vector maths & science

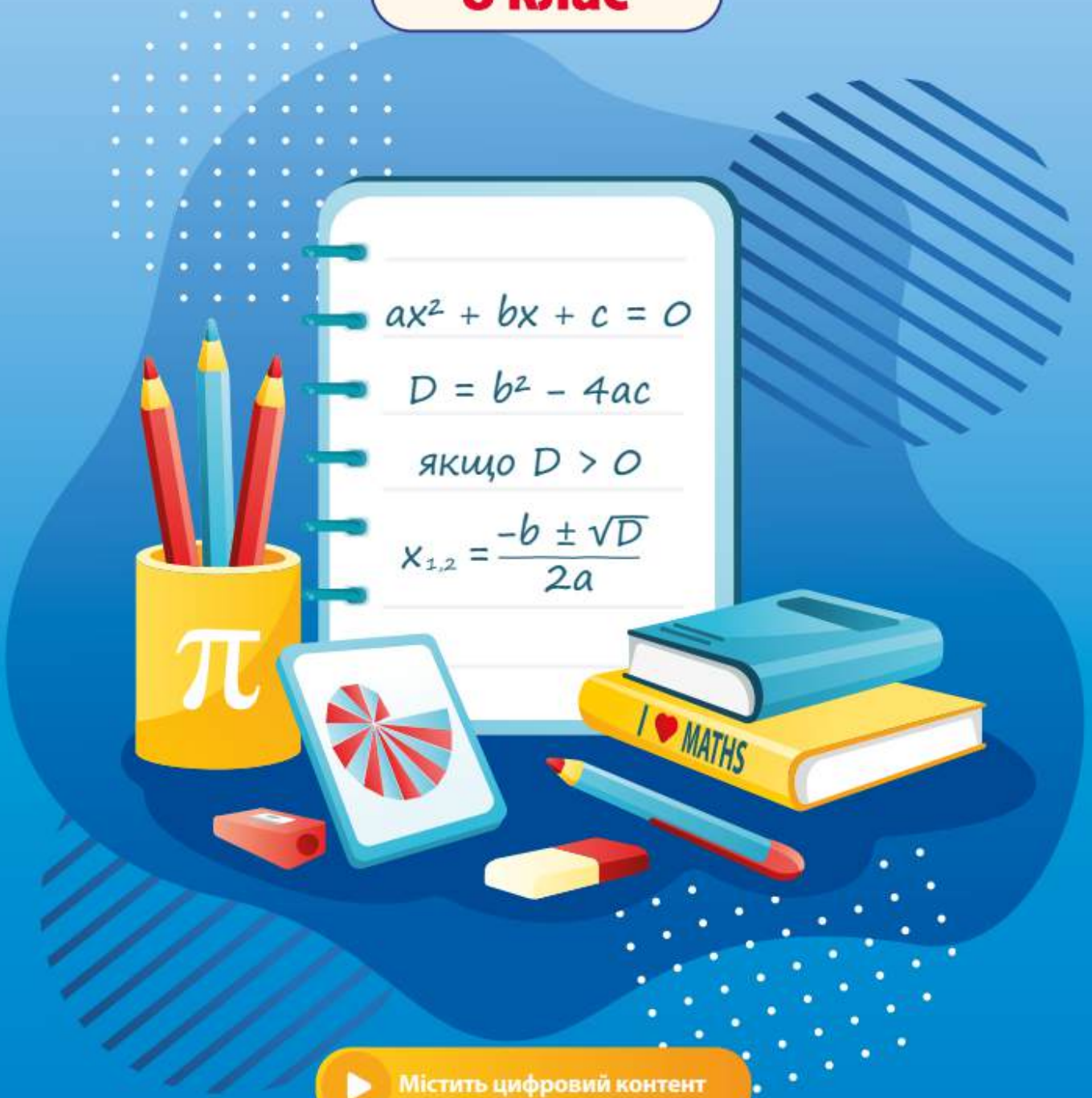
НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

formula Maths, Science & ICT

Джон Ендрю Біос

Алгебра

8 клас



Містить цифровий контент

НОВА УКРАЇНСЬКА ШКОЛА

Джон Ендрю Біос

Алгебра

Підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

8 клас

Київ
Видавництво «Лінгвіст»
2025

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

УДК 512*кл8(075.3)
Б 65

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 21.02.2025 № 347)

Підручник створено відповідно до модельної навчальної програми «Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти (автора Істера О. С.)

