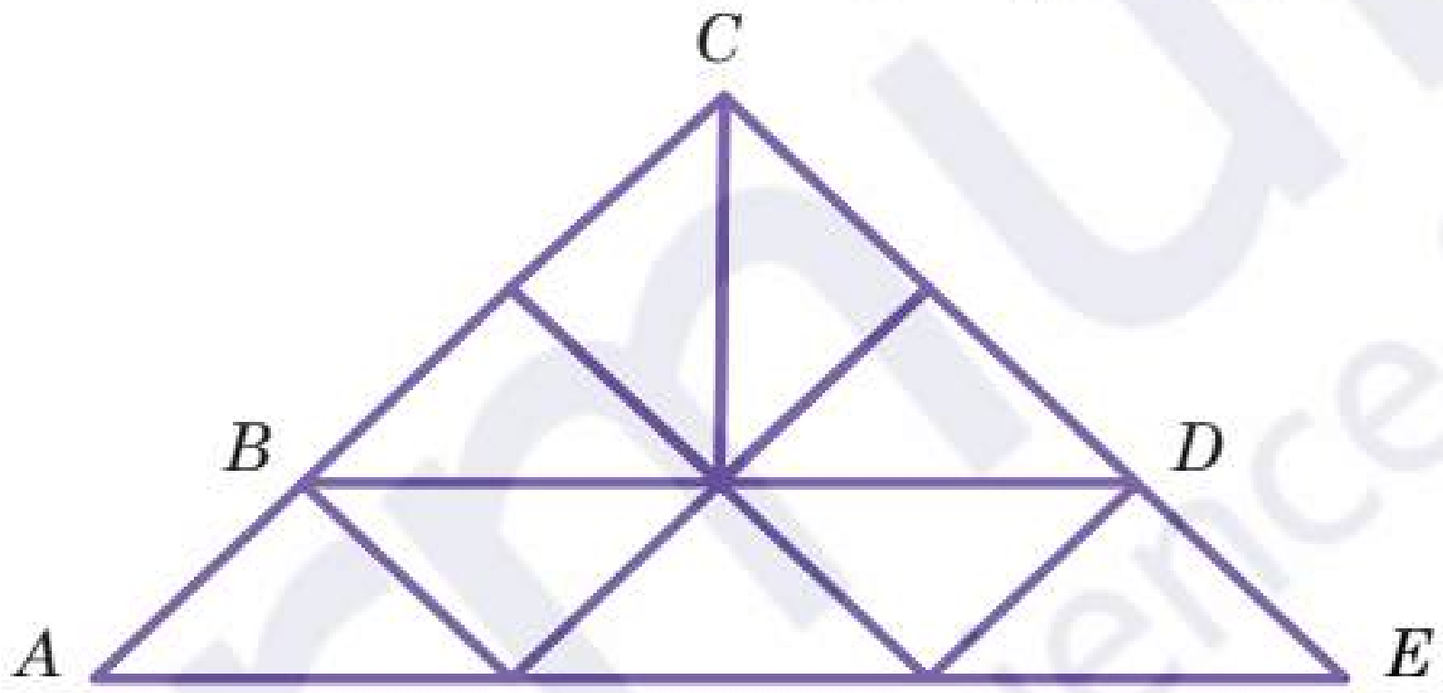
542 Для визначення відстані від точки A до недосяжної точки B на місцевості вибрали точку C, а також виміряли відрізок AC і $\angle BAC$ та $\angle ACB$. Вимірявши необхідні дані, побудували на папері трикутник $A_1B_1C_1$, подібний трикутнику ABC. Знайдіть відстань AB, якщо $AC = 42$ м, $A_1C_1 = 6{,}3$ см, $A_1B_1 = 7{,}2$ см.

543 Доведіть, що поверхня прасувальної дошки є паралельною до підлоги, якщо ширина меншого розкосу ніжок становить 80 см, а більшого розкосу — 160 см.

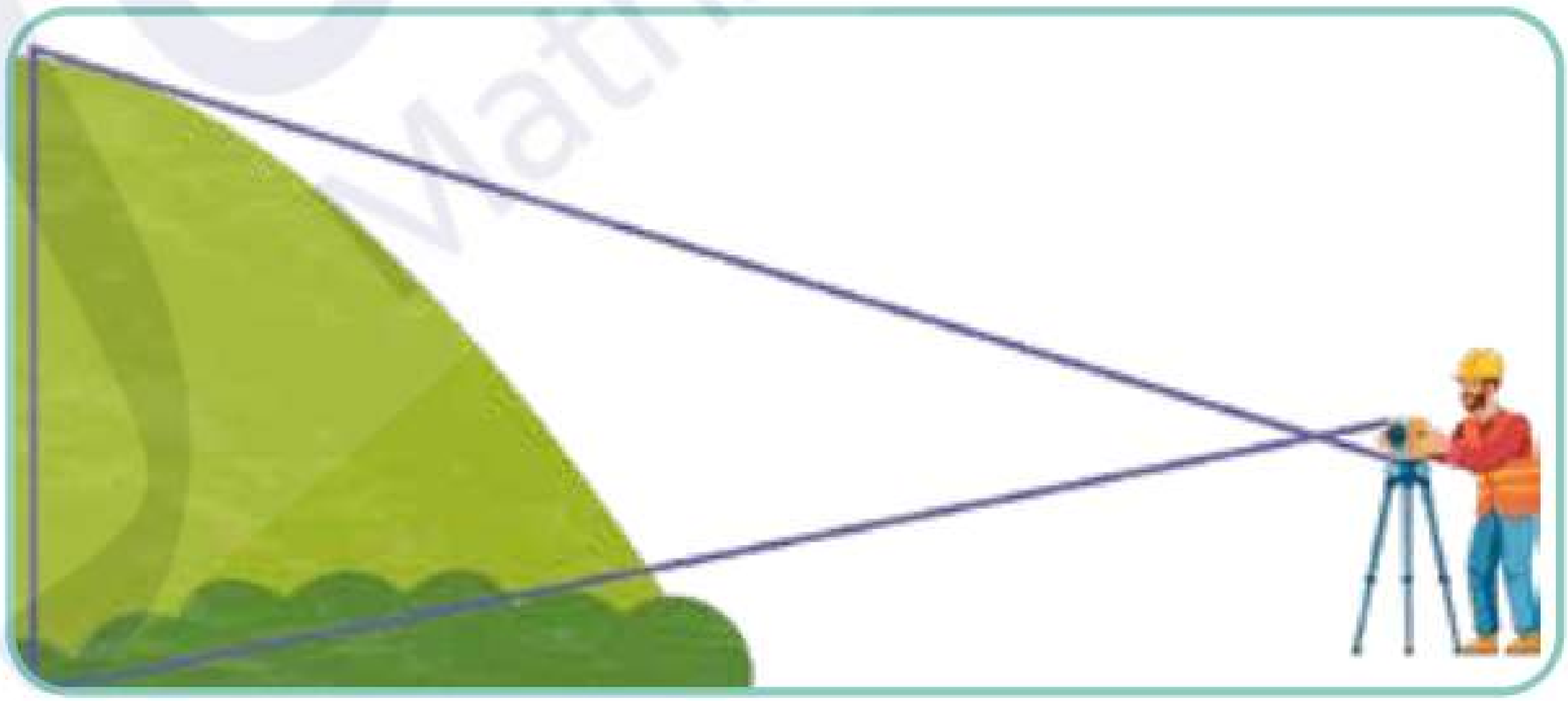


544 Із картону виріжте прямокутний, гострокутний та тупокутний трикутники. У кожному з них побудуйте по три медіани. Скористайтеся гостро заточеним олівцем та поставте на нього трикутник у точку перетину медіан. Чи буде точка перетину медіан центром мас?

545 Знайдіть, як за допомогою подібності трикутників можна обчислити ширину перекриття даху? Обчисліть довжину балки BD, якщо ширина даху дорівнює 5 м, а висота — 3 м. Відстань від вершини даху до балки BD становить 2 м. Відповідь округліть до сотих.



546 На місцевості геодезисти вимірюють відстані, нерівності ландшафту та висоти об'єктів за допомогою далекомірів. На приладі висота пагорба становить 3 см, коефіцієнт подібності — 100. Обчисліть у метрах висоту пагорба, відповідь обґрунтуйте.

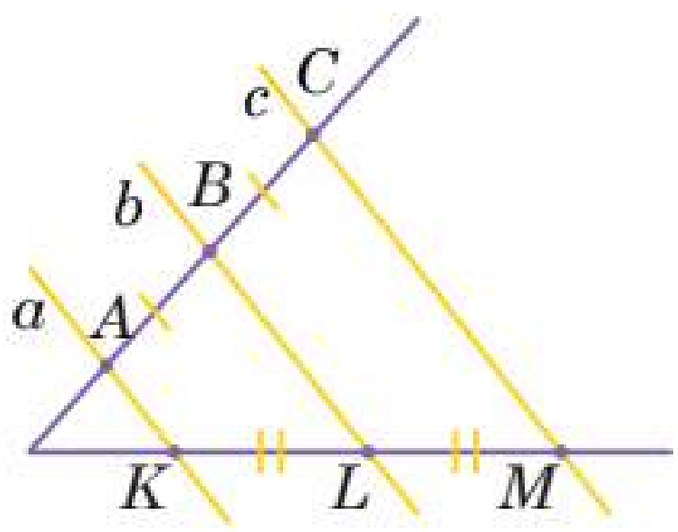


547 За допомогою програми GeoGebra накресліть схему того, як можна виміряти висоту шафи, використовуючи метрову стрічку та палицю. Проведіть виміри вдома або у класі та обчисліть. Порівняйте з реальними розмірами шафи.

Короткий огляд розділу

Якщо співвідношення відрізків a і b дорівнює співвідношенню відрізків c і d, то ці відрізки називаються **пропорційними**.

Теорема Фалеса



Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки й на іншій стороні кута.

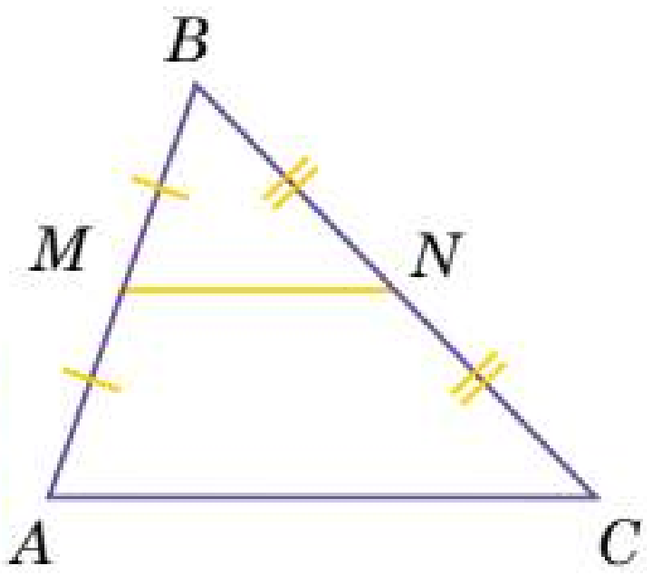
Якщо $a \parallel b \parallel c$, $KL = LM$, то $AB = BC$

Узагальнена теорема Фалеса

Якщо три або більше паралельні прямі, що перетинають дві задані прямі, відтинають на одній прямій рівні відрізки, то вони відтинають рівні відрізки й на іншій прямій.

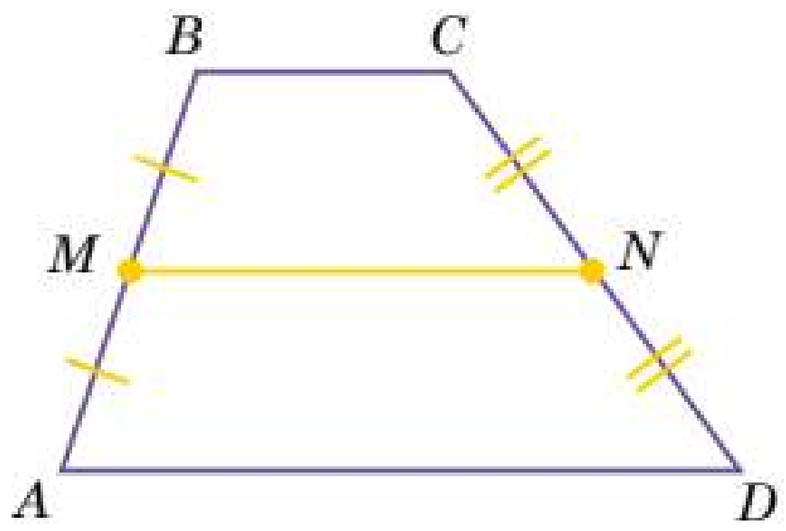
Середня лінія трикутника — відрізок, що сполучає середини двох сторін трикутника та є паралельним третій стороні.

У ΔABC: $AM = MB$, $BN = NC$, $MN \parallel AC$.
Тоді MN — середня лінія ΔABC.



$$MN = \frac{1}{2}AC$$
(половина паралельної сторони)

Середня лінія трапеції — відрізок, що сполучає середини бічних сторін та є паралельним основам.



$ABCD$ — трапеція, $AD \parallel DC$,
$AM = MB$, $CN = ND$,
MN — середня лінія трапеції.

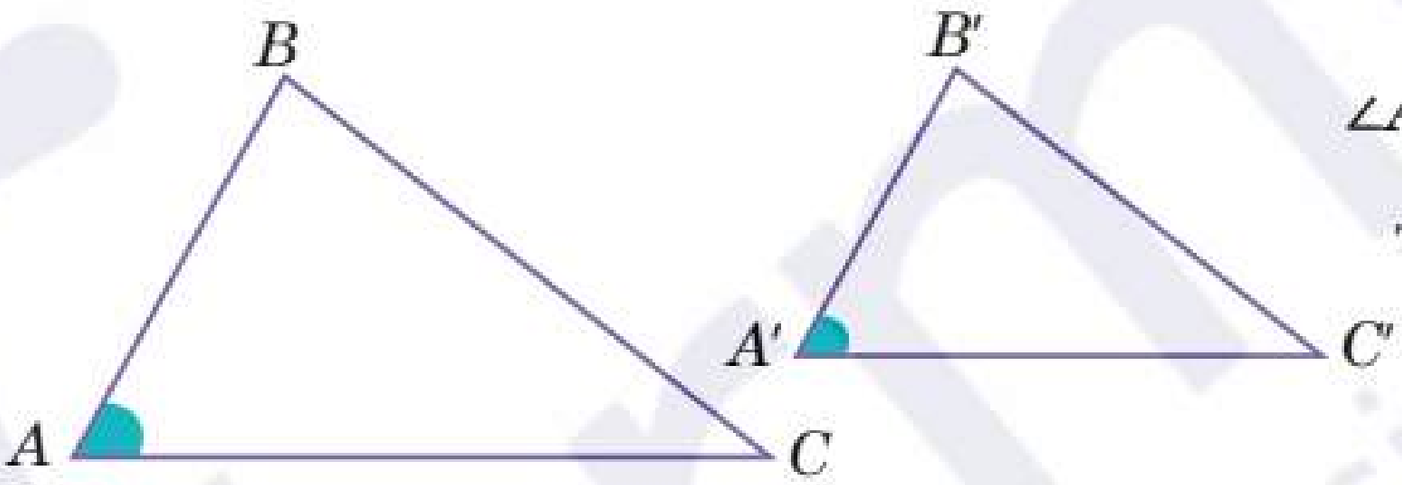
$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$
(півсума основ трапеції)

За допомогою середньої лінії трапеції можна також знайти її площу.

$\boldsymbol{S = m \cdot h}$, де m — середня лінія трапеції.

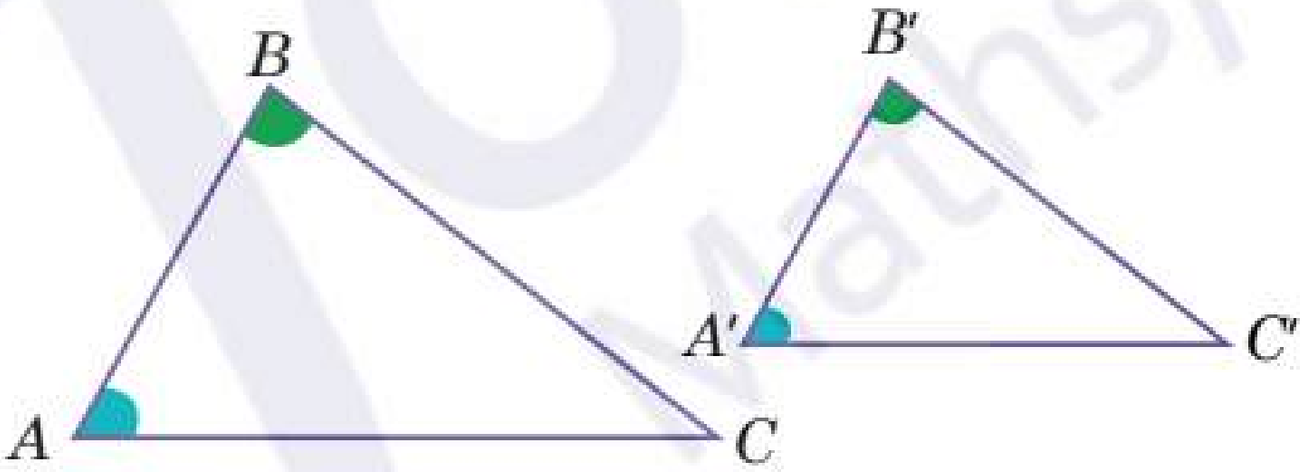
Ознаки подібності трикутників

I ознака (за двома сторонами та кутом між ними). Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого та кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники є подібними.



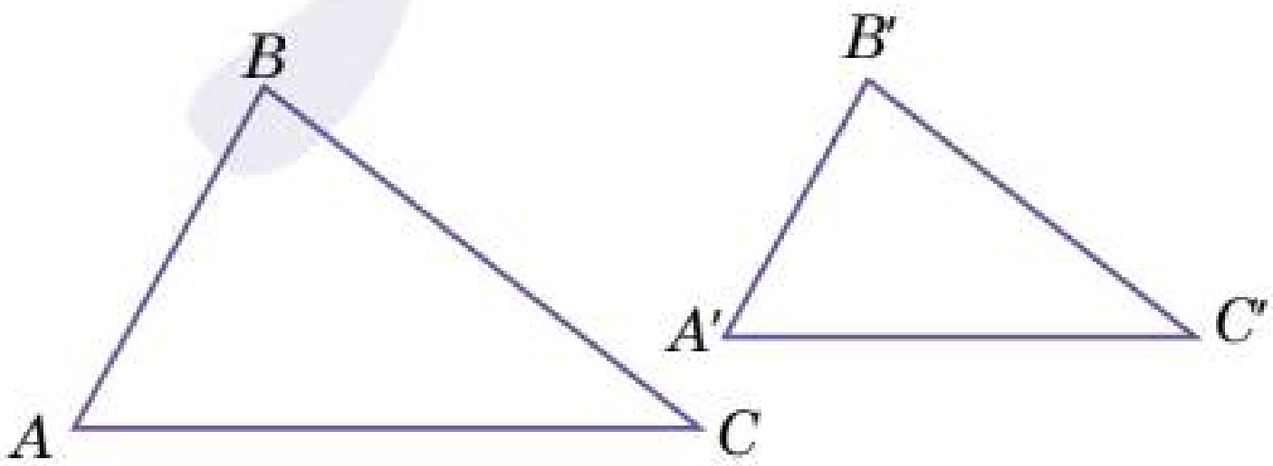
$\angle A = \angle A'$ і $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$,
то $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

II ознака (за двома кутами). Якщо два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам іншого, то такі трикутники є подібними.



$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$,
то $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

III ознака (за трьома сторонами). Якщо три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого, то такі трикутники є подібними.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'},$$
то $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

Перевірте свої досягнення

1 Два трикутники подібні, якщо:

а) два кути одного трикутника дорівнюють двом кутам іншого;

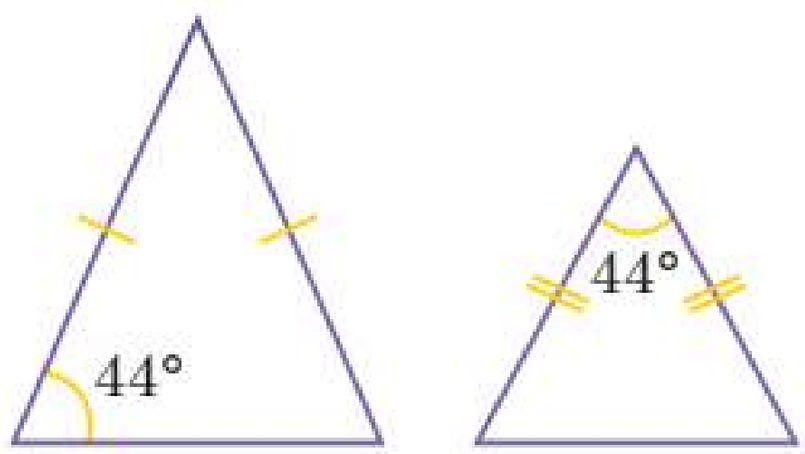
б) дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють двом сторонам і куту між ними іншого трикутника;

в) відповідні кути та сторони одного трикутника рівні сторонам іншого;

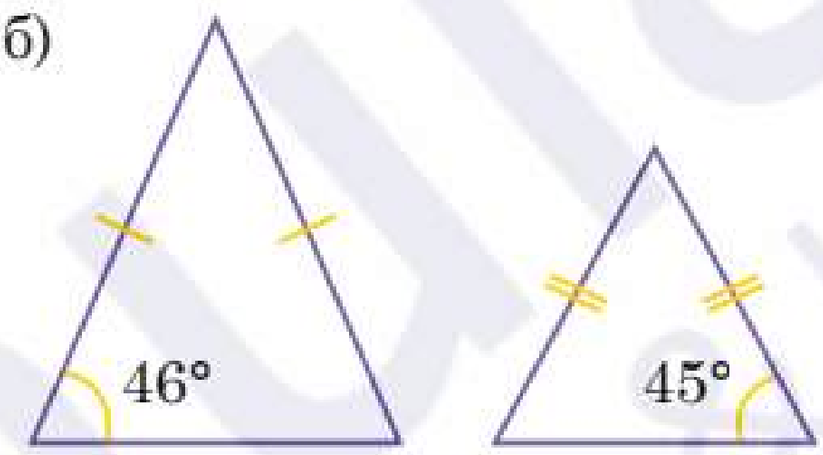
г) відповідні кути рівні та сторони одного трикутника пропорційні відповідним сторонам другого трикутника.

2 Укажіть рисунок, на якому зображено подібні трикутники.

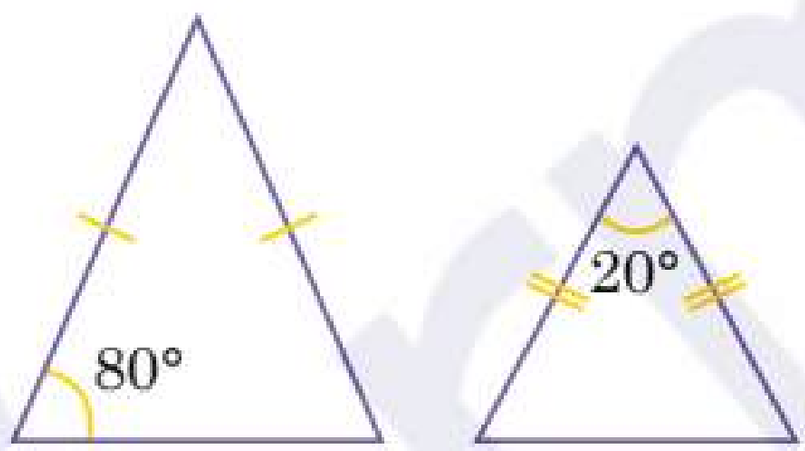
а)



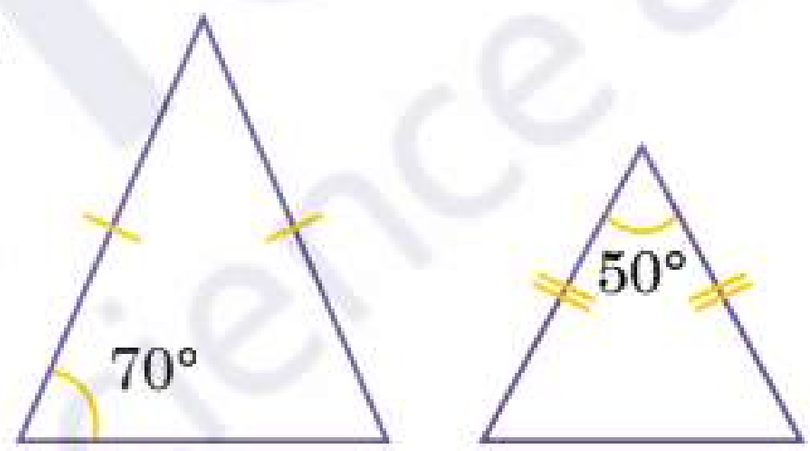
б)



в)



г)



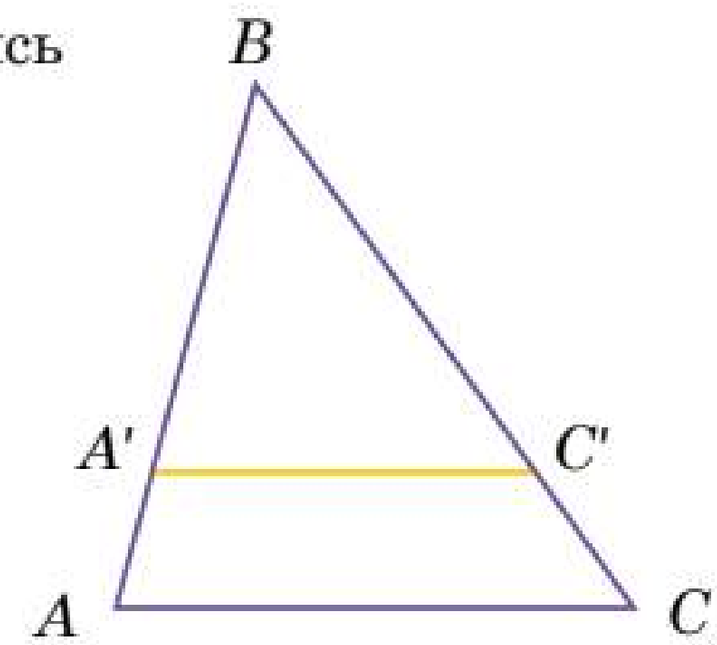
3 Дано $\Delta ABC \sim \Delta DFK$. $\angle B = 45°$, $\angle K = 60°$. Знайдіть $\angle D$.

а) 75°; б) 45°; в) 60°; г) 30°.

4 Трикутники ABC та DFK подібні. Знайдіть DF та DK, якщо $AB = 20$ см, $BC = 16$ см, $AC = 12$ см, $FK = 12$ см.

а) 20 см та 12 см; б) 18 см та 12 см; в) 12 см та 16 см; г) 15 см та 9 см.

5 Оберіть правильне твердження, користуючись рисунком.



а) $\frac{A'C'}{AC} = \frac{BA'}{AB}$; б) $\frac{BC}{BC'} = \frac{AC}{A'C'}$;

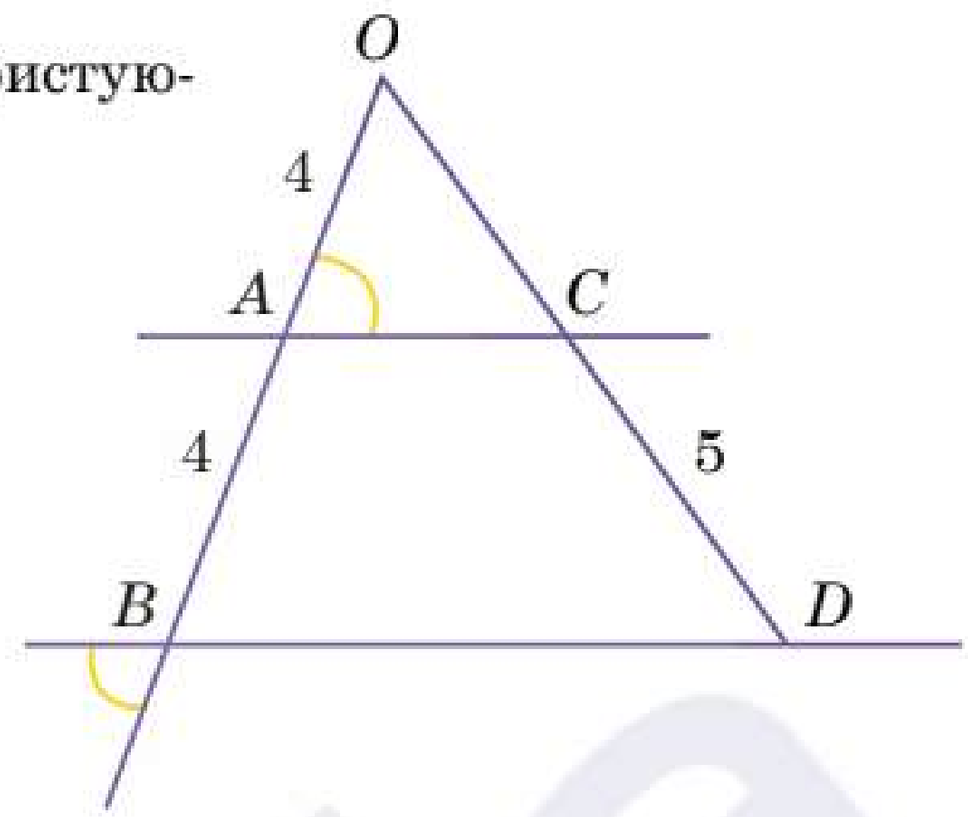
в) $\frac{BA'}{AB} = \frac{CB}{BC'}$; г) $\frac{AC'}{A'C'} = \frac{AB'}{AB}$.

6 Хорди AC і BM перетинаються в точці K. Знайдіть KM, якщо $AK = 6$ см, $KC = 10$ см, $BK = 15$ см.

а) 5 см; б) 15 см; в) 4 см; г) 60 см.

7 Обчисліть невідому сторону ОС, користуючись рисунком.

а) 4 см;
б) 5 см;
в) 6 см;
г) 10 см.



8 Установіть відповідність між твердженням (1–3) та відповіддю (А–Г), за чим подібні трикутники.

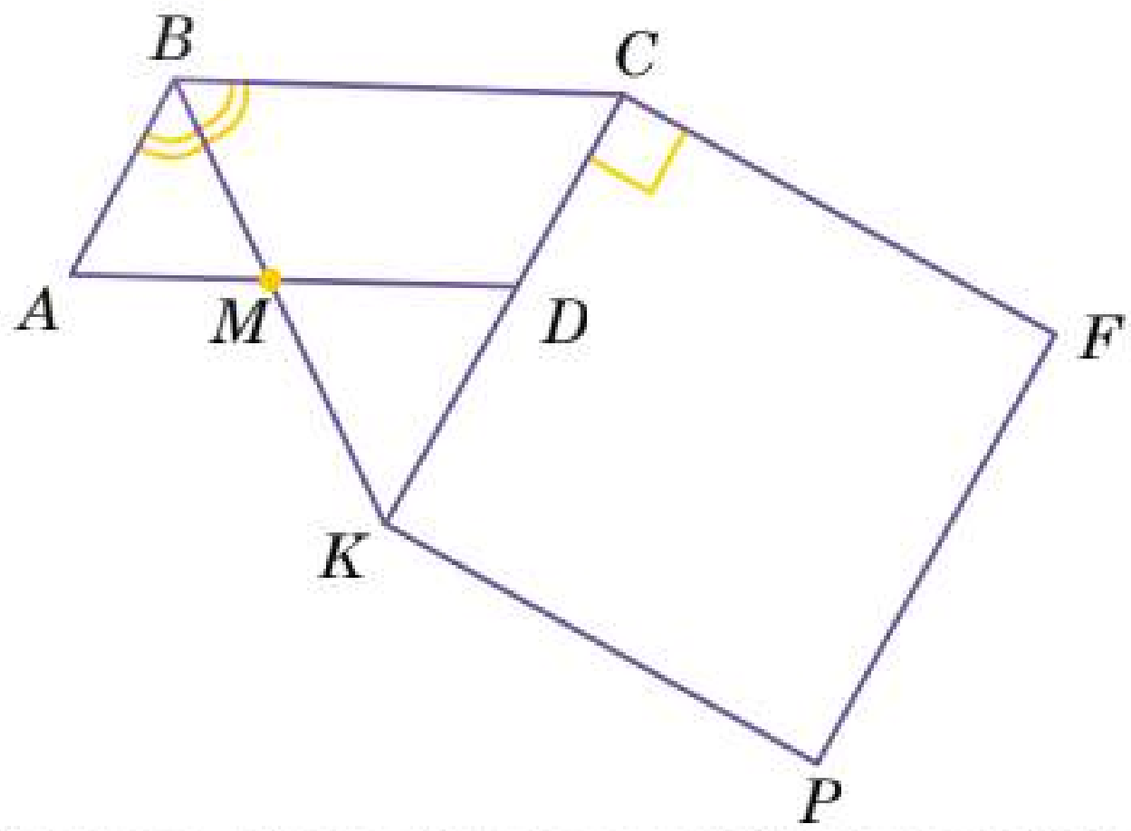
1. $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$
2. $\Delta GHI \sim \Delta JKL$, $\frac{GH}{JK} = \frac{HI}{KL} = \frac{GI}{JL}$
3. $\Delta ABC \sim \Delta MNK$, $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NK}$, $\angle B = \angle N$

А. За двома пропорційними сторонами і кутом між ними
Б. За трьома пропорційними сторонами
В. За стороною та двома прилеглими кутами
Г. За двома рівними кутами

9 Січна, проведена з точки A, перетинає коло в точках B і C (точка B лежить між точками A та C), причому $AB = 8$ см, $BC = 10$ см. Знайдіть довжину відрізка AD дотичної, проведеної до кола з точки A.

10 Діагоналі трапеції $ABCD$ перетинаються в точці O так, що $AO : OC = 7 : 3$, $BD = 40$ см. Знайдіть довжину відрізка OD.

11 * Бісектриса BM тупого кута B паралелограма $ABCD$ перетинає продовження сторони CD в точці K. На стороні CK побудовано квадрат $CFPK$. BM в 5 разів більший ніж MK, $MD = 6$ см. Знайдіть довжину замкненої ламаної $ABCFPKM$.



Проєктна робота «Гарні школи України»

Громадська організація «Щасливе дитинство» оголосила грант «Школа моєї мрії». Виділяються кошти на оздоблення фасаду навчального закладу. Ви маєте змогу зробити зовнішній вигляд Вашої школи більш привабливим, приємним і архітектурно сучасним. Ваша мета розробити кошторис і дизайн.

Крок ① Даний проєкт рекомендуємо виконувати об'єднавшись у 2–3 групи і розділивши ролі у групі.

Крок ② Виконайте такі завдання:

а) за допомогою рулетки виміряйте довжини всіх стін школи і дані занесіть у таблицю нижче;

б) висоту приміщення виміряйте наступним чином: у сонячний день виміряйте довжину власної тіні та тіні від школи; маючи відомий свій зріст і використовуючи подібність трикутника знайдіть висоту приміщення;

в) порахуйте площу зовнішніх стін приміщення школи, вважайте їх прямокутниками і відніміть площу вікон і дверей;

г) потрібно врахувати, що деякі стіни мають вікна, площу яких потрібно відняти. Для цього ширину і висоту вікна заміряйте рулеткою і обчисліть його площу (вважаємо, що всі вікна в школі однакові);

д) порахуйте кількість вхідних дверей у школі і зробіть їх заміри (висота і ширина, використовуючи рулетку);

е) в інтернеті знайдіть актуальну ціну на фарбу для фасаду приміщення, яка вам подобається, і обчисліть, яку її кількість необхідно придбати (кількість необхідної фарби на одиницю площі вказана на її пакуванні;

є) розрахуйте вартість матеріалів для оздоблення вашої школи.

Стіна	Ширина стіни	Висота школи	Площа стіни	Кількість вікон	Ширина вікна	Висота вікна	Площа вікон
1							
2				Кількість дверей	Ширина дверей	Висота дверей	Площа дверей
3							
4							
Площа всіх стін разом							
Площа для фарбування							
Кількість фарби							
Вартість фарби							

Крок ③ Розробіть дизайн нового фасаду школи і представте у вигляді малюнку або використовуйте різні платформи і додатки для дизайну та створіть електронне зображення;

Крок ④ На етапі підведення підсумків кожна група презентує свій проєкт перед класом. Рекомендований час на презентацію 5–7 хв. Обов'язковими пунктами презентації має бути малюнок і орієнтовний кошторис (заповнена табличка).

Крок ⑤ Обговорити підсумки проєкту цілим класом.
Що вдалося?
Що було складним?
Над чим ще потрібно працювати?

На розсуд вчителя. Проєкт можна ускладнити, запропонувавши не просто пофарбувати школу, а оздобити її іншими матеріалами. Для цього учням самостійно потрібно буде дослідити питання матеріалів для фасадів. Також можна запропонувати порівняти, який із видів оздоблення буде більш економний, а який більш надійний і зносостійкий. Застосувавши критичне мислення, обрати оптимальний варіант.

Додаткові завдання до розділу

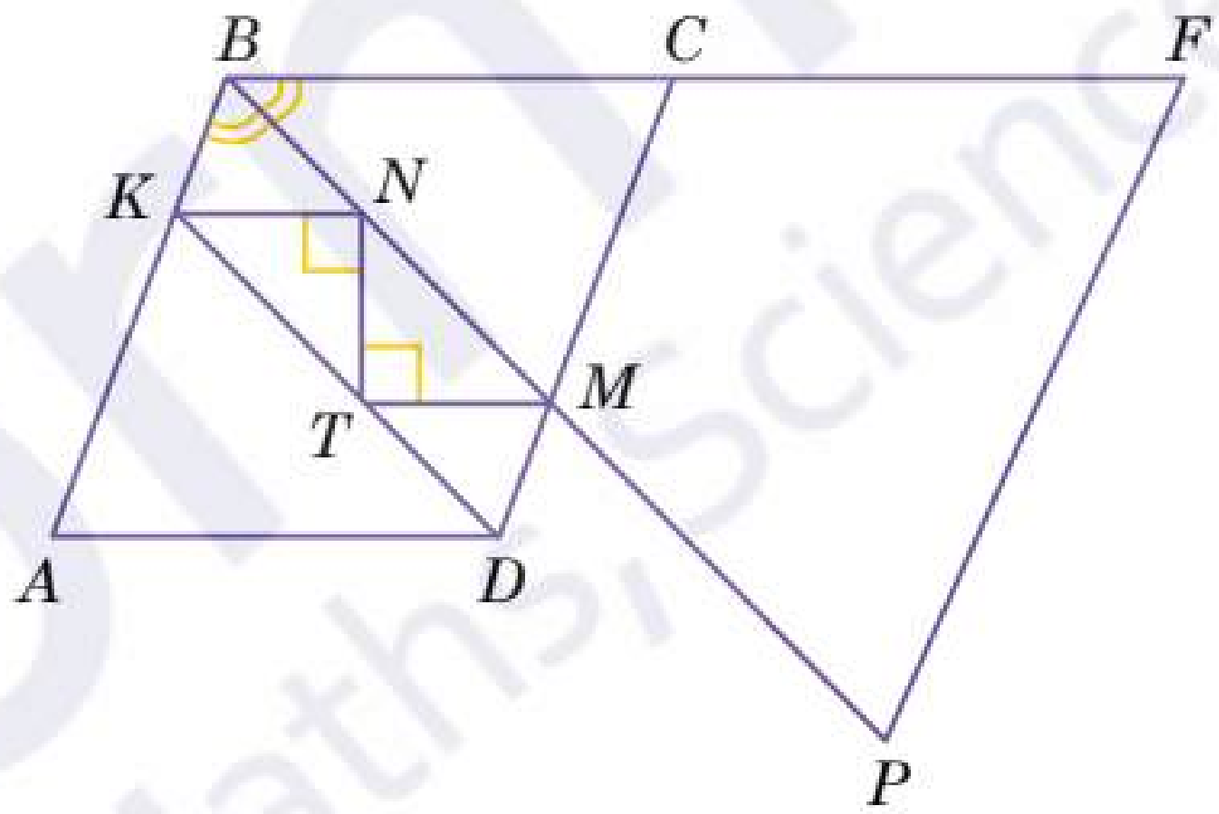
548 M і N — центри вписаного і описаного кола навколо трикутника ABC відповідно. Відомо, що $\angle AMC = \angle ANC$. Знайти $\angle ABC$.

549 Трикутник ABC вписаний в коло. BM — дотична до кола. Знайти $\angle MBA$, якщо $\angle BAC : \angle ABC : \angle BCA = 4 : 5 : 6$.

550 Знайдіть радіус вписаного кола в рівносторонній трикутник ABC. Якщо $AB = 9$ см.

551 Доведіть, що бічні сторони трапеції і пряма, що з'єднує середини її основ, перетинаються в одній точці.

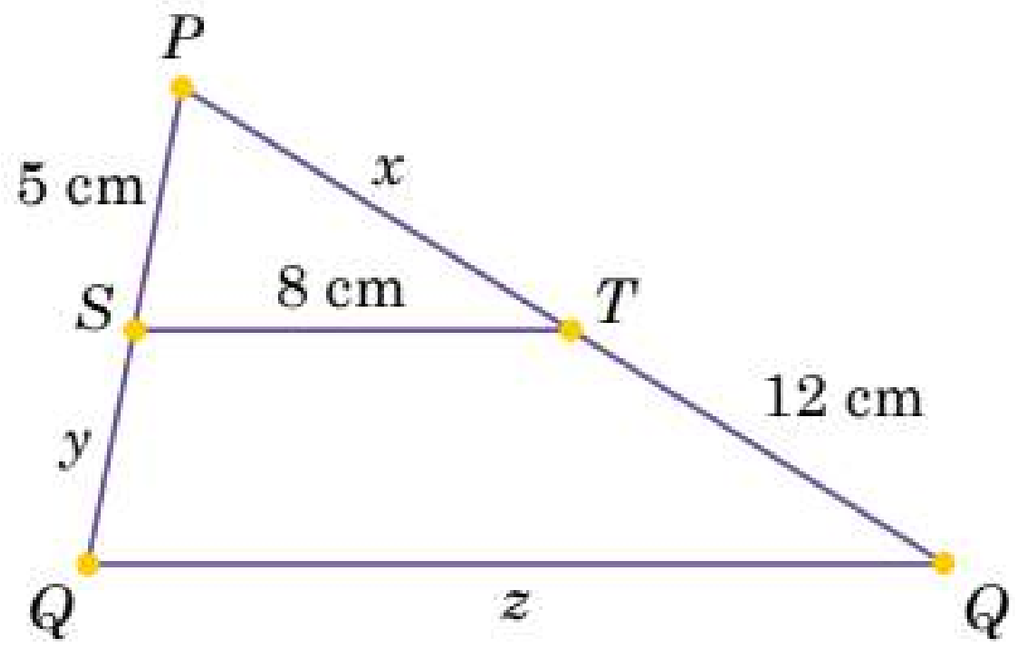
552 Продовження бісектриси BM тупого кута B паралелограма $ABCD$ утворює з продовженням сторони BC трикутник PBF, причому PF паралельна CM. DK паралельна BM, а KN і TM паралельні BC. Знайдіть довжину сторони AB паралелограма $ABCD$, якщо $BC : BF = 1 : 3$, $PF = 54$ см, $\angle CBM = 60°$, $\angle KNT = \angle NTM = 90°$.



EN

553 In triangle PQR, a line segment ST is parallel to QR. The following measurements are given: $PS = 5$ cm, $ST = 8$ cm, $TR = 12$ cm, $PQ = 24$ cm. Find the values of x, y and z. Round your answers to one decimal place.

round your answers to one decimal place — відповідь потрібно округлити до 1 знака після коми.



5

Розв'язування прямокутних трикутників

У давні часи деякі твердження визнавали істинними, і на основі цих «істин» розробляли математичні теорії. Це зумовило створення загальновідомих математичних тверджень. Ці твердження завжди істинні та можуть бути застосовані у багатьох різних сферах нашого життя.

Відомим математичним твердженням є теорема Піфагора, яка спочатку використовувалась у геометрії, а потім і в архітектурі, машинобудуванні, обчислювальній математиці тощо. Під час побудови будь-якої споруди розраховують відстані, центри тяжіння, розміщення балок та опор.

Наприклад, за допомогою теореми Піфагора можна порахувати, яку найбільшу висоту може мати антена мобільного оператора чи телевежа, аби забезпечувати якнайкращий зв'язок.

У цьому розділі ми:

- ознайомимося з геометричним поясненням теореми Піфагора;
- зрозуміємо, що зворотне твердження теореми Піфагора можна використовувати для того, щоб з'ясувати, чи певний трикутник є прямокутним;
- будемо розв'язувати математичні задачі та виконувати завдання з повсякденного життя, застосовуючи теорему Піфагора;
- будемо використовувати тригонометричні співвідношення гострих кутів для обчислення довжини будь-якої сторони прямокутного трикутника;
- навчимося визначати, яку тригонометричну функцію використовувати для обчислення довжини сторони або величини кута простої чи складнішої плоскої фігури.

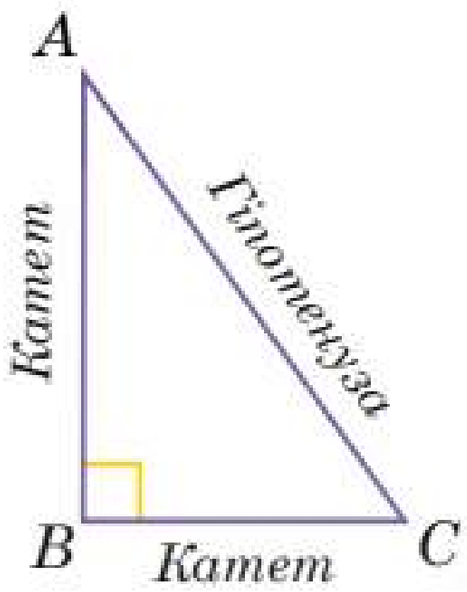
Ключові слова

- Теорема Піфагора (*Pythagorean theorem*)
- Тригонометрія (*trigonometry*)
- Співвідношення (*ratio*)
- Синус (*sine*)
- Косинус (*cosine*)
- Тангенс (*tangent*)
- Котангенс (*cotangent*)
- Функція (*function*)
- Доведення твердження (*proving the statement*)

5 Розв'язування прямокутних трикутників

5.1. Основні властивості прямокутного трикутника. Теорема Піфагора

Прямокутним називається трикутник, у якого один з кутів — прямий.



Сторони прямокутного трикутника мають власні назви. Дві сторони, що утворюють прямий кут, називаються **катетами**, а третя сторона — **гіпотенузою.**

$\triangle ABC$ — прямокутний: $\angle ABC = 90°$; AB, BC — катети; AC — гіпотенуза.

Сторони трикутника називають маленькими літерами відповідно до їхніх протилежних кутів.

Можливість позначати сторони трикутника маленькими буквами економить ваш час для запису розв'язання задачі та пошуку невідомих елементів трикутника, наприклад:

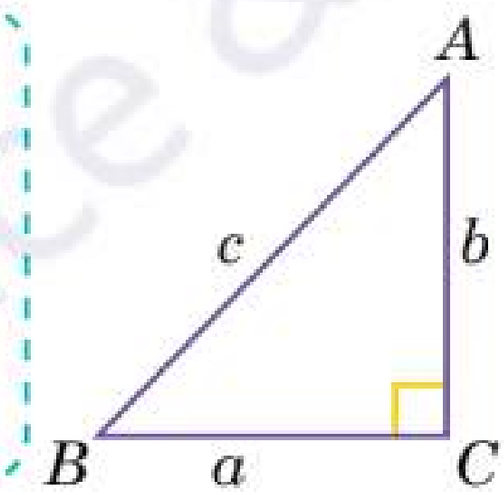
$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$c^2 = a^2 + b^2$

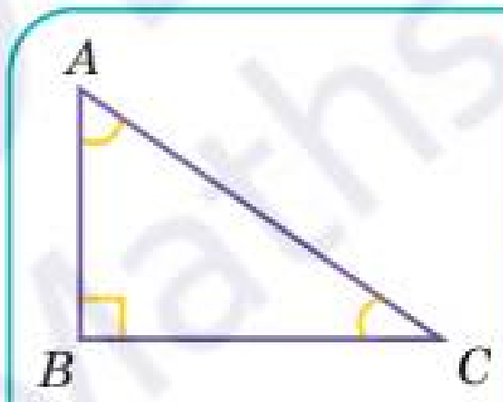
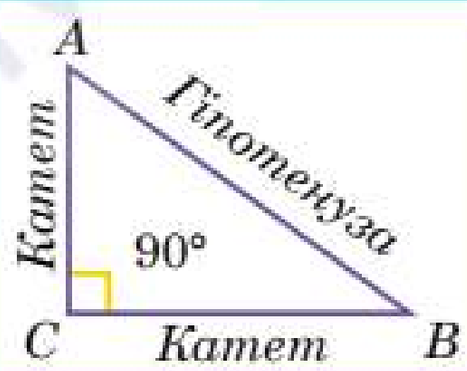
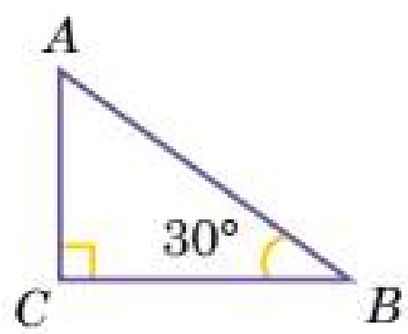
Сторона BC є протилежною до $\angle A$, а отже можемо назвати її a.

Сторона AC є протилежною до $\angle B$, а отже можемо назвати її b.

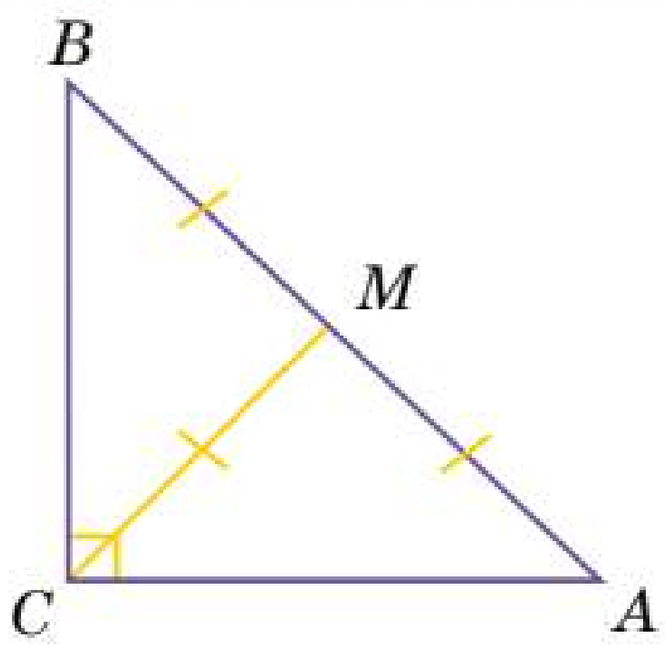
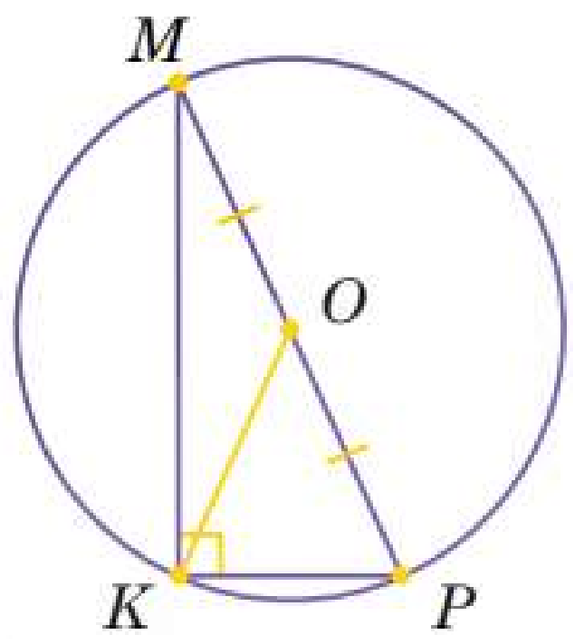
Сторона AB є протилежною до $\angle C$, а отже можемо назвати її c.



Властивості прямокутного трикутника

	Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°. $\angle A + \angle C = 90°$
	Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який катет. $AB > AC$; $AB > CB$
	Якщо у прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 30°, то протилежний цьому куту катет буде дорівнювати половині гіпотенузи. Якщо $\angle B = 30°$, то $AC = \frac{1}{2} AB$

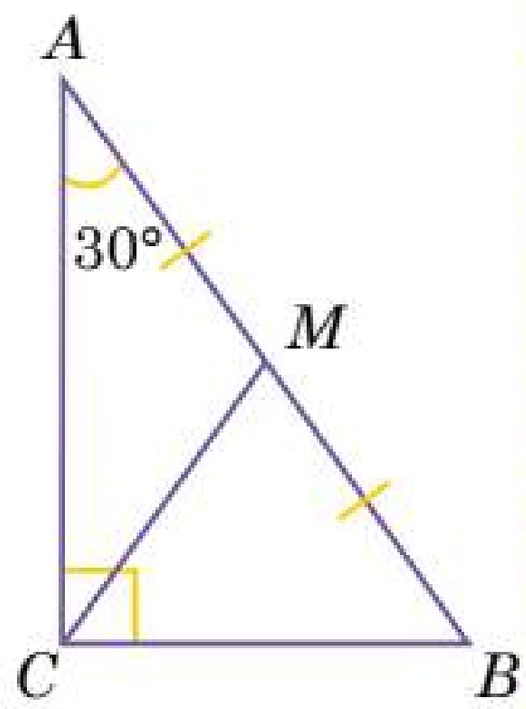
А ви знали, що прямокутний трикутник лежить в основі музичних інтервалів? Якщо розділити струну на дві частини у співвідношенні 3 : 4, отримаємо інтервал кварті, а якщо у співвідношенні 2 : 3 — квінту. Ці співвідношення відповідають сторонам прямокутного трикутника з катетами 3 та 4 або 2 та 3.

	Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює половині цієї гіпотенузи. $CM = \frac{1}{2} AB$ Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить його на два рівнобедрених трикутники (оскільки медіана дорівнює половині гіпотенузи)
	Якщо описати коло навколо прямокутного трикутника, то гіпотенуза буде діаметром кола. **(O; OK) — коло, описане навколо прямокутного трикутника MKP.** **MP — гіпотенуза ΔMKP.** **MP — діаметр кола (O; OK)**

Приклад

1 У прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 30°. До гіпотенузи проведена медіана, яка дорівнює 5 см. Знайдіть довжину катета CB та гіпотенузи AB.

Розв'язання



Розглянемо ΔABC — прямокутний ($\angle C = 90°$): $\angle A = 30°$; CM — медіана; $CM = 5$ см.

Знайдемо довжину гіпотенузи AB, застосувавши властивість медіани, проведеної до гіпотенузи прямокутного трикутника:

$CM = \frac{1}{2}AB$.

Звідси $AB = 2 \cdot CM = 2 \cdot 5$ см $= 10$ см.

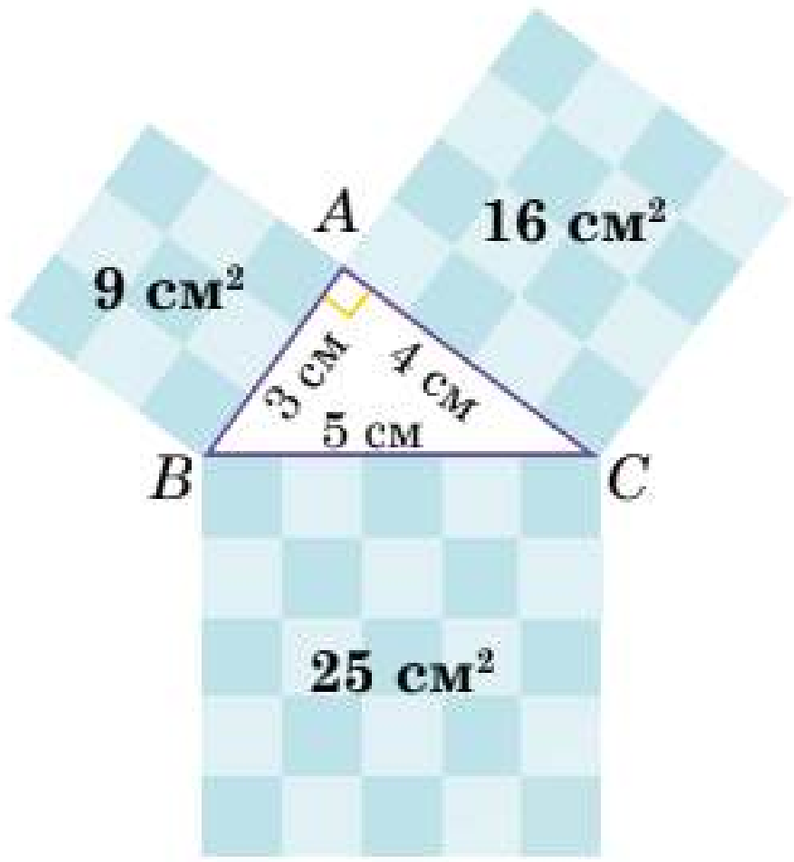
Знайдемо довжину сторони CB, застосувавши властивість катета, що лежить проти кута 30° прямокутного трикутника:

$CB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10$ см $= 5$ см.

Отже, $AB = 10$ см; $CB = 5$ см.

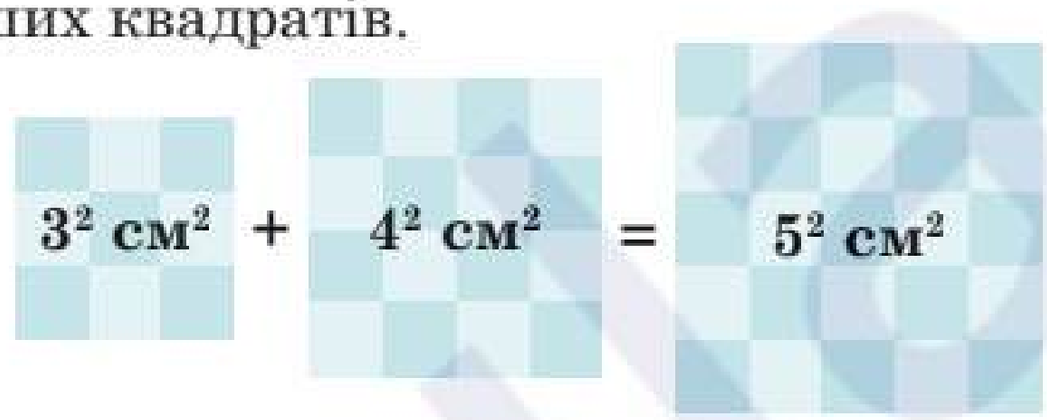
Відповідь. 5 см; 10 см.

Теорема Піфагора



Побудуємо ΔABC — прямокутний ($\angle A = 90°$), який має сторони $AB = 3$ см, $AC = 4$ см та $BC = 5$ см. Використаємо кожну сторону, щоб побудувати три квадрати за межами трикутника.

Можемо помітити, що площа найбільшого квадрата дорівнює сумі площ двох інших квадратів.



Піфагор Самоський (570–497 до н. е.) — один із найвідоміших давньогрецьких філософів, містиків і математиків. Його коротка біографія свідчить, що життя науковця було наповнене дивовижними подіями, а сучасники вважали його чи не найвидатнішим ученим усіх часів і народів, який знав усі таємниці Всесвіту.

Теорема Піфагора — одна з основних в евклідовій геометрії. Відомий учений Іоганн Кеплер назвав її одним із скарбів геометрії, що можна порівняти з мірою золота.

Причинами такої популярності є простота, краса та значення теореми. Справді, ця теорема проста, але не очевидна. Поєднання двох суперечностей і надає їй особливої привабливості. Окрім цього, теорема Піфагора має велике значення — вона використовується на кожному кроці. А той факт, що існує близько 150 різних доведень цієї теореми, підтверджує її поширене реальне застосування.

Теорема Піфагора:
у будь-якому прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів його катетів.

Якщо a та b — **катети** прямокутного трикутника, а c — **його гіпотенуза**, то $c^2 = a^2 + b^2$

Обернена теорема до теореми Піфагора:
якщо сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони, то такий трикутник — прямокутний.

За допомогою теореми Піфагора, ми можемо обчислити довжину невідомої сторони прямокутного трикутника.

Приклад

2 У ΔABC: $\angle A = 90°$, $AB = 6$ см та $AC = 8$ см. Обчисліть довжину BC.

Розв'язання

Розглянемо ΔABC: $\angle A = 90°$ (за умовою).

Отже, ΔABC — прямокутний.

Застосуємо теорему Піфагора для знаходження невідомої сторони BC прямокутного трикутника: AB та AC — катети, BC — гіпотенуза.

$AB = 6$ см; $AC = 8$ см (за умовою).

Звідси, (за теоремою Піфагора):

$BC^2 = AB^2 + AC^2$;

$a^2 = c^2 + b^2$;

$a^2 = 6^2 + 8^2$;

$a^2 = 36 + 64$;

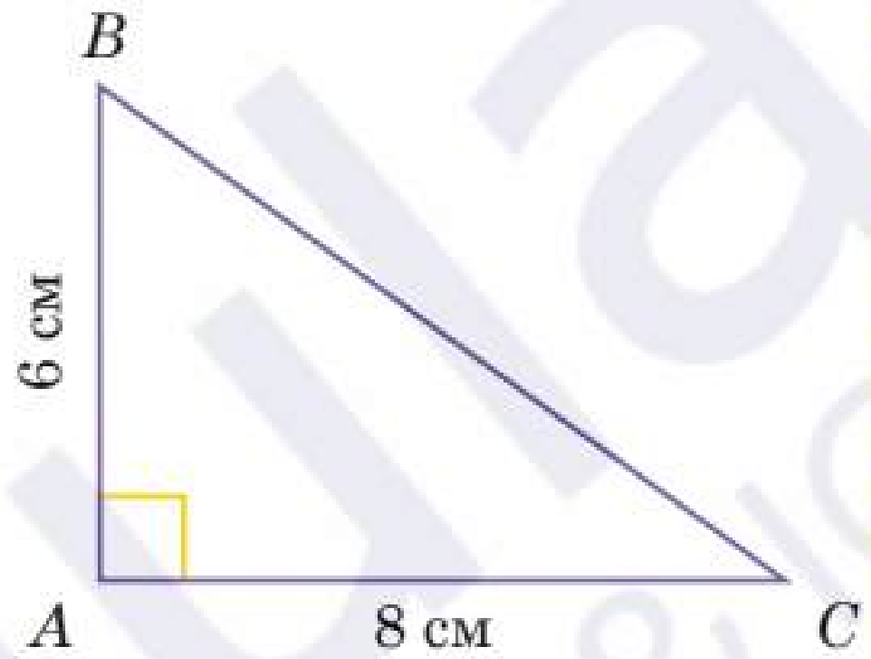
$a^2 = 100$;

$a = \sqrt{100}$;

$a = 10$.

Отже, $BC = 10$ см.

Відповідь. 10 см.



Приклад

3 У ΔABC: $\angle A = 90°$, $AB = 5$ см та $BC = 13$ см. Обчисліть довжину AC.

Розв'язання

Розглянемо ΔABC: $\angle A = 90°$ (за умовою).

Звідси ΔABC — прямокутний.

Застосуємо теорему Піфагора для знаходження невідомої сторони AC прямокутного трикутника: AB та AC — катети, BC — гіпотенуза.

$AB = 5$ см; $BC = 13$ см (за умовою).

Звідси (за теоремою Піфагора):

$BC^2 = AB^2 + AC^2$;

$a^2 = c^2 + b^2$;

$b^2 = a^2 - c^2$;

$b^2 = 13^2 - 5^2$;

$b^2 = 169 - 25$;

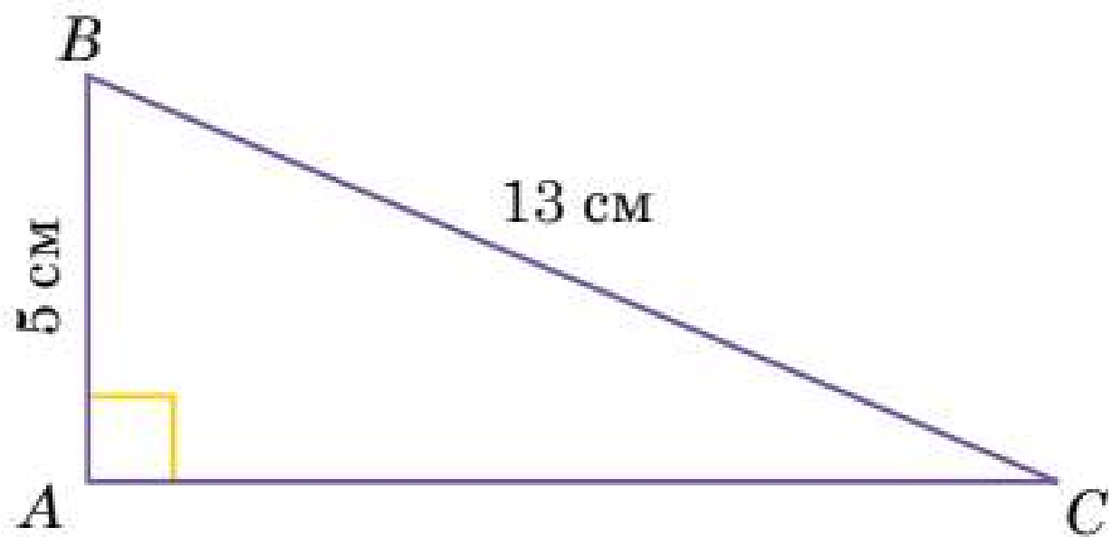
$b^2 = 144$;

$b = \sqrt{144}$;

$b = 12$.

Отже, $AC = 12$ см.

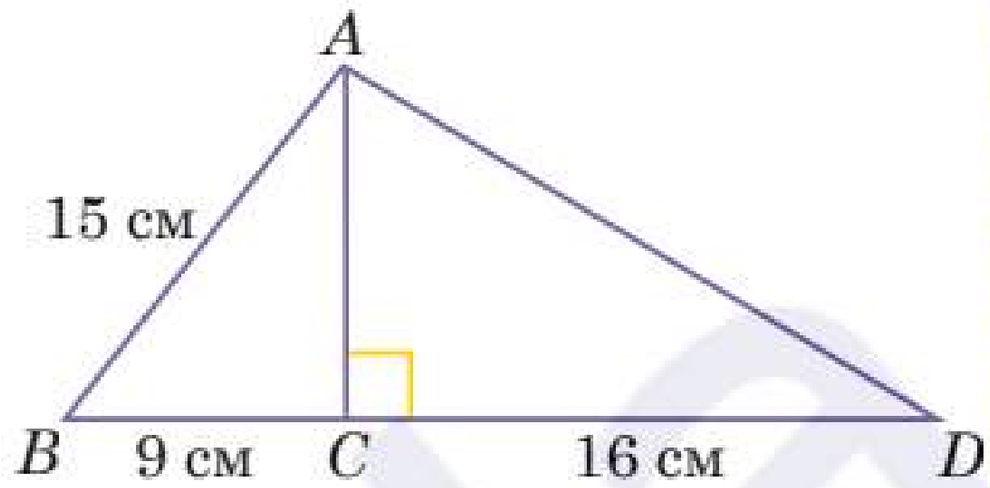
Відповідь. 12 см.



Приклад

4 Дано довільний ΔBAD. AC — висота трикутника ($AC \perp BD$). Знайдіть довжину висоти AC та довжину сторони AD, якщо відомо, що $AB = 15$ см, $BC = 9$ см, $CD = 16$ см.

Розв'язання



Розглянемо ΔBAD:

$AC \perp BD$ (за властивістю висоти трикутника).

Звідси $\angle C = 90°$ (за властивістю перпендикуляра).

Отже, ΔACB — прямокутний.

$AB = 12$ см, $BC = 9$ см (за умовою).

Застосуємо теорему Піфагора для знаходження невідомого катета AC:

$AB^2 = BC^2 + AC^2$;

$AC^2 = AB^2 - BC^2$;

$AC^2 = 15^2 - 9^2 = 225 - 81 = 144$;

$AC = \sqrt{144} = 12$ см.

Розглянемо ΔACD — прямокутний: $\angle C = 90°$ (за властивістю перпендикуляра).

$CD = 16$ см (за умовою);

$AC = 12$ см.

Застосуємо теорему Піфагора для знаходження невідомої гіпотенузи AD:

$AD^2 = CD^2 + AC^2$;

$AD^2 = 16^2 + 12^2 = 256 + 144 = 400$;

$AD = \sqrt{400} = 20$ см.

Відповідь. 12 см; 20 см.

Попрактикуйтеся

554 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) У прямокутному трикутнику гіпотенуза — найдовша сторона.

б) Прямокутний трикутник не може бути рівнобедреним.

в) Якщо в трикутнику сума квадратів двох сторін дорівнює квадрату третьої сторони, то цей трикутник є прямокутним.

г) Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.

д) Два прямокутних трикутники завжди є подібними.

е) У прямокутному трикутнику центр описаного кола лежить на гіпотенузі.

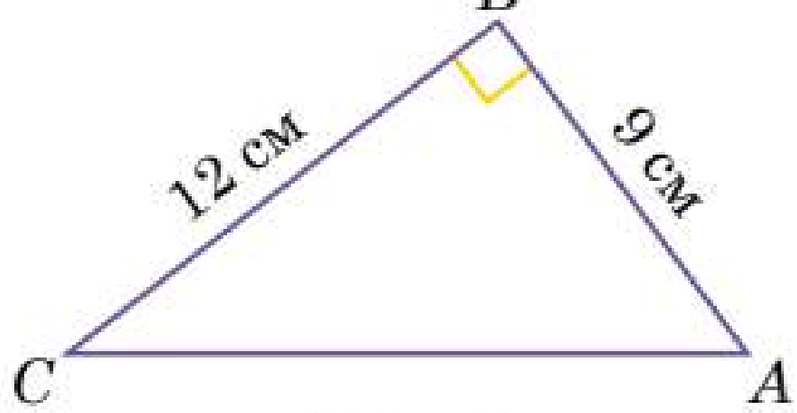
ж) Якщо у двох прямокутних трикутників відповідні кути рівні, то такі трикутники рівні.

и) У прямокутному трикутнику сума катетів більша за гіпотенузу.

к) Катети прямокутного трикутника завжди рівні між собою.

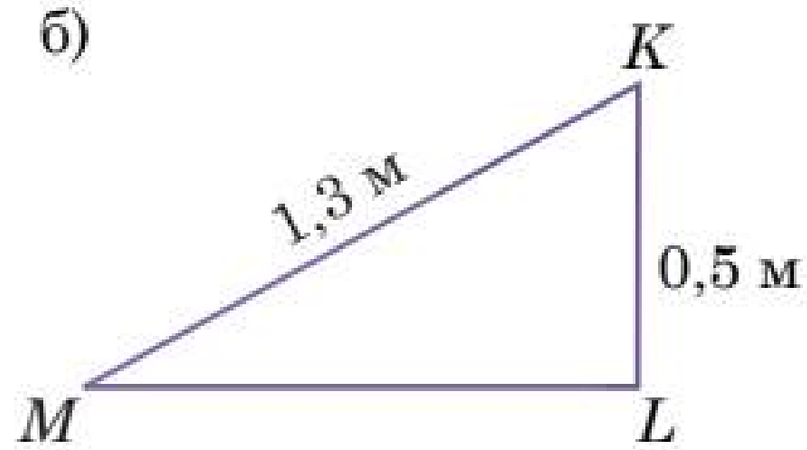
555 Знайдіть величину невідомих відрізків.

а)



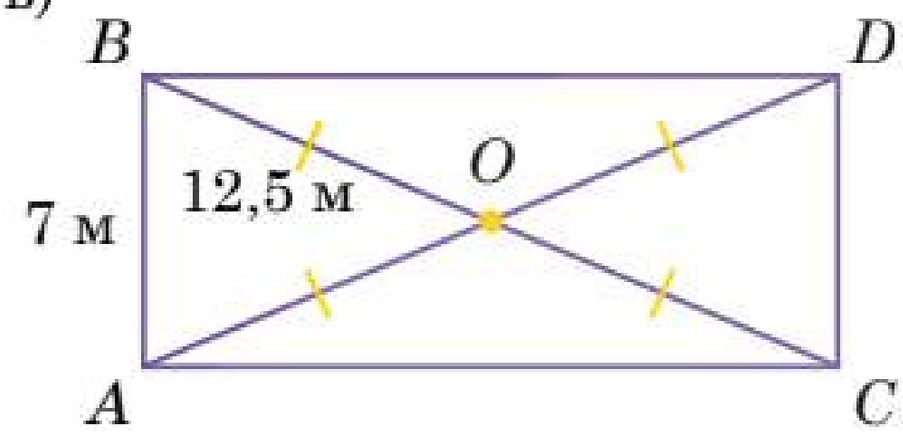
AC — ?

б)



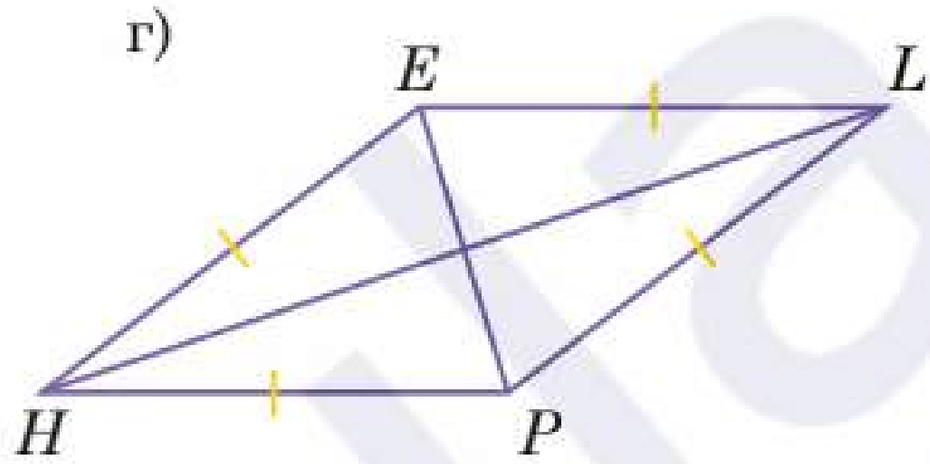
ML — ?

в)



BD — ?

г)



$HE = 17$ см, $PE = 16$ см

HL — ?

556 У прямокутнику $ABCD$ знайдіть:

а) AD, якщо $AB = 5$ см, $AC = 13$ см;

б) BC, якщо $CD = 1{,}5$ см, $AC = 2{,}5$ см;

в) CD, якщо $BD = 17$ см, $BC = 15$ см.

557 Довжина діагоналі прямокутника становить 50 см. Знаючи, що одна зі сторін прямокутника дорівнює 30 см, обчисліть іншу сторону прямокутника та його площу.

558 Діагоналі квадрата дорівнюють 10 см. Обчисліть периметр квадрата та його площу.

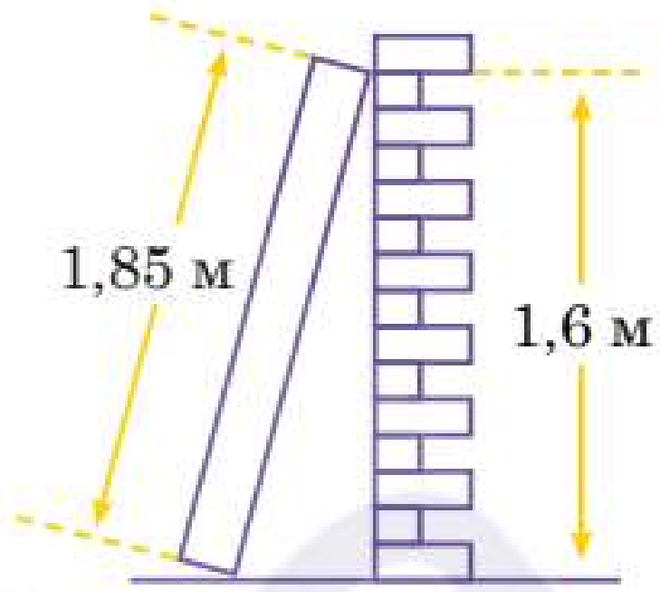
559 Використовуючи програмний засіб GeoGebra, побудуйте прямокутний трикутник та виміряйте довжини сторін цього трикутника. Перевірте, чи виконується теорема Піфагора. У разі, якщо існує розбіжність між отриманими значеннями, поясніть причини цієї розбіжності.

560 Використовуючи програмний засіб GeoGebra, побудуйте прямокутний трикутник, у якому $\angle A = 90°$, сторони $AB = 3$ см, $BC = 5$ см та $AC = 4$ см. Потім складіть прямокутний трикутник, у якому $\angle A_1 = 90°$, а довжини попередніх сторін удвічі більші, ніж у попередньому трикутнику. Потім повторіть дії, створивши трикутники, сторони яких у 3, 4 і т. д. рази довші, ніж у першому трикутнику. Що ви зауважили?

561 Петро веслує на човні через річку шириною 15 м. Коли він досяг іншого берега, то зрозумів, що річка віднесла човен на 18 м вниз за течією. Як далеко опинився Петро від початкової точки?

562 Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 17 см, а основа — 16 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до його основи.

563 На схемі зображено книжкову шафу, яка впала на стіну. Книжкова шафа має висоту 1,85 м і торкається стіни на висоті 1,6 м над землею. Обчисліть відстань ніжки книжкової шафи від стіни. Дайте відповідь з точністю до сотих.



564 У будівельній галузі третина нещасних випадків трапляється під час використання драбини. Щоб вирішити цю проблему, було введено правила, які визначають безпечну відстань основи драбини від стіни, на яку вона спирається. Якщо драбина має досягати висоти 5,6 м, то її основа повинна бути щонайменше на відстані 1,4 м від стіни. Якої довжини має бути драбина, щоб відповідати цим нормам безпеки?

565 Фронтон Львівського національного академічного театру опери та балету імені Соломії Крушельницької має форму рівнобедреного трикутника з основою 20 м та висотою 4,2 м. Оцініть довжину схилу цього фронтону з точністю до сотих.

566 Розмір смартфонів, як і телевізорів, визначається величиною діагоналі їх екрана. Але при цьому площа екрана може бути різною. Розгляньте два телефони з однаковою діагоналлю, але різним співвідношенням сторін.

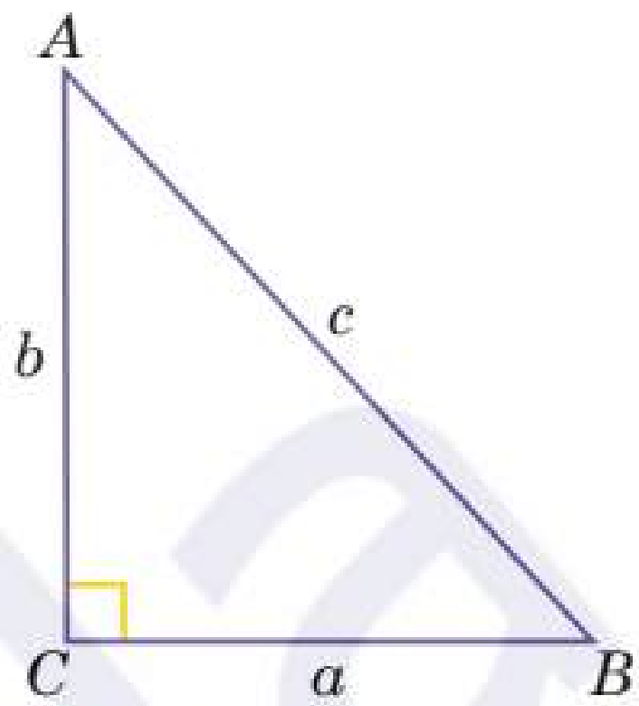
а) Знайдіть довжину сторін прямокутного екрана мобільного телефона зі співвідношенням сторін 16 : 9, діагональ якого становить 160 мм. Обчисліть площу цього екрана. Усі результати округлюйте до десятих.

б) Повторіть ці обчислення для мобільного телефона з такою ж діагоналлю, але співвідношенням сторін 8 : 5. Екран якого телефона має більшу площу?

в) Обчисліть діагональ екрана власного смартфона. Усі результати округлюйте до десятих.

5.2. Застосування теореми Піфагора до розв'язування задач

Прямокутні трикутники мають не лише специфічні співвідношення сторін, а й кілька особливостей для знаходження невідомих сторін та кутів. Серед них — теорема Піфагора — одна з найважливіших теорем планіметрії, яка встановлює **співвідношення між сторонами прямокутного трикутника**:



$$c^2 = a^2 + b^2,\ c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 = c^2 - b^2,\ a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2,\ b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

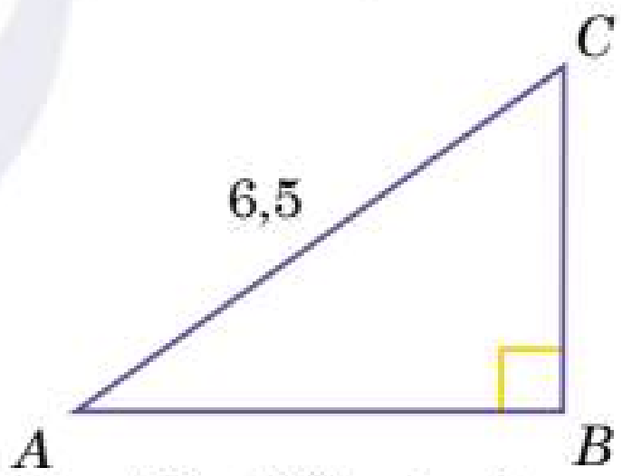
Попрактикуйтеся

567 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Трикутник зі сторонами 3 см, 4 см, 5 см є прямокутним.
б) Медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, ділить його на два однакових прямокутних трикутники.
в) Якщо в трикутнику сума двох сторін дорівнює третій стороні, то цей трикутник є прямокутним.
г) У рівнобедреному прямокутному трикутнику гіпотенуза в $\sqrt{2}$ разів більша за катет.
д) Трикутник зі сторонами 5 м, 12 м, 13 м не є прямокутним.
е) Діагональ квадрата в $\sqrt{2}$ разів більша за його сторону.
ж) Діагональ прямокутника ділить його на два рівнобедрених прямокутних трикутники.
и) Діагоналі ромба ділять його на чотири однакових прямокутних трикутники.
к) Якщо довжини катетів прямокутного трикутника є цілими числами, то довжина його гіпотенузи також буде цілим числом.

568 Знайдіть величину невідомих відрізків.

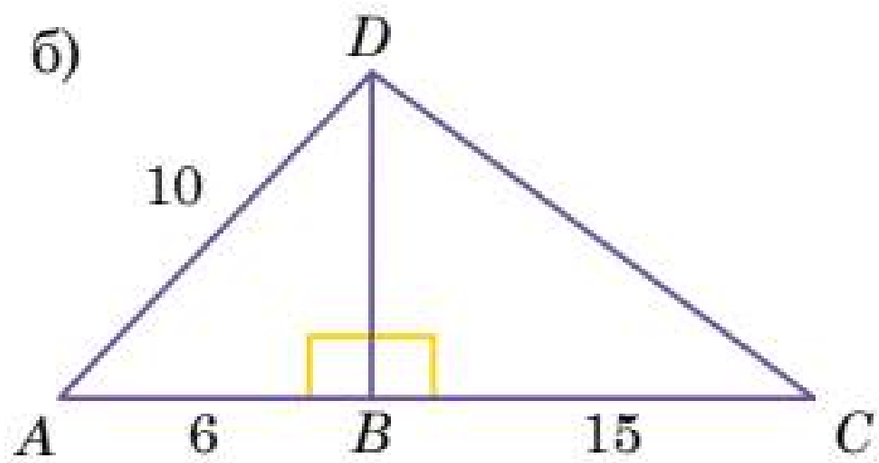
а)



$AB : BC = 4 : 3$

AB — ?

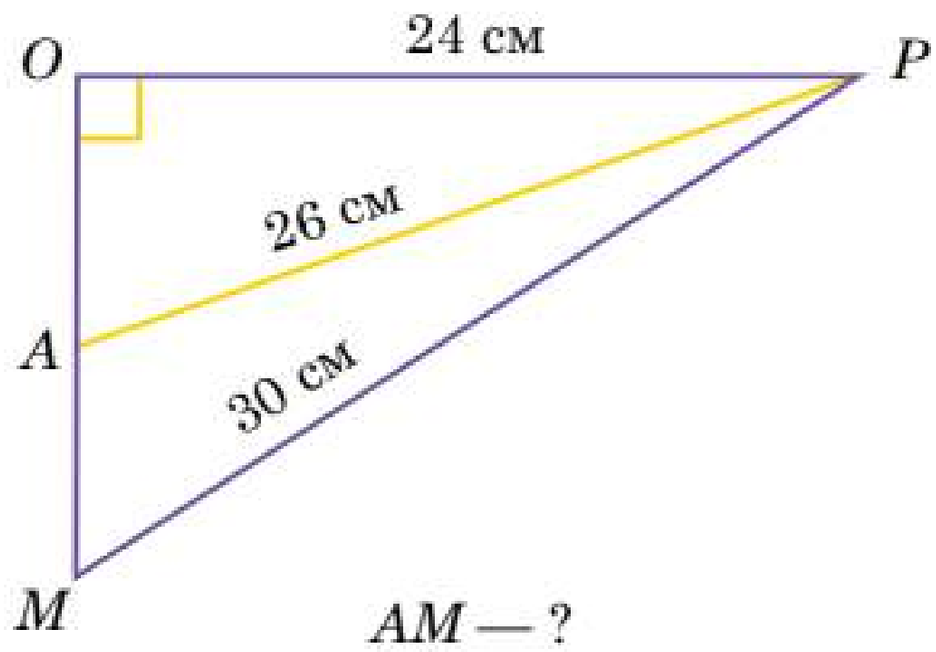
б)



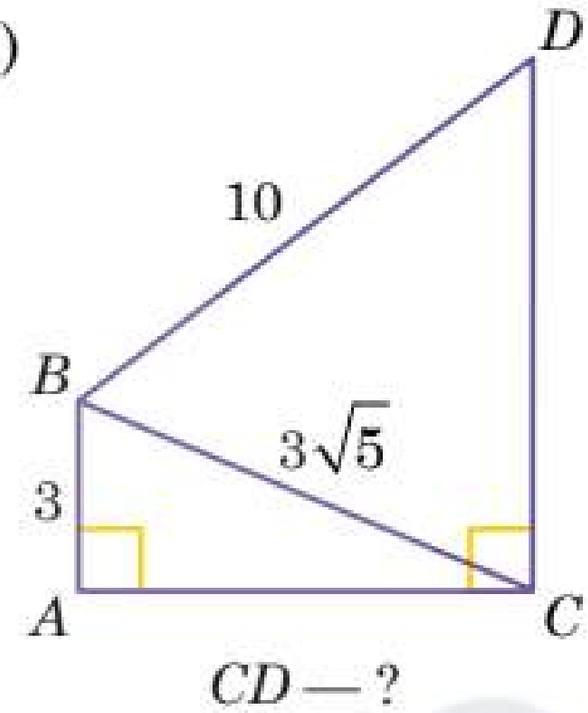
$AB = 6,\ BC = 15,\ AD = 10$

CD — ?

в)



г)

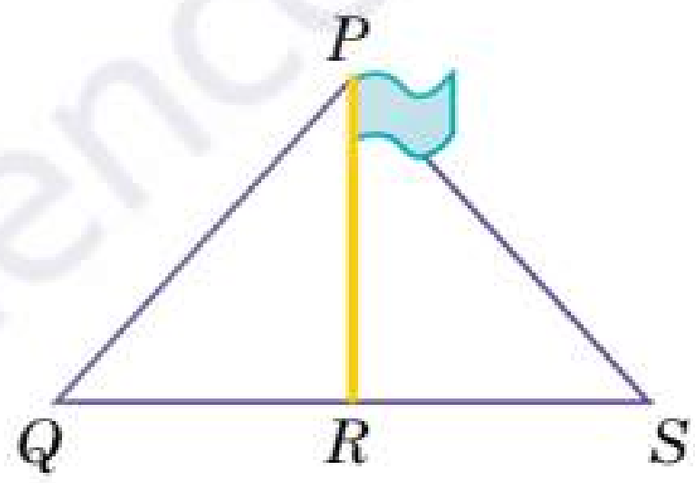


569 За допомогою програмного засобу GeoGebra побудуйте рівнобедрений трикутник з основою 6,4 см та бічною стороною 4 см. Проведіть у ньому медіану до основи та виміряйте її довжину. Розрахуйте довжину медіани та порівняйте її з виміряним значенням.

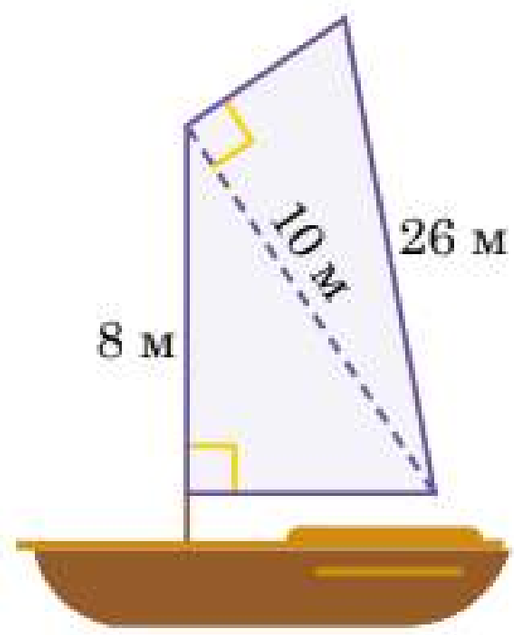
570 Чи існує прямокутний трикутник, сторони якого відносяться як 8 : 15 : 17? Обґрунтуйте свою відповідь.

571 Катети прямокутного трикутника дорівнюють 11 см та 16 см. Обчисліть довжину медіани, проведеної до більшого катета.

572 Флагшток PR, висота якого становить 12 м, перпендикулярний до рівня землі. Дві мотузки — PQ та PS, кожна з яких має довжину 16,5 м, прикріплені до верхньої частини флагштока і відповідно до точок Q та S на землі. Відомо, що точки Q, R та S лежать на одній прямій. Обчисліть відстань від точки Q до точки S. Відповідь округліть до сотих.

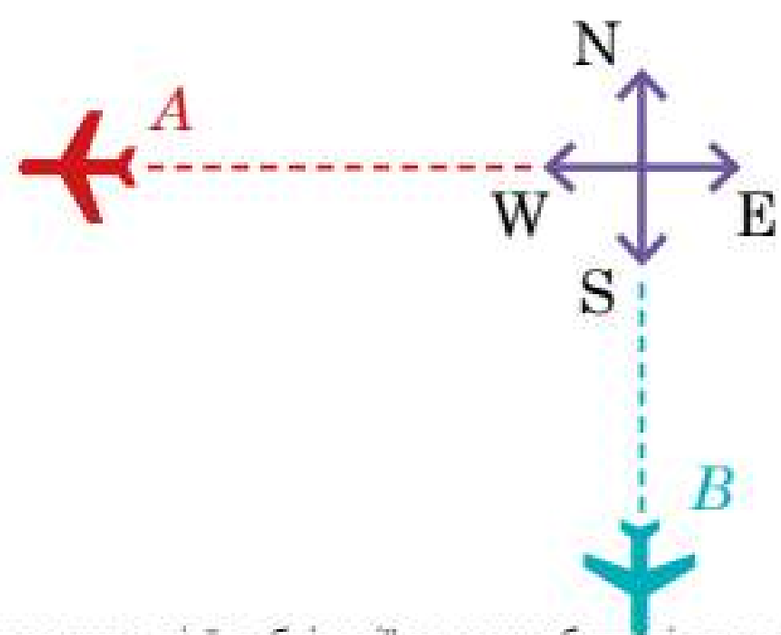


573 На рисунку зображено корабель із вітрилом. Знайдіть площу тканини, необхідної для пошиття такого вітрила. Відповідь округліть до десятих.



574 У рівнобічну трапецію вписано коло. Знайдіть радіус цього кола, якщо основи трапеції дорівнюють 6 см та 18 см, а бічна сторона дорівнює 10 см.

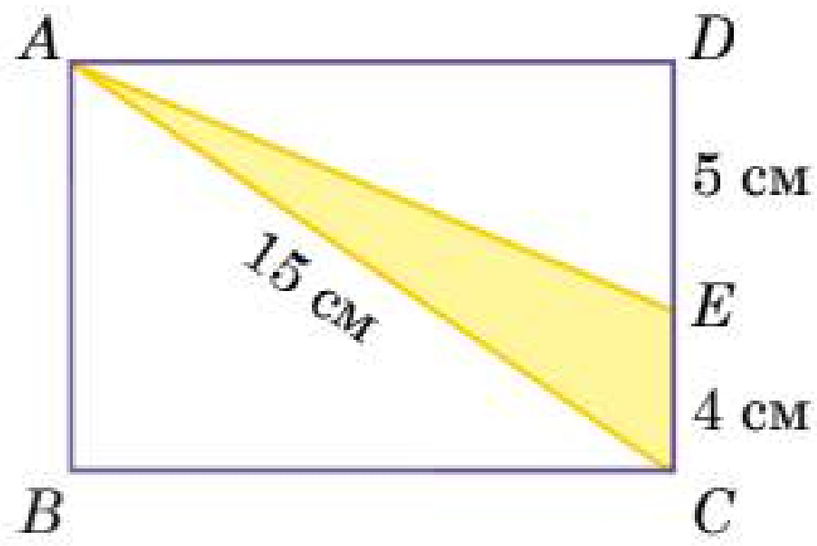
575 Опівдні з аеропорту вилетіли два літаки. Літак A летів на захід із середньою швидкістю 624 км/год, а літак B — на південь із середньою швидкістю 468 км/год. На якій відстані один від одного були літаки о 15:00?



576 $ABCD$ — прямокутник. За даними на рисунку знайдіть:

а) периметр прямокутника $ABCD$;

б) площу трикутника ACE.



577 Два кола радіусами 6 см і 10 см мають зовнішній дотик. Обчисліть довжину відрізка їхньої спільної дотичної, що знаходиться між точками дотику.

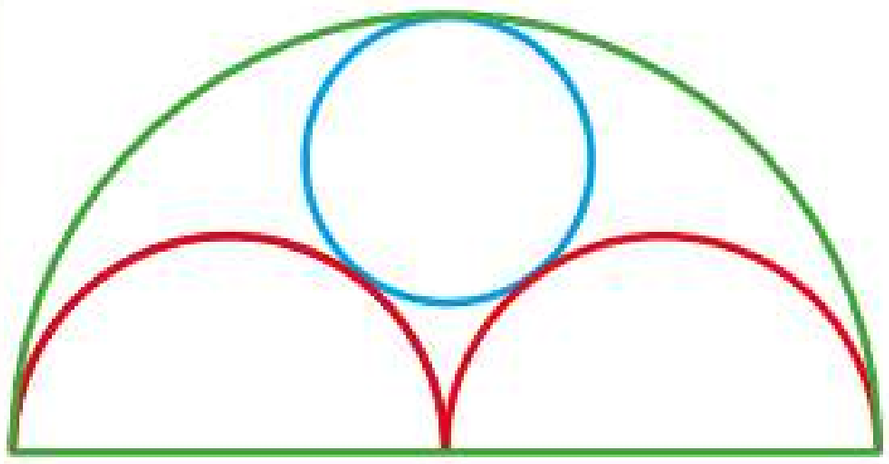
578 Бісектриса гострого кута прямокутного трикутника ділить катет на відрізки завдовжки 13 см і 5 см. Обчисліть площу цього трикутника.

579* У трикутнику одна сторона дорівнює 60 см, а висота і медіана, проведені до неї, відповідно дорівнюють 12 см і 13 см. Обчисліть невідомі сторони цього трикутника.

580* Бічна сторона рівнобедреного тупокутного трикутника дорівнює $4\sqrt{10}$ см, а радіус описаного навколо нього кола — 10 см. Обчисліть довжину основи трикутника.

581 На фото представлене вишукане вікно палацу Вітеллескі, що знаходиться в регіоні Лаціо, Італія. Його геометричні форми — витончені арки та переплетені круглі елементи — створюють відчуття гармонії та симетрії. Архітектори того часу використовували чіткі геометричні принципи для створення ідеальних пропорцій таких візерунків.

За допомогою наведеного креслення, на якому зображено спрощену модель елемента вікна, розрахуйте відношення радіусу синього кола до радіусу зеленого півкола. Вважайте, що радіуси червоних півкіл на рисунку однакові.



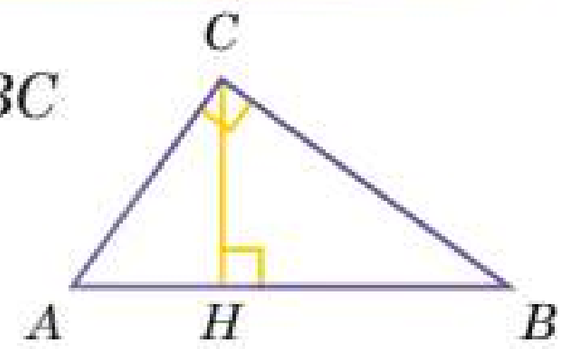
582* Знайдіть кути трикутника, у якого медіана і висота, проведені з однієї вершини, ділять кут на три рівні частини.

583* Доведіть, що якщо діагоналі чотирикутника $ABCD$ взаємно перпендикулярні, то $AD^2 + BC^2 = AB^2 + CD^2$.

5

5.3. Середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику

У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведемо висоту CH.



Лема — допоміжне математичне твердження, необхідне для доведення іншого твердження.

Лема. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, розбиває трикутник на два подібних між собою прямокутних трикутники, кожен з яких подібний даному.

$\Delta ACH \sim \Delta CBH$, $\Delta ACH \sim \Delta ABC$, $\Delta CBH \sim \Delta ABC$

Назва **середнє пропорційне** пов'язана з тим, що величина відрізка знаходиться із пропорції:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

Доведіть цю лему самостійно.

Подібність прямокутних трикутників дає змогу встановити декілька співвідношень між сторонами цих трикутників та їхніми частинами (такі співвідношення називають **метричними**). Уведемо спочатку допоміжні поняття.

1. Відрізки AH і BH, на які висота ділить гіпотенузу, називають **проекціями катетів на гіпотенузу**.
2. Відрізок x називається **середнім пропорційним** (або **середнім геометричним**) між відрізками a і b, якщо $x^2 = ab$.