Джон Ендрю Біос

Б 65 Алгебра : підруч. для 8 кл. закл. заг. сер. освіти / Джон Ендрю Біос. – К. : Видавництво «Лінгвіст», 2025. – 240 с.: іл.
ISBN 978-617-8290-36-8

Підручник розроблено згідно з Державним стандартом базової середньої освіти. Навчальний матеріал подано в доступній, чіткій та ілюстративній формі з урахуванням вікових особливостей здобувачів і здобувачок освіти. Видання містить цифровий контент, проєктну діяльність. Призначено для учнів та учениць 8 класу.

УДК 512*кл8(075.3)

Електронний додаток до підручника можна знайти за посиланням:
https://lms.e-school.net.ua/courses/join/4fdd56bf/

ISBN 978-617-8290-36-8

Усі права застережено. All rights reserved

Copyright © 2025 by Vector M & S Publishing Ltd.
Published by LLC «Publishing House «Linguist»
and exclusively distrubuted in Ukraine under agreement
with Vector Math & Science.

Підручник охороняється авторським правом.
Виключне майнове право на використання твору
в Україні належить ТОВ «Видавництво Лінгвіст».
Використання твору, а також його фрагментів,
без дозволу правовласника та видавця
заборонено.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Вітаємо, друзі та подруги!

Ми продовжуємо разом з вами пізнавати основи досить точної науки — алгебри, що є фундаментом для багатьох галузей математики та інших наук.

Вивчаючи алгебру, ми розвиватимемо мислення, тренуватимемо пам'ять та загартовуватимемо характер, а ще дізнаватимемося про її практичне застосування в різних сферах — від економіки та інженерії до комп'ютерних наук та статистики.

Для того, щоб краще й ефективніше сприймати інформацію, матеріал у підручнику подано в чіткій та ілюстративній формі. **Виноски на полях** біля теоретичного матеріалу слугують додатковими підказками та нагадуваннями.



Для швидкого орієнтування в підручнику використано такі **умовні позначки:**

1 — завдання для фронтальної та індивідуальної роботи;

2 — пізнавальні та прикладні завдання;

3 — завдання підвищеної складності;

4 — завдання з використанням ПЗ GeoGebra;

5 — математика англійською.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Як користуватися підручником

На початку кожного розділу підручника подано опис того, що вивчатиметься в ньому, а також наведено приклади практичного застосування теми. Це допоможе вам зрозуміти, як нові знання можна використати в реальному житті та чому вони важливі для вашого подальшого навчання і розвитку. Тут міститься і словник математичних термінів українською та англійською мовами.

Повторити вивчений матеріал вам допоможе рубрика **Короткий огляд розділу**,

а перевірити свої знання — **Перевірте свої досягнення**,

які розміщено наприкінці кожного розділу.

За допомогою проєктних робіт ви можете спробувати застосувати набуті знання на практиці.

У рубриці **Додаткові завдання до розділу** ви знайдете цікаві, нестандартні завдання, а також завдання англійською мовою.

Зміст підручника доповнено інтерактивними вправами та робочими аркушами, які доступні в **електронному додатку** (посилання розміщено на с. 2). Так ви матимете змогу краще зрозуміти та закріпити вивчений матеріал у зручний час та в обраному для вас темпі.