Доведення теореми про середні пропорційні відрізки

Теорема про середні пропорційні відрізки

1) У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу	$CH^2 = AH \cdot BH$
2) У прямокутному трикутнику катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу	$AC^2 = AB \cdot AH$, $BC^2 = AB \cdot BH$

Розглянемо приклади розв'язування задач, де застосовуються середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику.

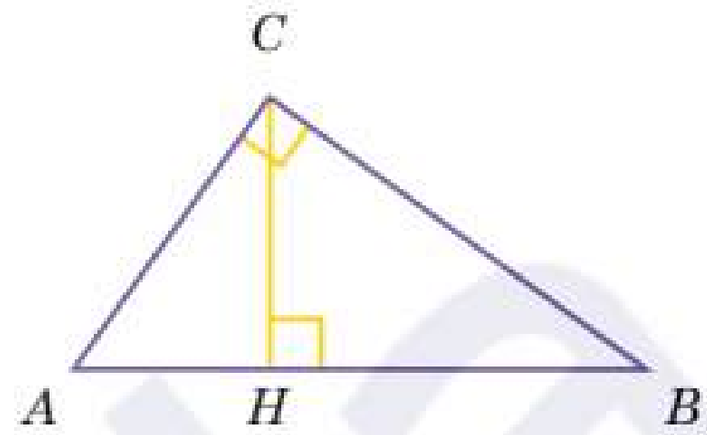
Приклад

1 Катет прямокутного трикутника дорівнює 10 см, а його проекція на гіпотенузу — 5 см. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.

Розв'язання

Розглянемо трикутник ABC ($\angle C = 90°$), у якому проведемо висоту CH. Тоді за умовою $AC = 10$ см, $AH = 5$ см.

Застосуємо теорему про середні пропорційні відрізки для знаходження гіпотенузи AB:



$AC^2 = AB \cdot AH$;

$AB = \frac{AC^2}{AH}$;

$AB = \frac{10^2}{5}$;

$AB = 20$.

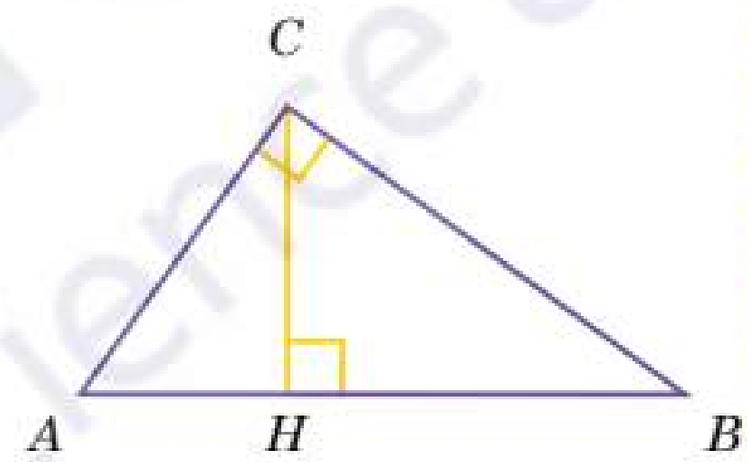
Отже, $AB = 20$ см.

Відповідь. 20 см.

Приклад

2 Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 50 см, а проекція одного з катетів на гіпотенузу — 10 см. Знайдіть катети трикутника.

Розв'язання



Розглянемо трикутник ABC ($\angle C = 90°$), у якому проведемо висоту CH. Тоді за умовою $AB = 50$ см, $AH = 10$ см. Можемо обчислити також, що $BH = AB - AH = 50 - 10 = 40$ см.

Застосуємо теорему про середні пропорційні відрізки для знаходження висоти CH:

$CH^2 = AH \cdot BH$;

$CH^2 = 10 \cdot 40$;

$CH^2 = 400$;

$CH = \sqrt{400}$;

$CH = 20$.

Отже, $CH = 20$ см.

Далі використаємо теорему Піфагора для знаходження сторін AC та BC.

У трикутнику ACH:

$AC^2 = AH^2 + CH^2$;

$AC^2 = 10^2 + 20^2$;

$AC^2 = 100 + 400$;

$AC^2 = 500$;

$AC = \sqrt{500}$;

$AC = 10\sqrt{5}$.

У трикутнику BCH:

$BC^2 = BH^2 + CH^2$;

$BC^2 = 20^2 + 20^2$;

$BC^2 = 400 + 400$;

$BC^2 = 800$;

$BC = \sqrt{800}$;

$BC = 20\sqrt{2}$.

Отже, катети трикутника дорівнюють $10\sqrt{5}$ см та $20\sqrt{2}$ см.

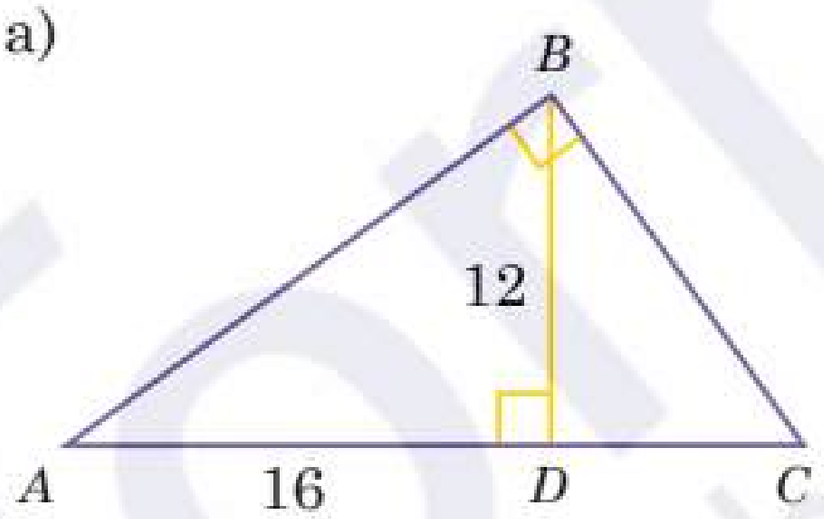
Відповідь. $10\sqrt{5}$ см, $20\sqrt{2}$ см.

Попрактикуйтеся

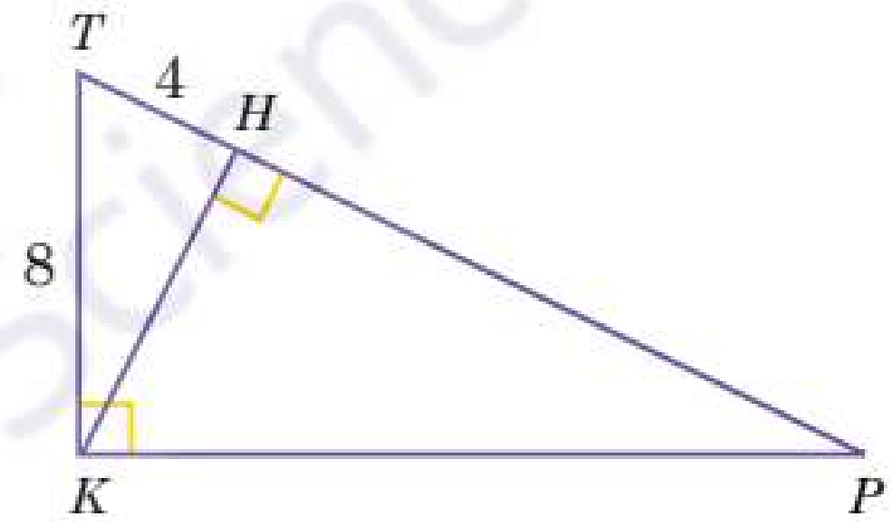
584 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить його на два трикутники, подібних між собою.
б) Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, ділить його на два трикутники, подібних даному.
в) Середнє пропорційне між відрізками 1 см та 9 см дорівнює 5 см.
г) Середнє геометричне між відрізками 2 см та 8 см дорівнює 4 см.
д) Квадрат висоти прямокутного трикутника, проведеної до гіпотенузи, дорівнює сумі квадратів проекцій його катетів на гіпотенузу.
е) Гіпотенуза є середнім пропорційним між катетами.
ж) Катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.
и) У прямокутному трикутнику проекції катетів на гіпотенузу завжди менші, ніж висота, проведена до гіпотенузи.
к) У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, не більша за радіус описаного навколо цього трикутника кола.

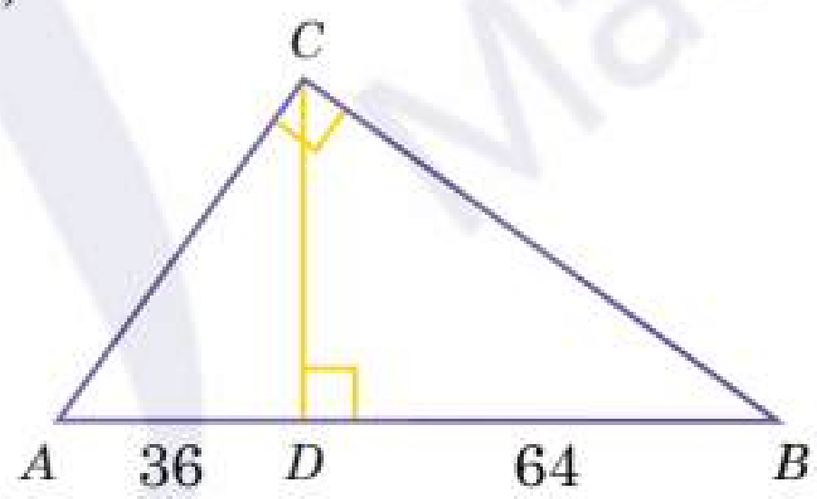
585 Знайдіть величину невідомих відрізків.

а)


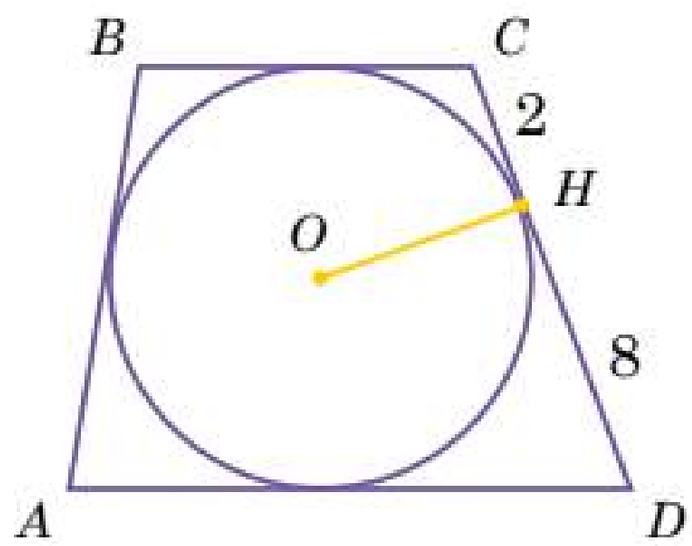
CD — ?

б)


PT — ?

в)


BC — ?

г)


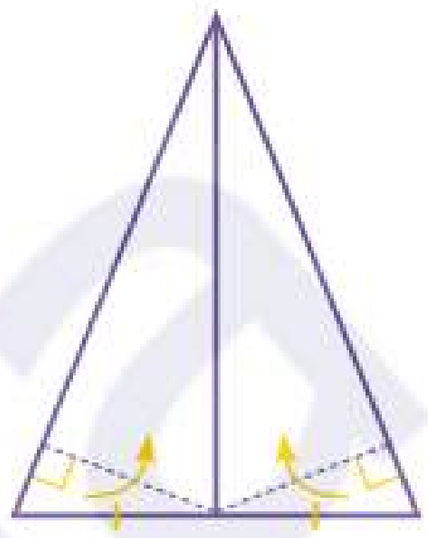
$ABCD$ — трапеція, OH — ?

586 Знайдіть периметр прямокутного трикутника, висота якого ділить гіпотенузу на відрізки завдовжки 4,5 см і 8 см.

587 Висота прямокутного трикутника ділить його гіпотенузу на відрізки, один з яких на 4 см менший за висоту, а другий — на 5 см більший за висоту. Знайдіть гіпотенузу цього трикутника.

588 Ділянка землі має форму прямокутної трапеції з основами 9 м та 13 м. Якою має бути ширина цієї ділянки, щоб проведена діагональ ділила її на два прямокутних трикутники?

589 На рисунку зображено певний етап складання оригамі. На цьому етапі в рівнобедреного трикутника з основою 30 см та бічною стороною 25 см потрібно загнути кути так, як показано на рисунку. На скільки відсотків при цьому зменшиться площа фігури?



590 Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 8 см, а проекція другого катета на гіпотенузу — 12 см. Знайдіть периметр трикутника.

591 Сторони трикутника відносяться як 3 : 4 : 5. Знайдіть відрізки, на які висота завдовжки 48 см, проведена до найбільшої сторони, ділить цю сторону.

592 За допомогою сервісу GeoGebra накресліть два довільних відрізки. Побудуйте третій відрізок, який дорівнює середньому геометричному двох накреслених вами відрізків. Примітка: якщо ви змінюєте довжини двох накреслених відрізків, побудований вами відрізок має змінюватись автоматично.

593 Компанія з оздоблення фасадів вирішила встановити новий підйомний кран на будівельному майданчику. Їм необхідно, щоб кран мав форму прямокутного трикутника, де гіпотенуза — це стріла крана, а катети — це вертикальна опора і горизонтальна основа. Висота крана від основи до вершини стріли становить 15 м. Стріла крана має довжину 25 м. Знайдіть на які відрізки поділиться стріла крана, якщо провести трос від вершини стріли перпендикулярно до основи.

594 Житловий будинок сполучений похилою трубою з водонапірною вежею для забезпечення всіх жителів водою. Відстань між будинком та вежею дорівнює 12 м, а кінці труби розташовані на висоті 9 м і 4 м над землею. Знайдіть довжину труби.

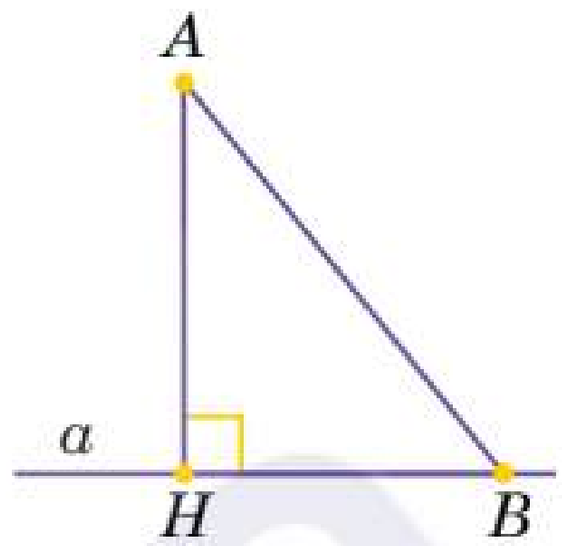
595* Катети прямокутного трикутника відносяться як 3 : 4, а гіпотенуза дорівнює 50 мм. Знайдіть відрізки, на які гіпотенуза ділиться висотою, проведеною з вершини прямого кута.

596* Точка дотику кола, вписаного в ромб, ділить його сторону на відрізки довжиною 3 см і 12 см. Знайдіть діагоналі ромба.

5

5.4. Перпендикуляр і похила, їх властивості

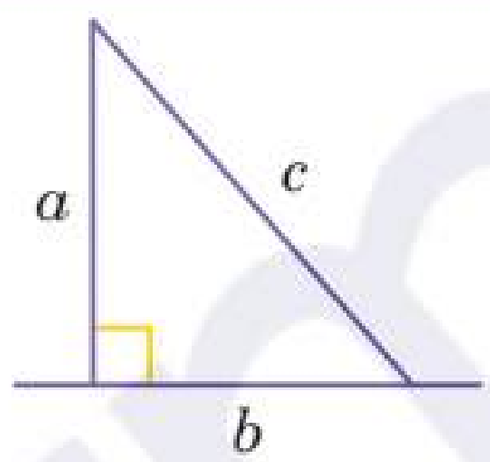
Нехай з точки A, що не лежить на прямій a, проведено **перпендикуляр** AH до цієї прямої. Тоді точку H називають **основою перпендикуляра**.



Відрізок, який сполучає точку A з точкою прямої a і не збігається з перпендикуляром, називають **похилою** до прямої a. На рисунку відрізок AB — похила до прямої a, точка B — **основа** цієї **похилої**. Водночас відрізок HB називають **проєкцією похилої** AB на дану пряму.

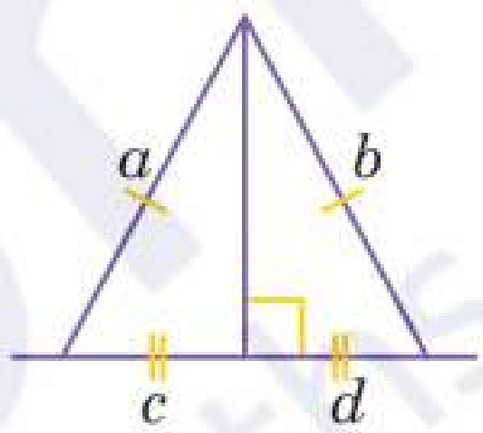
Перпендикуляр і похила, проведені з однієї точки, а також проєкція цієї похилої утворюють прямокутний трикутник, у якому похила є гіпотенузою.

Властивості перпендикуляра і похилої



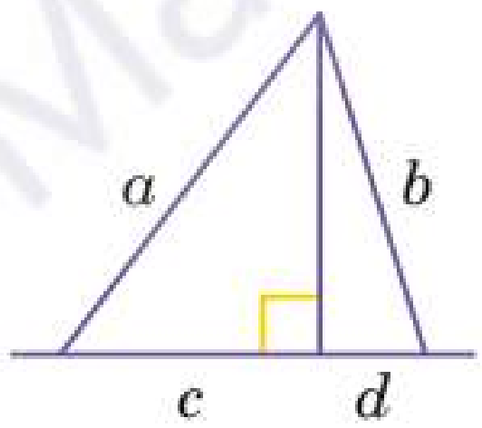
1) Будь-яка похила більша за перпендикуляр і більша за свою проєкцію на дану пряму.

$c > a,\ c > b$



2) Рівні похилі, проведені з однієї точки, мають рівні проєкції, і навпаки: якщо проєкції двох похилих рівні, то рівні й самі похилі.

$a = b \Leftrightarrow c = d$



3) Якщо дві похилі проведені з однієї точки, то більша похила має більшу проєкцію, і навпаки: з двох похилих більша та, яка має більшу проєкцію.

$a > b \Leftrightarrow c > d$

Доведення властивостей перпендикуляра і похилої

Ці знання часто використовують на практиці. Наприклад, якщо потрібно висадити дерева і зафіксувати їх від вітру, то беруть мотузки однакової довжини. Нижні кінці закріплюють на однаковій відстані від дерева — це сприяє його стійкості.

Приклад

1 У трикутнику, утвореному перпендикуляром до прямої, похилою та її проєкцією на пряму, різниця між довжинами найбільшої та найменшої сторін дорівнює 9 см, а третя сторона має довжину 15 см. Знайдіть довжину похилої.

Розв'язання

У трикутнику, утвореному перпендикуляром до прямої, похилою та її проєкцією на пряму, похила є гіпотенузою, а отже найбільшою стороною. Найменшою стороною може бути як перпендикуляр, так і проєкція похилої, але в будь-якому разі вони є катетами прямокутного трикутника.

Нехай довжина похилої — x см, тоді довжина найменшої сторони — $(x - 9)$ см. Застосуємо теорему Піфагора:

$(x - 9)^2 + 15^2 = x^2$;

$x^2 - 18x + 81 + 225 = x^2$;

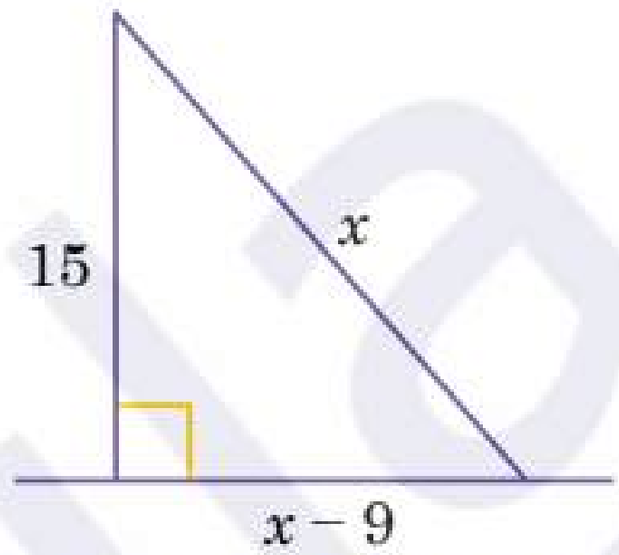
$18x = 306$;

$x = 306 : 18$;

$x = 17$.

Отже, довжина похилої дорівнює 17 см.

Відповідь. 17 см.



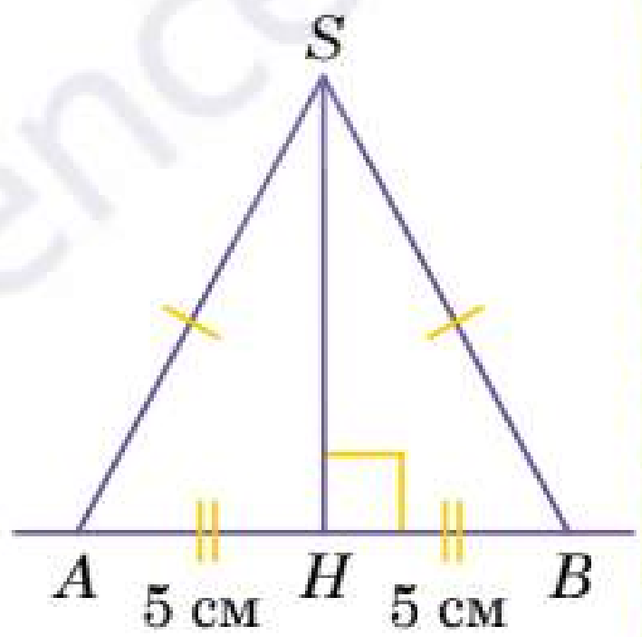
Приклад

2 З однієї точки до прямої проведено дві похилі однакової довжини. Проєкція однієї з похилих на пряму дорівнює 5 см. Знайдіть відстань між основами цих похилих.

Розв'язання

Якщо дві похилі, проведені з точки до прямої, мають однакову довжину ($SA = SB$), то і їхні проєкції між собою рівні ($AH = BH = 5$ см). А отже, відстань між основами похилих $AB = AH + BH = 5$ см $+ 5$ см $= 10$ см.

Відповідь. 10 см.



Приклад

3 З точки до прямої проведено дві похилі завдовжки 7 см і 5 см. Різниця між проєкціями цих похилих на пряму дорівнює 4 см. Знайдіть довжини проєкцій обох похилих.

Розв'язання

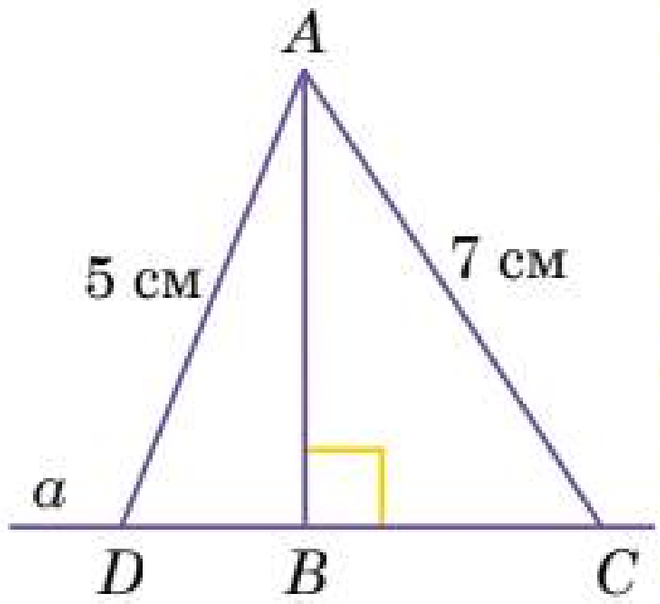
Нехай на рисунку $AC = 7$ см, $AD = 5$ см. Тоді за властивістю $CB > DB$. Позначимо $DB = x$ см, тоді $CB = (x + 4)$ см.

Запишемо теорему Піфагора для ΔABC:

$AB^2 + CB^2 = AC^2$, тому $AB^2 = AC^2 - CB^2 = 7^2 - (x + 4)^2$.

Запишемо теорему Піфагора для ΔABD:

$AB^2 + DB^2 = AD^2$, тому $AB^2 = AD^2 - DB^2 = 5^2 - x^2$.



Ліві частини отриманих рівностей рівні, отже рівні і праві їхні частини. Маємо рівняння:

$7^2 - (x + 4)^2 = 5^2 - x^2$;

$49 - x^2 - 8x - 16 = 25 - x^2$;

$8x = 49 - 25 - 16$;

$8x = 8$;

$x = 8 : 8$;

$x = 1$.

Отже, $DB = 1$ см, $CB = 1$ см $+ 4$ см $= 5$ см.

Відповідь. 1 см і 5 см.

Попрактикуйтеся

597 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Основа похилої — це відрізок.

б) Проєкція похилої на пряму завжди менша за цю похилу.

в) З точки, що не лежить на прямій, можна провести до цієї прямої тільки один перпендикуляр.

г) Проєкція похилої на пряму — це відрізок між основою перпендикуляра та основою похилої, проведених з однієї точки на цю пряму.

д) Якщо дві похилі, проведені до однієї прямої, рівні, то їхні проєкції також рівні.

е) Проєкція похилої є гіпотенузою в трикутнику, утвореному перпендикуляром, похилою та її проєкцією на пряму.

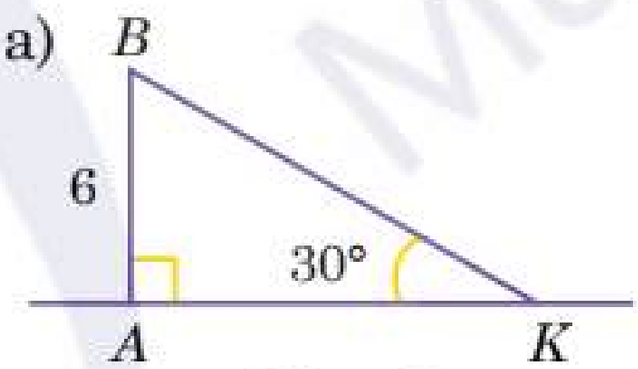
ж) Якщо перпендикуляр і похила проведені з однієї точки до прямої, то кут між перпендикуляром і похилою дорівнює 90°.

и) Похила — це найкоротша відстань від точки до прямої.

к) Кут між похилою та прямою, до якої вона проведена, завжди менший за кут між перпендикуляром і тією ж прямою.

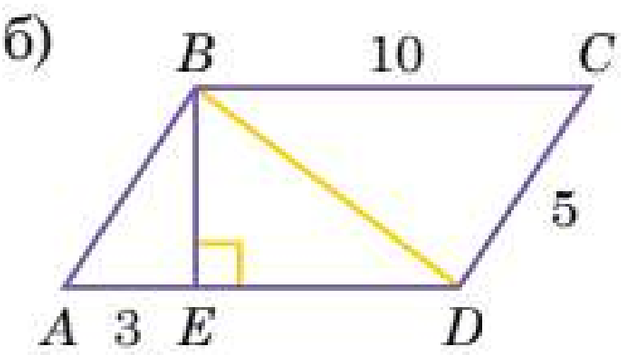
598 Знайдіть величину невідомих відрізків.

а)



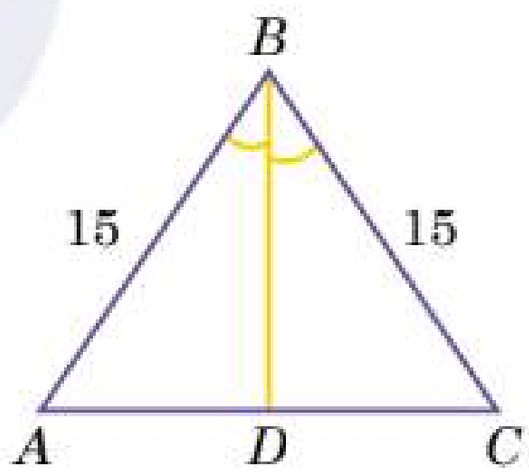
AK — ?

б)



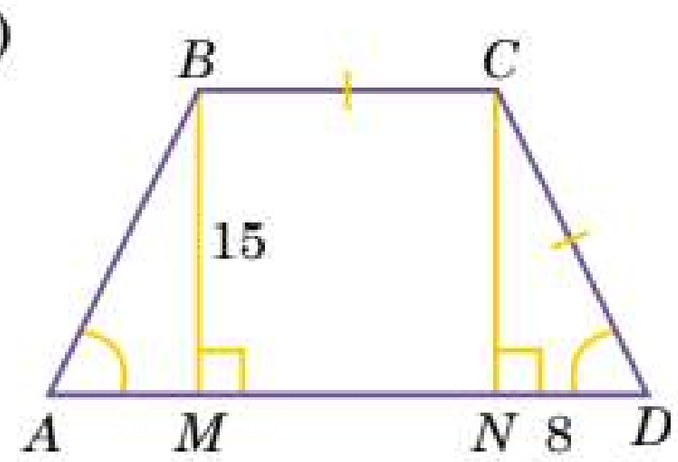
$ABCD$ — паралелограм, BD — ?

в)



$AC = 18$, BD — ?

г)



AD — ?

599 З точки до прямої проведено перпендикуляр і похилу. Знайдіть довжину:

а) похилої, якщо її проекція дорівнює 20 см, а перпендикуляр має довжину 21 см;

б) перпендикуляра, якщо похила та її проекція дорівнюють відповідно 41 см і 40 см.

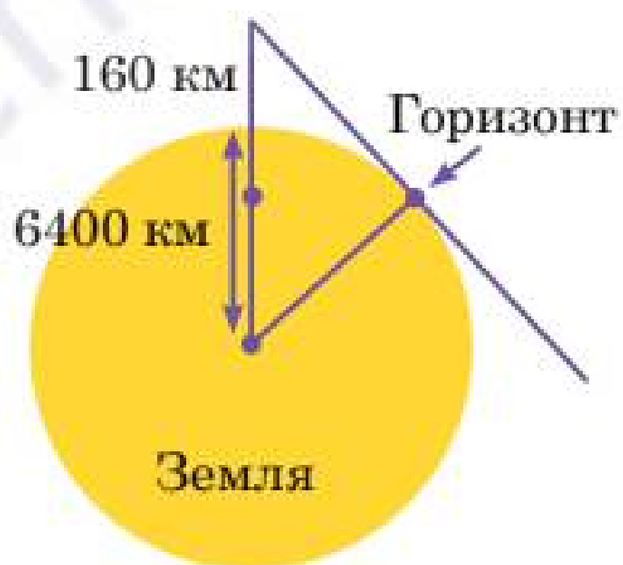
600 За допомогою програми GeoGebra побудуйте пряму l та позначте точку K, що не лежить на цій прямій. Проведіть похилу KM та перпендикуляр KP до прямої l. Проведіть похилу KT, довжина якої більша, ніж KM. Виміряйте та порівняйте довжини їхніх проекцій. Розгляньте два випадки:

а) коли точки M та T лежать по різні боки від точки P;

б) коли точки M та T лежать по один бік від точки P.

601 Геодезистка стоїть на пагорбі і через теодоліт (вимірювальний прилад на основі зорової труби) бачить верхівку будівлі, яка розташована під пагорбом. Лінія зору зорової труби перпендикулярна до стіни будівлі. Відстань між теодолітом і верхівкою будівлі становить 72 м, а висота будівлі — 65 м. Оцініть довжину схилу пагорба.

602 Радіус Землі становить близько 6400 км. Знайдіть відстань до горизонту від ракети, яка знаходиться на висоті 160 км над поверхнею Землі.



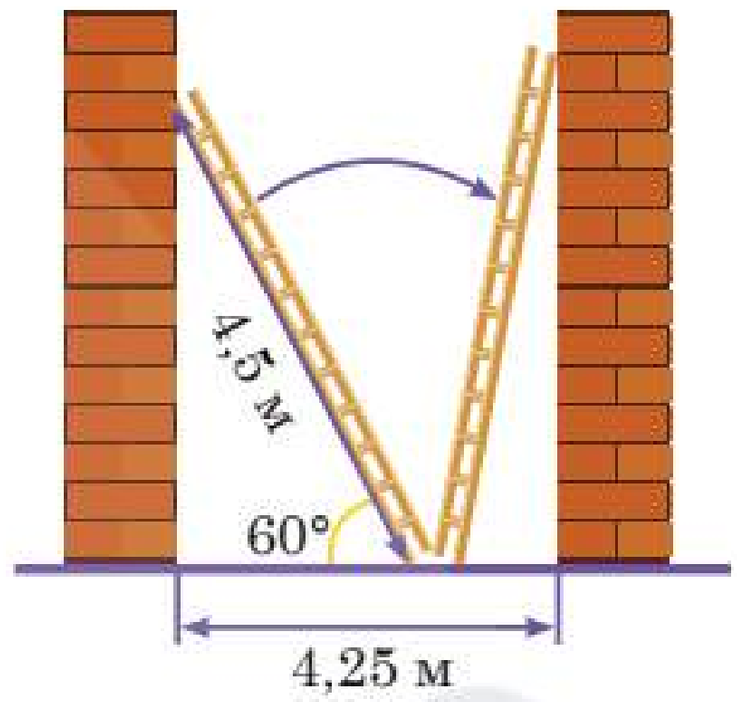
603

Висоти двох вертикальних веж дорівнюють 75 м та 42 м. Якщо найкоротша відстань між верхівками цих веж становить 65 м, оцініть, на якій відстані знаходяться центри їхніх основ.

604 З точки до прямої проведено дві похилі. Одна з них завдовжки $24\sqrt{2}$ см утворює з прямою кут 45°. Знайдіть довжину другої похилої, якщо її проекція на пряму дорівнює 18 см.

605 З точки M до прямої m проведено похилу. Доведіть, що з даної точки до тієї ж прямої можна провести ще одну похилу такої самої довжини.

606 Драбина завдовжки 4,5 м спирається на вертикальну стіну так, що утворює з підлогою кут 60°. Тримаючи основу драби-ни нерухомою, її нахиляють до протилежної стіни кімнати шириною 4,25 м. Визначте, чи можна по цій драбині піднятися на висоту 4 м.



607 Дві сторони трикутника дорівнюють 25 см і 39 см. Висота, проведена до третьої сторони, ділить цю сторону у відношенні 5 : 9. Знайдіть довжину цієї висоти.

608 Сторони трикутника дорівнюють 22 см, 34 см і 48 см. Знайдіть проекції двох менших сторін трикутника на його найбільшу сторону.

609 З точки, що не належить даній прямій, проведені дві похилі — 10 см та 18 см. Сума довжин їх проекцій на пряму дорівнює 16 см. Знайдіть довжину проекції кожної похилої.

610 З точки, що не належить даній прямій, проведені дві похилі. Одна з них довжиною 12 см, причому кут між даною похилою і прямою — 60°. Проекція другої похилої на цю пряму дорівнює $6\sqrt{6}$ см. Знайдіть довжину другої похилої.

611 EN Real-life problem. The difference between the length and height of a set of stairs is 20 cm, and their sum is 2 m. Find the height of the stairs.

difference — різниця
the length and height of the stairs — довжина та висота сходів

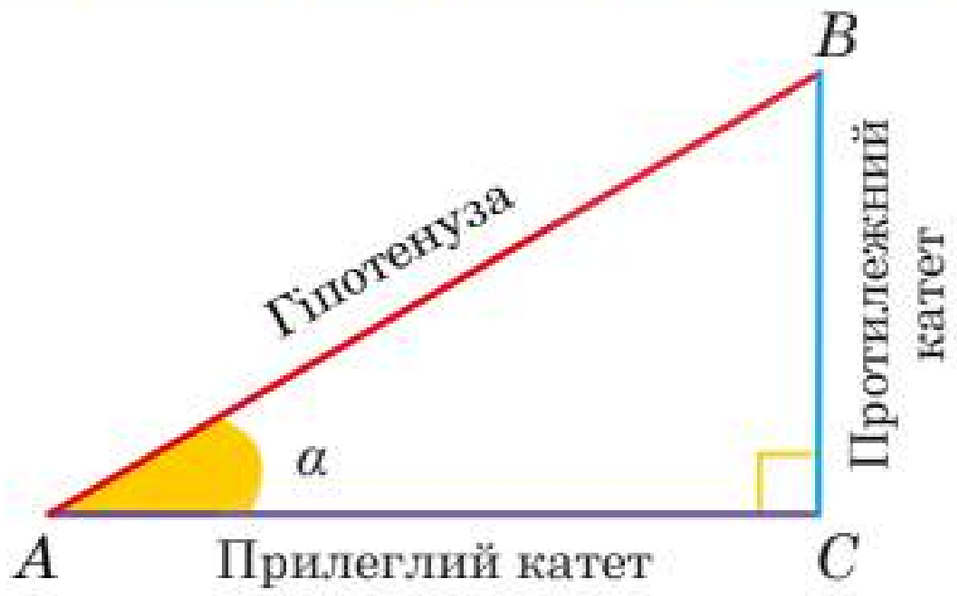
612 * З точки до прямої проведено перпендикуляр і дві похилі, різниця довжин яких становить 4 см. Знайдіть довжину перпендикуляра, якщо проекція однієї з похилих дорівнює 4 см, а відстань між основами похилих — 16 см. Розгляньте всі можливі випадки.

613 * З точки до прямої проведені дві похилі, довжина яких дорівнює 10 см та 17 см. Різниця проекцій цих похилих дорівнює 9 см. Знайдіть довжини проекцій цих похилих.

614 * ΔABC — рівнобедрений ($AB = AC$), $AK \perp AB$, M — середина BC. Доведіть, що $MK \perp BC$.

5.5. Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника

Для будь-якого заданого кута можна побудувати прямокутний трикутник, що містить такий кут, і зі сторонами, пов'язаними з цим кутом певним співвідношенням. Ці **відношення сторін не залежать від конкретного обраного прямокутного трикутника, а залежать тільки від заданого кута, оскільки всі трикутники, побудовані в такий спосіб, є подібними.**



Нехай $\angle A$ — заданий гострий кут. Добудуємо його до довільного прямокутного трикутника ACB. Тоді **AC — прилеглий катет до $\angle A$, BC — протилежний катет до $\angle A$, AB — гіпотенуза** цього прямокутного трикутника.

Синус гострого кута прямокутного трикутника дорівнює відношенню протилежного катета до гіпотенузи.

Косинус гострого кута прямокутного трикутника дорівнює відношенню прилеглого катета до гіпотенузи.

Тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює відношенню протилежного катета до прилеглого.

Котангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює відношенню прилеглого катета до протилежного.

$$\sin\alpha = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{гіпотенуза}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{гіпотенуза}}$$

$$tg\,\alpha = \frac{\text{протилежний катет}}{\text{прилеглий катет}}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{\text{прилеглий катет}}{\text{протилежний катет}}$$

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{AC}{BC}$$

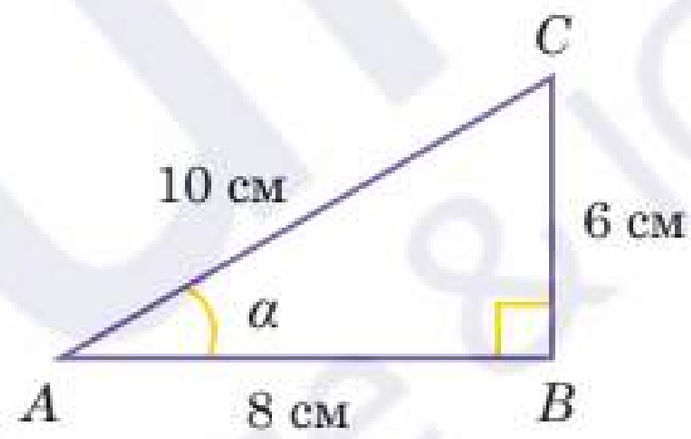
Знаходження невідомих сторін прямокутного трикутника:

Шукана сторона	Спосіб знаходження	Формула
Протилежний катет	Катет, протилежний до кута α, дорівнює: 1) добутку гіпотенузи на $\sin\alpha$; 2) добутку прилеглого катета на $tg\,\alpha$ 3) частки прилеглого катета та $ctg\,\alpha$	$BC = AB \cdot \sin\alpha$ $BC = AC \cdot tg\,\alpha$ $BC = \frac{AC}{ctg\alpha}$

Прилеглий катет	Катет, прилеглий до кута α, дорівнює: 1) добутку гіпотенузи на $\cos\alpha$; 2) частці від ділення протилежного катета на $tg\,\alpha$; 3) добутку протилежного катета на $ctg\,\alpha$	$AC = AB \cdot \cos\alpha$ $AC = \frac{BC}{tg\,\alpha}$ $AC = BC \cdot ctg\,\alpha$
Гіпотенуза	Гіпотенуза дорівнює: 1) частці від ділення протилежного катета на $\sin\alpha$; 2) частці від ділення прилеглого катета на $\cos\alpha$	$AB = \frac{BC}{\sin\alpha}$ $AB = \frac{AC}{\cos\alpha}$

Приклад

1 У ΔABC: $\angle B = 90°$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см, $AC = 10$ см. Знайдіть:
а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $tg\,\alpha$; г) $ctg\,\alpha$.



Розв'язання

а) $\sin\alpha = \frac{CB}{AC}$,
$\sin\alpha = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 0{,}6$;

б) $\cos\alpha = \frac{AB}{AC}$,
$\cos\alpha = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8$;

в) $tg\,\alpha = \frac{CB}{AB}$,
$tg\,\alpha = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$;

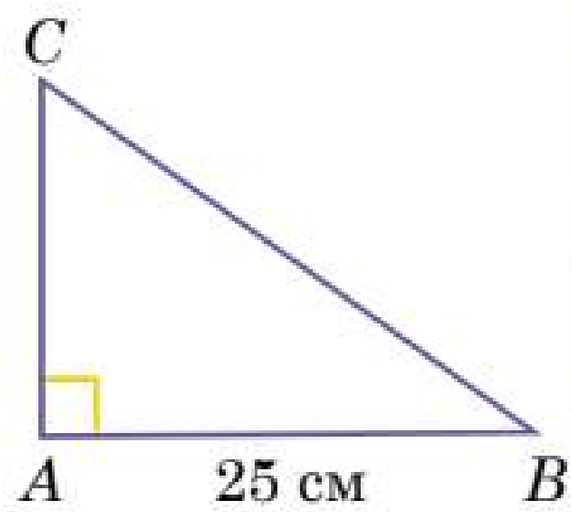
г) $ctg\,\alpha = \frac{AB}{CB}$,
$ctg\,\alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \approx 1{,}33$.

Синус і косинус будь-якого гострого кута менші від одиниці.

Відповідь. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$; $ctg\,\alpha = \frac{4}{3}$.

Приклад

2 У ΔCAB: $\angle A = 90°$, $AB = 25$ см, $tg\,B = \frac{3}{5}$. Знайдіть:
а) довжину катета AC; б) $tg\,C$.



Розв'язання

а) За визначенням тангенса гострого кута прямокутного трикутника: $tg\,B = \frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$;
$AB = 25$ см (за умовою).

Звідси $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{5}$; $\frac{AC}{25} = \frac{3}{5}$; $AC = \frac{25 \cdot 3}{5} = 15$ см.

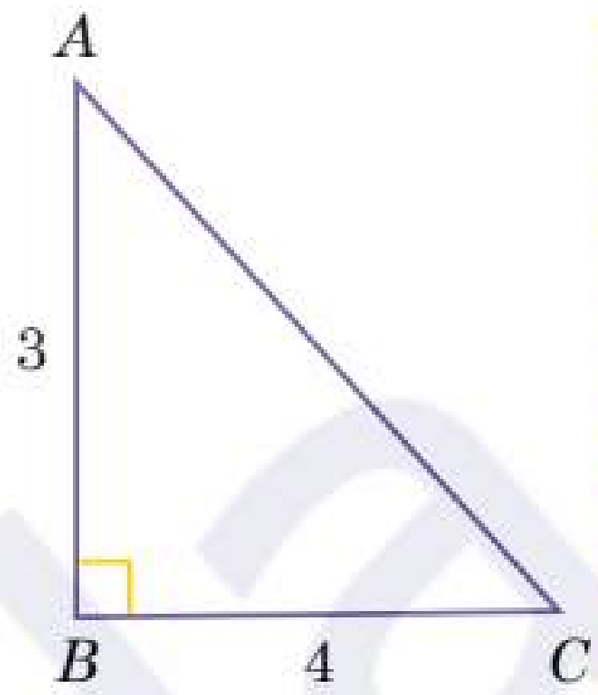
б) За означенням тангенса гострого кута прямокутного трикутника:
$tg\,C = \frac{AB}{AC} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$.

Відповідь. $AC = 15$ см; $tg\,C = 1\frac{2}{3}$.

Приклад

3 У ΔABC: $\angle B = 90°$, $AB = 3$ см, $BC = 4$ см. Знайдіть синус та косинус гострих кутів даного трикутника.

Розв'язання



ΔABC — прямокутний (за умовою $\angle B = 90°$).

Застосуємо теорему Піфагора для знаходження невідомої гіпотенузи AC:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$;

$AC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$ см;

$AC = \sqrt{25} = 5$ см.

Знайдемо синус та косинус $\angle C$:

$$\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0{,}6;$$

$$\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0{,}8.$$

Знайдемо синус та косинус $\angle A$:

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0{,}8;$$

$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Відповідь. $\sin A = \cos A = 0{,}8$; $\cos C = \sin C = 0{,}6$.

У прямокутному трикутнику синус одного гострого кута дорівнює косинусу іншого гострого кута, і навпаки.

Попрактикуйтеся

615 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Тангенс гострого кута прямокутного трикутника дорівнює відношенню протилежного катета до прилеглого катета.

б) Відношення протилежного катета до прилеглого катета в прямокутному трикутнику залежить тільки від величини кута, а не від розмірів самого трикутника.

в) Добуток гіпотенузи на косинус гострого кута прямокутного трикутника дорівнює протилежному до цього кута катету.

г) Усі прямокутні трикутники, що мають однаковий гострий кут, є подібними.

д) Існує такий гострий кут, котангенс якого дорівнює одиниці.

е) Синус 62° дорівнює косинусу 28°.

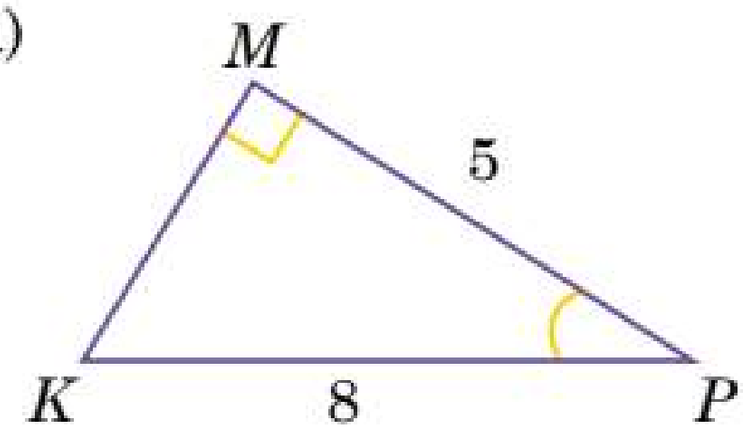
ж) Тангенс будь-якого гострого кута менший від одиниці.

и) Косинус кута в прямокутному трикутнику завжди більший за синус цього кута.

к) Сума синуса та косинуса будь-якого гострого кута завжди більша за одиницю.

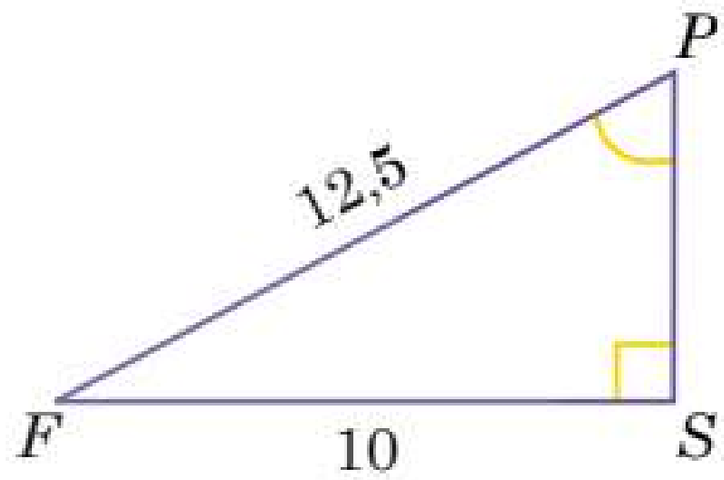
616 Знайдіть невідомі величини.

а)



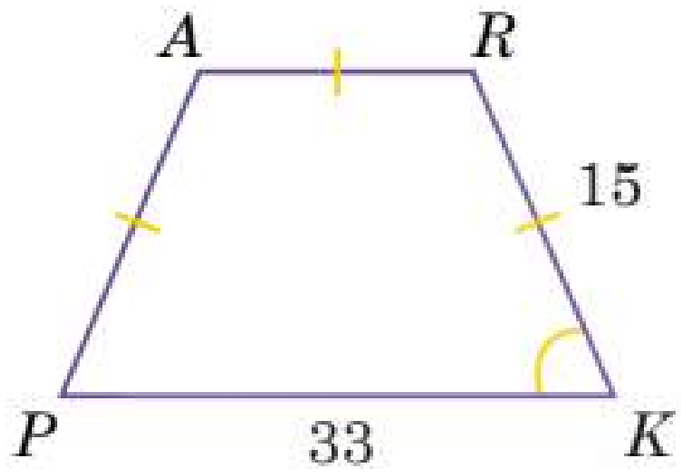
$\cos \angle P$ — ?

б)



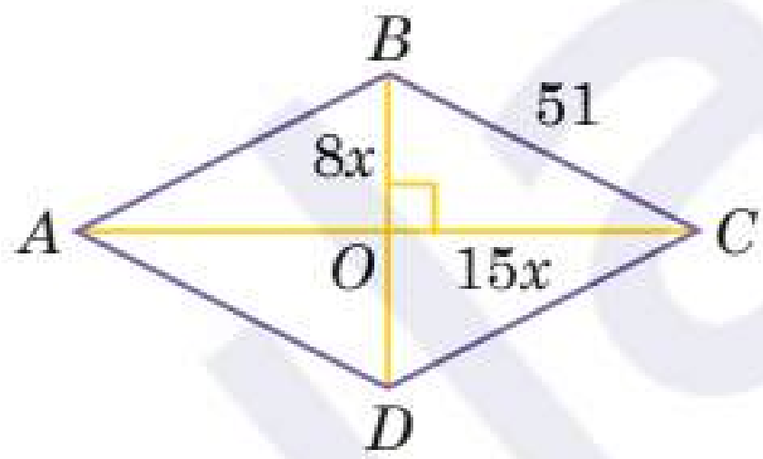
$tg \angle P$ — ?

в)



$AR \parallel PK$; $\sin \angle K$ — ?

г)



$OB : OC = 8 : 15$; $\cos \angle BCA$ — ?

617 У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) відомо, що $AB = 3$ см, $BC = 1{,}8$ см. Знайдіть:

а) $\sin A$; б) $\cos B$; в) $tg\ A$;
г) $\sin B$; д) $tg\ B$; е) $ctg\ B$.

618 У прямокутному трикутнику один з катетів дорівнює 2,4 см, а косинус прилеглого до нього кута — $\frac{12}{13}$. Знайдіть периметр трикутника.

619 Катети прямокутного трикутника дорівнюють 2,4 см та 4,5 см. Знайдіть значення синуса і косинуса найменшого кута цього трикутника.

620 Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 56 см, а довжина його основи — 24 см. Знайдіть значення тангенса і котангенса кута при основі цього трикутника.

621 Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 1 см та 5 см, а косинус гострого кута — $\frac{20}{29}$.

а) Знайдіть периметр і площу трапеції.
б) З'ясуйте, чи можна в цю трапецію вписати коло.

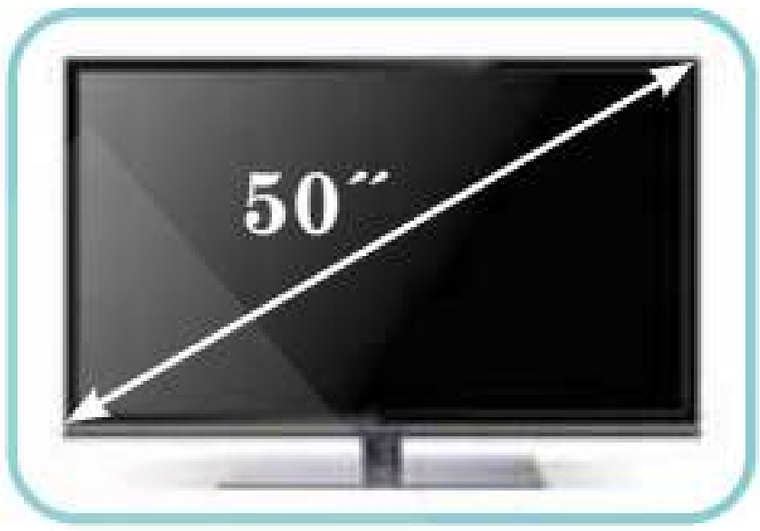
622 У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 111 см, а тангенс одного з гострих кутів — $\frac{12}{35}$. Знайдіть площу трикутника.

623 За допомогою програми GeoGebra побудуйте кут:

а) тангенс якого дорівнює $\frac{1}{3}$; б) синус якого дорівнює $\frac{2}{3}$;

в) косинус якого дорівнює $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

624 Розмір діагоналі телевізора 50″ (127 см), а тангенс кута між діагоналлю та висотою телевізора дорівнює $\frac{16}{19}$. Чи поміститься такий телевізор у нішу розмірами 100 см на 70 см?



625 Знайдіть площу прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 10 см, а кут між стороною прямокутника та діагоналлю — 30°.

626 Таня вирішила побудувати новий пандус для свого гаража, щоб полегшити заїзд автомобіля. Пандус має форму прямокутного трикутника, де одна зі сторін буде прилягати до стіни гаража, а інша — буде основою пандуса на землі. Довжина сторони, що прилягає до гаража, становить 0,8 метра, а кут між основою і пандусом дорівнює 30°. Знайдіть довжину основи пандуса.

627 У ботанічному саду вирішили встановити нову систему поливу для високих дерев. Система складається з труби, яка піднімається під кутом до землі і закінчується на висоті, де розташовані крони дерев. Довжина труби становить 15 метрів, а кут нахилу труби до землі дорівнює 60°. Висота дерев від основи до крони повинна бути не меншою за 12 метрів. Знайдіть висоту такої системи від землі до верхівки дерева. Чи відповідає висота труби вимогам для поливу дерев ?

628* Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює b, а кут при основі — α. Знайдіть радіус кола, вписаного в цей трикутник.

629* У трикутнику одна із сторін дорівнює a, а прилеглі до неї гострі кути — α і β. Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.

630* В трикутнику ABC $AC = BC = 2\sqrt{2}$ см, кут C дорівнює 40°. Знайдіть висоту AH.

631* Сторони паралелограма дорівнюють a та b, а один з його кутів дорівнює α. Знайдіть діагоналі паралелограма та кут між ними.

632* Відомі всі сторони трикутника. Як знайти довжину всіх медіан даного трикутника?

633* Дано трикутник з сторонами a, b та c. Доведіть, що якщо медіани, проведені до сторін a та b, взаємно перпендикулярні, то $a^2 + b^2 = 5c^2$.

5.6. Значення синуса, косинуса, тангенса та котангенса деяких кутів

Значення синуса, косинуса, тангенса та котангенса деяких кутів ми оцінюємо за допомогою прямокутного трикутника, а отже обмежуємося кутами від 0° до 90° (оскільки в прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 90°, а два інших — гострі, тобто мають градусну міру від 0° до 90°).

Існують таблиці, за допомогою яких можна знайти значення тригонометричних функцій деяких кутів. Такі таблиці спрощують розрахунки в геометрії, аналізі хвильових процесів, електротехніці та інших науках, де використовуються тригонометричні функції. Вони дають змогу швидко знайти значення функцій без необхідності використання калькулятора чи програмного забезпечення. **Найчастіше використовуються значення *sin*, *cos*, *tg* та *ctg* для кутів 0°, 30°, 45°, 60° та 90°.**

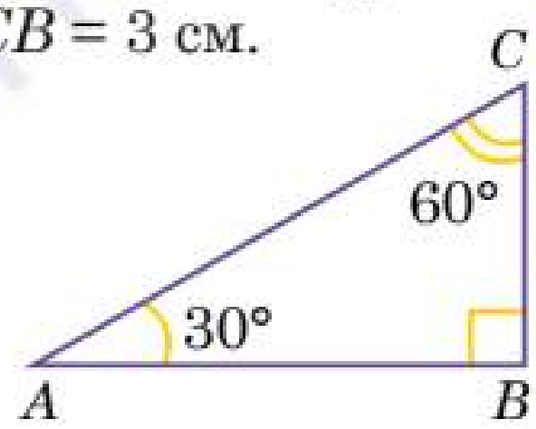
Таблиці Брадіса — це таблиці, які допомагають знайти значення тригонометричних функцій, знаючи міру кута і навпаки, з точністю до однієї мінути без калькулятора.

Таблиці Брадіса

Якщо корінь квадратний числа піднести до 2 степеня, то в результаті дії отримаємо тільки підкореневий вираз (саме число): $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Приклад

1 Знайдіть синус, косинус, тангенс та котангенс гострих кутів прямокутного трикутника ABC, у якому $\angle B = 90°$, $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$, $CB = 3$ см.



Розв'язання

Розглянемо ΔABC — прямокутний ($\angle B = 90°$). $\angle A = 30°$, $\angle C = 60°$, $CB = 3$ см (за умовою).

Звідси $AC = 2 \cdot CB = 2 \cdot 3 = 6$ см (за властивістю катета, що лежить проти кута 30°).

$$AB = \sqrt{AC^2 - CB^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{(6-3)(6+3)} =$$

$= \sqrt{3 \cdot 9} = 3\sqrt{3}$ см (за теоремою Піфагора).

Отже, знайдемо синус, косинус, тангенс та котангенс гострих кутів ΔABC.

$$\sin A = \frac{CB}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \qquad \sin B = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

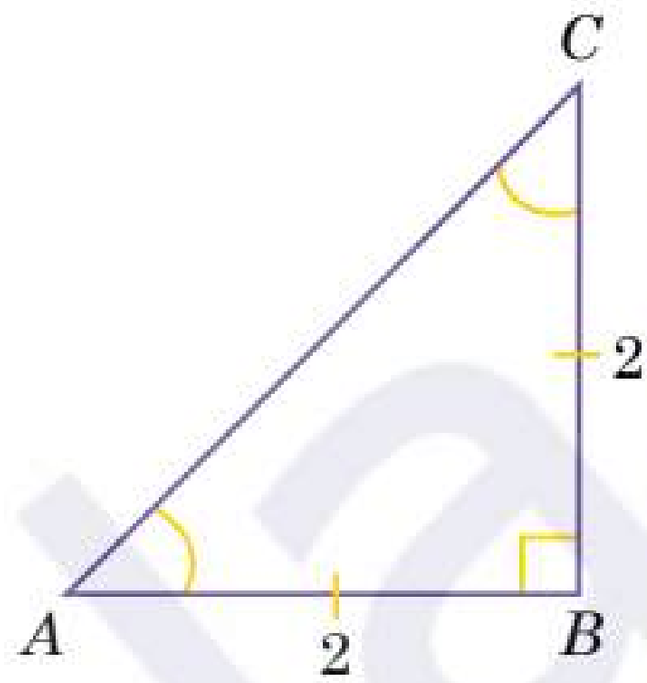
$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \cos B = \frac{CB}{AC} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

$$tg\, A = \frac{CB}{AB} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \qquad tg\, B = \frac{AB}{CB} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3};$$

$$ctg\, A = \frac{AB}{CB} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}. \qquad ctg\, B = \frac{CB}{AB} = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Приклад

2 Знайдіть синус, косинус, тангенс та котангенс гострого кута прямокутного рівнобедреного трикутника ABC, у якому $\angle B = 90°$, $CB = AB = 2$ см.



Розв'язання

Розглянемо ΔABC — прямокутний рівнобедрений ($\angle B = 90°$, $CB = AB$).

$\angle A = \angle C$ (за властивістю кутів рівно-бедреного трикутника).

$\angle A + \angle C = 90°$ (за властивістю суми гострих кутів прямокутного трикутника).

Звідси $\angle A = \angle C = 90° : 2 = 45°$.

$AC = \sqrt{AB^2 + CB^2}$ (за теоремою Піфагора)

$AC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ см.

Отже, знайдемо синус, косинус, тангенс та котангенс $\angle A$:

$$\sin A = \frac{CB}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad tg\, A = \frac{CB}{AB} = \frac{2}{2} = 1;$$

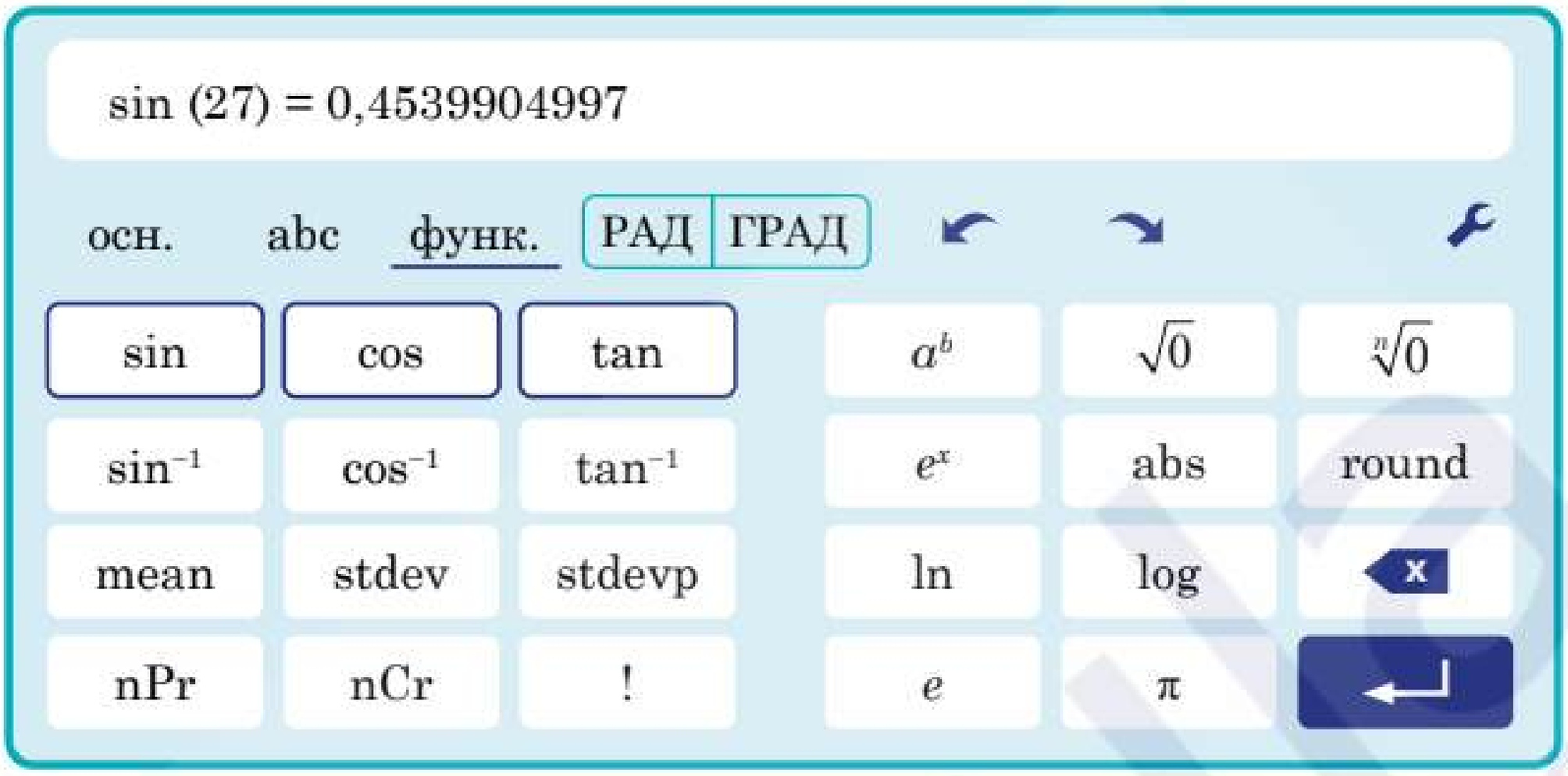
$$\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \qquad ctg\, A = \frac{AB}{CB} = \frac{2}{2} = 1.$$

Значення синуса, косинуса, тангенса та котангенса не залежать від конкретного обраного прямокутного трикутника, а залежать тільки від заданого кута (оскільки всі прямокутні трикутники з рівними кутами є подібними), то можемо узагальнити **значення *sin*, *cos*, *tg* та *ctg* для кутів 0°, 30°, 45°, 60° та 90°:**

	α	0°	30°	45°	60°	90°
Функція	$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
	$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
	$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

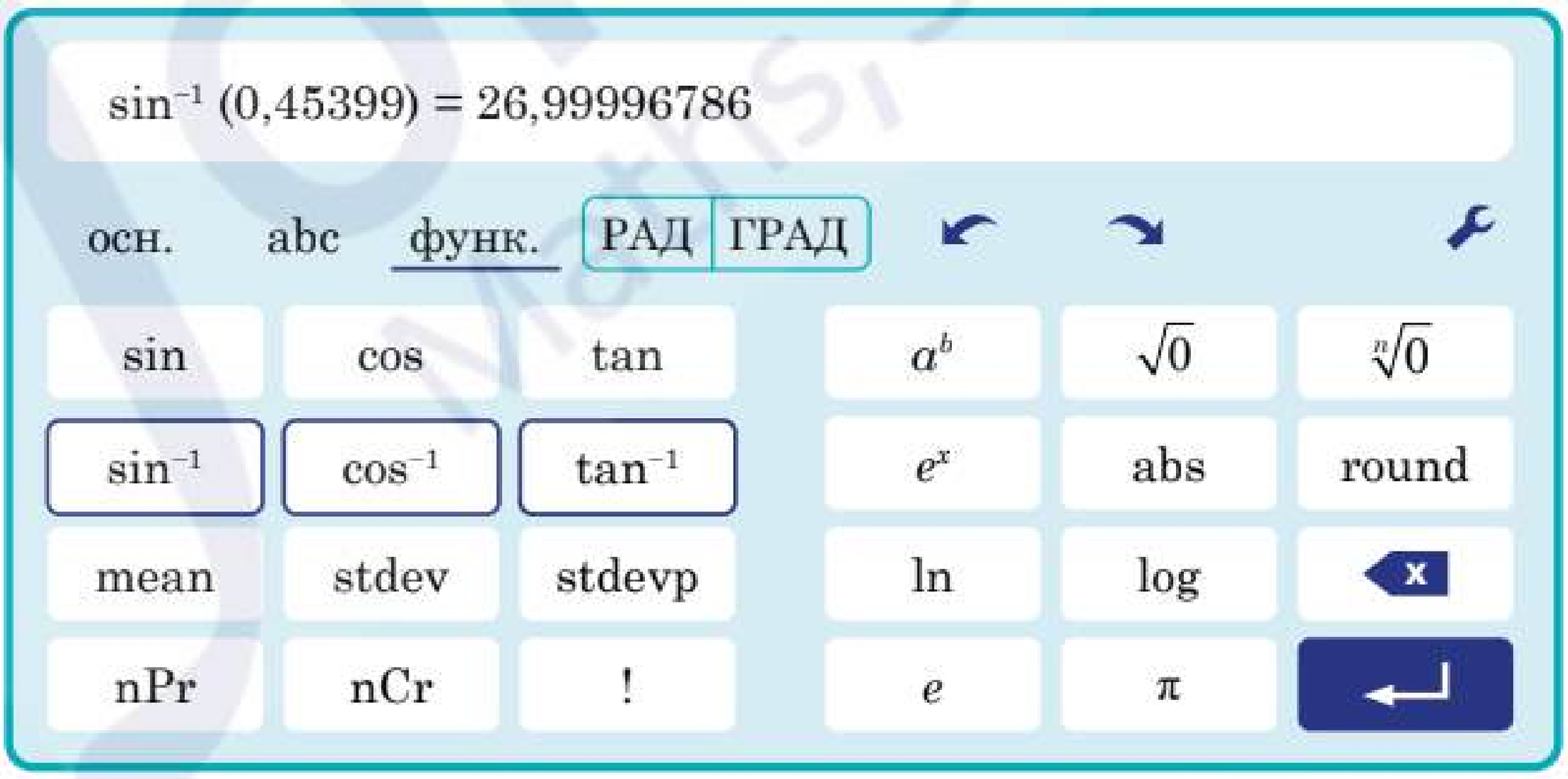
Спробуйте самостійно пояснити значення тригонометричних функцій для 0° та 90°.

Більш точно можна вирахувати значення синуса, косинуса і тангенса деякого кута за допомогою калькулятора:



Використовуючи калькулятор для обчислень тригонометричних функцій, ми можемо отримати число з багатьма знаками після коми, тому варто округлити його.

До всіх тригонометричних функцій є обернені тригонометричні функції. До них відносять такі функцій: арксинус (*arcsin*), арккосинус (*arccos*), арктангенс (*arctg*; в іноземній літературі *arctan*), арккотангенс (*arcctg*; в іноземній літературі *arccot* чи *arccotan*). Якщо нам відоме значення тригонометричної функції певного кута, за допомогою оберненої тригонометричної функції ми можемо обчислити його градусну міру. Можна виконати такі обчислення за допомогою калькулятора, на якому вони позначаються як $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$ та $\tan^{-1}$.



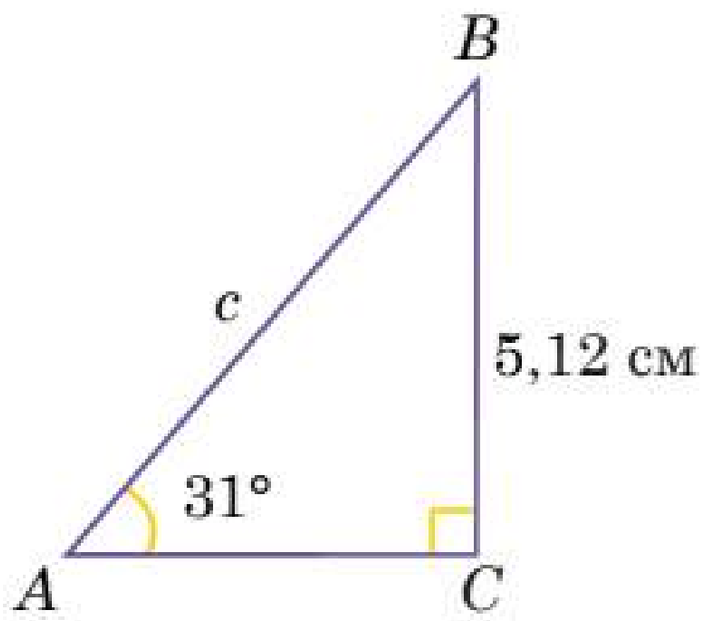
Наприклад, якщо $\sin \varphi = 0{,}9397$, то ми натискаємо $\sin^{-1}$ та вводимо значення 0,9397, щоб знайти градусну міру кута φ:

Отже, кут $\varphi \approx 70°$.

Приклад

3 Знайдіть довжину гіпотенузи, користуючись даними на рисунку.

Розв'язання



$sin\ A = \frac{BC}{AB}$;

$sin\ 31° = \frac{5,12}{c}$;

$c = \frac{5,12}{sin\ 31°}$;

$c \approx 9,85$ см.

Відповідь. 9,85 см.

Попрактикуйтеся

634 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Косинус кута 60° дорівнює 0,5.

б) Серед кутів 30°, 45°, 60° найбільше значення тангенса має кут 30°.

в) Значення виразу $(sin\ 30°)^2 + (cos\ 30°)^2$ дорівнює 1.

г) Синус і косинус кута 45° однакові.

д) Зі збільшенням кута від 0° до 90° збільшується і значення його косинусу.

е) У прямокутному трикутнику з кутом 30° гіпотенуза вдвічі більша за протилежний до цього кута катет.

ж) Тангенс і котангенс одного й того ж кута — протилежні числа.

и) Значення виразу $tg^2 60° + ctg^2 60°$ дорівнює 1.

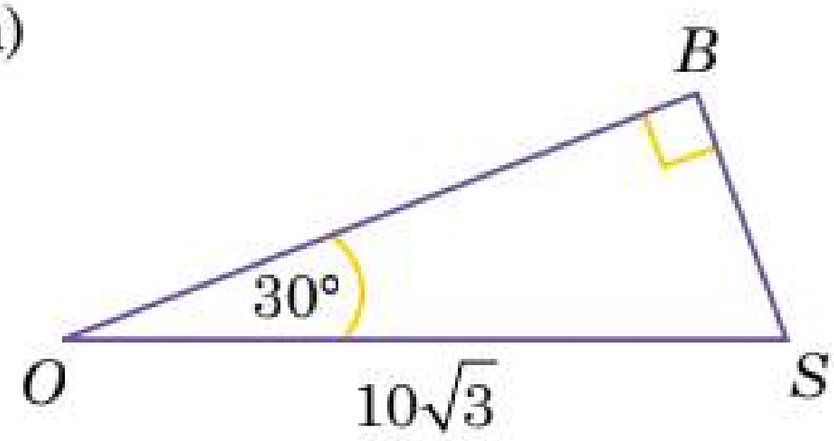
к) Існує такий гострий кут, синус якого дорівнює $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

635 За допомогою програмного засобу GeoGebra побудуйте $\angle A$, якщо:

а) $sin\ A = \frac{2}{3}$; б) $cos\ A = \frac{3}{4}$.

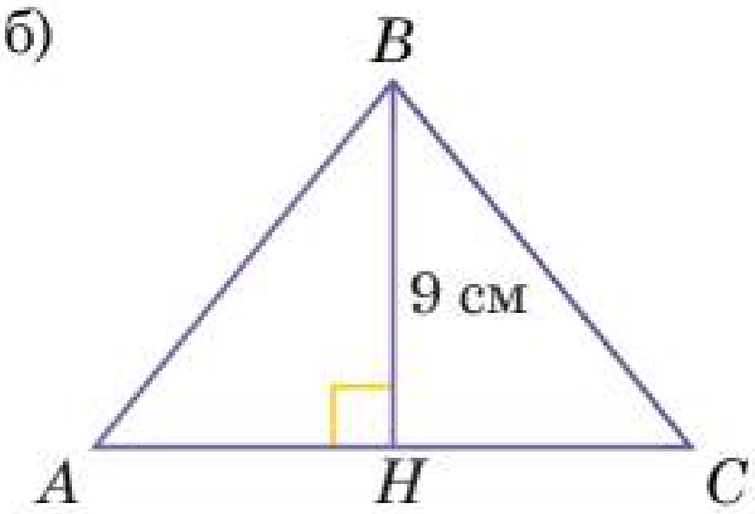
636 Знайдіть точні значення невідомих відрізків.

а)



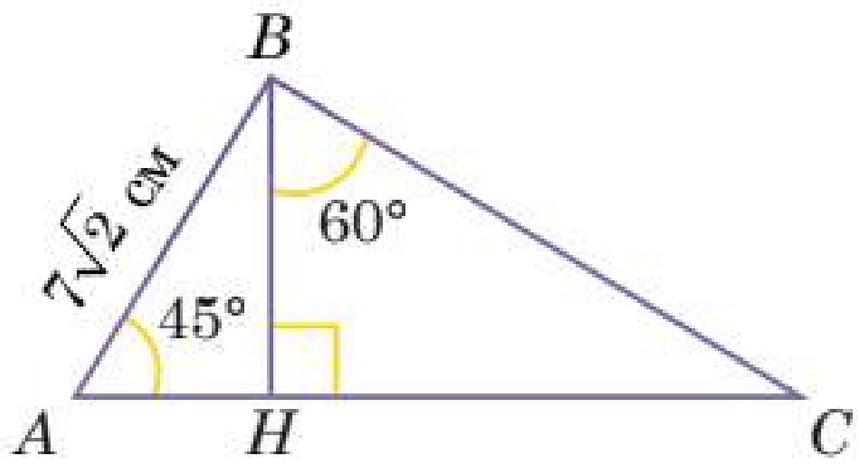
OB — ?

б)



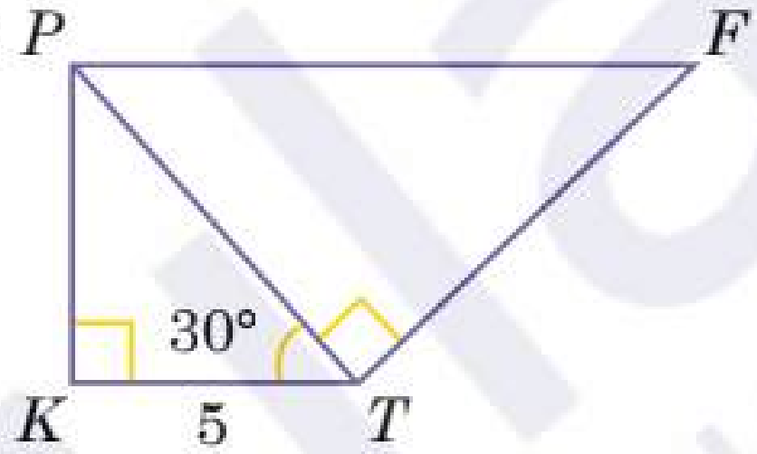
ΔABC — рівносторонній; HC — ?

в)



BC — ?

г)



$PF \parallel KT$; FT — ?

637 Знайдіть значення виразів, використовуючи калькулятор, та округліть результат до тисячних:

а) $\sin 58°$; б) $\cos 62°$; в) $tg\ 17°$; г) $\sin 44°$; д) $tg\ 34°$; е) $\cos 29°$.

638 За допомогою калькулятора знайдіть значення кутів, що задовольняють задані рівності. Відповіді запишіть з точністю до десятих.

а) $\sin \alpha = 0{,}15$; б) $\cos \alpha = 0{,}41$; в) $tg\ \alpha = 3{,}42$;

г) $tg\ \alpha = \frac{2}{3}$; д) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; е) $\cos \alpha = \frac{9}{11}$.

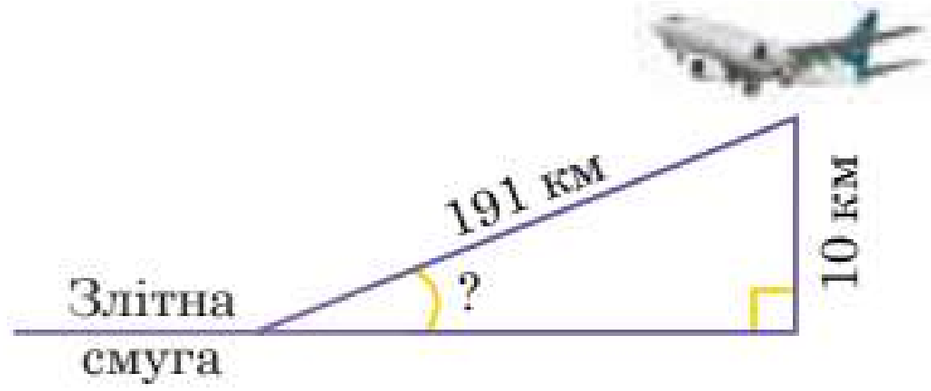
639 У прямокутному трикутнику STL $\angle T = 90°$. Знайдіть з точністю до десятих:

а) TL, якщо $ST = 10$ см, $\angle L = 39°$;
б) SL, якщо $TL = 7$ см, $\angle S = 64°$;
в) ST, якщо $SL = 26$ см, $\angle L = 77°$.

640 За допомогою програмного засобу GeoGebra побудуйте два прямокутних трикутники різних розмірів, один із гострих кутів яких становить 35°. Виміряйте довжини сторін цих трикутників, та обчисліть для кожного з них $\sin 35°$, $\cos 35°$, $tg\ 35°$, $ctg\ 35°$. Порівняйте отримані результати.

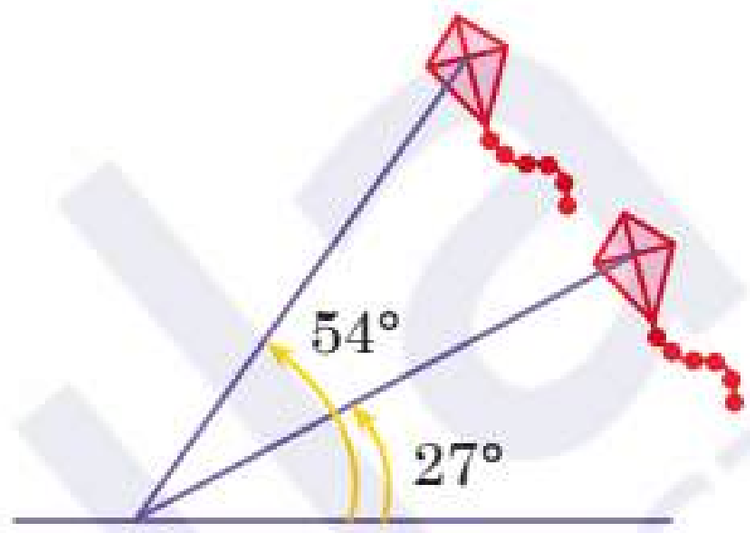
641 Ширина прямокутника дорівнює 12 см, а його діагональ утворює з довжиною прямокутника кут 15°. Знайдіть периметр прямокутника та його площу з точністю до цілих.

642 Літак летить на висоті 10 км. Він починає зниження, коли знаходиться за 191 км від злітно-посадкової смуги. Знайдіть кут «зниження» літака з точністю до цілих.



643 Знайдіть кути ромба, сторона якого дорівнює 10 см, а менша діагональ — 8 см.

644 Довжина нитки повітряного змія становить 48 м. Коли подув вітер, то кут між повітряним змієм і землею змінився від 27° до 54°. На скільки збільшилася висота повітряного змія над землею?

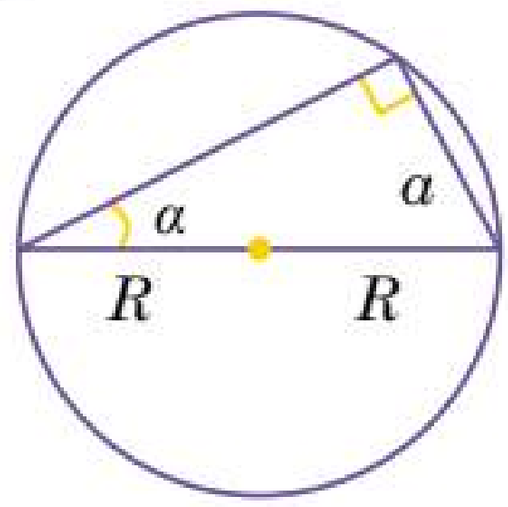


645 $ABCD$ — квадрат. На стороні AD взято точку P так, що $AP = 5$ см, $BP = 12$ см. На стороні CD взято точку Q так, що $CQ = 7$ см. Знайдіть:

а) довжину AB;
б) довжину QD;
в) довжину PD;
г) величину кута ABP.

646 Сторони прямокутного трикутника дорівнюють 8 м, 15 м та 17 м. Знайдіть косинус кутів даного трикутника.

647 Вписаний кут в коло з радіусом R кут α спирається на хорду довжиною a. Доведіть, що $a = 2 \cdot R \cdot \sin \alpha$.



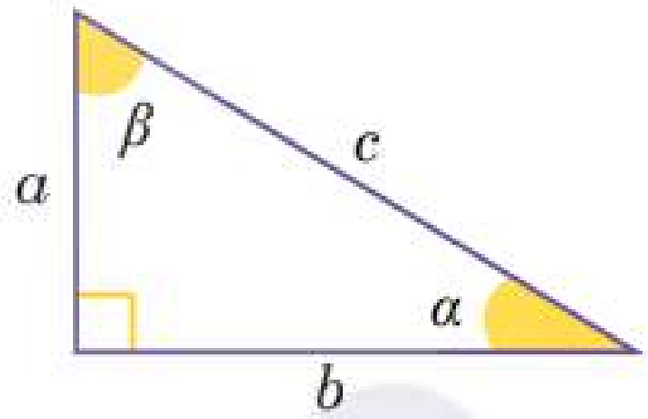
648 В прямокутному трикутнику ACB, $CD \perp AB$, $AD = 2$ см, $DB = 3$ см. Знайдіть синус, косинус, тангенс та котангенс кута A.

649 В рівнобедреній трапеції основи дорівнюють 2 см та 20 см, а бічна сторона дорівнює 15 см. Знайдіть, синус, косинус, тангенс та котангенс гострого кута даної трапеції.

650 У прямокутному трикутнику висота, проведена з вершини прямого кута до гіпотенузи, становить третину довжини гіпотенузи. Знайдіть градусну міру гострих кутів даного трикутника.

651* Катети прямокутного трикутника дорівнюють 12 см та 16 см. Обчисліть кут між висотою та бісектрисою, проведеними до гіпотенузи; висотою та медіаною, проведеними до гіпотенузи.

5.7. Розв'язування прямокутних трикутників



Розв'язати трикутник — означає знайти його невідомі елементи (сторони та/або кути) за відомими сторонами й кутами.

Прямокутний трикутник можна розв'язати, якщо відомі дві його сторони або одна сторона і гострий кут. Для цього будуть корисними такі **співвідношення**:

$$\alpha + \beta = 90°; \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ tg\,\alpha = \frac{a}{b};\ ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c};\ \cos\beta = \frac{a}{c};\ tg\,\beta = \frac{b}{a};\ ctg\,\beta = \frac{a}{b}$$

$$a = c \cdot \sin\alpha;\ a = c \cdot \cos\beta;\ a = b \cdot tg\,\alpha;\ a = \frac{b}{ctg\,\alpha}$$

$$b = c \cdot \sin\beta;\ b = c \cdot \cos\alpha;\ b = a \cdot tg\,\beta;\ b = \frac{a}{ctg\,\beta}$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha};\ c = \frac{b}{\sin\beta};\ c = \frac{a}{\cos\beta};\ c = \frac{b}{\cos\alpha}$$

Не обов'язково вивчати всі співвідношення напам'ять — достатньо знати визначення тригонометричних функцій гострого кута прямокутного трикутника та уміти виражати з них шукані сторони.

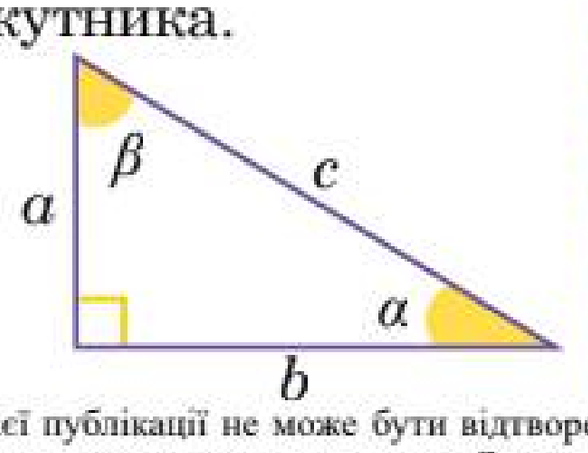
Зінаїда Іванівна Слепкань (1931 – 2008) — видатна українська вчена, перша жінка — доктор наук в Україні. Перші з її досліджень стосувалися культури тригонометричних обчислень.

Якщо значення тригонометричних функцій кутів не табличні, то кути будемо знаходити за допомогою калькулятора. Для зручності здебільшого округлюють значення тригонометричних функцій до тисячних, а градусні міри кутів і довжини сторін — до десятих.

Приклад

1 У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 12 см, а один з гострих кутів — 52°. Знайдіть інший гострий кут та катети цього трикутника.

Розв'язання



Нехай $c = 12$ см, $\beta = 52°$.
Тоді $\alpha = 90° - \beta = 90° - 52° = 38°$;

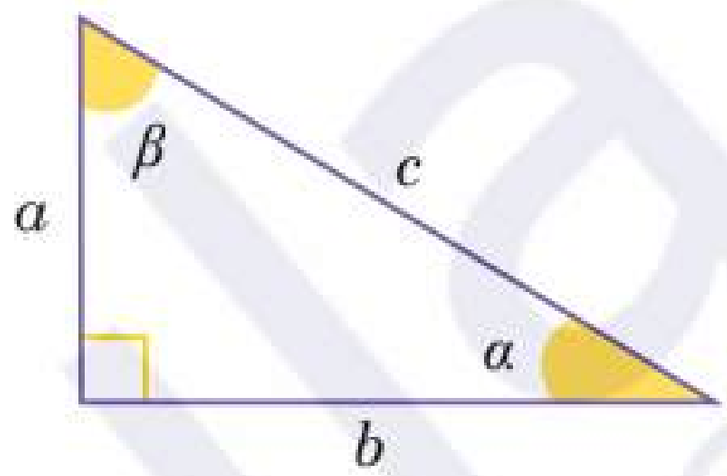
$a = c \cdot \cos\beta = 12 \cdot \cos 52° = 12 \cdot 0{,}616 = 7{,}39$ см;
$b = c \cdot \sin\beta = 12 \cdot \sin 52° = 12 \cdot 0{,}788 = 9{,}46$ см.

Відповідь. 38°; 7,4 см; 9,5 см.

Приклад

2 У прямокутному трикутнику катети дорівнюють 7 см та 10 см. Знайдіть гіпотенузу та гострі кути цього трикутника.

Розв'язання



Нехай $a = 7$ см, $b = 10$ см.

Тоді $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{7^2 + 10^2} = \sqrt{149}$ (см),

$tg\,\alpha = \frac{a}{b} = \frac{7}{10}$, звідки $\alpha = 35°$,

$\beta = 90° - \alpha = 90° - 35° = 55°$.

Відповідь. $\sqrt{149}$ см; 35°; 55°.

Кожен із цих прикладів можна було розв'язати різними способами (подумайте, як саме). Зауважимо, що більш точними будуть обчислення, які використовують безпосередньо задані в умові значення, а не обчислені наближено в ході розв'язання задачі.

Попрактикуйтеся

652 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Можна розв'язати прямокутний трикутник, знаючи тільки два його катети.

б) Можна розв'язати прямокутний трикутник, знаючи тільки два його кути.

в) Щоб знайти гіпотенузу прямокутного трикутника, можна один із катетів поділити на прилеглий до нього кут.

г) Якщо у прямокутному трикутнику гіпотенуза в $\sqrt{2}$ разів більша за катет, то такий трикутник є рівнобедреним.

д) У рівносторонньому трикутнику висота в $\sqrt{3}$ разів менша за сторону.

е) Якщо у прямокутному трикутнику відома довжина одного з катетів, то можна знайти гіпотенузу за теоремою Піфагора.

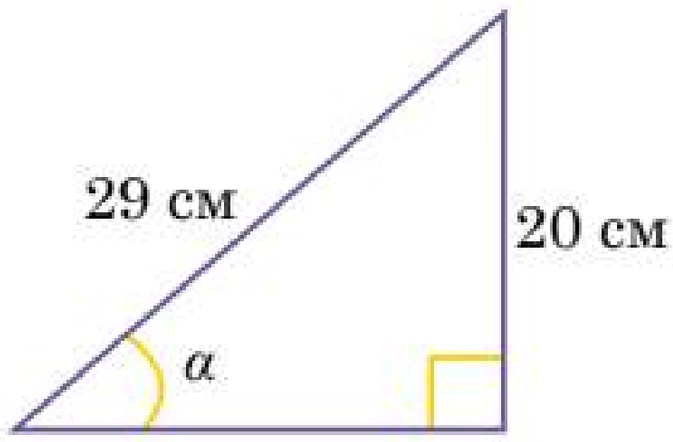
ж) Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи цього трикутника на синус кута, протилежного до цього катета.

и) Сума гострих кутів у прямокутному трикутнику дорівнює 90°.

к) Якщо в трикутнику відношення двох сторін дорівнює $\sqrt{3}$, то в цьому трикутнику є кут 60°.

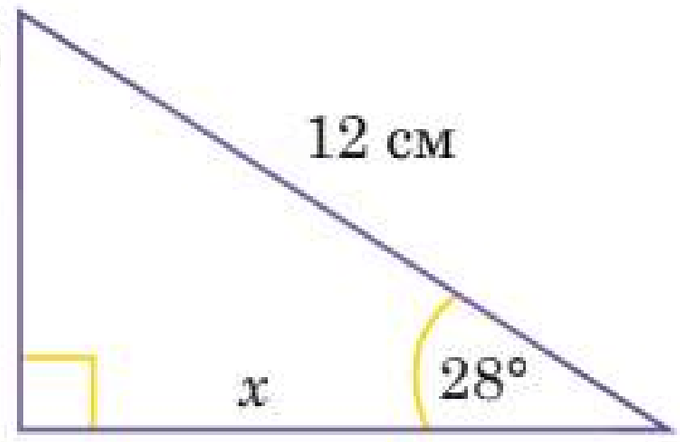
653 Знайдіть значення невідомих елементів з точністю до десятих.

а)



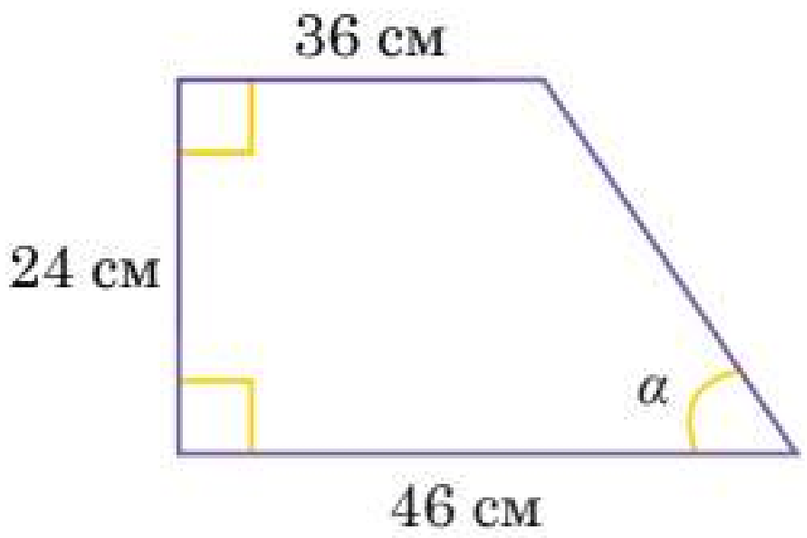
α — ?

б)



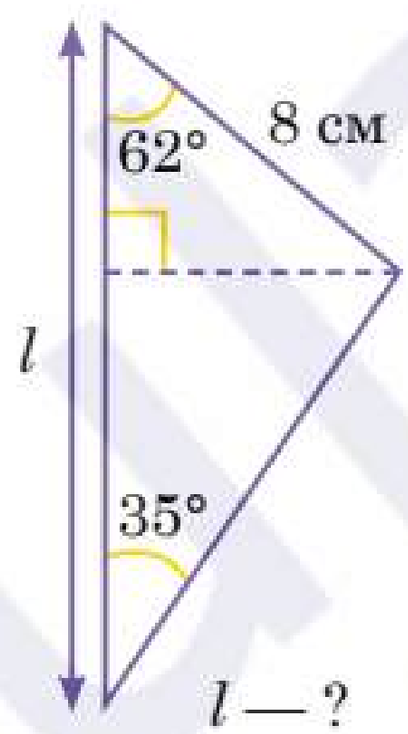
x — ?

в)



α — ?

г)



l — ?

654 Розв'яжіть прямокутний трикутник:

а) за двома катетами: $a = 10$ см, $b = 16$ см;
б) за катетом і гіпотенузою: $a = 8$ см, $c = 20$ см;
в) за катетом і прилеглим гострим кутом;
г) за катетом та протилежним гострим кутом;
д) за гіпотенузою і гострим кутом: $c = 30$ см, $\alpha = 74°$.

655 За допомогою програмного засобу GeoGebra побудуйте прямокутні трикутники за відомими елементами з попереднього завдання (а–д). Виміряйте величини невідомих елементів та порівняйте їх з розрахованими значеннями з попереднього завдання.

656 Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 18 см, а кут при основі — 27°. Знайдіть площу трикутника.

657 Фунікулер — рейковий транспортний засіб з канатною тягою для перевезення людей або вантажів по крутій трасі. Одеський фунікулер, розташований біля знаменитих Потьомкінських сходів, піднімає людей на висоту 54 м при довжині траси 142 м. Який кут нахилу траси фунікулера?

658 Тупий кут ромба дорівнює 150°, а його висота – $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть периметр ромба.

659 Основи трапеції дорівнюють $7\sqrt{3}$ м та $8\sqrt{3}$ м, а одна з її бічних сторін дорівнює 4 м. Кут між цією стороною та меншою основою становить 120°. Знайдіть площу трапеції.

660 З однієї точки на пряму проведено дві похилих під кутами 60° та 45°. Довжина меншої похилої становить 8 см. Знайдіть довжину більшої похилої та відстань між основами похилих. Розгляньте два випадки.

661 Два кути трикутника, прилеглі до однієї сторони, дорівнюють 71° і 44°. Знайдіть цю сторону, якщо сторона, яка лежить навпроти кута 44°, дорівнює 12 см.

662 Два кораблі виходять з порту о 10:00, і кожен з них рухається прямолінійним курсом. Перший рухається за пеленгом 60° зі швидкістю 23 км/год, а другий — за пеленгом 135° зі швидкістю 28 км/год. Визначте, на якій відстані один від одного вони будуть о 12:00.

663 Одна зі сторін трикутника дорівнює a, а прилеглі до неї кути — 30° і 135°. Знайдіть:

а) висоту трикутника, проведену до цієї сторони;
б) периметр трикутника.