Скористайтеся вміщеними в підручнику **QR-кодами**, щоб ознайомитися з доведенням властивостей, ознак і теорем.

Доведення властивостей, ознак і теорем

https://formula.education/dovedennya-teorem-oznak-ta-vlastyvostej-geometriya-8-klas/

Бажаємо успіхів!

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Зміст

1 Повторення. Вирази зі степенями 7

1.1. Лінійні рівняння з однією та двома змінними 8
1.2. Лінійні рівняння як моделі математичних задач 12
1.3. Системи лінійних рівнянь 14
1.4. Степінь із цілим показником 18
1.5. Властивості степеня із цілим показником 21
1.6. Стандартний вигляд числа 26
1.7. Виконуємо дії з числами у стандартному вигляді 28
Проєктна робота 34

2 Раціональні вирази 37

2.1. Раціональні вирази. Одночлени і многочлени 38
2.2. Розкладання многочленів на множники 42
2.3. Раціональні дроби 46
2.4. Основна властивість раціонального дробу 49
2.5. Множення дробів. Піднесення до степеня 52
2.6. Ділення дробів 56
2.7. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками 61
2.8. Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками 65
2.9. Тотожні перетворення раціональних виразів 70
2.10. Раціональні рівняння 74
2.11. Розв'язування задач за допомогою раціональних рівнянь 78
Проєктна робота 85

3 Множини 87

3.1. Множина та її елементи 88
3.2. Рівність множин. Підмножина 92
3.3. Різновиди множин 96
3.4. Діаграма Венна 99
3.5. Перетин та об'єднання множин 102
Проєктна робота 108

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

4 Дійсні числа. Квадратні корені 111

4.1. Раціональні числа ... 112
4.2. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь ... 115
4.3. Ірраціональні числа. Дійсні числа ... 119
4.4. Розв'язування рівнянь ... 122
4.5. Властивості арифметичного квадратного кореня ... 125
4.6. Тотожні перетворення виразів, що містять корені ... 132
4.7. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу 138
Проєктна робота ... 144

5 Квадратні рівняння 147

5.1. Лінійні та квадратні рівняння ... 148
5.2. Формула коренів квадратного рівняння ... 152
5.3. Теорема Вієта ... 157
5.4. Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники ... 162
5.5. Розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних 166
5.6. Формули. Вираження однієї змінної через іншу ... 170
5.7. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь 172
Проєктна робота ... 178

6 Функції 181

6.1. Повторення функцій ... 182
6.2. Лінійна функція ... 187
6.3. Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік та властивості ... 191
6.4. Функція $y = x^2$, її графік та властивості ... 196
6.5. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік та властивості ... 200
Проєктна робота ... 206

7 Елементи статистики та аналіз даних 209

7.1. Способи представлення даних ... 210
7.2. Аналіз даних ... 220
Проєктна робота ... 227

8 Узагальнення і систематизація вивченого матеріалу 229

Проєктна робота ... 237

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

1

Повторення. Вирази зі степенями

Ученим часто доводиться працювати з надзвичайно великими або малими відстанями, швидкостями, масами тощо. Наприклад, відстань від Землі до Місяця становить 240 000 миль або 240 000 · 1609,344 метрів, швидкість світла — 1 080 000 000 км/год, маса електрона приблизно дорівнює 0,000000000000000000000000000009 кг, а маса пилинки — близько 0,000000000753 кг.

Ці числа важко використовувати в розрахунках і навіть записувати. Тому для позначення великих чи малих чисел учені застосовують степені. Наприклад, відстань від Землі до Місяця записують як $2{,}4 \cdot 10^5$ миль, швидкість світла — $1{,}08 \cdot 10^9$ км/год, масу електрона — $9 \cdot 10^{-31}$ кг, а масу пилинки — $7{,}53 \cdot 10^{-10}$ кг.