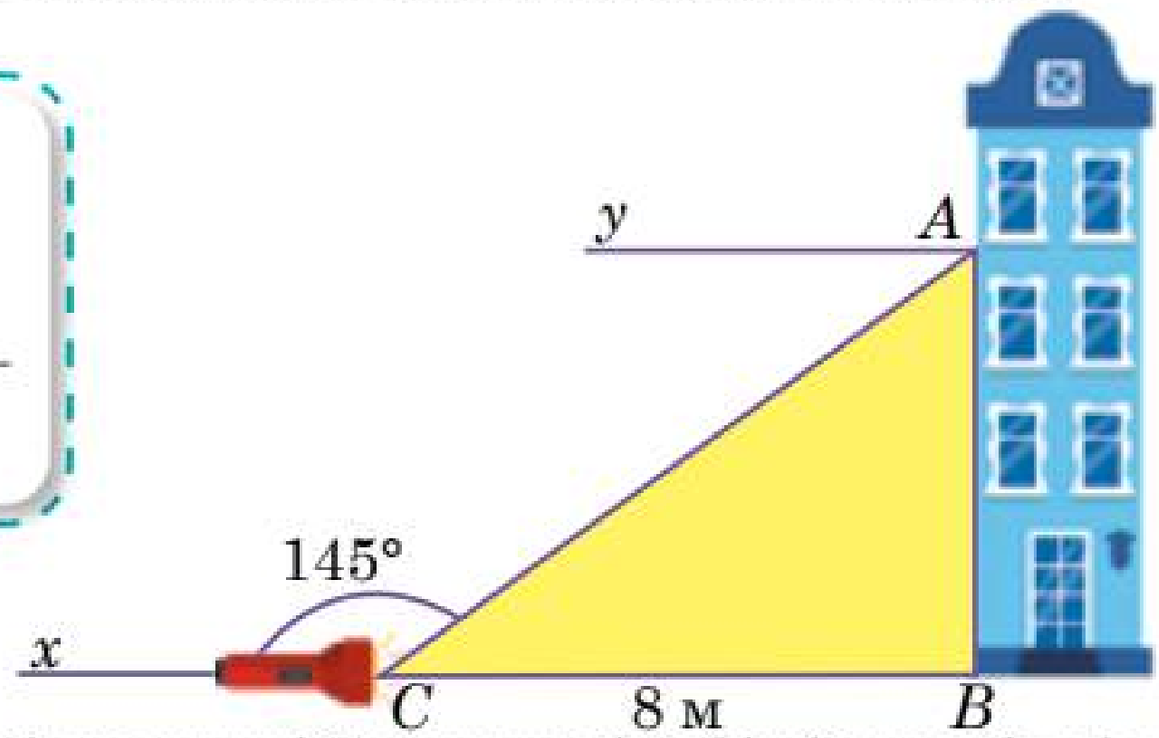
664 Спостерігач знаходиться на відстані 50 м від вежі, висоту якої хоче визначити. Основу вежі він бачить під кутом 10° до горизонту, а вершину — під кутом 45° до горизонту. Знайдіть висоту вежі.

665 Для визначення ширини річки відмітили два пункти A та B на її березі на відстані 70 м один від одного. На іншому березі розміщене дерево в точці C. Вимірявши утворені кути, виявилося, що $\angle CAB = 12^\circ 30'$, $\angle ABC = 72^\circ 42'$. Знайдіть ширину річки.

666 Real-life problem. In the diagram there is a torch at a point C that shines light on a part of a building. The distance between the building and the torch is 8 m. There is an observation point A on the building. Although, in the diagram $y \parallel x$ and $\angle C = 145^\circ$.
Find:

a) The angle of depression of the torch from the observation point A.
b) The length of the part of the building illuminated by the torch.

torch — ліхтарик
observation point — пункт спостереження
the angle of depression — кут нахилу

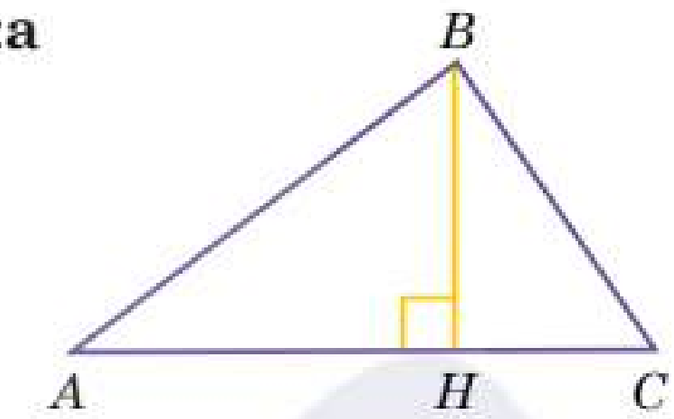


5.8. Тригонометрична формула знаходження площі трикутника

Площа довільного трикутника

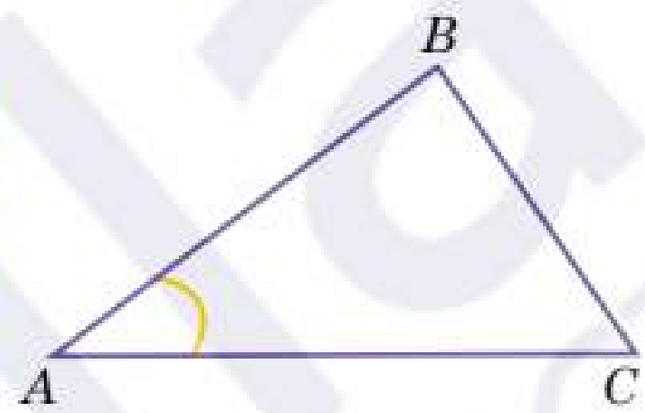
$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BH$$

Розглянемо ΔABH:
$BH = AB \cdot \sin A$



Тригонометрична формула площі

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A$$



Тригонометричну формулу площі трикутника можна застосовувати для будь-якого трикутника: як гострокутного, так і тупокутного чи прямокутного.

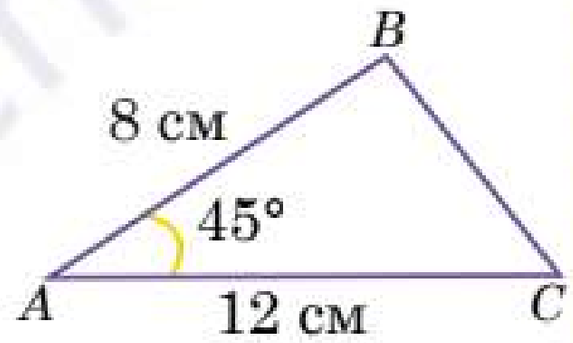
Отже, тепер ми знаємо, як знайти площу трикутника, якщо нам відомі дві його сторони та кут між ними.

Доведення тригонометричної формули площі трикутника

Приклад

1 У ΔABC відомо, що $AB = 8$ см, $AC = 12$ см, $\angle A = 45°$. Знайдіть площу ΔABC.

Розв'язання



У ΔABC відомі дві його сторони та кут між ними. Отже,

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 24\sqrt{2} \text{ см}^2.$$

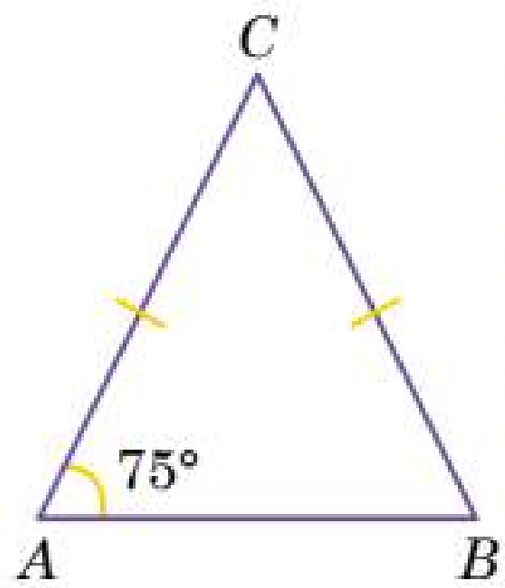
Відповідь. $24\sqrt{2}$ см^2.

$$\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Приклад

2 Знайдіть площу рівнобедреного трикутника, бічна сторона якого дорівнює 14 см, а кут при основі — 75°.

Розв'язання



Нехай у ΔABC
$AC = CB = 14$ см, $\angle A = 75°$.
Оскільки трикутник рівнобедрений, то $\angle B = \angle A = 75°$, а отже
$\angle C = 180° - (\angle A + \angle B) =$
$= 180° - (75° + 75°) = 30°$.

$$\sin 30° = \frac{1}{2}$$

Тепер можемо застосувати тригонометричну формулу для знаходження площі трикутника:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot CB \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 14 \cdot \frac{1}{2} = 49 \text{ см}^2.$$

Відповідь. 49 см².

Попрактикуйтеся

667 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Аргументуйте свою відповідь.

а) Щоб знайти площу трикутника, потрібно знати дві сторони цього трикутника та один з його кутів.

б) Тригонометричну формулу знаходження площі трикутника можна використовувати для будь-яких трикутників.

в) Щоб знайти площу рівнобедреного трикутника, достатньо знати його бічну сторону та будь-який з кутів.

г) Площа прямокутного рівнобедреного трикутника з катетом a дорівнює $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

д) Якщо задані дві сторони трикутника, то найбільшою його площа буде тоді, коли кут між цими сторонами становитиме 90°.

е) Щоб знайти площу трикутника, потрібно знати дві сторони цього трикутника та кут між ними.

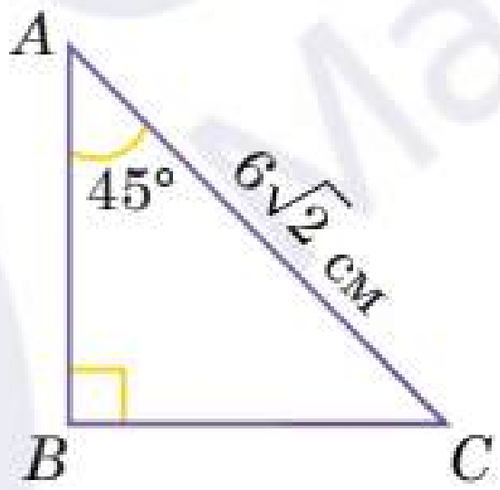
ж) Що більший кут між сторонами трикутника, то більша його площа (за умови фіксованих сторін).

и) Площа рівностороннього трикутника зі стороною a дорівнює $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

к) Площу будь-якого трикутника можна знайти за формулою $S = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$, де α і β — кути, прилеглі до сторони a.

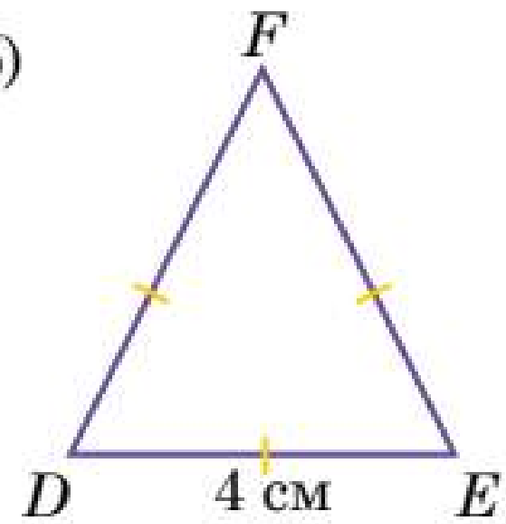
668 Знайдіть невідомі величини.

а)



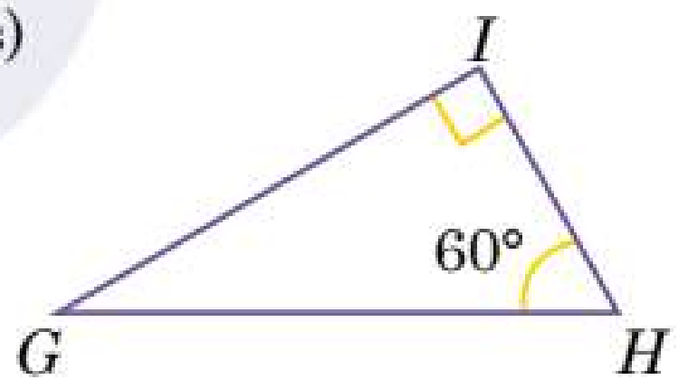
S_{ABC} — ?

б)



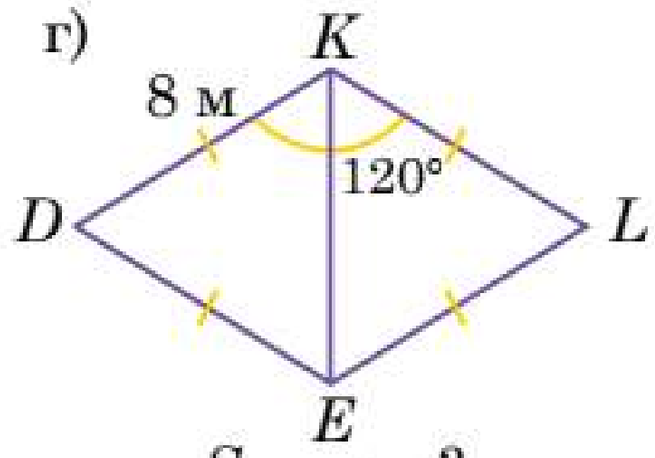
S_{DEF} — ?

в)



$S_{GIH} = 40\sqrt{3}$ м²; IH — ?

г)



S_{DKLE} — ?

669 У трикутнику ABC довжини сторін AB та AC дорівнюють 8 см та 18 см відповідно, а кут між ними — 60°. Знайдіть:

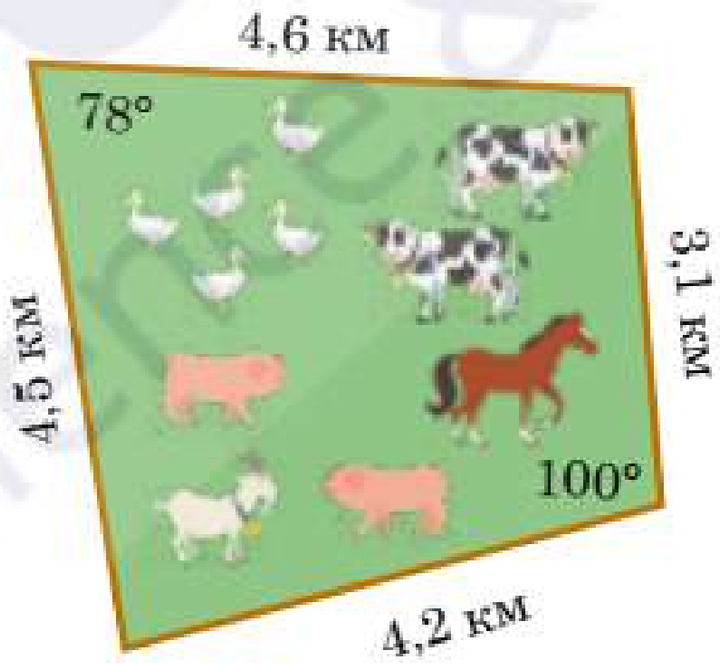
а) площу трикутника ABC;
б) площу паралелограма $ABKC$;
в) площу трикутника ABK;
г) висоту BH паралелограма $ABKC$, проведену до сторони KC.

670 Використовуючи програму GeoGebra, побудуйте рівносторонній трикутник та виміряйте його площу. За допомогою тригонометричної формули знаходження площі трикутника знайдіть довжину сторони цього трикутника та порівняйте її з виміряним значенням. Поясніть причини можливих розбіжностей.

671 З'ясуйте, чи є прямокутним трикутник зі сторонами 10 см та 24 см, якщо його площа дорівнює 120 см^2.

672 Знайдіть площу трапеції з основами 3 см і 5 см, діагональ якої має довжину 7 см і утворює кут 60° з більшою основою.

673 На рисунку показано приблизні розміри загону для випасання худоби. Знайдіть його площу з точністю до одного знака після коми.



674 У трикутнику CAR довжини сторін AC та AR дорівнюють 15 см та 27 см відповідно, а його площа становить 180 см^2. Знайдіть величину кута A цього трикутника, якщо відомо, що він гострий.

675 У трикутнику KLM довжина сторони KL на 1 см менша, ніж потроєна довжина сторони KM, $\angle K = 45°$, а площа трикутника KLM становить $2{,}5\sqrt{2}$ см^2. Знайдіть:

а) довжину сторони KM;
б) довжину висоти трикутника, опущеної з вершини L.

676 З точки до прямої проведено дві похилих, які утворюють з прямою кути 30° і 60°, а довжина більшої похилої становить 12 см. Знайдіть площу трикутника, утвореного цими похилими та частиною прямої. Розгляньте два варіанти.

677 У трикутнику STL довжина сторони ST дорівнює 7 см, $\angle T = 34°$, $\angle L = 42°$. Знайдіть довжину сторони SL.

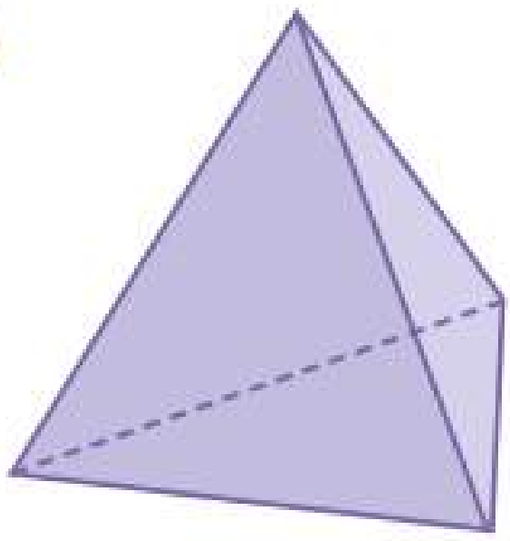
678 Діагоналі паралелограма перетинаються під кутом 42°. Знаючи, що їхні довжини дорівнюють 26 см та 20 см, знайдіть площу паралелограма.

5.9. Розв'язування задач практичного змісту

679 Катерина хоче повісити банер довжиною 7 м на даху свого магазину. Гачки для мотузок знаходяться на відстані 10 м один від одного. Катерина хоче, щоб верх банера звисав на 1 м нижче, ніж дах. Якої довжини має бути кожна мотузка?

680 На рисунку представлено фрагмент карти Києва, де зображено Венеційський острів, який має форму, наближену до трикутної. Користуючись розмірами, поданими на рисунку, оцініть площу цього острова з точністю до сотих.

681



Правильний тетраедр має чотири грані, кожна з яких є рівностороннім трикутником зі стороною 8 м. Марія планує пофарбувати всі чотири грані тетраедра. Відомо, що на кожен квадратний метр поверхні потрібно 1 літр фарби. Яку мінімальну кількість банок фарби об'ємом 1,5 літра потрібно купити Марії, щоб пофарбувати весь тетраедр?

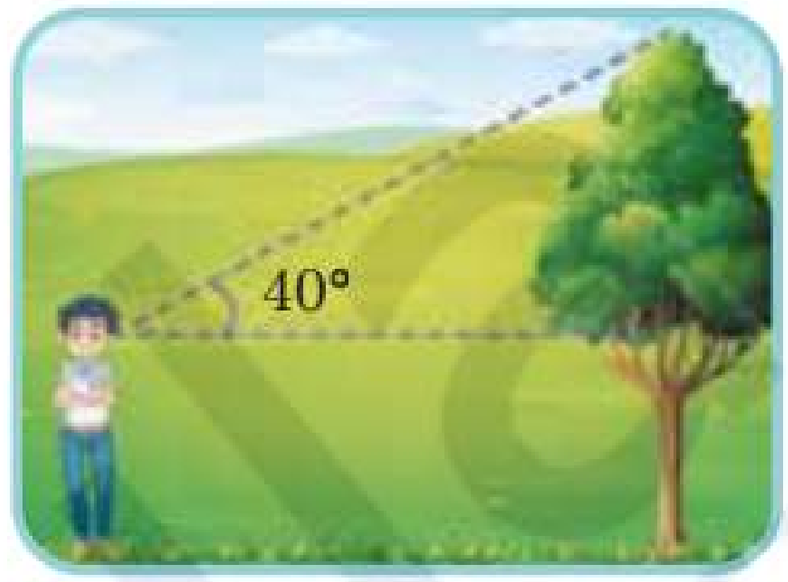
682 Раніше людям, які користуються колісним кріслом, неможливо було заїхати до будівлі, яка мала сходи перед входом. Для вирішення цієї проблеми були розроблені пандуси. Зараз у багатьох країнах існують суворі вказів-ки щодо пандусів, щоб вони не були надто крутими. В Україні безпечний кут нахилу зовнішнього пандуса не повинен перевищувати 8°, а максимальна висота підйому не повинна становити більше ніж 0,8 м. Визначте довжину такого пандуса з точністю до сотих метра.

683 Дев'ятиметрову драбину притулили до стіни будинку, причому її нижній кінець спочатку знаходився на відстані 2,5 метра від стіни. Після цього нижній кінець драбини відсунули ще на 2 метри від будинку. На скільки метрів зсунеться верхній кінець драбини вниз по стіні? Відповідь округліть до десятих.

684 Два дерева висотою 15 метрів і 20 метрів знаходяться на відстані 25 метрів одне від одного. На верхівках дерев сидять два боривітри, які одночасно побачили на землі між деревами мишу та полетіли до неї з однаковими швидкостями. На якій відстані від кожного з дерев знаходилася миша, якщо боривітри долетіли до неї за однаковий час?

685 Кутом природного укосу називається такий максимально можливий кут, під яким сухий сипучий матеріал зберігає рівновагу, якщо його покласти в купу. При перевищенні кута природного укосу матеріал буде ковзати. У засніжених горах це може призвести до сходження лавини. Для наукового експерименту ви створюєте конусоподібну купу піску з максимальною крутизною. Вона має висоту 11 см і радіус 16 см. Знайдіть кут природного укосу цього піску.

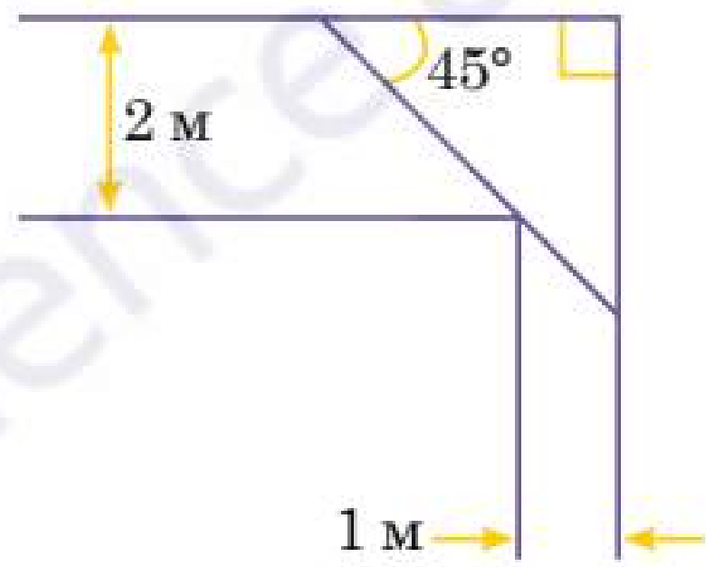
686 Андрій хоче виміряти висоту дерева біля свого будинку, оскільки хвилюється, що воно може впасти на будинок під час урагану. Він знає, що основа дерева знаходиться на відстані 18 метрів від будинку. Зріст Андрія — 1 м 80 см, його очі знаходяться на 10 см нижче, ніж маківка. Під час вимірювань горизонтальна відстань між очима Андрія та деревом становить 20 метрів. Кут від рівня очей Андрія до верхівки дерева становить 40°. Чи обґрунтовані хвилювання Андрія, що дерево під час падіння пошкодить його будинок?



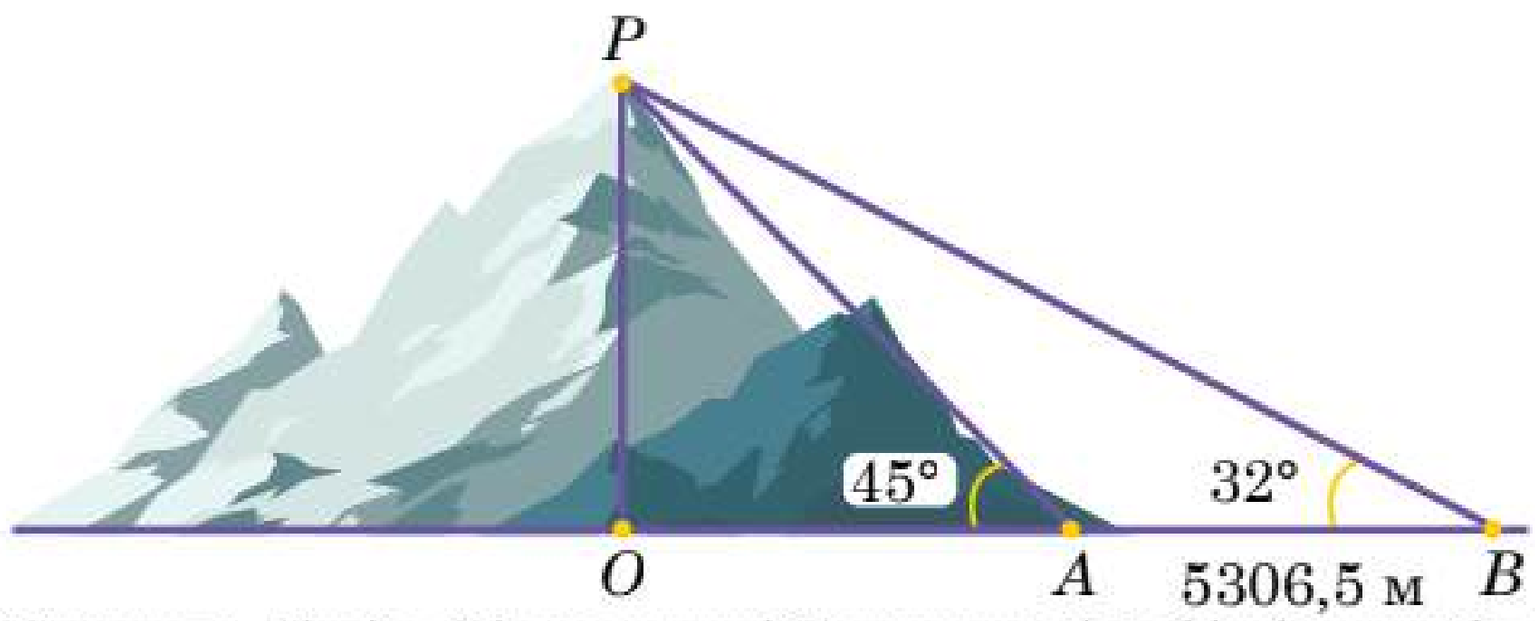
687 У будинку, де відбувається ремонт, два коридори перетинаються під прямим кутом, як показано на рисунку.

а) Робочі намагаються перенести драбину з одного коридору в інший і застрягають, коли вона знаходиться під кутом 45° до стін. Знайдіть довжину драбини.

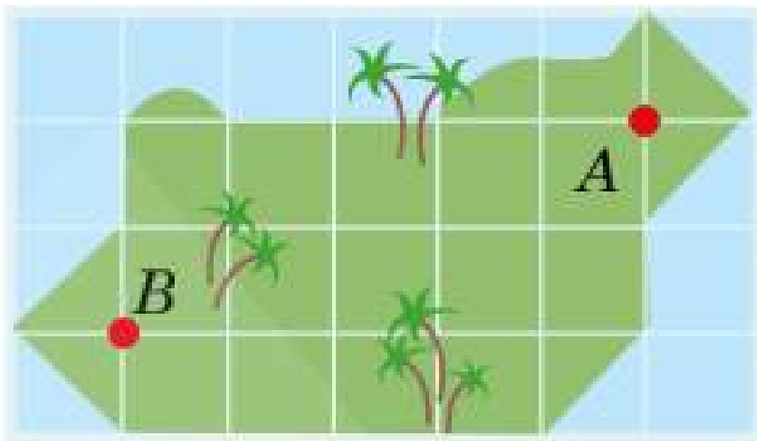
б) Робочі вирішили взяти другу драбину, але вона застрягла, коли була під кутом 60° до стіни коридору шириною 1 м. Знайдіть довжину цієї драбини.



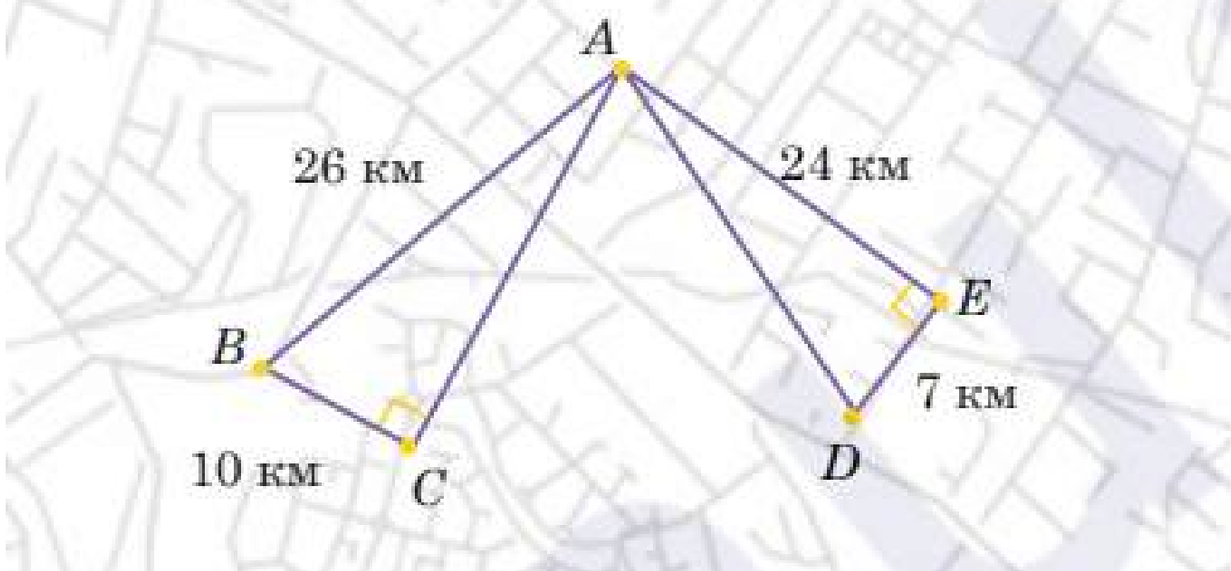
688 У 1852 році індійський математик Радханатх Сікдар використав методи тригонометрії, щоб обчислити висоту піка XV у Гімалаях (тепер відомого як гора Еверест). Вимірявши кути, під якими було видно вершину піка з двох різних точок, і відстань між цими точками, Сікдар зміг визначити висоту піка. Скориставшись наведеним рисунком, обчисліть висоту піка та порівняйте отримане значення із сучасною відомою висотою гори Еверест.



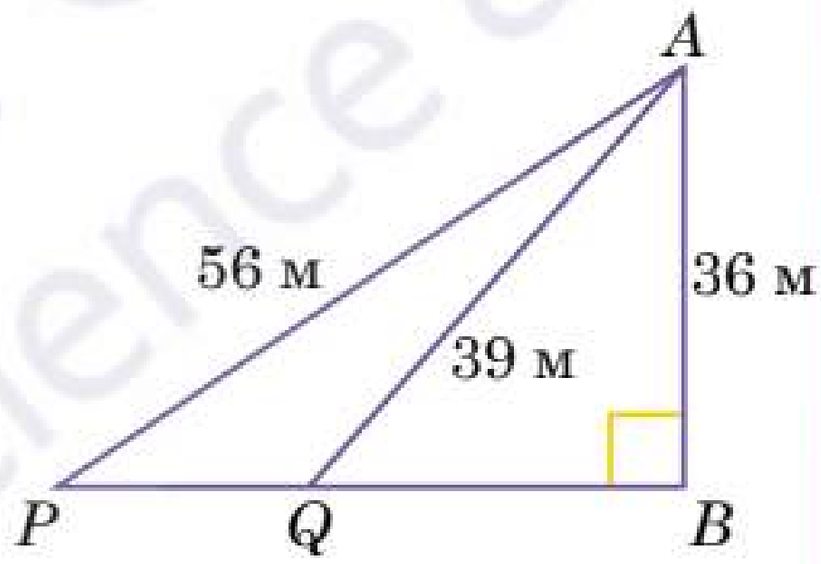
689 На малюнку зображено острів у зменшеному масштабі. Обчисліть, якою буде відстань між точками A та B, якщо сторона кожної клітинки на карті еквівалентна 1 км на місцевості.



690 A, B, C, D та E — це п'ять населених пунктів, які позначені на карті. Який з населених пунктів розташований найближче до населеного пункту A?



691 У побудованій схемі AB — це будівля, яка має висоту 36 м. P та Q — дві машини, припарковані на дорозі на захід від будівлі. Нам відомо, що $AP = 56$ м, а $AQ = 39$ м. Обчисліть відстань від одного автомобіля до іншого. Відповідь потрібно округлити до 2 знаків після коми.



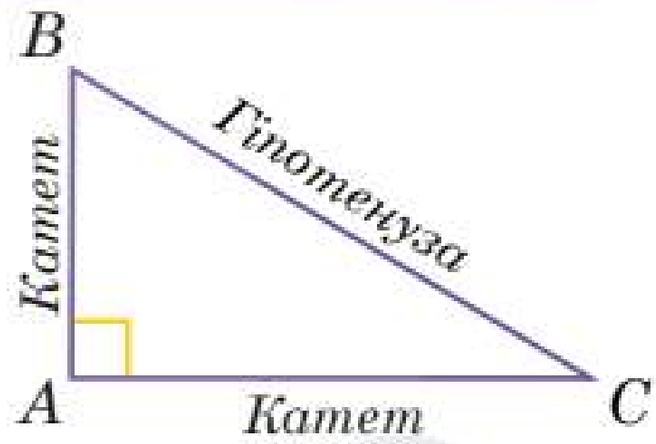
692 EN Real-life problem. You plan to provide wheelchair access to the building. Required height of the ramp is 20 cm, horizontal distance from the ramp base to the entrance is 48 cm. Find the length of the ramp to buy.

ramp — пандус
wheelchair — крісло колісне
required height — необхідна висота
distance — відстань

693 Сандра пливе на північ, а Марк — на схід з однієї і тієї ж пристані. За п'ять годин човен Сандри знаходиться в 35 км від початкової точки, а човен Марка — в 28 км від початкової точки. Обчисліть, яка відстань буде між човнами через 5 год. Знайдіть, яка відстань буде між човнами через добу безперервного руху.

Короткий огляд розділу

Прямокутним називається трикутник, у якого один з кутів — прямий. Дві сторони трикутника, що утворюють прямий кут, називаються **катетами**, а третя сторона — **гіпотенузою**.



Властивості прямокутного трикутника:

1. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90°.
2. Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за будь-який катет.
3. Якщо у прямокутному трикутнику один з гострих кутів дорівнює 30°, то протилежний цьому куту катет буде дорівнювати половині гіпотенузи.
4. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, дорівнює половині цієї гіпотенузи. Медіана, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, ділить його на два рівнобедрених трикутники (оскільки медіана дорівнює половині гіпотенузи).
5. Якщо описати коло навколо прямокутного трикутника, то гіпотенуза буде діаметром кола.

Теорема Піфагора:
у будь-якому прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів його катетів.

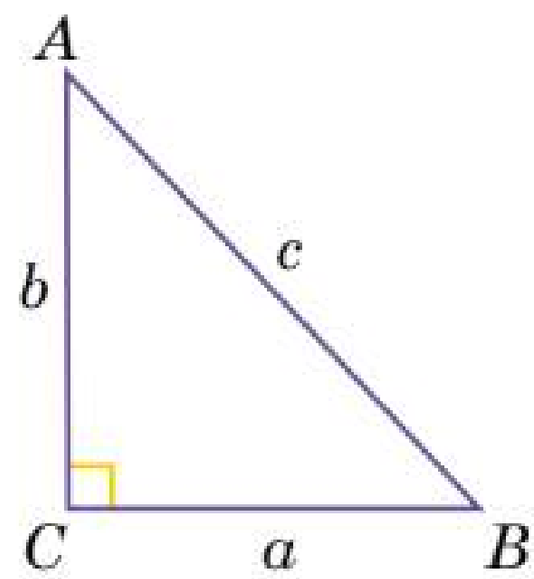
Обернена теорема до теореми Піфагора:
якщо сума квадратів двох сторін трикутника дорівнює квадрату третьої сторони, то такий трикутник — прямокутний.

Співвідношення між сторонами прямокутного трикутника:

$$c^2 = a^2 + b^2,\ c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

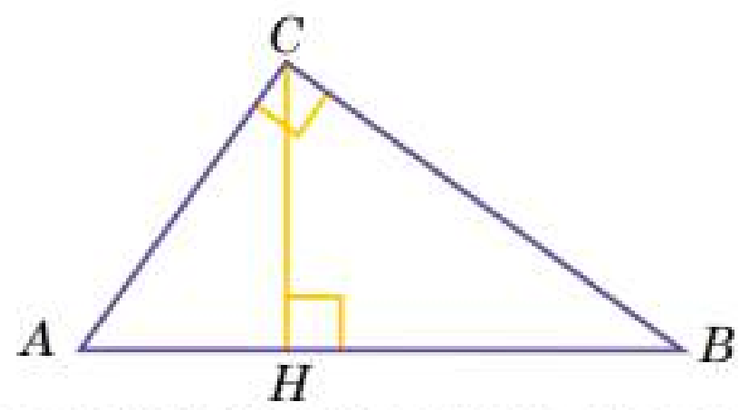
$$a^2 = c^2 - b^2,\ a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2,\ b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



Середні пропорційні відрізки в прямокутному трикутнику

У прямокутному трикутнику ABC ($\angle C = 90°$) проведемо висоту CH.



Лема. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, розбиває трикутник на два подібних між собою прямокутних трикутники, кожен з яких подібний даному.

$\Delta ACH \sim \Delta CBH$, $\Delta ACH \sim \Delta ABC$, $\Delta CBH \sim \Delta ABC$

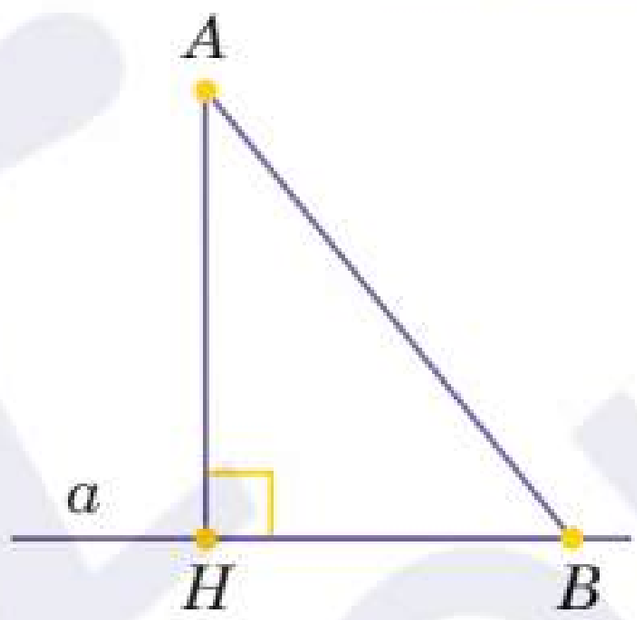
Метричні співвідношення в подібних прямокутних трикутниках:

1. Відрізки AH і BH, на які висота ділить гіпотенузу, називають **проекціями катетів на гіпотенузу**.
2. Відрізок x називається **середнім пропорційним** (або **середнім геометричним**) між відрізками a і b, якщо $x^2 = ab$.

Теорема про середні пропорційні відрізки

1. У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, є середнім пропорційним між проекціями катетів на гіпотенузу.
2. У прямокутному трикутнику катет є середнім пропорційним між гіпотенузою і проекцією цього катета на гіпотенузу.

Перпендикуляр і похила, їх властивості



Нехай з точки A, що не лежить на прямій a, проведено **перпендикуляр** AH до цієї прямої. Тоді точку H називають **основою перпендикуляра**.

Відрізок, який сполучає точку A з точкою прямої a і не збігається з перпендикуляром, називають **похилою** до прямої a. На рисунку відрізок AB — похила до прямої a, точка B — **основа** цієї **похилої**. При цьому відрізок HB називають **проекцією похилої** AB на дану пряму.

Властивості перпендикуляра і похилої

1. Будь-яка похила більша за перпендикуляр і більша за свою проекцію на дану пряму.
2. Рівні похилі, проведені з однієї точки, мають рівні проекції, і навпаки: якщо проекції двох похилих рівні, то рівні й самі похилі.
3. Якщо дві похилі проведені з однієї точки, то більша похила має більшу проекцію, і навпаки: з двох похилих більша та, яка має більшу проекцію.

Співвідношення між сторонами та кутами прямокутного трикутника

Нехай $\angle A$ — заданий гострий кут. Добудуємо його до довільного прямокутного трикутника ACB. Тоді **AC — прилеглий катет до $\angle A$, BC — протилежний катет до $\angle A$, AB — гіпотенуза** цього прямокутного трикутника.

	α	0°	30°	45°	60°	90°
Функція	$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
	$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
	$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
	$ctg\,\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

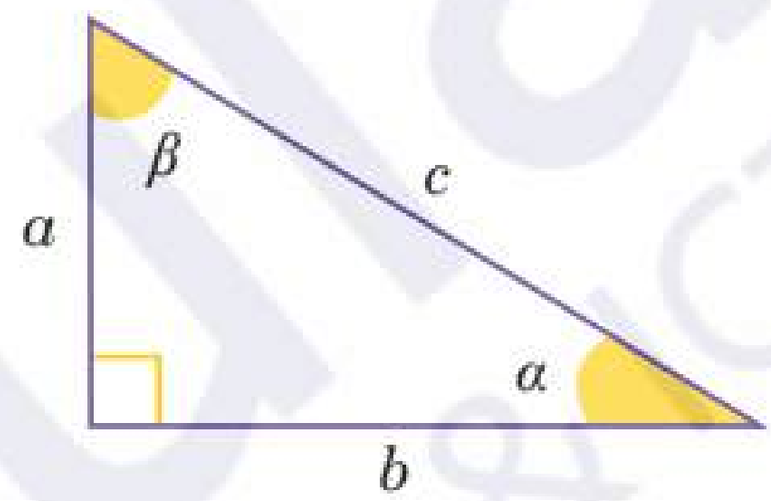
$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{AC}{BC}$$

Розв'язати трикутник — означає знайти його невідомі елементи (сторони та/або кути) за відомими сторонами й кутами.

Для цього будуть корисними такі **співвід-ношення**:



$$\alpha + \beta = 90°; \quad a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b};\ ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c};\ \cos\beta = \frac{a}{c};$$

$$tg\,\beta = \frac{b}{a};\ ctg\,\beta = \frac{a}{b}$$

$$a = c\sin\alpha;\ a = c\cos\beta;$$

$$a = b\,tg\,\alpha;\ a = \frac{b}{ctg\,\beta}$$

$$b = c\sin\beta;\ b = c\cos\alpha;$$

$$b = a\,tg\,\beta;\ b = \frac{a}{ctg\,\alpha}$$

$$c = \frac{a}{\sin\alpha};\ c = \frac{b}{\sin\beta};\ c = \frac{a}{\cos\beta};$$

$$c = \frac{b}{\cos\alpha}$$

Перевірте свої досягнення

1 Знайдіть гострий кут прямокутного трикутника, якщо один з відомих кутів дорівнює 40°.

а) 140°; б) 50°; в) 90°; г) 45°.

2 Якщо гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює 12 см, а катет — 10 см, то інший катет дорівнює:

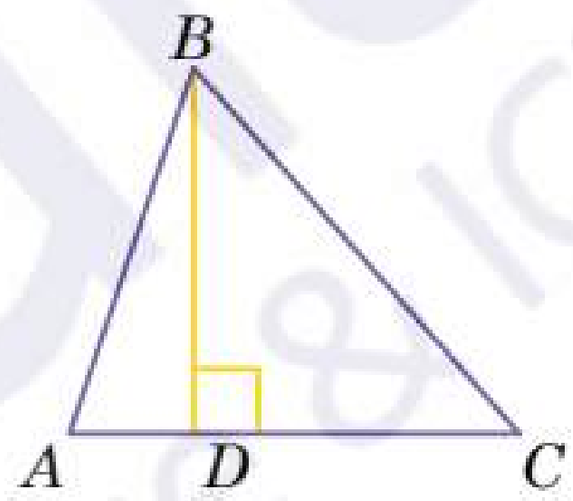
а) $\sqrt{12^2+10^2}$ см; б) $\sqrt{12^2-10^2}$ см; в) (12 – 10) см; г) ($12^2 - 10^2$) см.

3 Знайдіть сторону квадрата, діагональ якого дорівнює 6 см.

а) 3 см; б) $3\sqrt{2}$ см; в) $\sqrt{12}$ см; г) $6\sqrt{2}$ см.

4 У довільному ΔABC BD — висота трикутника ($BD \perp AC$). Оберіть правильне твердження:

а) $AB = BC$; б) $AB = BD$;
в) $AB < BC$; г) $AB > BC$.

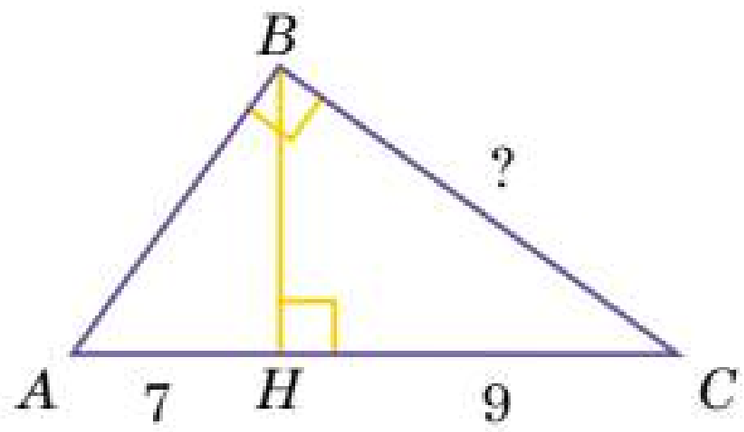


5 Вкажіть відношення для знаходження катета прямокутного трикутника:

а) гіпотенуза помножена на синус протилежного кута;
б) гіпотенуза помножена на косинус протилежного кута;
в) гіпотенуза помножена на синус прилеглого кута;
г) гіпотенуза помножена на тангенс протилежного кута.

6 За даними на рисунку знайдіть довжину сторони BC.

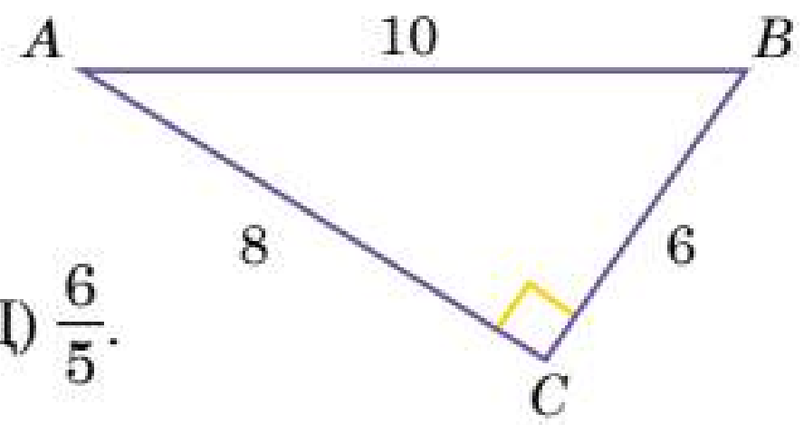
а) $\sqrt{63}$ см; б) 8 см;
в) 12 см; г) 16 см.



7 Знайдіть синус, косинус, тангенс і котангенс $\angle A$ та встановіть відповідність:

1) $\sin A$; 2) $\cos A$; 3) $tg\ A$; 4) $ctg\ A$.

А) $\frac{4}{5}$; Б) $\frac{4}{3}$; В) $\frac{3}{5}$; Г) $\frac{3}{4}$; Д) $\frac{6}{5}$.



8 Вираз $\sqrt{3}\,tg\ 60°$ дорівнює:

а) 1; б) $\sqrt{3}$; в) 3; г) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

9 У прямокутного трикутника ABC ($\angle C = 90°$) $\angle B = 30°$, $AB = 28$ см. Знайдіть AC.

Проєктна робота «Місто без меж»

Мета проєкту «Місто без меж» — дослідити ваше місто чи селище на рівень інклюзивності, тобто його зручність для маломобільних людей. Проблеми вільного пересування містом та доступу до послуг таких верств населення є дуже важливим, оскільки з кожним роком в Україні таких людей стає все більше.

Маломобільні групи населення — особи, які відчувають труднощі при самостійному пересуванні, одержанні послуги, необхідної інформації або при орієнтуванні у просторі, зокрема особи з інвалідністю, особи з тимчасовим порушенням здоров'я, вагітні жінки, громадяни похилого віку, особи з дитячими візками.

Реалізація проєкту

Крок ① Даний проєкт рекомендуємо виконувати об'єднавшись у 2–3 групи і розділивши ролі у групі.

Крок ② За допомогою живого опитування населення (або Інтернет-мережі, якщо опитування провести неможливо), дослідіть питання потреб маломобільних верств населення та дайте відповіді на наступні запитання:

1) Які перешкоди обмежують рух таких людей?
2) Яким чином ми можемо адаптувати місто під потреби маломобільного населення?
3) Що для цього необхідно?

Найбільш поширеним способом зробити будівлю інклюзивною є встановлення пандусів. Пандус — це суцільна похила площина, завдяки якій маломобільні групи населення можуть самостійно подолати перепади висот на своєму шляху.

Безпечний нахил зовнішнього пандуса не може перевищувати 8%, внутрішнього — 10%-12%. Якщо кут набагато більший, то цей пандус може нести небезпеку для життя. Наприклад, для людини, яка пересувається кріслом колісним.

Крок ③ Маємо формулу для обчислення кута нахилу поверхні:

$$\text{кут нахилу} = arctg\left(\frac{\text{нахил},\%}{100\%}\right)$$

За допомогою даної формули та калькулятора, обчисліть безпечний кут зовнішнього та внутрішнього пандусів. Результат округліть до цілих. Дані занесіть у таблицю.

	Нахил, %	Кут нахилу, °
Зовнішній пандус	8%	
Внутрішній пандус	10% – 12%	

Крок ④ Нехай кут нахилу зовнішнього пандуса позначимо як α, а кут нахилу внутрішнього пандуса позначимо як β.

Очевидно, що утворився прямокутний трикутник.
Отже, виконуватиметься рівність:

$$\sin \alpha = \frac{\text{висота}}{\text{довжина похилої}}$$

З попередніх обчислень відомо, що значення кутів нахилу зовнішнього та внутрішнього пандусів — число стале. Подумайте, яким чином ми можемо перевірити правильність кута нахилу цих споруд? Які виміри вам для цього необхідні?

Крок ⑤ За допомогою вимірювальної рулетки та додаткових обчислень, перевірте правильність кутів нахилу пандусів у вашому населеному пункті.

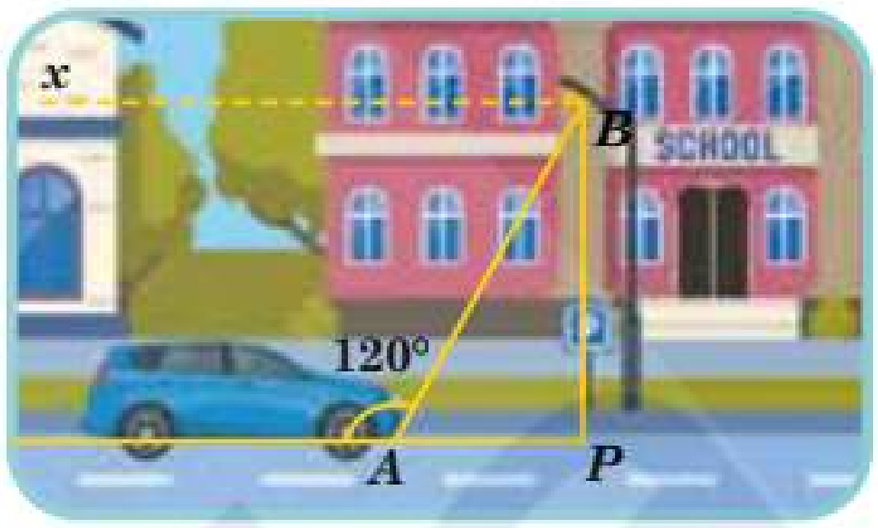
Крок ⑥ Знаючи безпечний кут нахилу зовнішнього пандуса, розрахуйте розміри конструкції для встановлення пандусу біля вашої школи.

Крок ⑦ Представте результати вашого дослідження у вигляді таблиці.

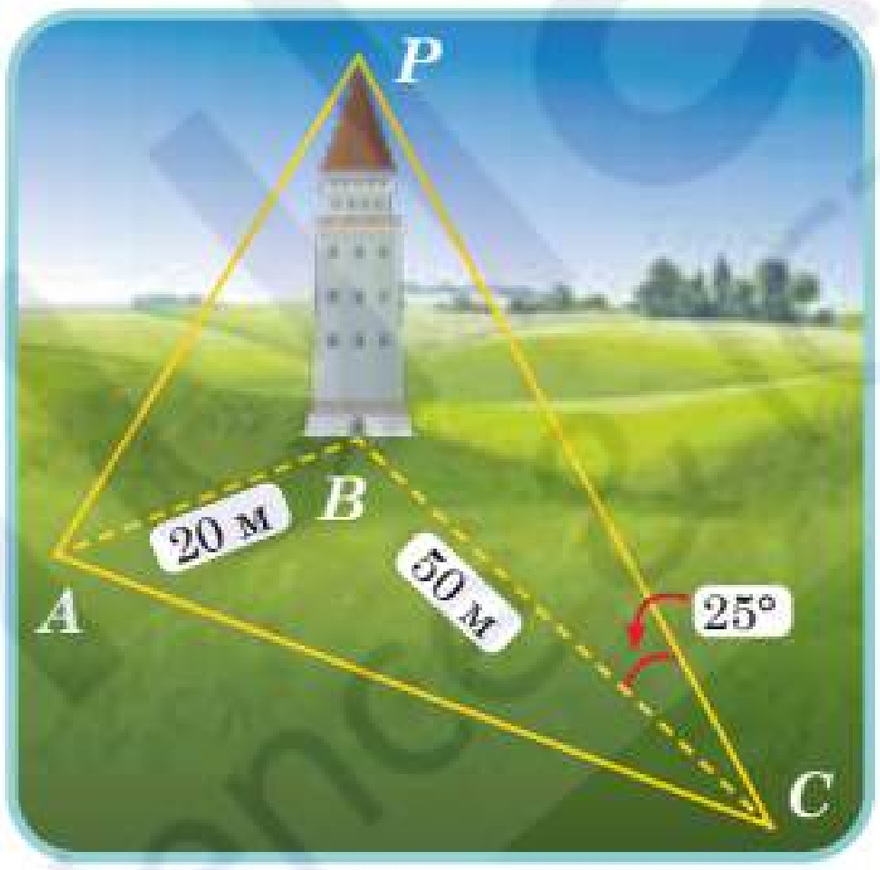
Що вдалося? Що було складним? Над чим ще потрібно працювати?

Додаткові завдання до розділу

694 На поданій схемі автомобіль знаходиться в точці A та їде прямо до зони паркування. Відстань від автомобіля до знаку паркування становить 12 м. У точці B, над знаком паркування, розміщений вуличний ліхтар. Також відомо, що $AP \parallel x$. Обчисліть висоту вуличного ліхтаря.



695 Точки A, B та C — це три точки розміщені на рівні землі, $\angle ABC = 60°$. Точка C знаходиться на відстані 50 м від точки B, а точка A — на відстані 20 м від точки B. Точка P — вершина вежі PB. Також відомо, що $\angle PCB$ становить 25°. Знайдіть висоту вежі PB.

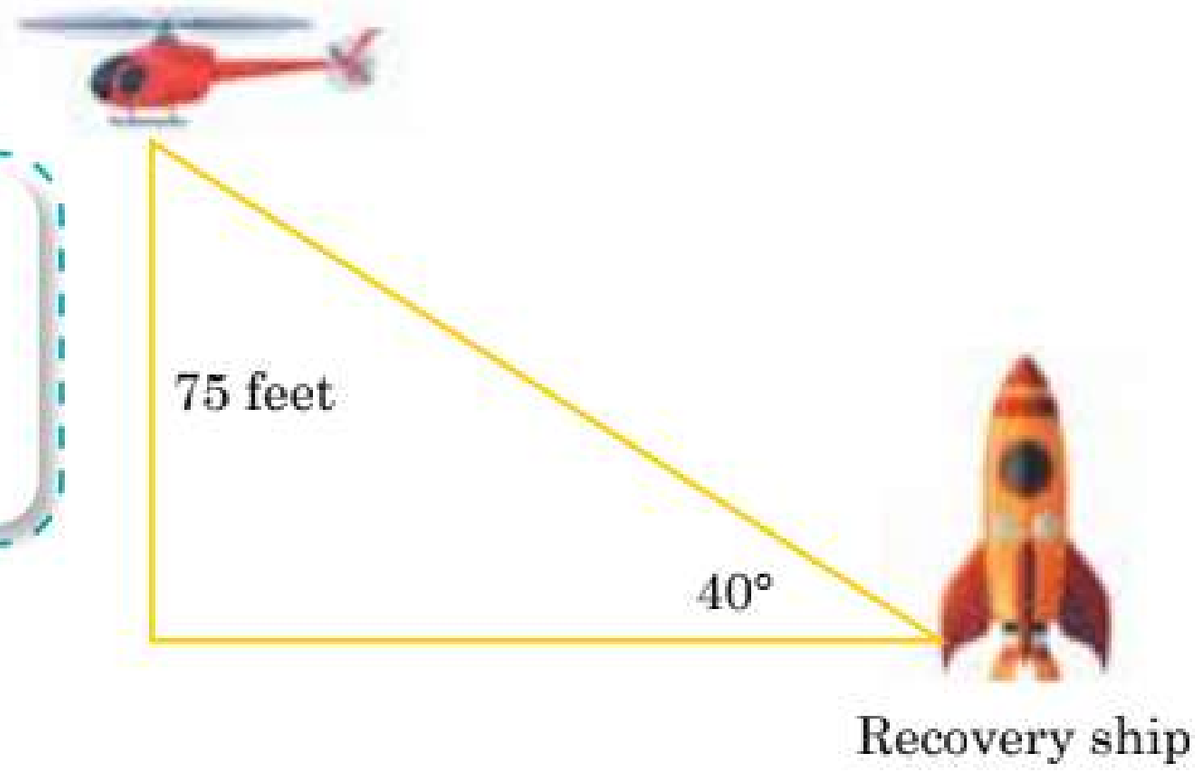


696 Радар стеження за літаками показує відстань від спільної точки O до кожного з двох літаків та кут між ними. Відомо, що кут між двома літаками дорівнює 49°, відстань від точки O до першого літака становить 50 км, а відстань від точки O до другого літака — 72 км. Обчисліть, на якій відстані знаходяться літаки один від одного. Результат потрібно округлити до двох знаків після коми.

EN

697 The NASA recovery helicopter hovers 75 feet above a space capsule. If the angle of depression to the recovery ship is 40°, how far is the ship form the space capsule?

angle of depression — кут падіння
how far — як далеко (на якій відстані)



6

Повторення та систематизація знань

Зв'язок мистецтва й математики надзвичайний. Наприклад, теорія перспективи (графічне представлення 3D–простору на плоскій поверхні зображення, яке сприймаємо очима) показала, що геометрія оперує не лише наявними метричними властивостями об'єктів (фігур), а й більше — геометрія допомагає належно деформувати ці фігури за законами побудови перспективи, і цей факт є основою походження проєктивної геометрії.

Подібно до інших видів мистецтв, архітектори використовують геометрію з кількох причин. Окрім математики, необхідної для проєктування красивих, практичних та безпечних будівель, архітектори скрізь застосовують геометрію: для визначення просторової форми будівлі, тобто для створення дизайну будівлі, його форми, пропорцій, структури, здебільшого конструктивного плану.

У цьому розділі ми:

- повторимо та систематизуємо основні теми, вивчені за курс геометрії 8 класу;
- будемо використовувати теорему Піфагора та подібність трикутників, щоб розв'язати будь-який трикутник;
- зрозуміємо, що до деяких задач можна застосовувати різні властивості та теореми залежно від способу розв'язання;
- будемо розв'язувати математичні задачі та виконувати завдання з повсякденного життя, застосовуючи набуті знання;
- будемо використовувати тригонометричні співвідношення кутів для розв'язування прямокутних трикутників;
- навчимося визначати, яким способом можна розв'язати завдання, зважаючи на наявні дані.

Ключові слова

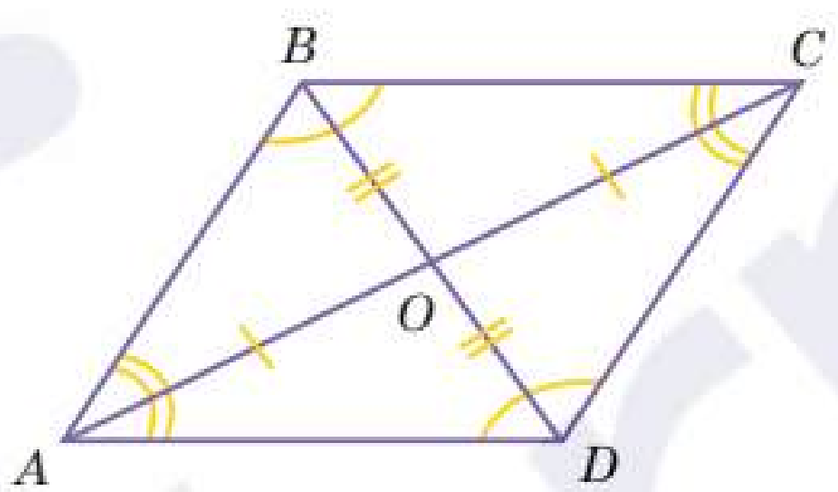
- Дано (*is known*)
- Знайти (*find*)
- Довести (*prove*)
- Розв'язання (*solution*)
- Спосіб розв'язання (*solution method*)
- Прикладні задачі (*applied problems*)
- Побутові задачі (*household problems*)
- Доведення твердження (*proving the statement*)

6 Повторення та систематизація знань

6.1. Многокутники

Многокутником називають замкнену плоску фігуру, яка має три або більше прямих сторін. Чотирикутником називають замкнену плоску фігуру, яка має чотири прямі сторони та чотири вершини. Діагоналями називають відрізки, які сполучають дві протилежні вершини чотирикутника або дві несусідні вершини багатокутника, у якого більше ніж чотири сторони.

Паралелограм — це чотирикутник, у якого сторони попарно паралельні.



Властивості

1. $AB = CD$, $BC = AD$
2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
3. $AO = CO$, $BO = DO$
4. $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$, $\angle D + \angle A = 180°$

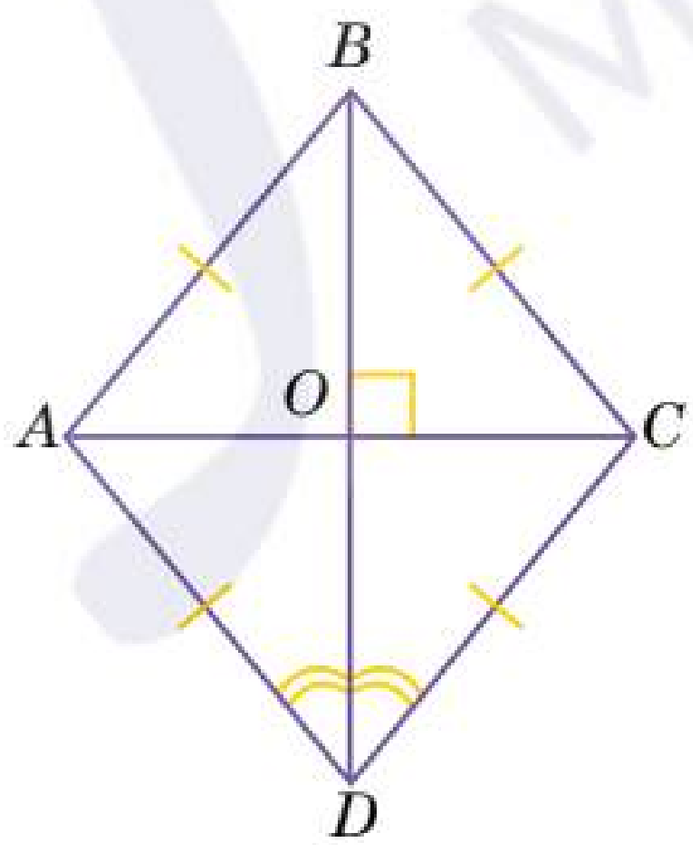
Периметр

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC)$

Площа

$S_{ABCD} = AD \cdot h_{AD}$

Ромб — паралелограм, у якого всі сторони рівні.



Властивості

1. $AB = BC = CD = AD$
2. $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$
3. $AO = CO$, $BO = DO$, $AC \perp BD$
4. $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$, $\angle D + \angle A = 180°$
5. AC і BC — бісектриси кутів

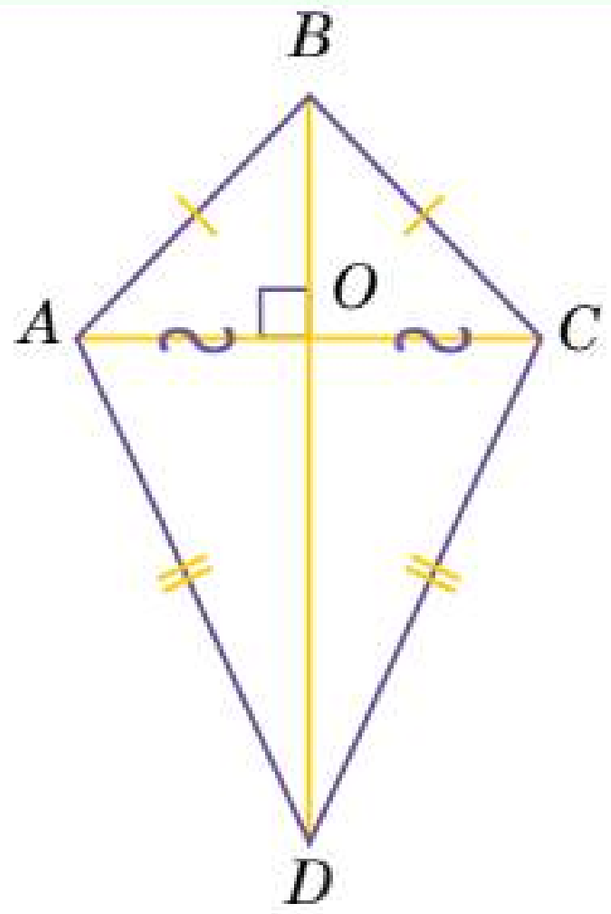
Периметр

$P_{ABCD} = 4 \cdot AB$

Площа

$S_{ABCD} = AD \cdot h_{AD}$

Дельтоїд — чотирикутник, у якого дві пари сусідніх сторін рівні.



Властивості

1. $AB = BC$, $CD = AD$
2. $\angle ABO = \angle OBC$
3. $AC \perp BD$
4. $\angle BAD = \angle BCD$

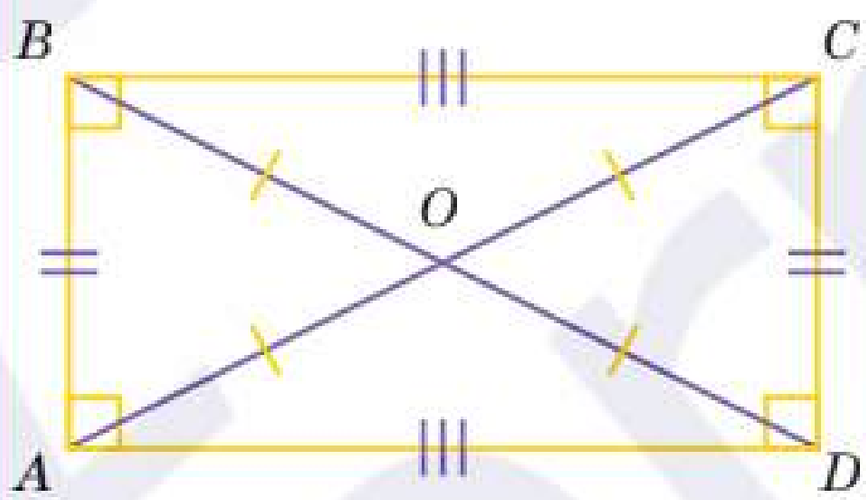
Периметр

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + AD)$

Площа

Для обчислення площі слід поділити на рівні трикутники

Прямокутник — паралелограм, у якого всі кути прямі.



Властивості

1. $AB = CD$, $BC = AD$
2. $\angle A = \angle C = \angle B = \angle D = 90°$
3. $AO = CO = BO = DO$
4. $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$, $\angle D + \angle A = 180°$

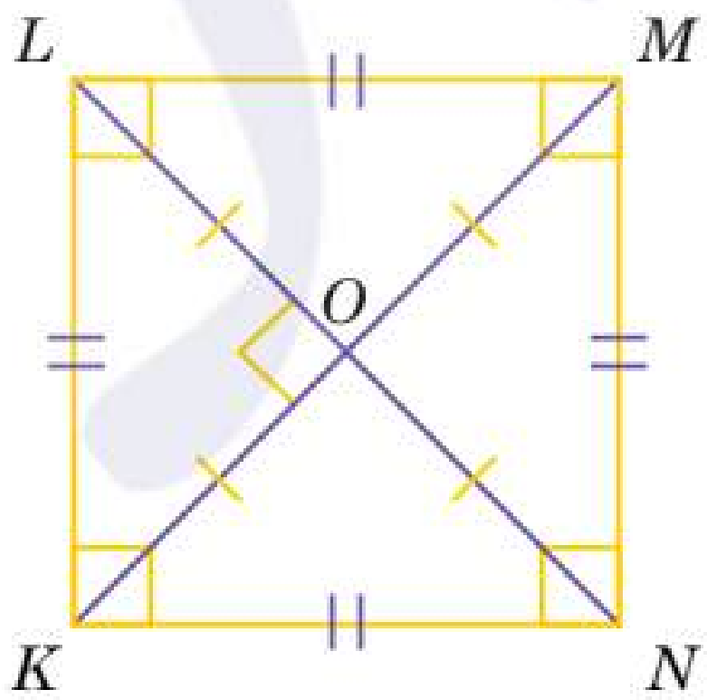
Периметр

$P_{ABCD} = 2 \cdot (AB + BC)$

Площа

$S_{ABCD} = AB \cdot BC$

Квадрат — чотирикутник, який за властивостями є паралелограмом, прямокутником і ромбом.



Властивості

1. $KL = LM = MN = NK$
2. $\angle K = \angle L = \angle M = \angle N = 90°$
3. $KO = LO = MO = NO$
4. $\angle K + \angle L = 180°$, $\angle L + \angle M = 180°$, $\angle M + \angle N = 180°$, $\angle N + \angle K = 180°$

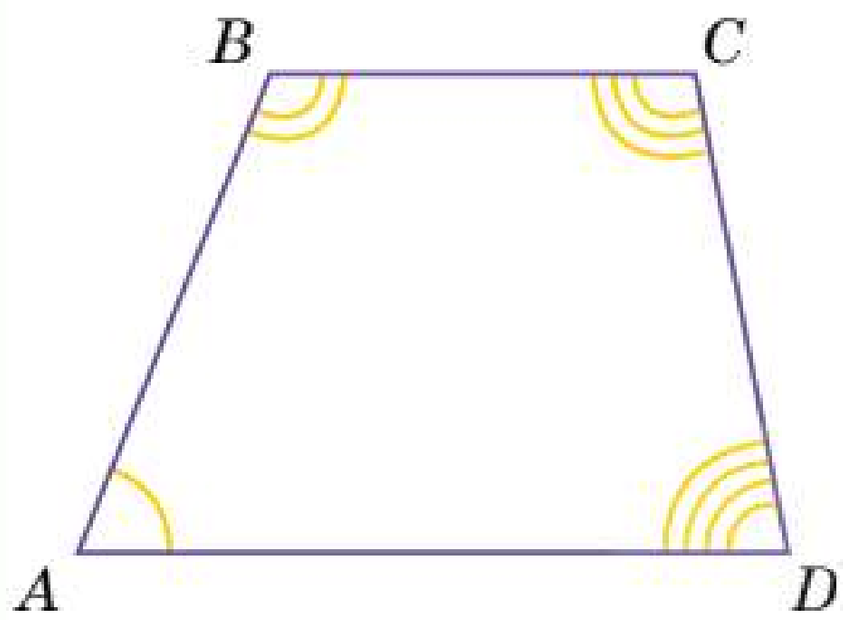
Периметр

$P_{ABCD} = 4 \cdot KL$

Площа

$S_{ABCD} = KL^2$

Трапеція — чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші — ні.



Властивості

1. $BC \parallel AD$
2. $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle D = 180°$

Периметр

$$P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA$$

Площа

$$S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h$$

Попрактикуйтеся

698 Доведіть, що прямокутник є паралелограмом.

699 Доведіть, що квадрат — це ромб.

700 Довжина основ довільної трапеції площею 156 см^2 становить 12 см і 16 см. Обчисліть довжину висоти та середньої лінії даної трапеції.

701 Обчисліть кількість сторін правильного многокутника, внутрішній кут якого становить 172,8°.

702 Знайдіть довжину більшої висоти трикутника, сторони якого 4 см і 7 см, а менша висота — 3 см.

703 Обчисліть значення площі паралелограма, якщо різниця його сторін становить 8 см, периметр — 64 см, а висота опущена з вершини тупого кута градусною мірою 120°.

704 Обчисліть площу прямокутника, якщо його діагональ дорівнює 15 см, а менша сторона — $2\sqrt{26}$ см.

705 Знайдіть площу описаного навколо квадрата круга, якщо площа квадрата дорівнює 49 см^2.

706 AC і BD — діагоналі ромба, що перетинаються у точці O. Один із кутів ромба на 28° більший за інший. Знайдіть градусну міру кутів трикутника BOC.

707 Дельтоїд має довжини сторін 15 см та 13 см, а менша його діагональ — 10 см. Обчисліть периметр, площу та більшу діагональ цього дельтоїда.

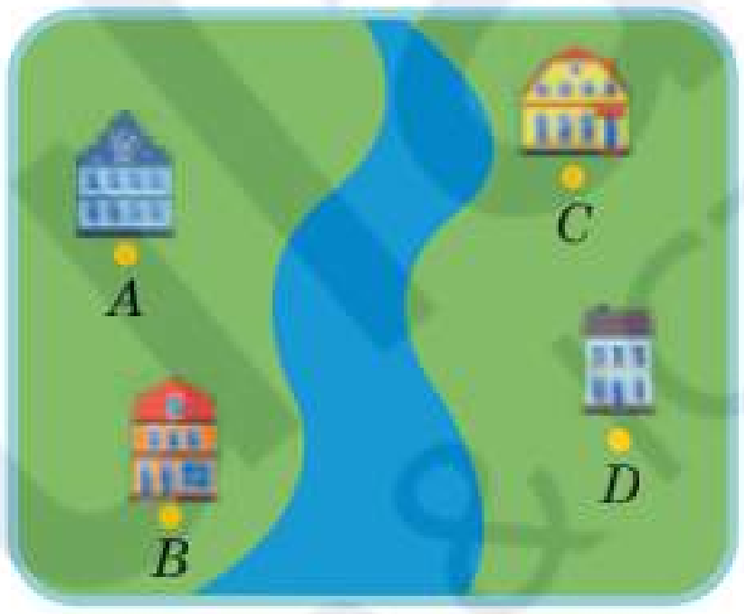
708 Обчисліть площу повної поверхні куба зі стороною 5 см.

709 Парашутистка у безвітряну погоду приземляється зі швидкістю 5 м/с. Знайдіть швидкість приземлення парашутистки, якщо швидкість вітру буде 6 м/с. Відповідь округліть до десятих.

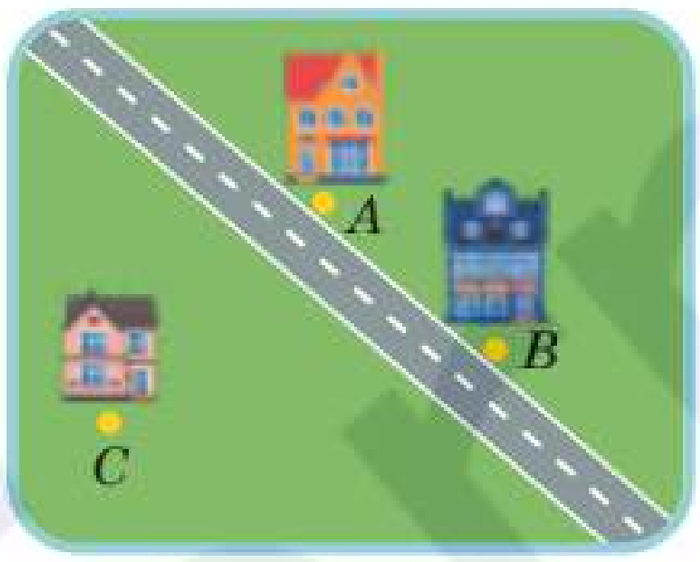
710 Точка M розташована на стороні CD квадрата $ABCD$ з центром O, причому $CM : MD = 1 : 2$. Знайдіть сторони трикутника AOM, якщо сторона квадрата дорівнює 6.

711 Протилежні сторони чотирикутної паркетної дошки рівні. Як, користуючись тільки лінійкою, перевірити чи є ця дошка прямокутна?

712 Будинки розташовані в вершинах прямокутника $ABCD$, як показано на рисунку. В якому місці слід побудувати міст через річку, щоб він був рівновіддалений від всіх будинків.



713

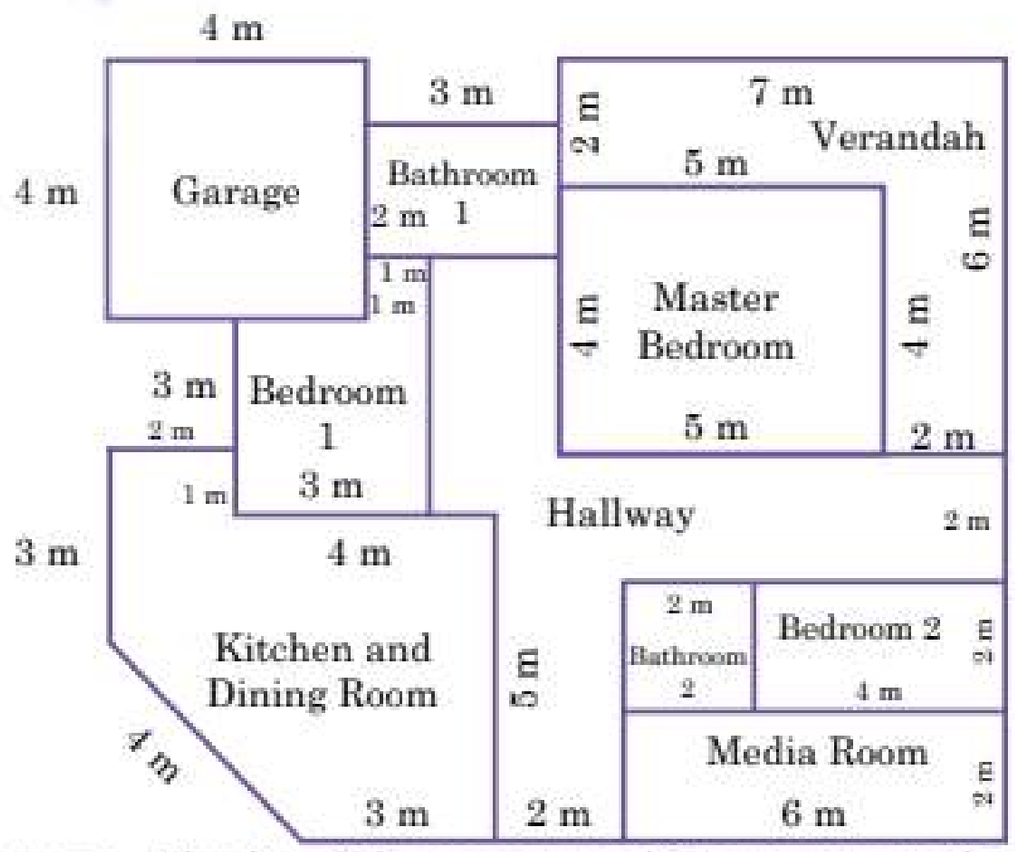


Як провести поряд з будинком C дорогу, паралельну дорозі через будинки A та B, використовуючи властивості паралелограма?

714 Знайдіть висоту трапеції, бічні сторони якої дорівнюють 6 см та 8 см, а основи — 4 см і 14 см.

715 Висота ромба, проведена з вершини тупого кута, ділить його сторону на відрізки довжиною a та b. Знайдіть діагоналі ромба.

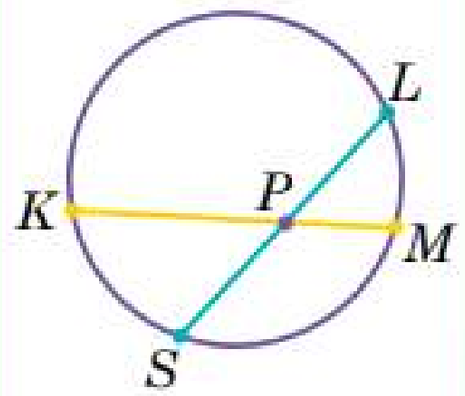
716 Real-life problem. This is the floorplan of Olena's house. Use the floorplan to find the area of each rooms.



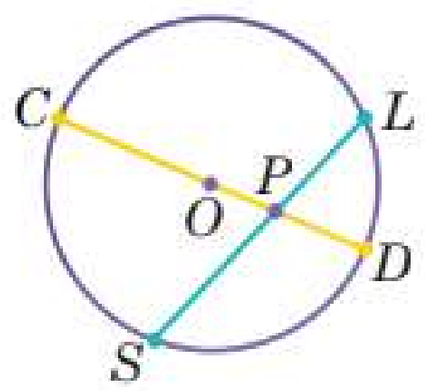
6.2. Подібність трикутників

Пропорційність відрізків

Пропорційність відрізків хорд

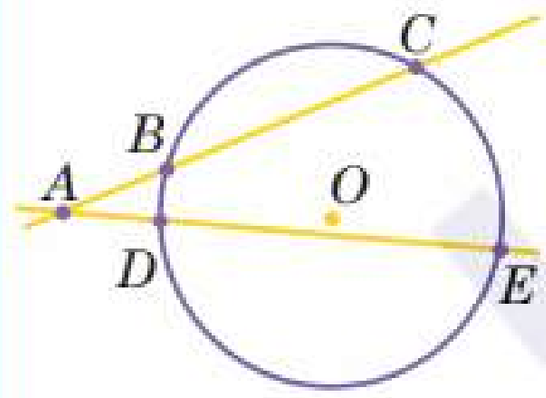


$SP \cdot PL = KP \cdot PM$

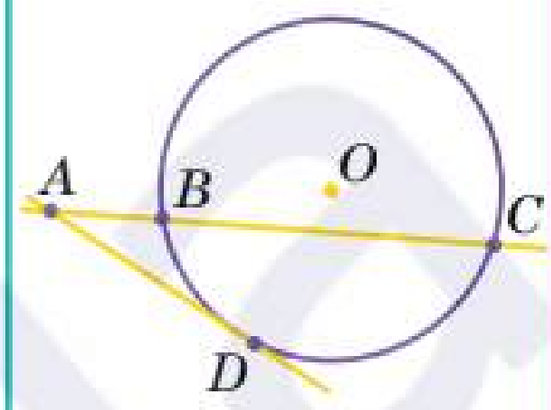


$SP \cdot PL = R^2 - PO^2$

Пропорційність відрізків січної та дотичної

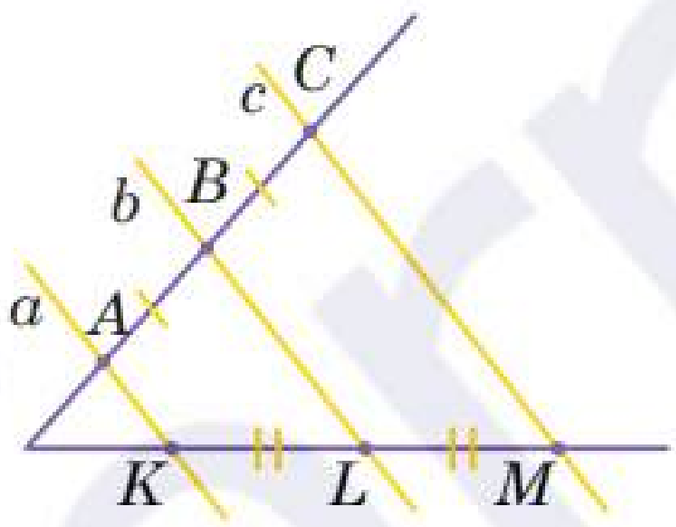


$AB \cdot AC = AD \cdot AE$



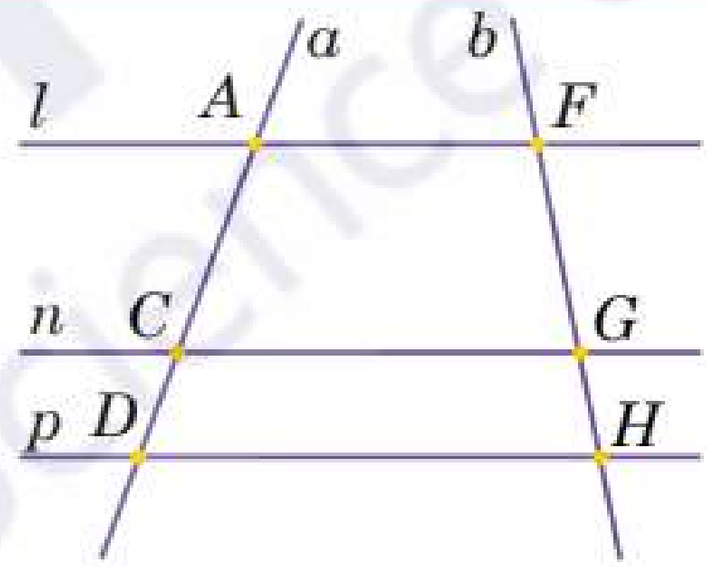
$AD^2 = AB \cdot AC$

Теорема Фалеса



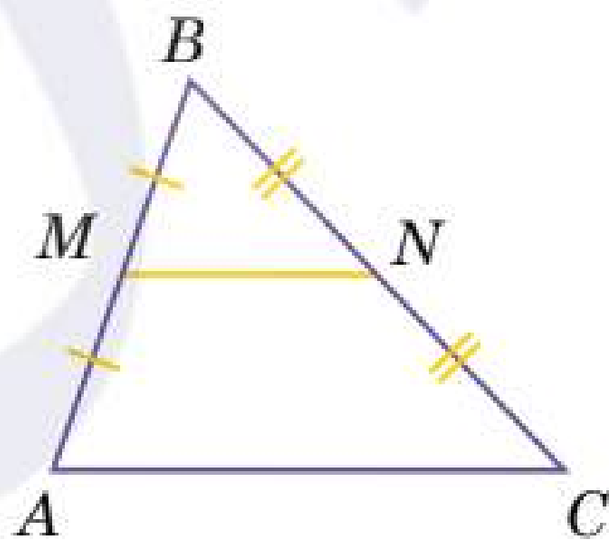
Якщо $a \parallel b \parallel c$, $KL = LM$, то $AB = BC$

Узагальнена теорема Фалеса



Якщо $l \parallel n \parallel p$, то $\frac{AD}{FH} = \frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$

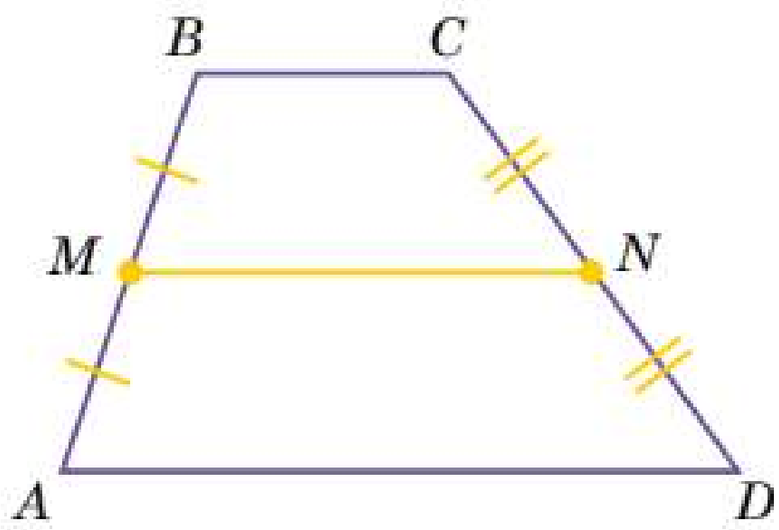
Середня лінія трикутника



$MN = \frac{1}{2}AC$

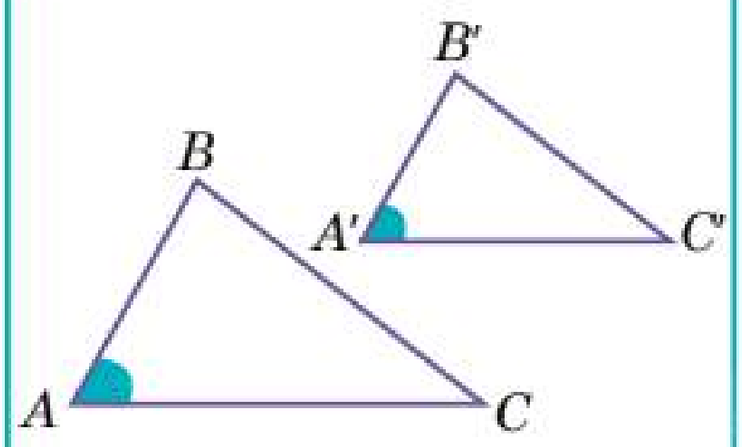
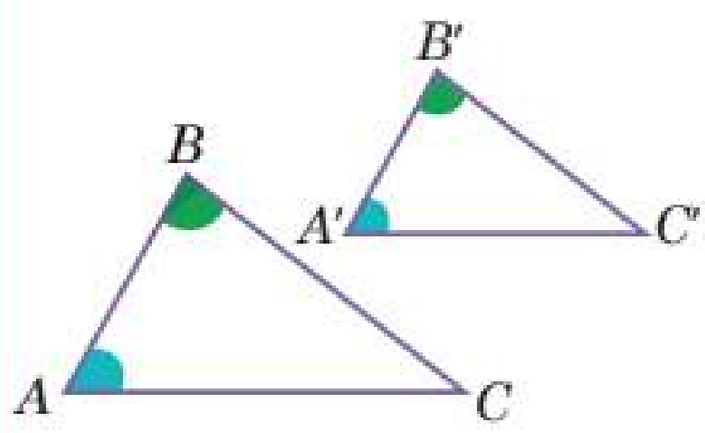
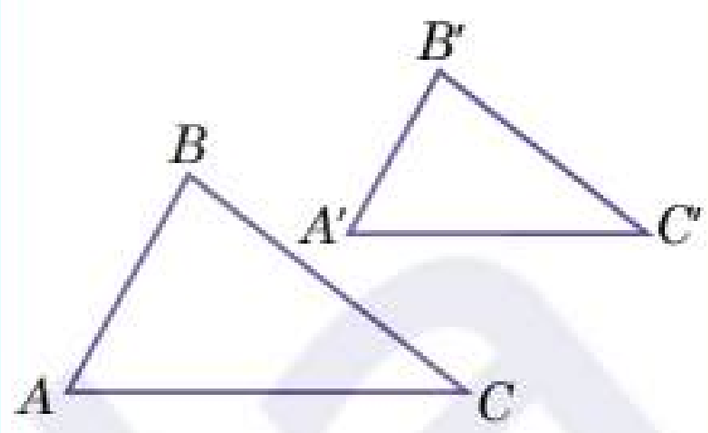
(половина паралельної сторони)

Середня лінія трапеції



$MN = \frac{AD + BC}{2}$

(півсума основ трапеції)

Ознаки подібності трикутників		
I ознака (за двома сторонами та кутом між ними)	**II ознака** (за двома кутами)	**III ознака** (за трьома сторонами)
		
$\angle A = \angle A'$ і $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$	$\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A'B'C'$

Властивість медіани, бісектриси та висоти

1. **Медіани** точкою перетину діляться у відношенні 2 : 1, починаючи від вершини.
2. **Бісектриса** кута трикутника ділить сторону, до якої вона проведена, на пропорційні відрізки до двох інших сторін.
3. **Висота** прямокутного трикутника, проведена з вершини прямого кута, ділить його на подібні йому трикутники.

Попрактикуйтеся

717 Обчисліть периметр та площу рівностороннього трикутника, середня лінія якого дорівнює 7 см.

718 Доведіть, що середня лінія будь-якого трикутника утворює пару подібних трикутників.

719 Обчисліть площу трапеції, якщо її середню лінію збільшили на 10 %. Основи трапеції становлять a см та b см, висота — h см.

720 Сторони одного трикутника дорівнюють 10 см, 12 см, 15 см, а більша сторона іншого — 75 см. Обчисліть інші невідомі сторони та коефіцієнт подібності трикутників.

721 Бісектриса трикутника зі сторонами 27 см та 18 см поділила більшу сторону на відрізки a та 10 см відповідно. Обчисліть довжину третьої сторони.

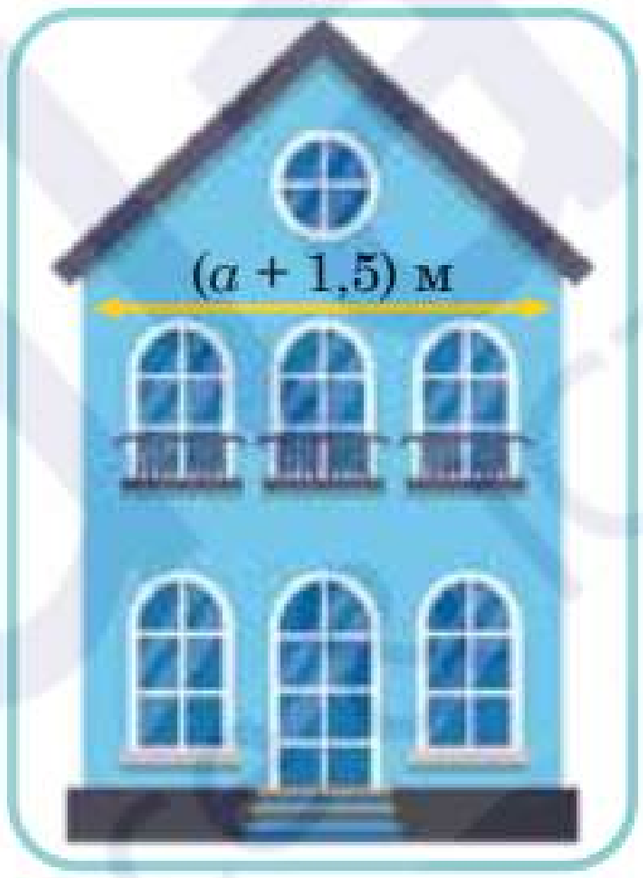
722 При перетині двох хорд, одна з них поділилася на відрізки 5 см і 7 см. Частинка іншої хорди становить 9 см. Обчисліть довжину хорд.

723 З точки поза колом проведено січну та дотичну. Обчисліть довжину зовнішньої частини січної, якщо її внутрішня частина на 5 см більша за зовнішню. Довжина дотичної становить 6 см.

724 Трикутники ABC та MNK — подібні. Точки O та O_1 — точки перетину бісектрис цих трикутників. Доведіть, що трикутники AOB та MON також подібні.

725 Відрізки AB та MN перетинаються в точці O так, що $AO : OB = 1 : 4$, $DO : OC = 1 : 4$. Доведіть подібність трикутників AOD та COB.

726 На проєкті ширина даху будинку становила 5 см із масштабом плану 1 : 100. Проте замовник вирішив, що хоче збільшити ширину будинку на 1,5 м.
Обчисліть, як зміняться розміри даху на плані, застосовуючи подібність трикутників. У відповіді вкажіть коефіцієнт подібності.



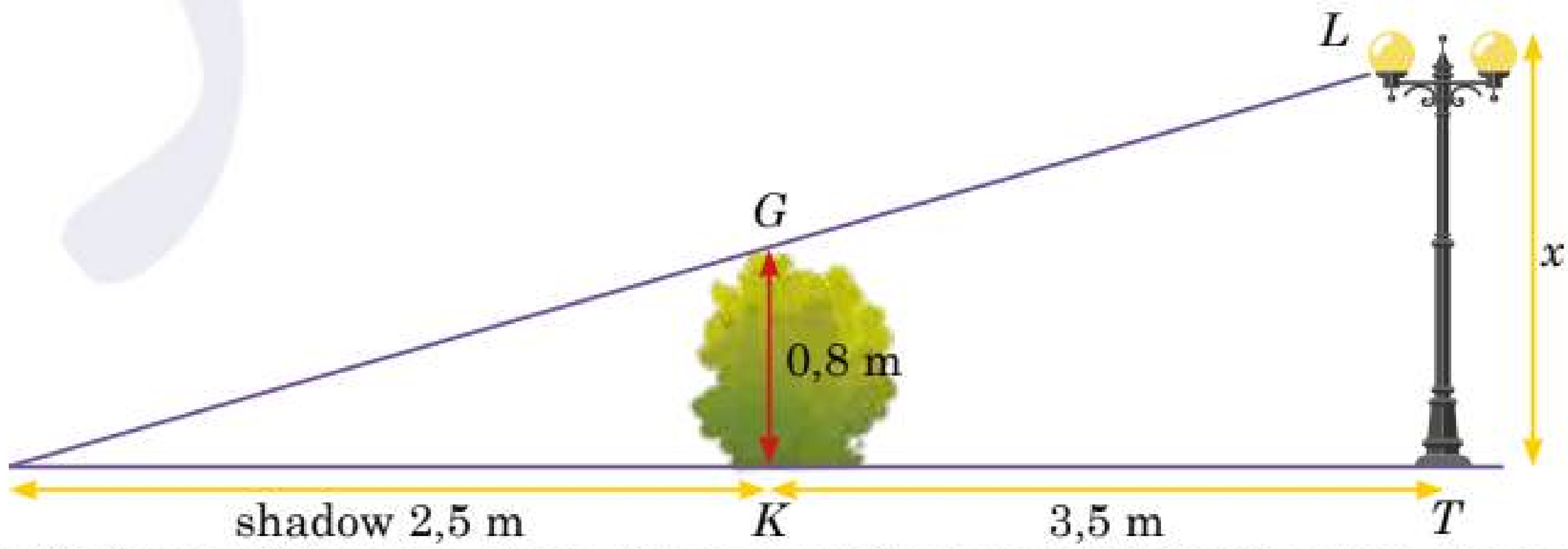
727 Відрізок AD — бісектриса трикутника ABC. Знайдіть BD та DC, якщо $AB = 14$ см, $BC = 20$ см, $AC = 21$ см.