У цьому розділі ми:

- пригадаємо лінійні рівняння та їх системи;
- розв'язуватимемо задачі за допомогою лінійних рівнянь;
- ознайомимося зі степенем із цілим від'ємним показником;
- дізнаємося властивості степеня із цілим показником;
- дізнаємося простий спосіб запису дуже великих і дуже малих чисел;
- виконуватимемо дії з числами, поданими у стандартному вигляді числа.

Ключові слова

- Лінійне рівняння (*linear equation*)
- Графік (*graph*)
- Система рівнянь (*simultaneous equations*)
- Розв'язувати прикладні задачі (*to solve word problems*)
- Степінь (*power*)
- Показник степеня (*exponent*)
- Основа степеня (*base*)
- Стандартний вигляд числа (*exponential notation*)

© Vector Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

1 Повторення. Вирази зі степенями

1.1. Лінійні рівняння з однією та двома змінними

Рівняння — це рівність, що містить невідому змінну (x, y, z...). Невідома змінна в лінійному рівнянні має бути піднесена до першого степеня ($x^1 = x$). Тому рівняння першого степеня є лінійними рівняннями.

$2x = 10$, $-0{,}4x = 5$ — лінійні рівняння.

$3x - 2 = 11$, $7(x + 2) = 3$, $|x| = 2$ — рівняння, що зводяться до лінійних.

Рівносильні рівняння — це рівняння, які мають однакові розв'язки. Рівняння, які не мають коренів також є рівносильними.

Чи є рівняння $2x + 3 = 11$ і $3x = 12$ рівносильними?

$2x + 3 = 11$ і $3x = 12$

$2x = 8$ $\quad$ $x = 4$

$x = 4$

Отже, $2x + 3 = 11$ і $3x = 12$ є рівносильними рівняннями.

Розв'язком рівняння є **корінь** рівняння.

Корінь рівняння — це значення невідомої змінної, у разі підстановки якої рівняння перетворюється на правильну рівність. Тобто коли задаємо $x = 4$, то правильно, що $2 \cdot 4 + 3 = 11$.

Щоб ***розв'язати рівняння***, потрібно знайти значення невідомої змінної. Лінійне рівняння може не мати коренів, може мати один або безліч коренів.

$x + 4 = 9$

дорівнює

ліва частина — права частина

$ax = b$ — загальний вигляд лінійного рівняння з однією змінною, де a і b — деякі числа, x — змінна.

Модуль будь-якого числа завжди додатне число.

$|9| = 9$

$|-9| = 9$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Приклад 1

Розв'яжіть рівняння.

а) $8(x + 2) = 3(2x + 7)$ $\quad$ б) $|x| + 7 = 3$

в) $\dfrac{x - 1}{2} - \dfrac{3x - 18}{6} = \dfrac{15}{6}$

Розв'язання

а) $8(x + 2) = 3(2x + 7)$

$8x + 16 = 6x + 21$

$8x + 16 - 6x = 6x + 21 - 6x$

$2x + 16 = 21$

$2x + 16 - 16 = 21 - 16$

$2x = 5$

$\dfrac{2x}{2} = \dfrac{5}{2}$; $\quad x = \dfrac{5}{2}$; $\quad x = 2\dfrac{1}{2}$.

б) $|x| + 7 = 3$

$|x| = 3 - 7$

$|x| = -4$

Відповідь. Рівняння не має коренів.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Відповідь. $x = 2\frac{1}{2}$.

в) $\frac{x-1}{2} - \frac{3x-18}{6} = \frac{15}{6}$

$6 \cdot \frac{x-1}{2} - 6 \cdot \frac{3x-18}{6} = 6 \cdot \frac{15}{6}$

$3(x-1) - 1(3x-18) = 15$

$3x - 3 - 3x + 18 = 15$

$0x + 15 = 15$

$0x = 0$

Відповідь. Рівняння має безліч коренів.

Щоб вставляти складні рівняння і легко знаходити їхні корені, можна використовувати надбудову «Розв'язувач» у Microsoft Excel.