728 Трикутники ABC та KMN — подібні. Знайдіть сторони трикутника KMN, якщо $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $KM : AB = 2{,}1$.

729 Трикутники ABC та KMN — подібні. Знайдіть сторони трикутника KMN, якщо $AB = 4$ см, $BC = 5$ см, $CA = 7$ см, $KM : AB = 2{,}1$.

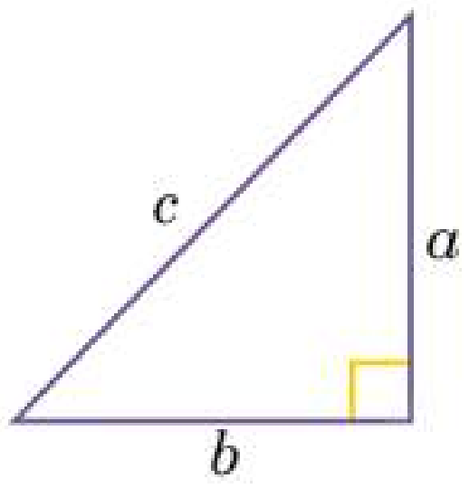
730 * Доведіть, що відношення відповідних сторін подібних трикутників дорівнює відношенню висот, проведених до цих сторін.

731 EN A bush that is 0,8 meters tall is located 3,5 meters away from a lamp and casts a shadow 2,5 meters long. How tall is the lamp?



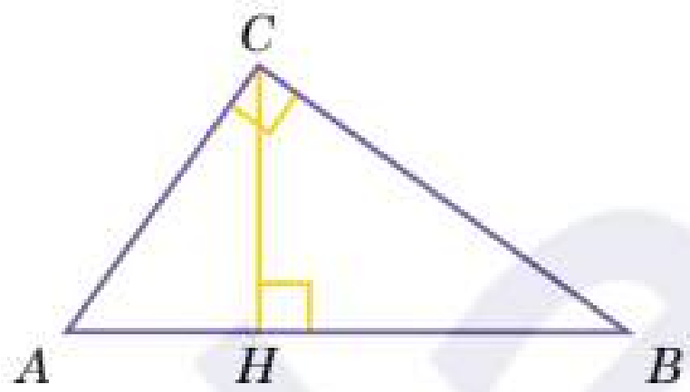
6.3. Розв'язування прямокутних трикутників

Теорема Піфагора



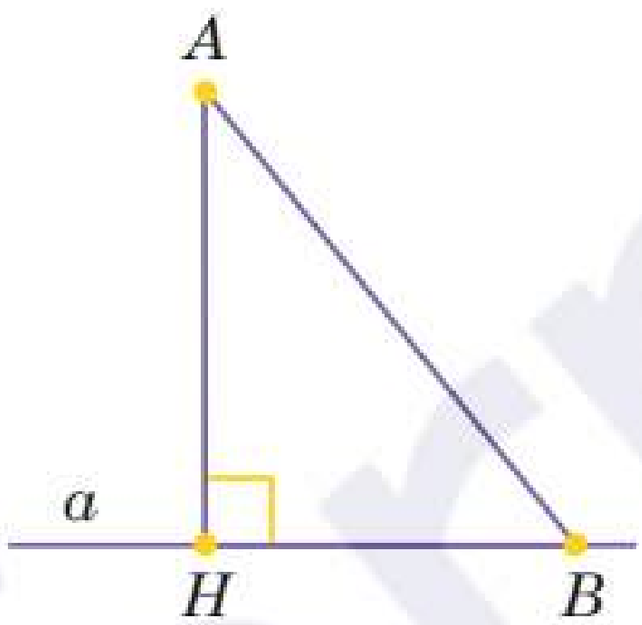
$a^2 + b^2 = c^2$
(сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи)

Середні пропорційні відрізки у прямокутному трикутнику



$CH^2 = AH \cdot BH,$
$AC^2 = AB \cdot AH,$
$BC^2 = AB \cdot BH$

Перпендикуляр і похила



AB — похила до прямої a,
AH — висота,
HB — проекція похилої

Співвідношення між сторонами та кутами

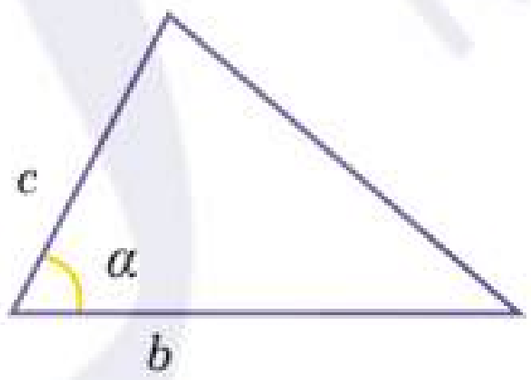
$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

$$tg\,\alpha = \frac{BC}{AC}$$

$$ctg\,\alpha = \frac{AC}{BC}$$

Тригонометрична формула площі трикутника



$$S = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin\alpha$$

(півдобуток довжин сторін на синус кута між ними)

Основні тригонометричні співвідношення:

$$\alpha + \beta = 90°; \qquad a^2 + b^2 = c^2$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \cos\alpha = \frac{b}{c};\ tg\,\alpha = \frac{a}{b};\ ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c};\ \cos\beta = \frac{a}{c};\ tg\,\beta = \frac{b}{a};\ ctg\,\beta = \frac{a}{b}$$

$$a = c \cdot \sin\alpha;\ a = c \cdot \cos\beta;\ a = b \cdot tg\,\alpha;\ a = \frac{b}{ctg\,\alpha}$$

$$b = c \cdot \sin\beta;\ b = c \cdot \cos\alpha;\ b = a \cdot tg\,\beta;\ b = \frac{a}{ctg\,\beta}$$

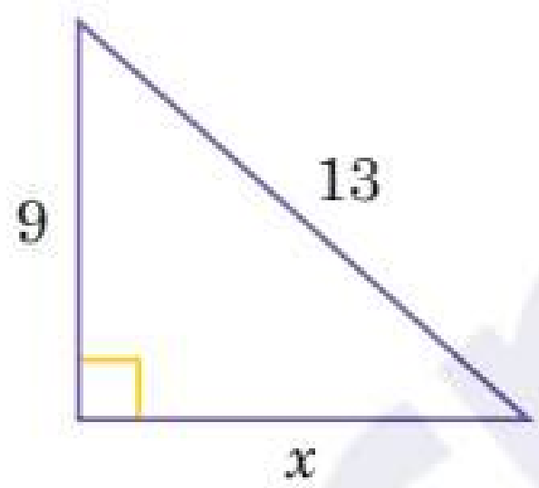
$$c = \frac{a}{\sin\alpha};\ c = \frac{b}{\sin\beta};\ c = \frac{a}{\cos\beta};\ c = \frac{b}{\cos\alpha}$$

Попрактикуйтеся

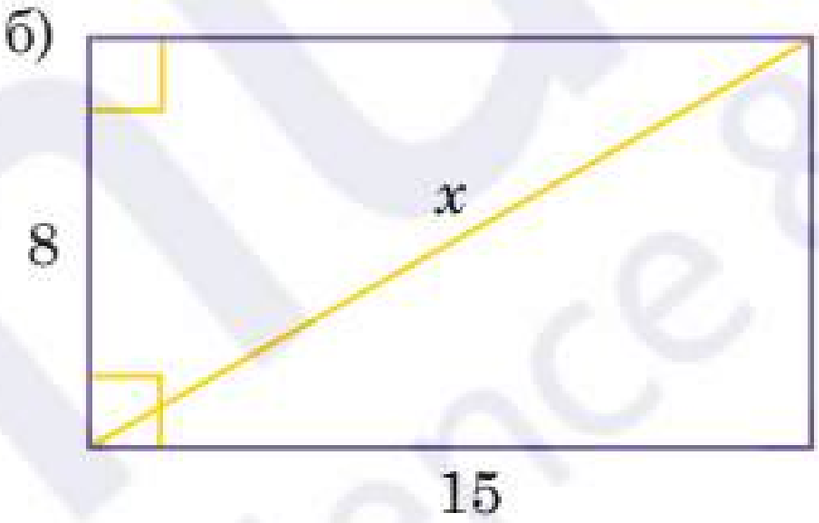
732 Чи існує прямокутний трикутник зі сторонами 14; 17; 25? Відповідь обґрунтуйте.

733 Обчисліть невідомі відрізки на рисунках.

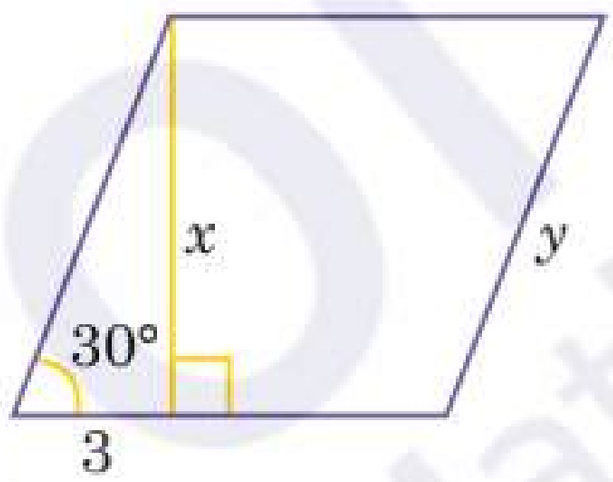
а)



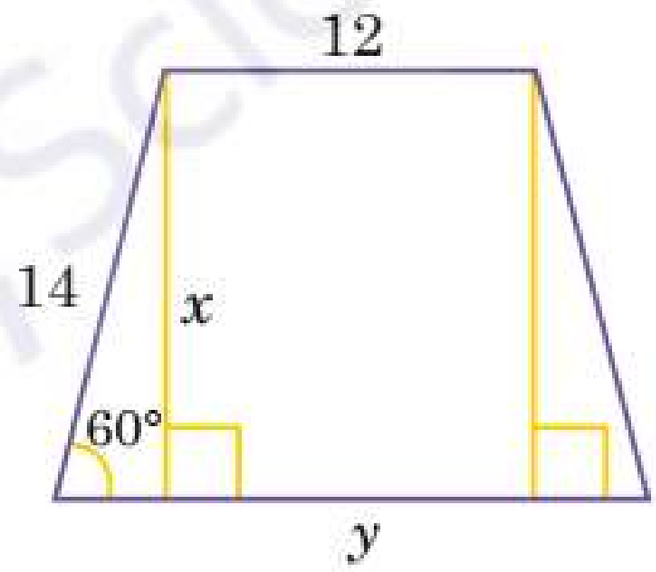
б)



в)



г)



734 У рівнобедреному трикутнику проведено висоту довжиною $9\sqrt{5}$ см, бічна сторона — 27 см. Обчисліть периметр трикутника.

735 Обчисліть площу трикутника, якщо похила дорівнює 15 см, а проекція — 10 см.

736 Обчисліть площу трикутника, дві сторони якого дорівнюють 6 см і 8 см, а кут між ними — 35°. Відповідь округліть до тисячних.

737 Висота рівностороннього трикутника дорівнює 5 см. Обчисліть її площу.

738 У прямокутному трикутнику гіпотенуза дорівнює 49 см, а проекція одного катета на гіпотенузу — 25 см. Знайдіть катети трикутника.

739 У прямокутному трикутнику один з катетів дорівнює $4\sqrt{3}$ см, а гіпотенуза — 8 см. Знайдіть кути трикутника та другий катет.

740 У прямокутному трикутнику діагональ із більшою стороною утворює кут 22°, менша сторона дорівнює 7 см. Обчисліть площу прямокутника. Відповідь округліть до сотих.

741 Площа трапеції дорівнює 54 см^2, одна з бічних сторін, що утворює кут 135° із меншою основою довжиною $8\sqrt{2}$ см, становить 6 см. Знайдіть довжину більшої основи трапеції.

742 Гострий кут ромба дорівнює 60°, а його висота — $5\sqrt{3}$ см. Обчисліть його периметр та площу.

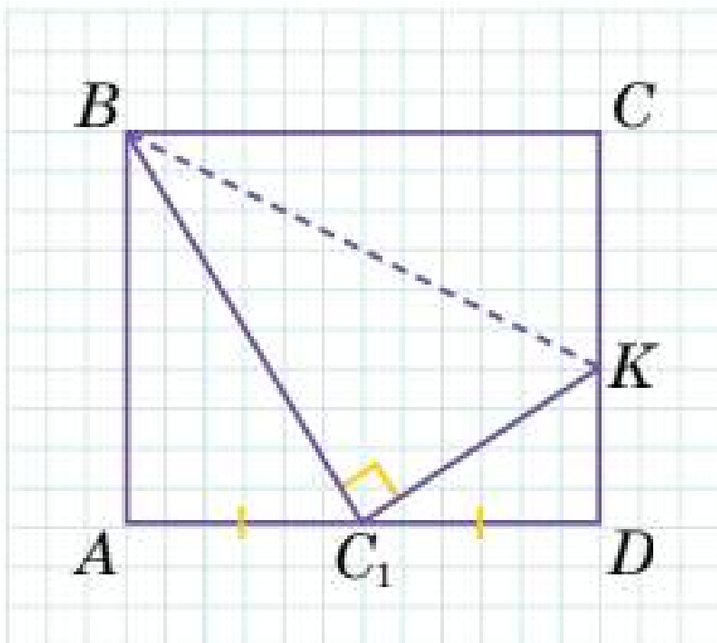
743 У приватному будинку встановили сходи на другий поверх, під якими є порожнє місце для комода. Обчисліть висоту цього комода, якщо його ширина становить 1,5 м, висота сходів — 2 м, а їхній кут нахилу — 32°. Для обчислень скористайтеся калькулятором та округліть результат до десятих.

744 Використовуючи рисунок, поясніть, як можна будь-які два квадрати розрізати на п'ять частин і скласти з них один квадрат.

745* Дано правильний трикутник ABM зі стороною a. Вершина M належить стороні CD прямокутника $ABCD$. Знайдіть діагональ даного прямокутника.

746* На гіпотенузі прямокутного трикутника з катетами a та b побудований квадрат, що розташований ззовні трикутника. Знайдіть відстань від вершини прямого кута трикутника до точки перетину діагоналей квадрата.

747* Прямокутний аркуш паперу $ABCD$ зігнули вздовж прямої BK. Знайдіть відношення $DK : AB$, якщо точка C_1 — середина сторони AD.



748* Доведіть, що бісектриса прямого кута прямокутного трикутника з нерівними катетами ділить навпіл кут між медіаною та висотою.

Перевірте свої досягнення

1 Оберіть формулу, за якою можна обчислити площу довільного трикутника:

а) $S = a \cdot h_a$; б) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; в) $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$; г) $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$.

2 Обчисліть третю сторону прямокутного трикутника, якщо найдовша сторона дорівнює 10 см, інша — 6 см.

а) 8 см; б) 4 см; в) 16 см; г) 64 см.

3 Обчисліть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 6 см і 8 см.

а) $S = 48$ см^2; б) $S = 24$ см^2; в) $S = 14$ см^2; г) $S = 56$ см^2.

4 Трикутники ABC та MNK подібні. Обчисліть довжину MN, якщо $AB = 3$ см та відношення сторін $BC : NK = 2 : 3$.

а) $S = 6$ см; б) $S = 2$ см; в) $S = 4{,}5$ см; г) $S = 9$ см.

5 Периметр паралелограма $ABCD$ становить 60 см. Знайдіть сторони, якщо вони відносяться як 2 : 3.

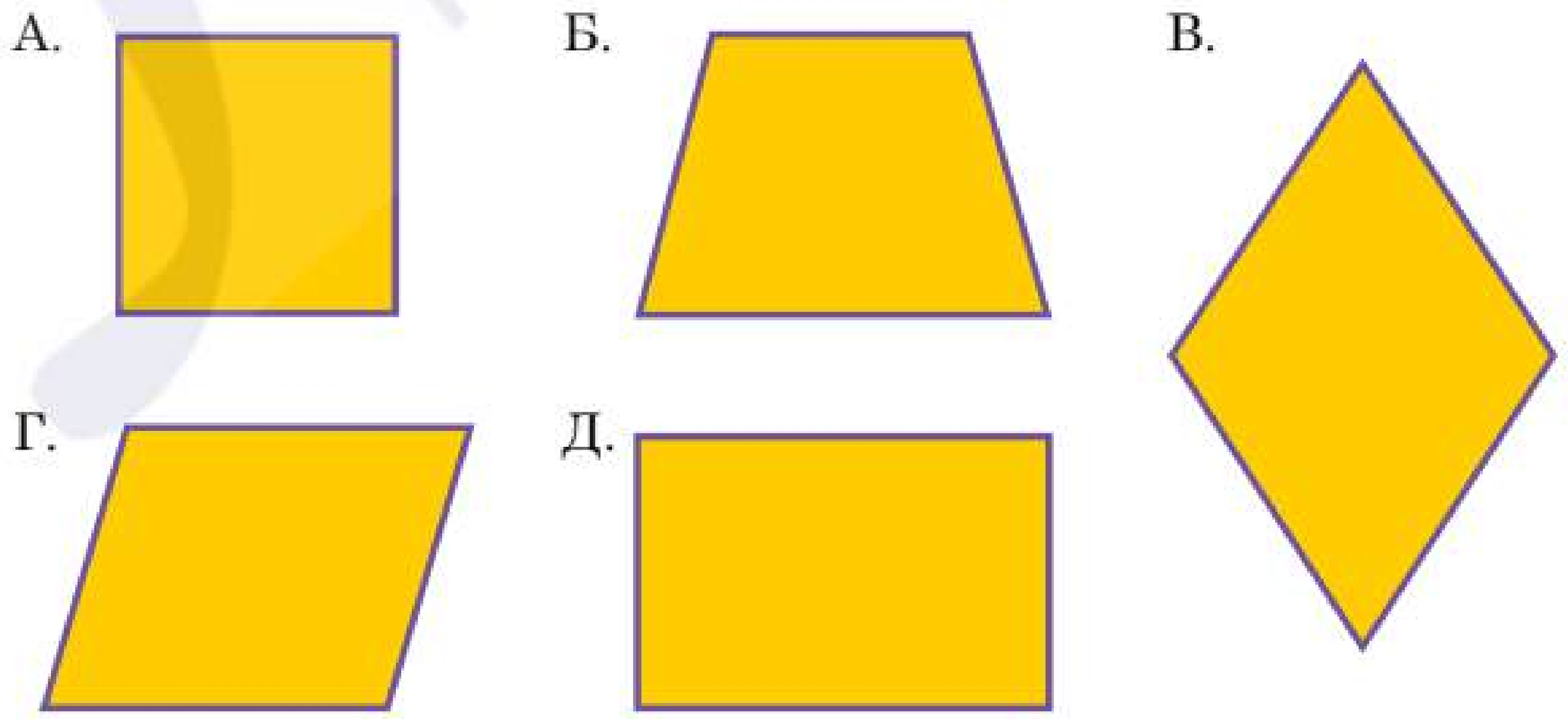
а) 15 см та 45 см; б) 20 см та 30 см; в) 10 см та 15 см; г) 12 см та 18 см.

6 Три сторони прямокутної трапеції дорівнюють 8 см, 8 см, 14 см. Знайдіть четверту сторону.

а) 10 см; б) 12 см; в) 8 см; г) $\sqrt{132}$ см.

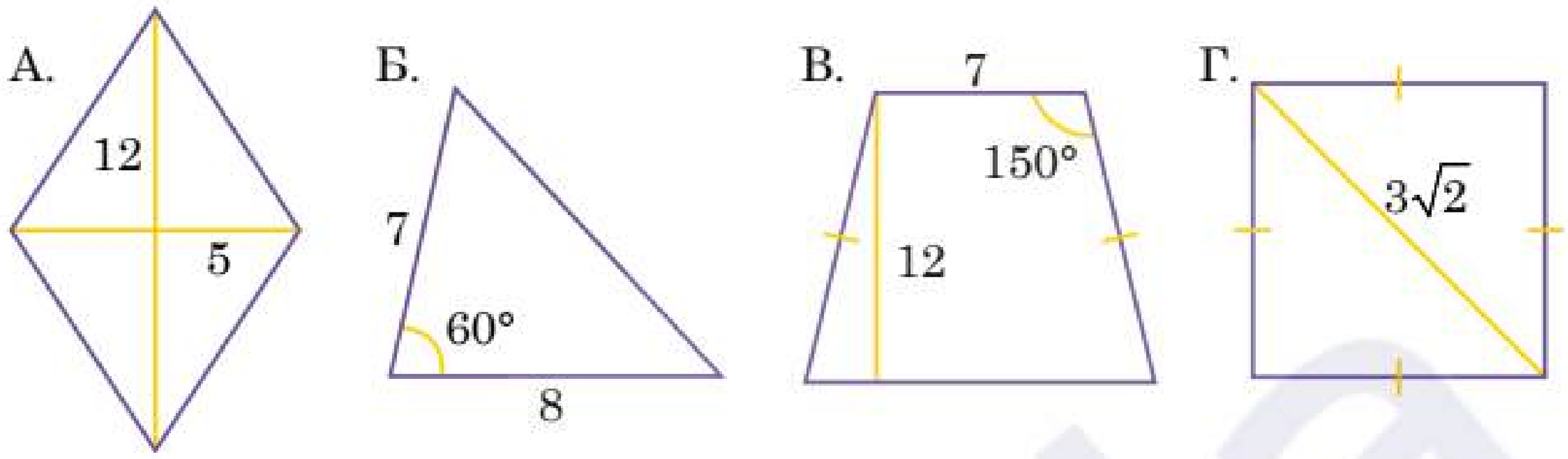
7 Установіть відповідність між властивістю (1—4) та фігурою (А—Д).

1. Діагоналі перетинаються під прямим кутом.
2. Сторони попарно паралельні, протилежні кути рівні, відмінні від прямих.
3. Всі сторони та діагоналі рівні.
4. Сума прилеглих до бічних сторін кутів дорівнює 180°.



8 Установіть відповідність між площею (1—5) та фігурою (А—Г).

1. $S = 14\sqrt{3}$ 2. $S = 120$ 3. $S = 9$ 4. $S = 9\sqrt{2}$ 5. $S = 156$



9 Висота прямокутного трикутника ділить гіпотенузу на відрізки 6 см і 24 см. Обчисліть довжину висоти.

10 Знайдіть периметр трикутника ABC, якщо бісектриса AM ділить сторону BC на відрізки $BM = 5$ см та $MC = 7$ см, $AB = 14$ см.

Додаткові завдання до розділу

749 Пізанська вежа нахилена під кутом приблизно 4 градуси від вертикалі. Висота вежі становить 57 метрів. Знайдіть відстань від вершини вежі до точки на землі, яка знаходиться безпосередньо під основою вежі. Вченими було зафіксовано, що вершина в середньому нахиляється до землі на 1,2 мм в рік.
Обчисліть, яким буде кут нахилу вежі відносно вертикалі через 100 років.

750 Єгипетська піраміда має висоту 146,6 метрів і квадратну основу зі стороною 230,4 метра. На певній відстані від піраміди стоїть спостерігач, який бачить вершину піраміди під кутом 30° до горизонту.
Визначте відстань від спостерігача до початку основи піраміди.

751 Колізей у Римі має форму еліпса з великою віссю довжиною 188 м і малою віссю довжиною 156 м. Уявіть, що всередині Колізею є прямокутна арена, яка вписана в цей еліпс.
Обчисліть площу цієї арени, якщо її сторони паралельні осям еліпса.

Проєктна робота «Геометричні головоломки»

Оригамі — це мистецтво створення фігур з паперу без використання ножиць. Геометрія, у своєму початковому значенні, вивчає фігури, їх взаємне розташування, розміри частин і перетворення цих фігур. Зв'язок мистецтва оригамі та геометрії сприяв появі нового поняття — орігаметрії.

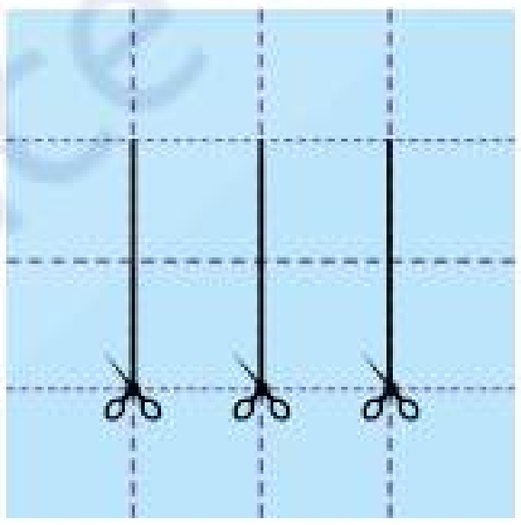
Орігаметрія — це оригінальний підхід до розв'язку геометричних задач.

Пропонуємо спробувати власними руками виготовити геометричні головоломки, користуючись набутими знаннями та навичками.

Даний проєкт рекомендуємо виконувати індивідуально або об'єднавшись у пари.

Магічний квадрат

Необхідні матеріали: аркуш паперу, ножиці, олівець або фломастер.



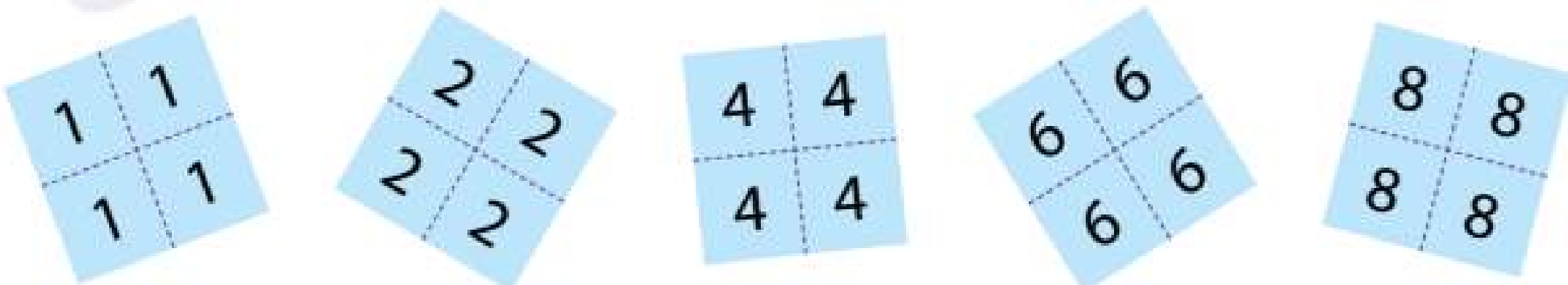
Крок ① Від аркушу паперу відріжте квадрат. Методом складання навпіл поділіть даний квадрат на 16 квадратів як на схемі. Розріжте заготовку по вертикальним лініям, як показано чорними лініями.

Крок ② Олівцем або фломастером напишіть цифри на лицьовій та зворотній стороні заготовки в такому порядку, як на схемі нижче.

2	3	4	2
2	3	4	2
3	4	5	6
3	4	5	6

1	1	7	5
8	8	7	6
7	7	8	8
1	1	6	6

Крок ③ Головоломка «Магічний квадрат» готова. Завдання головоломки — за допомогою згинання заготовки по вже існуючим лініям, складіть квадрати 2 на 2 клітинки з написаними однаковими цифрами від 1 до 8.



Флексагон

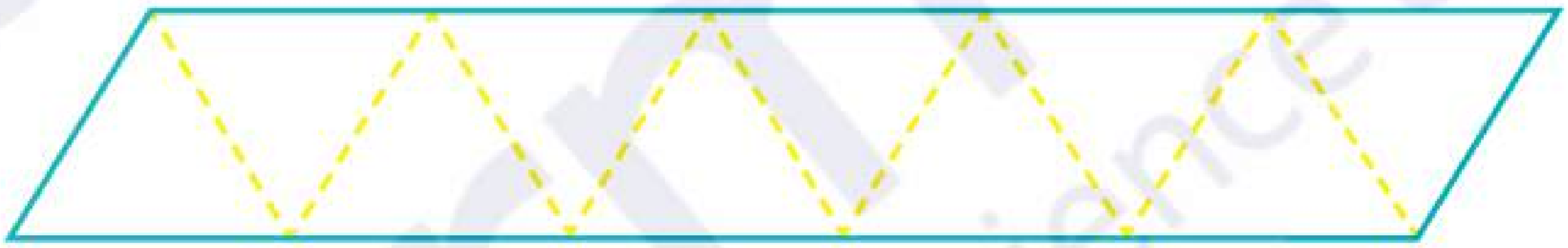
Флексагон (від англ. to flex, лат. Flectere — складатися, згинатися, гнутися) — це пласка модель зі смужки паперу, здатна складатися і згинатися певним чином. При складанні флексагона стають видні поверхні (площини), які раніше були приховані в конструкції флексагона, а ті, що були видимі, ховаються всередину.

Перший виготовлений флексагон був названий тригексафлексагоном, так як у нього були три поверхні.

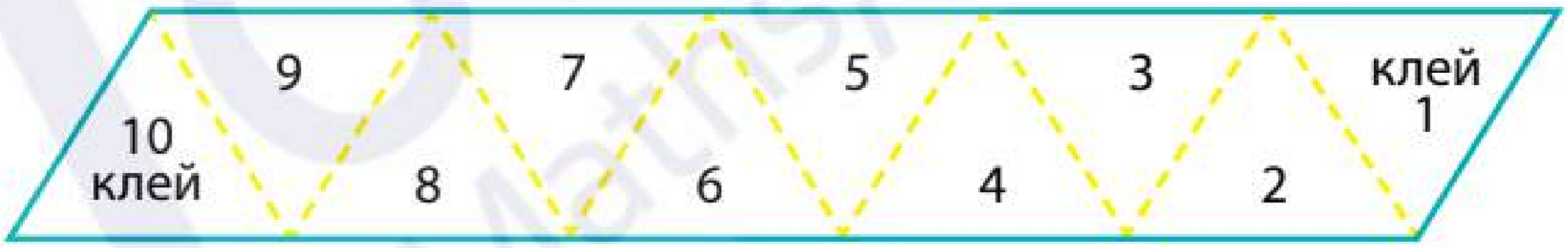
Необхідні матеріали: аркуш паперу, транспортир, ножиці, олівець або фломастер, клей.

Крок ① Від аркушу паперу з довшої сторони відріжте смужку паперу шириною 5 см.

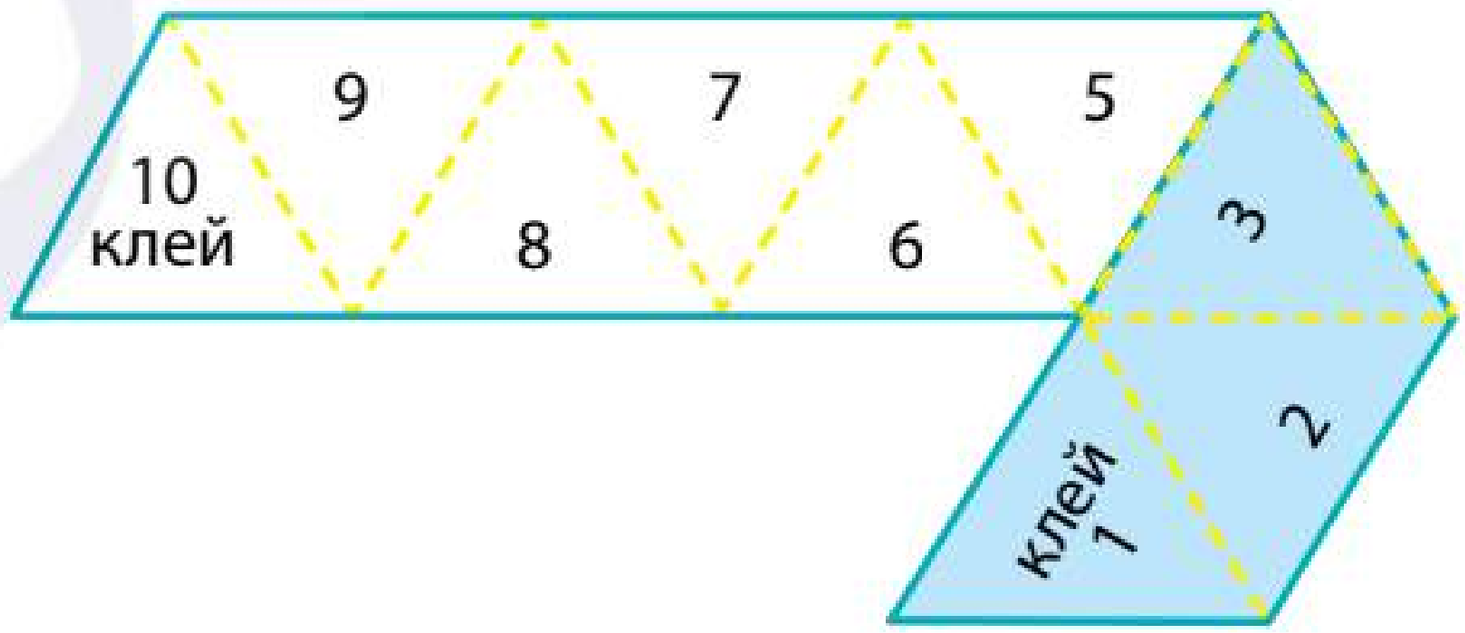
Крок ② За допомогою транспортира побудуйте на цій смужці 10 рівносторонніх трикутників, як показано на рисунку.



Крок ③ Для зручності складання пронумеруємо заготовку наступним чином:



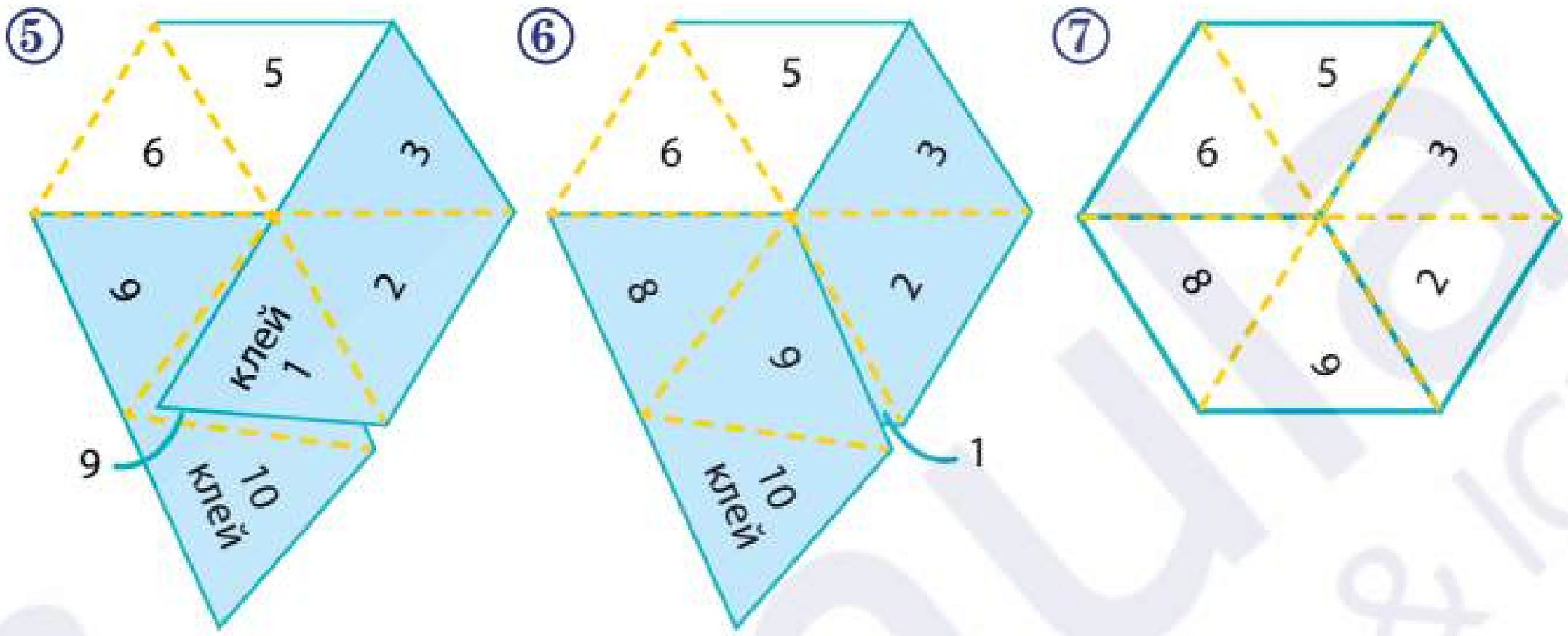
Крок ④ Зігніть заготовку по спільній стороні 3 та 4 трикутників, відігнувши ці трикутники вперед.



Крок ⑤ Зігніть заготовку по спільній стороні 6 та 7 трикутників, відігнувши ці чотири трикутники назад.

Крок ⑥ Підсуньте трикутник 1 вниз під 9, відігніть трикутник 10 вниз і склейте 10 з 1 лицьовими сторонами.

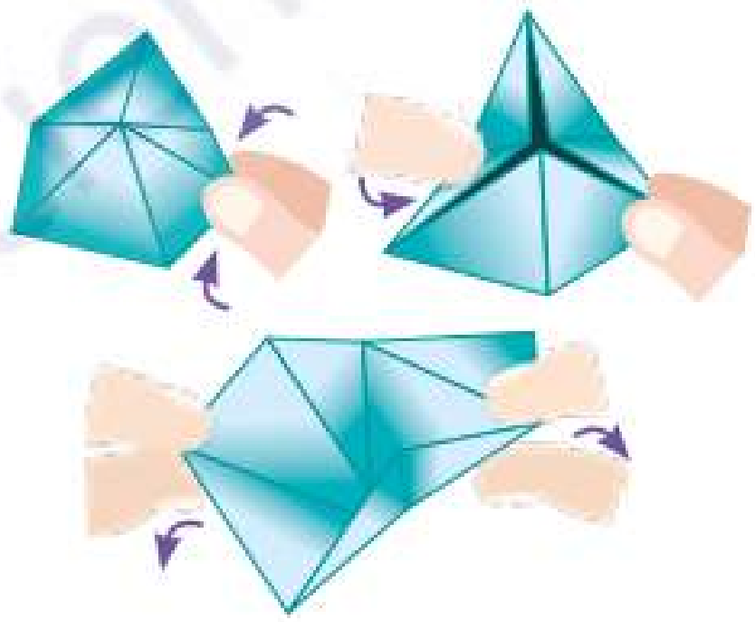
Крок ⑦ Утворилася геометрична іграшка флексагон.



Як грати ?

Підгинаючи один з кутів шестикутника до центру, можна швидко відкрити його, і побачити шестикутник, який до цього був схований.

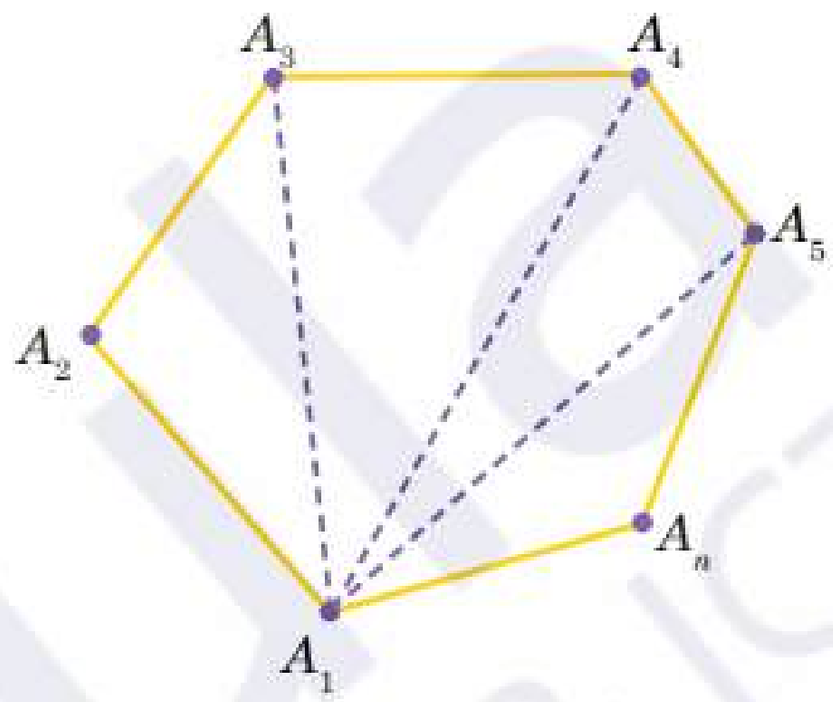
За бажанням кожен з трьох шестикутників можна розфабувати або щось намалювати.



Що вдалося? Що було складним? Над чим ще потрібно працювати?

Основні доведення в курсі Геометрії 8 класу

Сума кутів опуклого многокутника



Теорема (про суму кутів опуклого многокутника): Сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n - 2)$.

Доведення:

Для випадку $n = 3$ (для трикутника) теорема виконується:

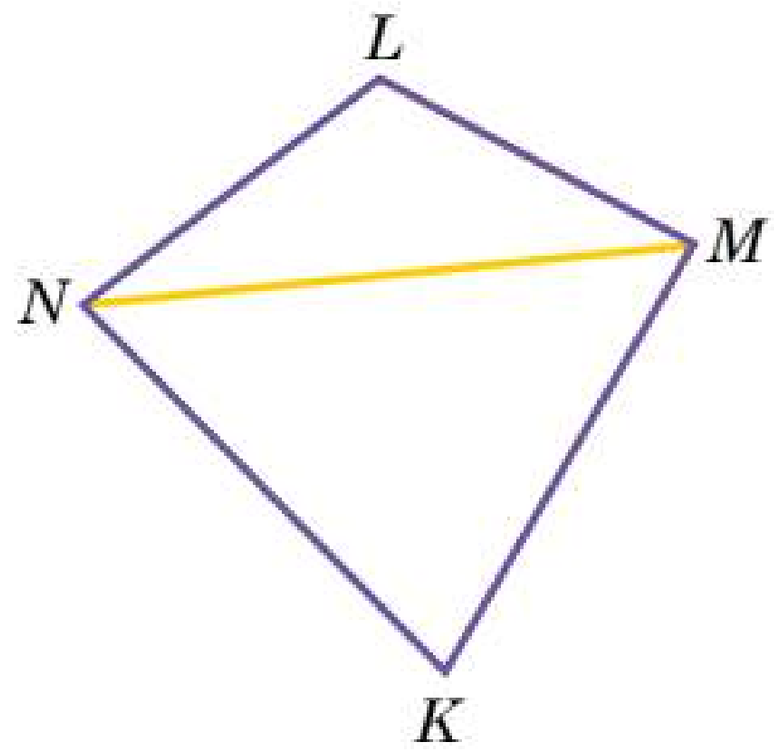
$180°(3 - 2) = 180° \cdot 1 = 180°$(як сума кутів трикутника)

Нехай $A_1A_2\ldots A_n$ — даний опуклий многокутник і $n > 3$. Проведемо $(n - 3)$ діагоналі: A_1A_3, A_1A_4, …, $A_1A_{(n-1)}$. Оскільки многокутник опуклий, то ці діагоналі розбивають його $(n - 2)$ трикутники: $\Delta A_1A_2A_3$, $\Delta A_1A_3A_4$, …, $\Delta A_1A_{(n-1)}A_n$. Сума кутів многокутника $A_1A_2\ldots A_n$ дорівнює сумі кутів усіх цих трикутників. Сума кутів кожного трикутника становить 180°, а кількість таких трикутників дорівнює $(n - 2)$.

Отже, сума кутів опуклого n-кутника дорівнює $180°(n - 2)$.

Доведено!

Сума кутів чотирикутника



Теорема (про суму кутів чотирикутника): Сума кутів чотирикутника дорівнює 360°.

Доведення:

Розглянемо $LMKN$ — довільний опуклий чотирикутник. Проведемо пряму NM — діагональ даного чотирикутника. Діагональ NM ділить чотирикутник на два довільних трикутники: ΔNLM та ΔNKM.

Сума кутів чотирикутника $LMKN$ дорівнює сумі всіх кутів обох трикутників:

$\angle LNM + \angle LMN + \angle NLM = 180°$ (за теоремою про суму кутів трикутника)

$\angle MNK + \angle NKM + \angle KMN = 180°$ (за теоремою про суму кутів трикутника)

$\angle LNK = \angle LNM + \angle MNK$ (за властивістю вимірювання кутів)

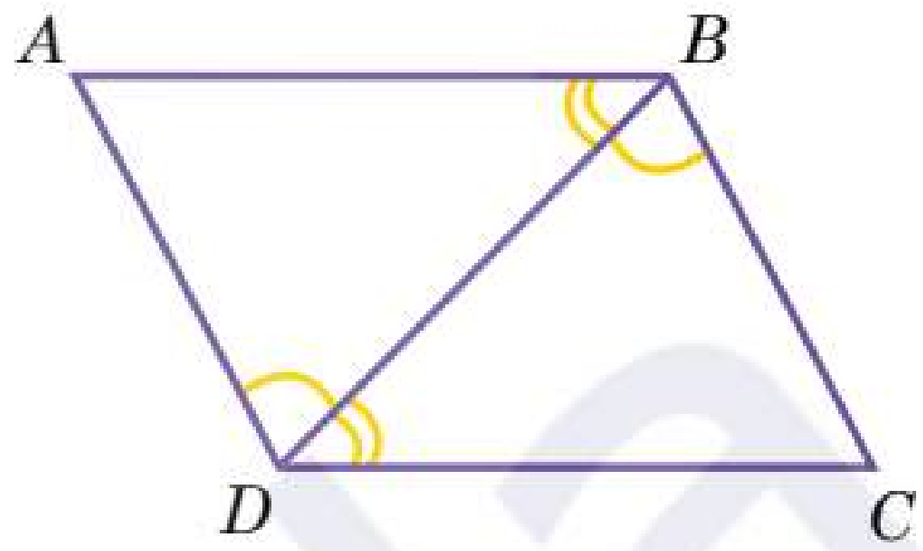
$\angle LMK = \angle LMN + \angle NMK$ (за властивістю вимірювання кутів)

Отже, $\angle KNL + \angle NLM + \angle LMK + \angle MKN = 360°$.

Доведено!

Властивості паралелограма

Теорема (властивість сторін паралелограма): Протилежні сторони паралелограма рівні.



Доведення:

Розглянемо чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

$AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$ (за означенням паралелограма).

BD — діагональ паралелограма.

Розглянемо ΔABD та ΔCDB:

BD — спільна сторона;

$\angle ABD = \angle CDB$ (як внутрішні різносторонні кути при двох паралельних прямих AB і CD та січній BD);

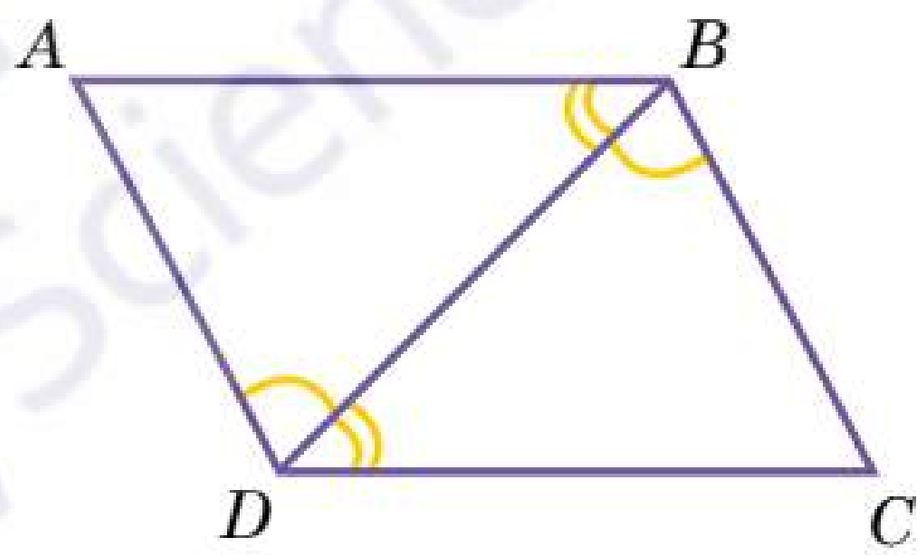
Аналогічно, $\angle ADB = \angle CBD$ (як внутрішні різносторонні кути).

Звідси, $\Delta ABD = \Delta CDB$ (за стороною та двома прилеглими кутами).

Отже, $AB = CD$; $AD = BC$ (як відповідні сторони рівних трикутників).

Доведено!

Теорема (властивість кутів паралелограма): Протилежні кути паралелограма рівні.



Доведення:

Розглянемо чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

$AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$ (за означенням паралелограма).

BD — діагональ паралелограма.

Розглянемо ΔABD та ΔCDB:

BD — спільна сторона;

$\angle ABD = \angle CDB$ (як внутрішні різносторонні кути при двох паралельних прямих AB і CD та січній BD);

Аналогічно, $\angle ADB = \angle CBD$ (як внутрішні різносторонні кути).

Звідси, $\Delta ABD = \Delta CDB$ (за стороною та двома прилеглими кутами).

Отже, $\angle BAD = \angle DCB$ (як відповідні кути рівних трикутників).

$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$ (за властивістю вимірювання кутів)

$\angle ADC = \angle CDB + \angle BDA$ (за властивістю вимірювання кутів)

$\angle ABD = \angle CDB$ (як внутрішні різносторонні кути)

$\angle ADB = \angle CBD$ (як внутрішні різносторонні кути)

Отже, $\angle ABC = \angle ADC$ (кожен з них є сумою пари рівних кутів).

Доведено!

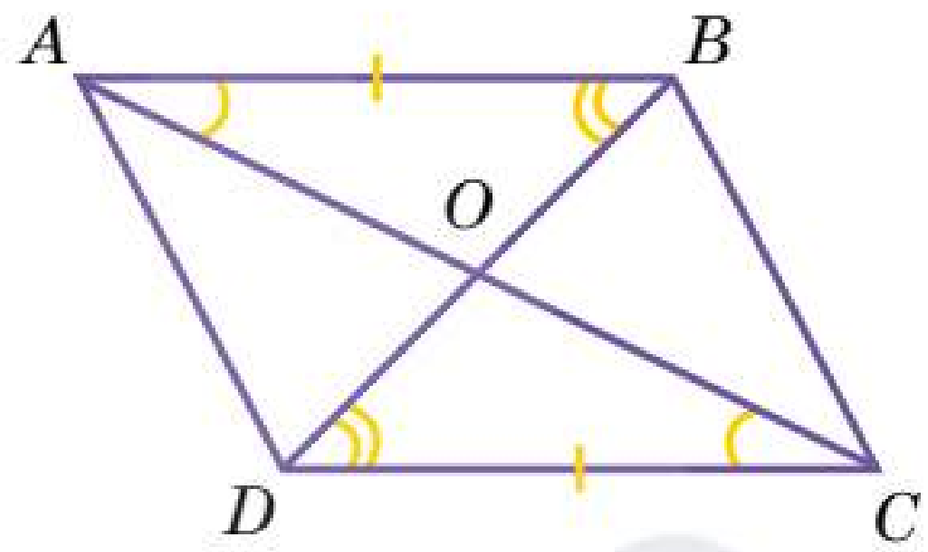
Теорема (властивість діагоналей паралелограма): Діагоналі паралелограма діляться точкою перетину навпіл.

Доведення:

Розглянемо $ABCD$ — паралелограм.

AC та BD — діагоналі паралелограма;

Точка O — точка перетину діагоналей AC та BD.



Доведемо, що $AO = OC$; $BO = OD$.

Розглянемо ΔAOB та ΔCOD:

$AB = DC$ (за властивістю протилежних сторін паралелограма)

$\angle ABD = \angle CDB$ (як внутрішні різносторонні кути)

$\angle BAC = \angle DCA$ (як внутрішні різносторонні кути)

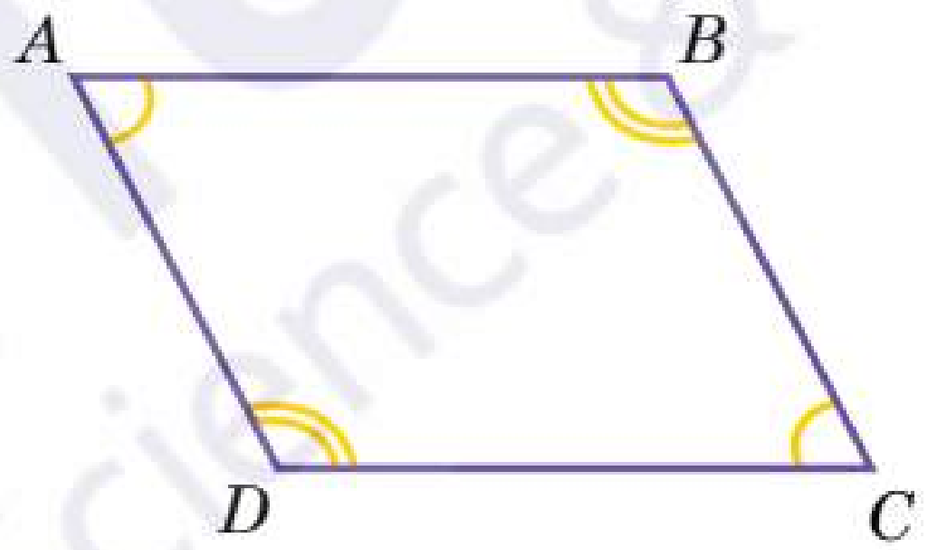
Звідси, $\Delta AOB = \Delta COD$ (за стороною та двома прилеглими кутами).

Отже, $AO = OC$; $BO = OD$ (як відповідні сторони рівних трикутників)

Доведено!

Теорема (властивість прилеглих до сторони кутів паралелограма): Сума кутів, прилеглих до однієї сторони паралелограма, дорівнює 180°.

Доведення:



Розглянемо чотирикутник $ABCD$ — паралелограм.

$AB \parallel CD$; $AD \parallel BC$ (за означенням паралелограма).

$\angle CDA + \angle DAB = 180°$ (за властивістю внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих AB і CD та січній AD);

$\angle DAB + \angle ABC = 180°$ (за властивістю внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих AD і BC та січній AB);

$\angle ABC + \angle BCD = 180°$ (за властивістю внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих AB і CD та січній BC);

$\angle BCD + \angle CDA = 180°$ (за властивістю внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих AD і BC та січній CD).

Доведено!

Властивості ромба

Оскільки ромб є паралелограмом, то він має всі властивості паралелограма, які були доведені в попередній темі.

Теорема (властивість діагоналей ромба): Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні.

Доведення:

Розглянемо $ABCD$ — ромб.

$AD = AB$ (за означенням ромба)

Звідси, ΔDAB — рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника)

Оскільки $ABCD$ — ромб, отже, $ABCD$ — паралелограм (за означенням ромба)

$DO = OB$ (за властивістю діагоналей паралелограма).

Звідси, AO — медіана ΔDAB.

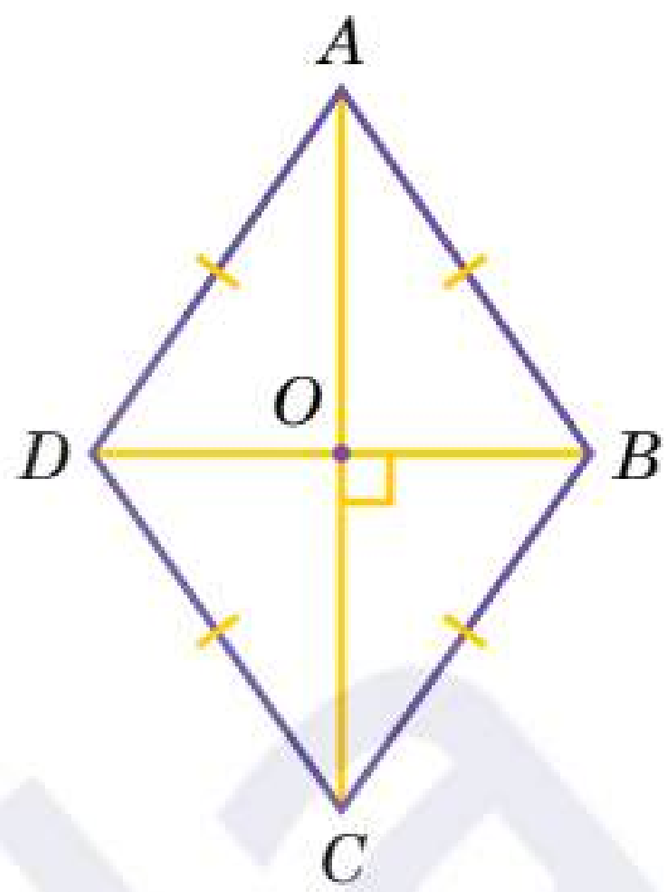
Отже, AO — висота ΔDAB (за властивістю рівнобедреного трикутника).

Звідси, $AO \perp DB$ (за властивістю висоти).

Отже, $AC \perp DB$

Аналогічно можна довести, що $BD \perp AC$.

Доведено!



Теорема (властивість ромба): Діагоналі ромба ділять його кути навпіл.

Доведення:

Розглянемо $ABCD$ — ромб.

$AD = AB$ (за означенням ромба)

Звідси, ΔDAB — рівнобедрений (за ознакою рівнобедреного трикутника)

Оскільки $ABCD$ — ромб, отже, $ABCD$ — паралелограм (за означенням ромба)

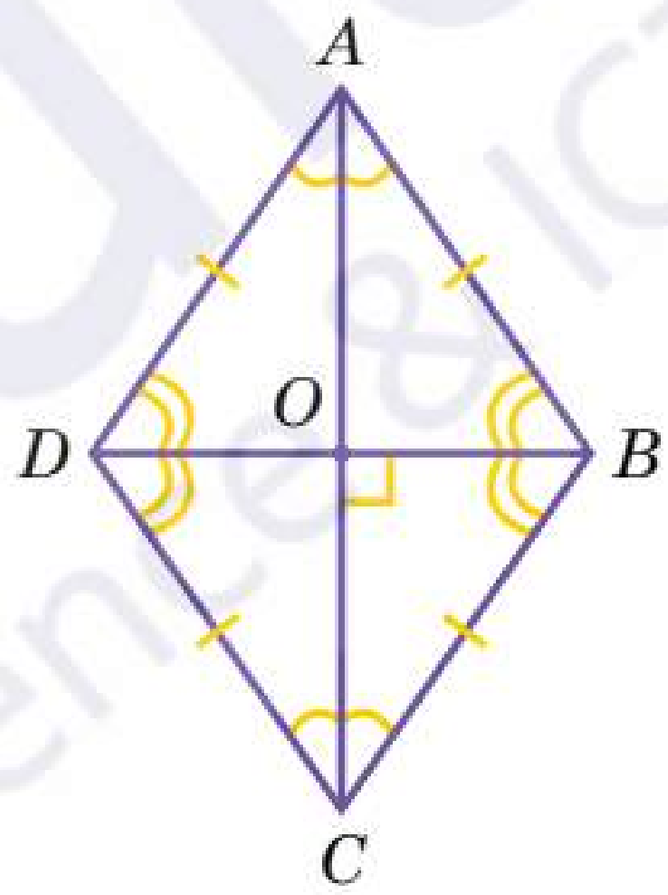
$DO = OB$ (за властивістю діагоналей паралелограма).

Звідси, AO — медіана ΔDAB.

Отже, AO — бісектриса $\angle DAB$ рівнобедреного ΔDAB (за властивістю рівнобедреного трикутника).

Звідси, $\angle DAO = \angle OAB$ (за властивістю бісектриси).

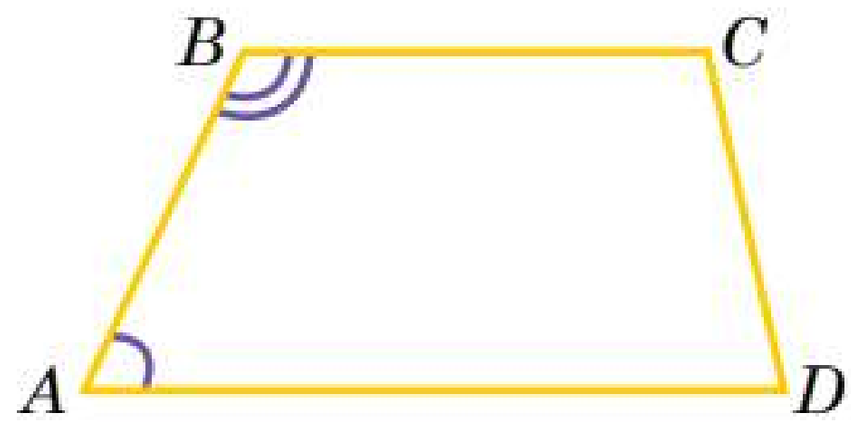
Аналогічно можна довести, що $\angle DCO = \angle OCB$; $\angle ADO = \angle ODC$; $\angle ABO = \angle OBC$.



Доведено!

Властивості трапеції

Теорема (властивість трапеції): Сума кутів, прилеглих до бічної сторони довільної трапеції, дорівнює 180°.



Доведення:

Нехай $ABCD$ — довільна трапеція.

AD та BC – основи трапеції $ABCD$.

$AD \parallel BC$ (за означенням трапеції)

AB — січна при двох паралельних прямих $AD \parallel BC$

Звідси, $\angle A$ та $\angle B$ — внутрішні односторонні кути.

$\angle A + \angle B = 180°$ (за властивістю внутрішніх односторонніх кутів)

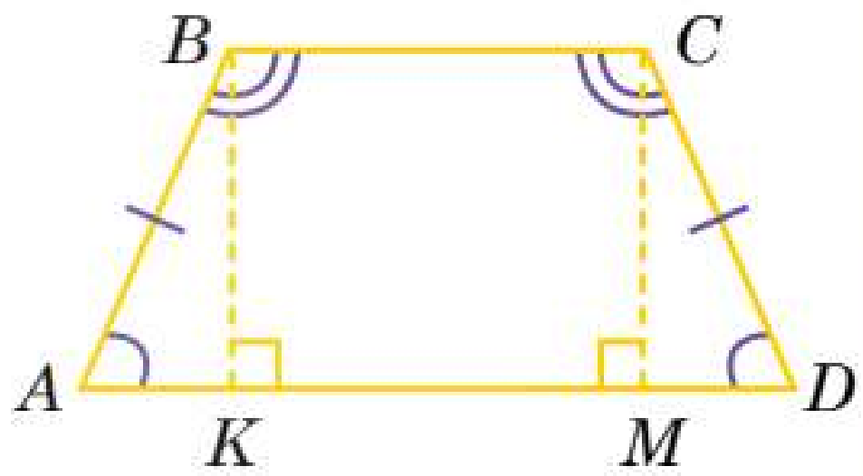
Аналогічно доведемо, що $\angle C + \angle D = 180°$.

Отже, сума кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції, дорівнює 180°.

Доведено!

Теорема (властивості рівнобічної трапеції):

1) Кути при основі рівнобічної трапеції рівні.
2) Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.



Доведення:

Нехай $ABCD$ — довільна трапеція.

AD та BC – основи трапеції $ABCD$.

$AD \parallel BC$ (за означенням трапеції)

Проведемо $BK \perp AD$, $CM \perp AD$.

Звідси, $BCMK$ — прямокутник (за ознакою прямокутника).

Розглянемо ΔAKB та ΔDMC — прямокутні:

$\angle K = \angle M = 90°$ (за властивістю перпендикуляра)

$BK = CM$ (за властивістю протилежних сторін прямокутника)

$AB = CD$ (за властивістю бічних сторін рівнобічної трапеції)

Звідси, $\Delta AKB = \Delta DMC$ (за катетом та гіпотенузою)

Отже, $\angle A = \angle D$ (як відповідні елементи рівних трикутників)

Розглянемо $ABCD$ — трапеція.

$\angle A + \angle B = 180°$ (за властивістю кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції)

$\angle C + \angle D = 180°$ (за властивістю кутів, прилеглих до бічної сторони трапеції)

$\angle B = 180° - \angle A$

$\angle C = 180° - \angle D$

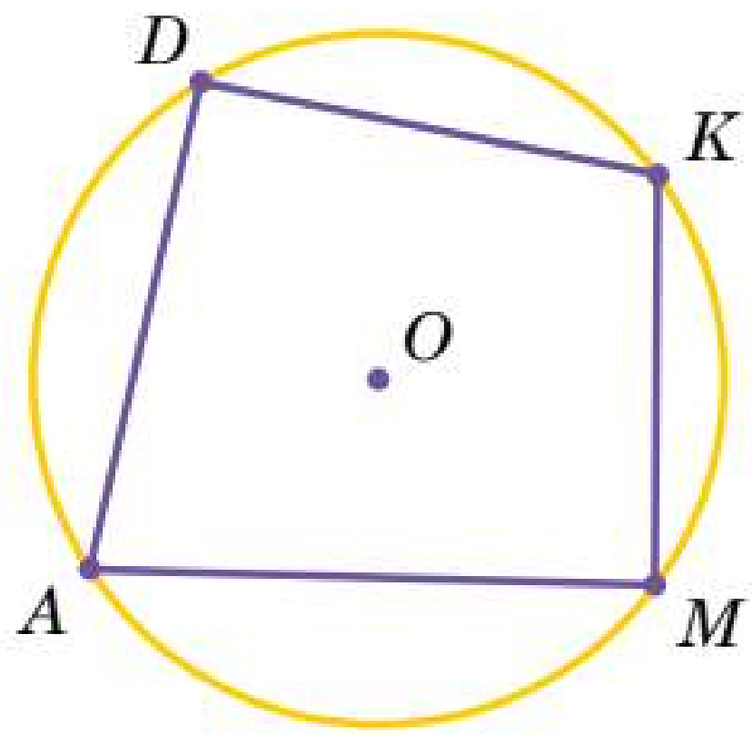
Звідси, $\angle B = \angle C$.

Отже, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$.

Доведено!

Властивість кутів вписаного чотирикутника

Теорема: Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180°.



Доведення:

Нехай у коло з центром O вписано довільний чотирикутник $ADKM$.

За теоремою про вписаний кут:

$\angle DAM = \frac{1}{2} \smile DKM$; $\angle DKM = \frac{1}{2} \smile DAM$.

Звідси, $\angle DAM + \angle DKM = \frac{1}{2} \smile DKM + \frac{1}{2} \smile DAM$.

$\angle DAM + \angle DKM = \frac{1}{2} (\smile DKM + \smile DAM) =$

$= \frac{1}{2} \cdot 360° = 180°$.

Аналогічно можна довести, що $\angle ADK + \angle AMK = 180°$.

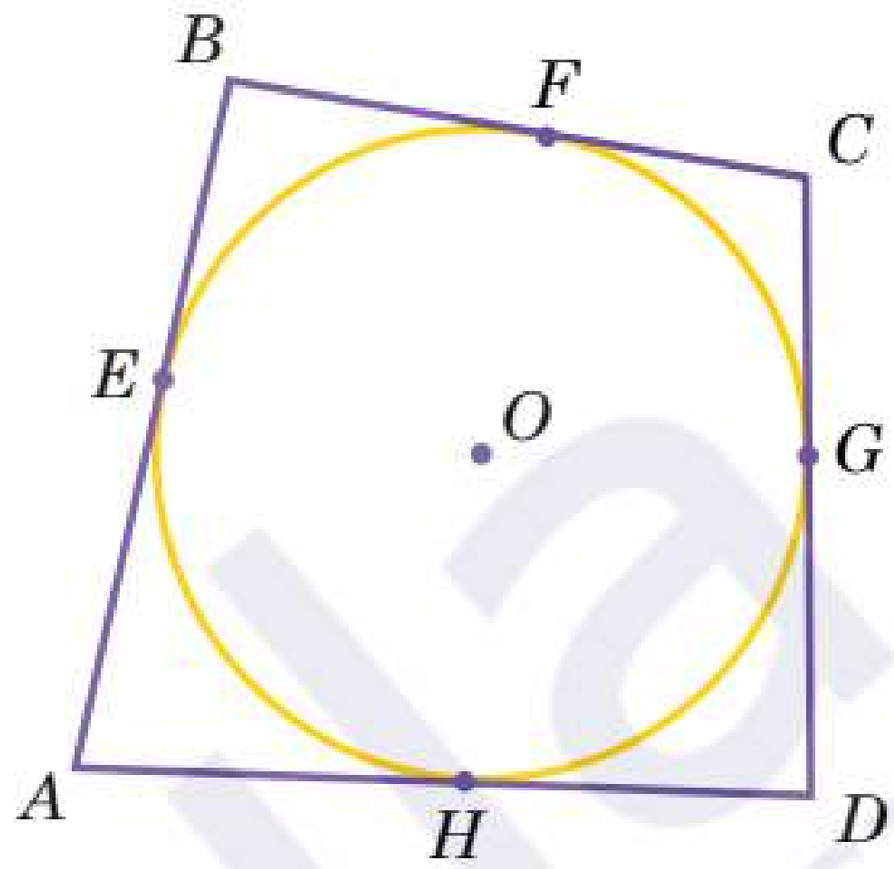
Отже, $\angle DAM + \angle DKM = 180°$; $\angle ADK + \angle AMK = 180°$.

Доведено!

Властивість сторін описаного чотирикутника

Теорема: В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін рівні між собою.

Доведення:



Нехай навколо кола з центром O описано довільний чотирикутник $ABCD$. Сторони AB, BC, CD та AD даного чотирикутника дотикаються до кола в точках E, F, G, H відповідно.

Доведемо, що $AB + CD = BC + AD$.

За основною властивістю вимірювання відрізків:

$AB = AE + EB$;
$BC = BF + FC$;
$CD = CG + GD$;
$AD = AH + HD$.

За властивістю дотичних, проведених з однієї точки:

$AE = AH$; $EB = BF$; $FC = CG$; $GD = HD$.

Звідси, $AB + CD = AE + EB + CG + GD$; $BC + AD = BF + FC + AH + HD$.

$AB + CD = AH + BF + CG + HD$;

$BC + AD = BF + CG + AH + HD$.

Оскільки, праві частини рівностей однакові, то рівними є й ліві частини рівностей.

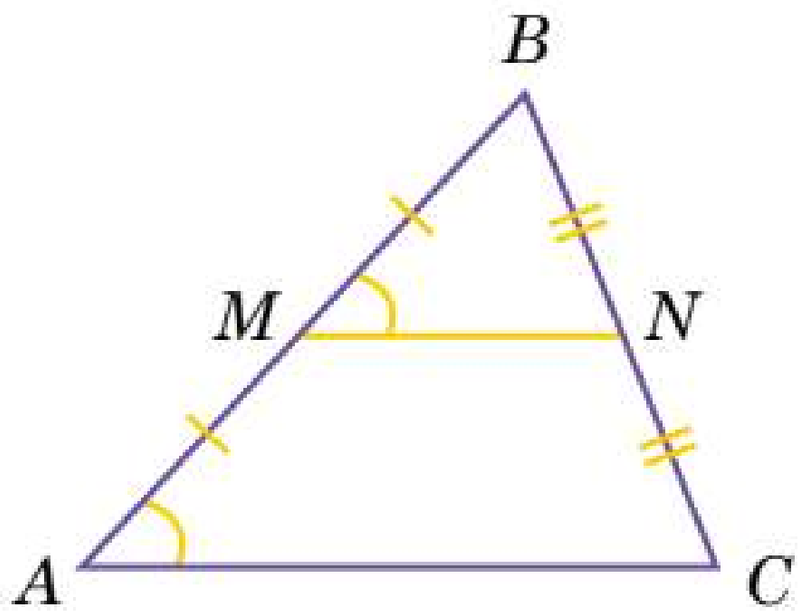
Отже, $AB + CD = BC + AD$.

Доведено!

Середня лінія трикутника

Теорема: Середня лінія трикутника паралельна одній з його сторін і дорівнює половині цієї сторони.

Доведення:



Нехай MN — середня лінія трикутника ABC.

Доведемо, що $MN \parallel AC$ та $MN = \frac{1}{2}AC$.

Розглянемо ΔMBN та ΔABC:

$\angle B$ — спільний кут для обох трикутників;

$\frac{MB}{AB} = \frac{NB}{CB} = \frac{1}{2}$.

Отже, $\Delta MBN \sim \Delta ABC$ (за другою ознакою подібності трикутників).

З подібності трикутників:

$\angle BMN = \angle BAC$ (як відповідні кути подібних трикутників);

$\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$ (відповідні сторони подібних трикутників мають однаковий коефіцієнт пропорційності).

З рівності кутів $\angle BMN = \angle BAC$ випливає, що $MN \parallel AC$ (якщо при перетині двох прямих MN та AC січною AB відповідні кути рівні, то прямі паралельні).

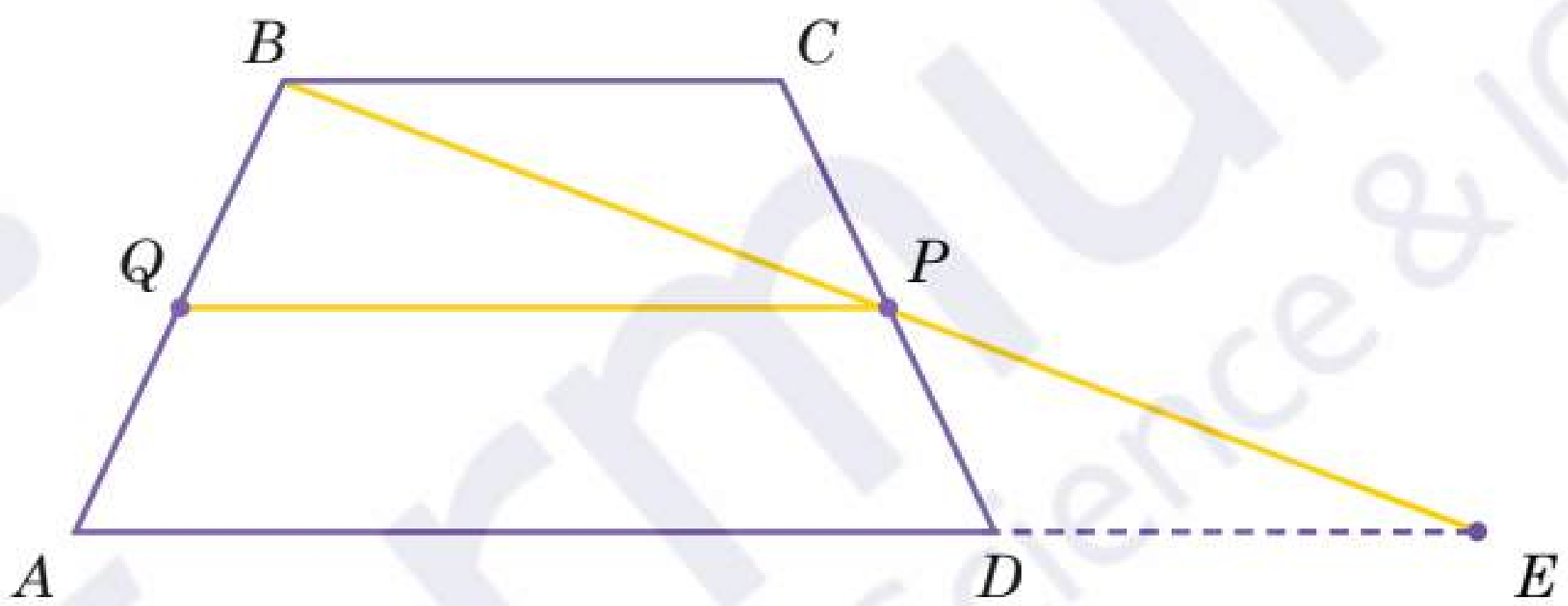
З рівності $\frac{MN}{AC} = \frac{1}{2}$ отримаємо, що $MN = \frac{1}{2}AC$.

Отже, $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$.

Доведено!

Середня лінія трапеції

Теорема: Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їх півсумі.



Доведення:

Нехай $ABCD$ — дана трапеція. Проведемо через вершину B і точку P — середину бічної сторони CD пряму. Вона перетинає пряму AD у деякій точці E.

Розглянемо ΔPBC та ΔPED, що утворилося внаслідок побудов.

$CP = PD$ (оскільки за побудовою точка P — середина CD);

$\angle BPC = \angle EPD$ (як вертикальні кути);

$\angle BPC = \angle EPD$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих AD та BC і січною CD)

Звідси, $\Delta PBC = \Delta PED$ (за другою ознокою рівності трикутників).

З рівності трикутників випливає рівність сторін: $PB = PE$; $BC = DE$.

Отже, середня лінія трапеції PQ є середньою лінією ΔABE (за означенням).

За властивістю середньої лінії трикутника $PQ \parallel AE$ і відрізок $PQ = \frac{1}{2}AE$.

$BC = DE$ (як відповідні сторони рівних трикутників);

$AE = AD + DE = AD + BC$.

Отже, $PQ = \frac{1}{2}AE = \frac{1}{2}(AD + BC) = \frac{AD + BC}{2}$.

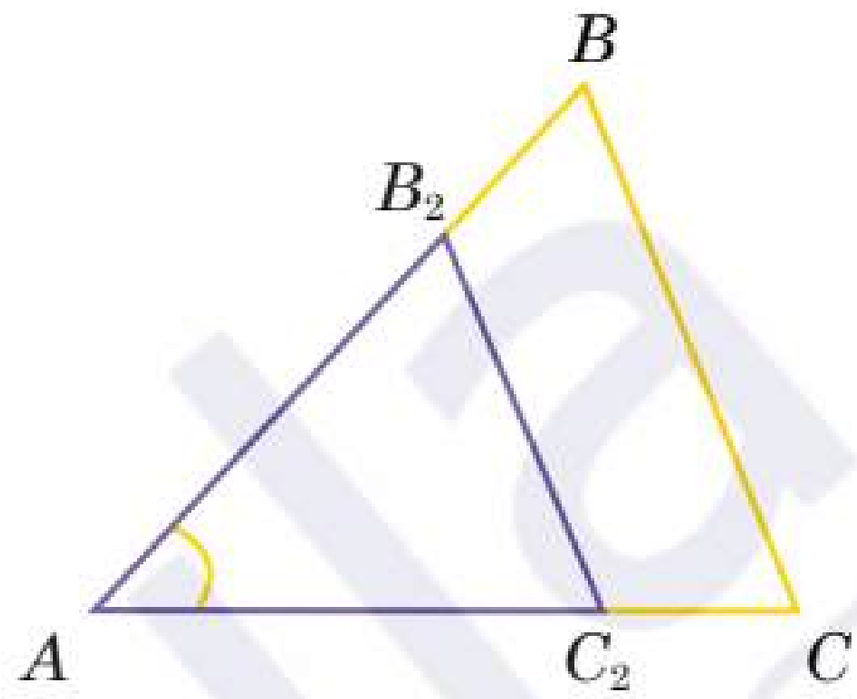
Доведено!

Ознаки подібності трикутників

Теорема (перша ознака подібності трикутника): Якщо дві сторони одного трикутника пропорційні двом сторонам іншого трикутника та кути, утворені цими сторонами, рівні, то такі трикутники подібні.

Доведення:

Нехай дано трикутники ABC та $A_1B_1C_1$, у яких $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Доведемо подібність даних трикутників. Для цього виконаємо додаткові побудови.

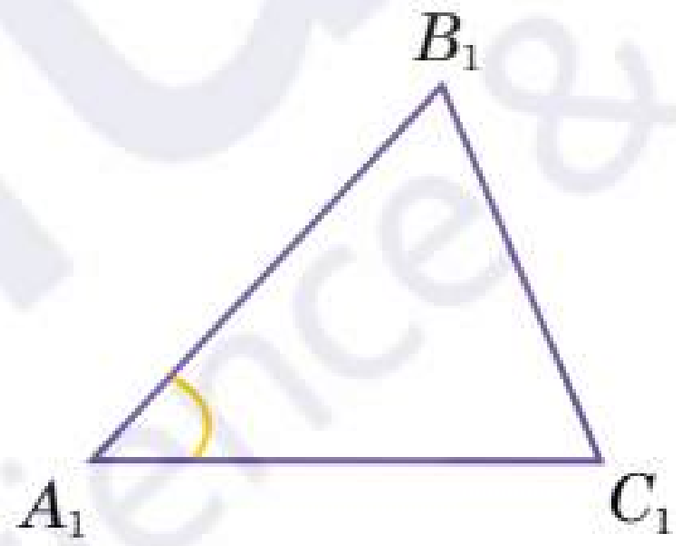


Відкладемо на стороні AB ΔABC відрізок AB_2, що дорівнює стороні A_1B_1 $\Delta A_1B_1C_1$.

Проведемо пряму B_2C_2, паралельну стороні BC ΔABC.

Звідси, $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ (як відповідні кути при двох паралельних прямих BC і B_2C_2, та січній AB).

Отже, $\Delta ABC \sim AB_2C_2$ (оскільки пряма, що паралельна стороні трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний даному).



За узагальненої теоремою Фалеса та з подібності трикутників: $\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$.

$AB_2 = A_1B_1$ (за побудовою)

$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$ (за умовою)

Звідси, $A_1C_1 = AC_2$.

Отже, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_2C_2$ (за першою ознакою рівності трикутників).

З доведеного, можемо зробити висновок, що $\angle ABC = \angle AB_2C_2 = \angle A_1B_1C_1$.

Отже, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

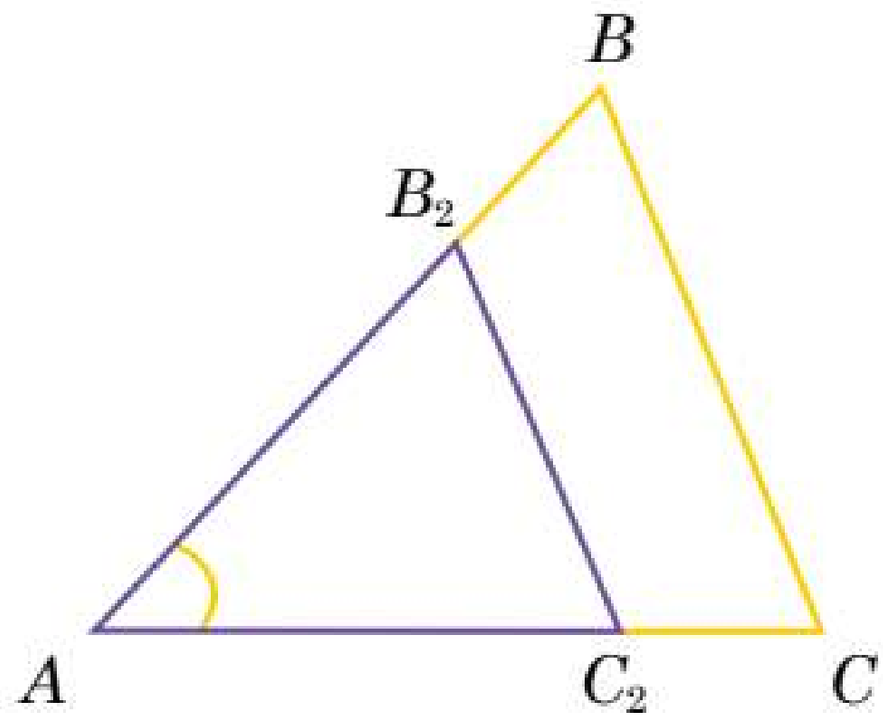
Доведено!

Теорема (друга ознака подібності трикутника): Якщо два кути одного трикутника рівні двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники є подібними.

Доведення:

Нехай дано ΔABC та $\Delta A_1B_1C_1$ — трикутники, в яких $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.



За теоремою про суму кутів будь-якого трикутника:

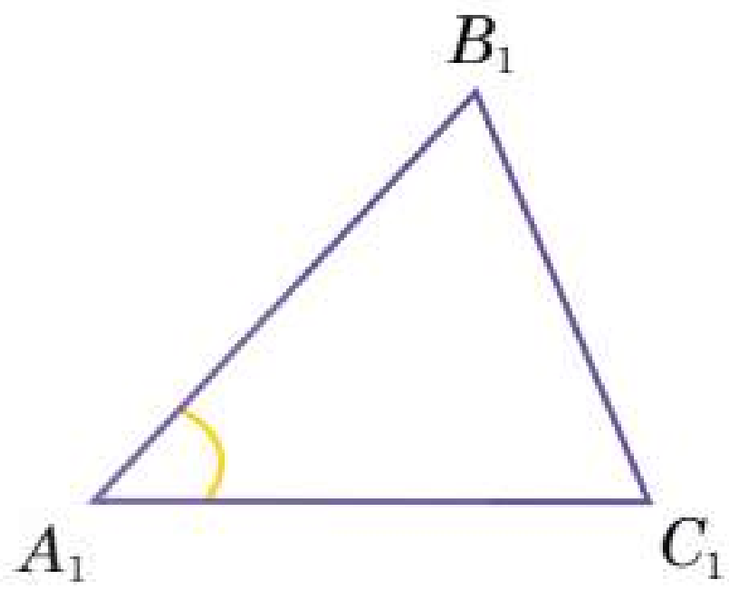
$\angle C = 180° - \angle A - \angle B$;

$\angle C_1 = 180° - \angle A_1 - \angle B_1$.

Звідси, $\angle C = \angle C_1$.

Відкладемо на промені AB відрізок AB_2,

що дорівнює стороні A_1B_1 і проведемо пряму B_2C_2, паралельну прямій BC.



Звідси, $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ (як відповідні кути при двох паралельних прямих BC і B_2C_2, та січній AB).

Отже, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta AB_2C_2$ (за другою ознакою рівності трикутників).

Звідси, $AC_2 = A_1C_1$(як відповідні сторони рівних трикутників).

За теоремою про проорційні відрізки

$\frac{AB}{AB_2} = \frac{AC}{AC_2}$, отже, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Аналогічно доводимо, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Отже, за означенням подібних трикутників, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

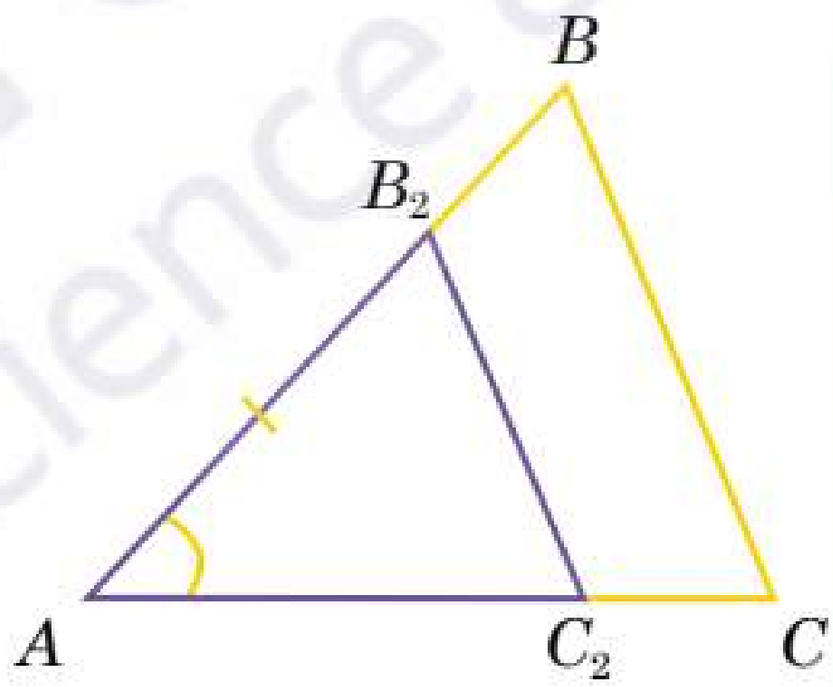
Доведено!

Теорема (третя ознака подібності трикутника): Якщо два кути одного трикутника рівні двом кутам іншого трикутника, то такі трикутники є подібними.

Доведення:

Нехай дано ΔABC та $\Delta A_1B_1C_1$ — трикутники,

в яких $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$



Доведемо, що $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

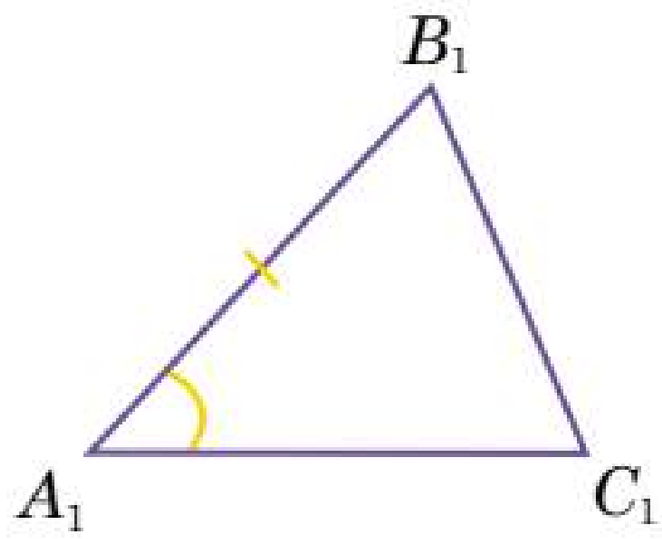
Як і в попередніх теоемах, відкладемо на промені AB відрізок AB_2, що дорівнює стороні A_1B_1 і проведемо пряму B_2C_2, паралельну прямій BC.

Звідси, $\angle ABC = \angle AB_2C_2$ (як відповідні кути при двох паралельних прямих BC і B_2C_2, та січній AB).

Отже, $\Delta ABC \sim \Delta AB_2C_2$ (за двома кутами).

Звідси, $\frac{AB}{AB_2} = \frac{BC}{BC_2} = \frac{AC}{AC_2}$. А оскільки

$AB_2 = A_1B_1$ (за побудовою), то $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_2C_2}$.



Враховуюси, що $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$, маємо $B_2C_2 =$
$= B_1C_1$.

Аналогічно доводимо, що $AC_2 = A_1C_1$.

Отже, $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_2C_2$ (за третьою ознакою рівності трикутників).

Звідси, $\angle A = \angle A_1$, $\angle A_1B_1C_1 = \angle ABC = AB_2C_2$.

Отже, $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (за двома кутами)

Доведено!

Отже, для доведення всіх трьох ознак подібності трикутників використано однаковий спосіб, а доведення кожної з ознак подібності трикутників реалізується через певну відповідну їй ознаку рівності трикутників.

Теорема Фалеса

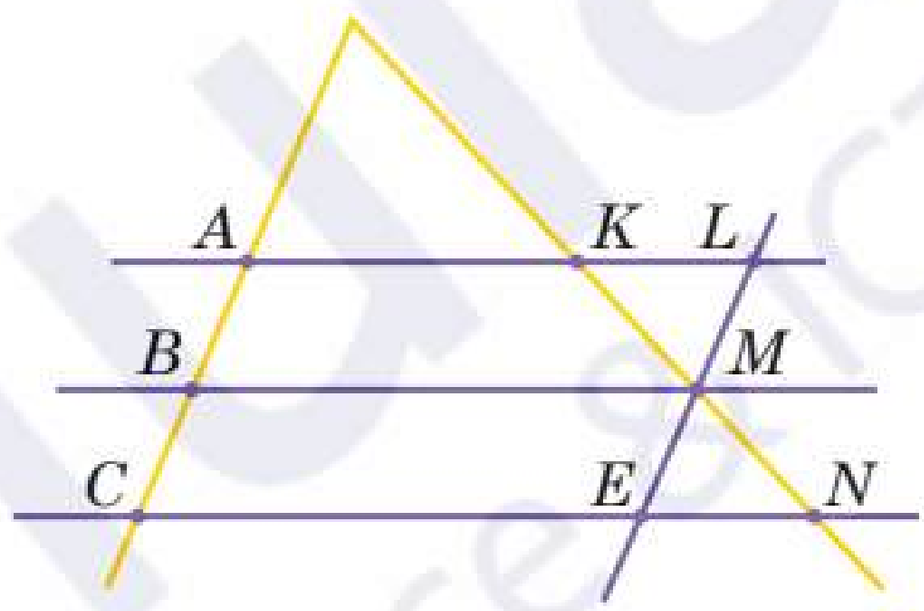
Теорема Фалеса: Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки і на іншій стороні кута.

Доведення:

Нехай A, B, C — точки перетину паралельних прямих з однією із сторін кута, а точка B лежить між точками A та C.

Нехай K, M, N — точки перетину цих паралельних прямих з другою стороною кута, а точка M лежить між точками K та N.

Доведемо, що коли $AB = BC$, то $KM = MN$.



Проведемо через точку M пряму LE, паралельну прямій AC. За властивістю паралелограма $AB = LM$, $BC = ME$. Оскільки, $AB = BC$ (за умовою), то звідси $LM = ME$.

Розглянемо ΔMKL та ΔMNE:

$LM = ME$ (за доведеним)

$\angle KML = \angle NME$ (як вертикальні)

$\angle KLM = \angle MEN$ (як внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих CN та AL і січній LE)

Звідси, $\Delta MKL = \Delta MNE$ (за стороною та двома прилеглими кутами).

З рівності трикутників випливає рівність сторін:

$KM = MN$ (як відповідні елементи рівних трикутників).

Доведено!

Примітка: В умові теореми Фалеса замість сторін кута можна взяти дві довільні прямі, при цьому висновок теореми буде таким самим: ***паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі і відтинають на одній прямій рівні відрізки, відтинають рівні відрізки і на другій прямій.***

Теорема Піфагора

Теорема: У будь-якому прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів його катетів.

Доведення:

Нехай ABC — прямокутний трикутник з прямим кутом B ($\angle B = 90°$).

Проведемо висоту BH з вершини прямого кута B.

Утворилося два прямокутних трикутники — ΔAHB та ΔCHB.

Доведемо, що $AC^2 = AB^2 + BC^2$.

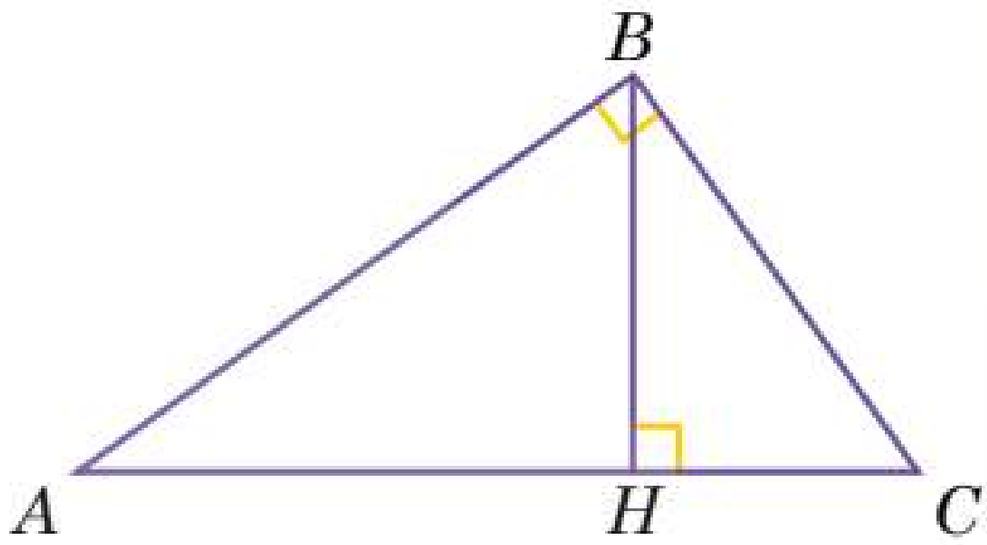
Розглянемо ΔCHB та ΔABC:

ΔABC — прямокутний за умовою;

ΔCHB — прямокутний ($\angle BHC = 90°$ за властивістю висоти);

$\angle C$ — спільний гострий кут для двох трикутників;

Звідси, $\Delta CHB \sim \Delta ABC$ (за ознакою подібності прямокутних трикутників за гострим кутом).



Аналогічно можна довести, що $\Delta AHB \sim \Delta ABC$.

З подібності трикутників отримаємо відношення: $\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$; $\frac{BC}{AC} = \frac{HC}{BC}$.

Звідси, $AB^2 = AC \cdot AH$; $BC^2 = AC \cdot HC$.

Додамо ці дві рівності, врахувавши, що за основною властивістю вимірювання відрізків $AH + HC = AC$:

$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AH + AC \cdot HC$;

$AB^2 + BC^2 = AC \cdot (AH + HC)$;

$AB^2 + BC^2 = AC \cdot AC$;

$AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Доведено!

Алфавітний покажчик

Відповіді

1 Перевірте свої досягнення

1 г) **2** а) **3** в) **4** а) **5** а) **6** а) **7** 1-Г, 2-Д, 3-А, 4-Б.

8 1-В, 2-А, 3-Г, 4-Б **9** 15 см. **10** 20 см і 12 см.

2 Перевірте свої досягнення

1 б) **2** в) **3** а) **4** в) **5** б) **6** б) **7** 1-В, 2-Г,3-Б, 4-А

8 $18\sqrt{3}$ см^2 **9** 180 см^2 **10** 1200

3 Перевірте свої досягнення

1 а) **2** б) **3** а) **4** г) **5** а) **6** 1-В, 2-Б,3-Г, 4-А **7** 59 см

8 Так **9** 48 см **10** $10\sqrt{3}$ см

4 Перевірте свої досягнення

1 а), г) **2** в) **3** а) **4** г) **5** а), в) **6** в) **7** б)

8 1-Г, 2-Б, 3-А **9** 12 см **10** 12 см

5 Перевірте свої досягнення

1 б) **2** б) **3** б) **4** в) **5** а) **6** в) **7** 1-в, 2-а, 3-г, 4-б

8 в) **9** 14 см

6 Перевірте свої досягнення

1 в) **2** а) **3** б) **4** в) **5** г) **6** а) **7** 1-б, 2-г, 3-а, 4-в

8 1-б,2-а, 3-г, 4-д **9** 12 см **10** 45,6 см

Навчальне видання

Джон Ендрю Біос

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти

Головна редакторка ***Діана Головань***

Редакторка ***Катерина Мищенко***

Дизайнерка ***Анастасія Дяченко***

Коректорка ***Ольга Пластун***

Перекладач ***Віталій Байда***

Ілюстратори: ***Анастасія Дяченко, Владислав Сергєєв***

Рецензенти/тки:

Святослав Рябий, *вчитель математики ОЗ «Шебутинецький ліцей Сокирянської міської ради»*

Ольга Смолій, *вчителька математики Ірпінського ліцею №2 Ірпінської міської*

Список використаних джерел та ілюстрацій

Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. 18,15. Обл.-вид. арк. 16,335.
Наклад 0000 прим. Зам. 00000.

ТОВ «Видавництво «Лінгвіст»
04208, м. Київ, просп. Василя Порика, 9-Г, к. 58.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції серія ДК № 6168 від 03.05.2018 р.
Адреса редакції: 04071, м. Київ, вул. Нижній Вал, 17/8.
Email: publishing@linguist.ua
Тел. (044) 599-32-28

Віддруковано у ТОВ «КОНВІ ПРІНТ».
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції серія ДК № 6115 від 29.03.2018 р.
03680, м. Київ, вул. Антона Цедіка, 12.
Тел. (044) 332-84-73