Лінійне рівняння з двома змінними

ax + by = c — загальний вигляд лінійного рівняння з двома змінними, де a, b, c — деякі числа, x та y — змінні ($a \neq 0$, $b \neq 0$).

Упорядкована ***пара чисел***, що задовольняє рівняння з двома змінними називається ***розв'язком*** цього рівняння. Шукаючи розв'язки лінійного рівняння з двома змінними, використовують властивості рівносильності рівнянь і тотожні перетворення виразів.

Як розв'язати рівняння з двома змінними?

Крок 1. Підставити в рівняння довільне значення однієї змінної.
Крок 2. Розв'язати утворене рівняння.
Крок 3. Знайти відповідне значення іншої змінної.

Приклад 2

Знайдіть будь-який розв'язок рівняння $3x + 5y = 17$.

Розв'язання

Нехай $x = 4$, тоді

$3 \cdot 4 + 5y = 17$. ← Підставляємо в рівняння $x = 4$.

$12 - 12 + 5y = 17 - 12$ ← Розв'язуємо утворене рівняння.

$5y = 5$ ← Знаходимо відповідне значення y.

$y = 1$

Відповідь. (4; 1).

Графік лінійного рівняння з двома змінними

Як побудувати графік рівняння з двома змінними?

Крок 1. Знайти будь-які два його розв'язки.
Крок 2. Позначити на координатній площині відповідні їм точки.
Крок 3. Провести через них пряму.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

3 Побудуйте графік рівняння $2x - y = 3$.

Розв'язання

Графік лінійного рівняння з двома змінними $ax + by = c$ — пряма.

Знайдемо будь-які два розв'язки рівняння.

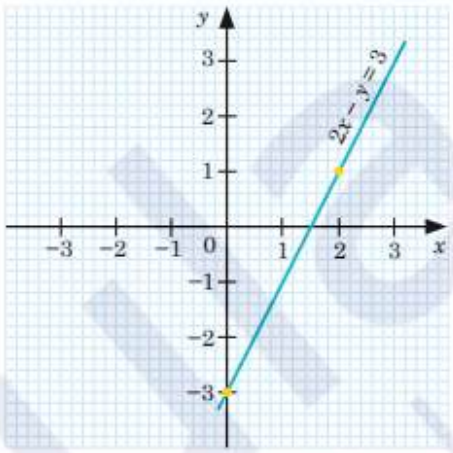
1) Нехай $x = 0$, тоді $2 \cdot 0 - y = 3$.

$0 - y = 3$
$-y = 3$
$y = -3$
$(0; -3)$

2) Нехай $x = 2$, тоді $2 \cdot 2 - y = 3$.

$4 - y = 3$
$4 - 4 - y = 3 - 4$
$-y = -1$
$y = 1$
$(2; 1)$

x	0	2
y	-3	1



Попрактикуйтеся

1 Розв'яжіть рівняння.

а) $x - 3 = -8$ б) $-6 + x = 5$ в) $-12 = -12 + x$

г) $-6x = 42$ д) $-32x = -4$ е) $\frac{x + 8}{5} = \frac{1}{10}$

2 Розв'яжіть рівняння.

а) $3(4x - 9) = 81$ б) $2(5 - 2x) = 9$ в) $2(x - 5) = 3x - 18$

г) $6 - 3x = 4(x + 2)$ д) $2x - 7(x - 3) = 26$ е) $(3x + 2) - (2x - 5) = 0$

3 Розв'яжіть рівняння.

а) $7x - 5(2x - 3) = 17 - 6x$ б) $6(3 - 2x) + 27x = 10x - 7$

в) $10(x + 1) = 6(3x + 4)$ г) $2(5x - 8) - 4(x - 3) = 3x + 5$

д) $\frac{3 - x}{7} + \frac{2(x + 4)}{3} = 1$ е) $\frac{8 + x}{2} - \frac{(3x - 4)}{3} = 6$

4 Розв'яжіть рівняння.

а) $39{,}8 + x = -16{,}3$ б) $2(x - 2{,}5) = 6$ в) $0{,}15(1 + x) = 0{,}30$

г) $x - (x + 3) = -3$ д) $|x| = -2$ е) $|x| - 3 = 7$

5 Знайдіть будь-які два розв'язки кожного з рівнянь.

а) $2a + y = 9$ б) $3x - 2c = 12$ в) $4m + 5n = 23$

г) $x - y = 15$ д) $2x + y = 4{,}5$ е) $4a + 5b = 20$

ж) $7x + 5y = 17$ и) $-6w + 3z = -24$ к) $-11t - d = 100$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

6 Знайдіть будь-які два розв'язки кожного з рівнянь.

а) $5n - 2m = -8$ б) $2{,}3x + 0{,}4y = 12$ в) $4{,}4a + 5{,}5b = 26$

г) $\frac{1}{5}x - \frac{3}{4}y = -11$ д) $\frac{5}{7}a + \frac{1}{3}b = 11$ е) $\frac{1}{12}c - \frac{1}{3}d = 4$

7 Знайдіть розв'язок рівняння:

а) $10x + 6y = 48$, який є парою рівних чисел;

б) $-13x + 12y = -200$, який є парою протилежних чисел.

8 Чи має розв'язки рівняння з двома змінними:

а) $y^2 + x^2 = -1$; б) $|x| + y^2 = 0$; в) $y^2 - |x| = 10$; г) $6y^2 + x^6 + |x| = 0$?

9 У рівнянні $ax + by = 37$ коефіцієнти a і b — цілі числа. Чи може розв'язком цього рівняння бути пара чисел (6; 36)?

10 Вероніка загадала два двоцифрових числа, кожне з яких починається цифрою 4, а інша цифра відмінна від 4. Потім вона вирішила переставити місцями цифри в кожному із загаданих чисел, але значення їх добутку не змінилося. Які числа загадала Вероніка?



11 Побудуйте графіки лінійних рівнянь з двома змінними.

а) $3x + y = 5$ б) $2x - 3y = 3$ в) $x - 4y = 0$

г) $x - \frac{1}{2}y = 1$ д) $y - x = 0$ е) $1{,}6x + 2y = 0$

12 Побудуйте графіки лінійних рівнянь з двома змінними.

а) $x + 2 = 5(2y + 1)$ б) $(y - x) + 2(y + x) = 7$ в) $4(y - 2) = 2 - (x + 10)$

г) $3(x - 2) = 4y - 3$ д) $\frac{x + 3y}{3} = -3$ е) $\frac{2x - y}{2} - 3 = y - 4$

13 При якому значенні a пара чисел $(-8; 2)$ є розв'язком рівняння:

а) $6x + 10y = 2a$; б) $ax + 6y = 12$?

14 При якому значенні a рівняння $(a + 12)x = a - 8$ не має коренів?

15 При якому значенні a рівняння $(a - 7)x = a - 7$ має безліч коренів?

16 При якому значенні a графік рівняння $a - 5 = 12x - 17y$ проходить через початок координат?

17 (*) При якому значенні a точка перетину прямих $2x - 3y = -6$ і $5x + y = a$ належить:

а) осі абсцис; б) осі ординат?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

1.2. Лінійні рівняння як математичні моделі задач

Лінійні рівняння можна використовувати як моделі для розв'язування сюжетних і навіть практичних задач, виконуючи такі кроки:

Крок 1. Прочитайте задачу та визначте невідому величину.
Крок 2. Позначте невідому величину літерою, наприклад x.
Крок 3. Запишіть вирази для інших величин через x.
Крок 4. Складіть рівняння, використовуючи наведені дані.
Крок 5. Розв'яжіть отримане рівняння.
Крок 6. Запишіть відповідь до умови задачі

Математичні моделі бувають у вигляді рисунка, таблиці, схеми, рівняння, графа, діаграми.

Поміркуйте! Чи можливо, що знайдений розв'язок задачі не відповідає її умові? Наведіть приклади.

Для розв'язування задач на рух скористайтеся формулою: $s = v \cdot t$

Приклад

1 Сума трьох послідовних непарних цілих чисел дорівнює 171. Що це за цілі числа?

Розв'язання

Потрібно знайти ці три числа. ← Визначте невідоме число.

Нехай x — найменше ціле число. ← Нехай x — невідоме число.

Тоді середнє ціле число дорівнює $x + 2$.
Найбільше ціле число дорівнює $x + 4$. ← Запишіть інші невідомі числа через перше.

Сума цілих чисел — 171.
$x + (x + 2) + (x + 4) = 171$ ← Запишіть вираз і складіть рівняння.
$x + (x + 2) + (x + 4) = 171$
$3x + 6 = 171$ ← Розв'яжіть рівняння.
$3x = 165$
$x = 55$ ← Відповідно до знайденого значення x обчислимо два інші числа.
$55 + 2 = 57$; $55 + 4 = 59$.
Відповідь. 55, 57 і 59.

Попрактикуйтеся

18 Сума трьох послідовних чисел дорівнює 234. Знайдіть ці числа.

19 Сума трьох послідовних парних чисел дорівнює 192. Знайдіть ці числа.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

20 Сума трьох послідовних непарних чисел дорівнює 111. Знайдіть ці числа.

21 Знайдіть три послідовні цілі числа, сума яких дорівнює 84.

22 Знайдіть три послідовні парні числа, сума яких дорівнює 66.

23 Самір на 12 см вищий за Олексія. Нехай зріст Саміра дорівнює x см.

а) Виразіть зріст Олексія через x.

б) Знайдіть зріст Саміра, якщо зріст Олексія — 156 см.

24 На благодійному ярмарку було продано 12 патріотичних браслетів та 20 брелоків. Було зібрано 960 грн. Відомо, що символічна ціна за браслети та брелоки однакова. Знайдіть ціну одного браслета та брелока.

25 На Олімпійських іграх 2024 року українські спортсмени та спортсменки виграли 12 медалей. Відомо, що срібних медалей на 2 більше, ніж золотих, а бронзових медалей на 1 більше, ніж золотих. Скільки золотих, срібних та бронзових медалей виграли спортсмени та спортсменки?

26 На Паралімпійських іграх 2024 року українські спортсмени та спортсменки здобули 82 медалі. Відомо, що срібних медалей на 6 більше, ніж золотих, а бронзових медалей на 4 більше, ніж срібних. Скільки золотих, срібних та бронзових медалей здобули спортсмени та спортсменки?

27 Соломія зазвичай їздить на роботу на електросамокаті. Вона проїхала перші 2 км зі швидкістю 15 км/год, тоді збільшила швидкість на 5 км/год і дісталась на роботу за 32 хв. Знайдіть відстань від будинку дівчини до роботи.

28 Від однієї пристані до іншої на екскурсію по річці Дністер вирушив пором. У стоячій воді він рухається зі швидкістю 18 км/год, швидкість течії річки становить 2 км/год. Екскурсія в один бік пройшла на 30 хв швидше, ніж повертаючись назад. Знайдіть відстань, яку подолав пором за час екскурсії.

29 Знайдіть ціну товару в кожному замовленні, користуючись наведеними даними в таблиці.

	Ціна товару, грн	Пакування, грн	Доставка, грн	Післяплата	Всього, грн
Замовлення 1		0	100	20 грн + 2 % від ціни товару	247,5
Замовлення 2		44	70	0	361
Замовлення 3		0	55	1 % від ціни товару	166,1
Замовлення 4		90	170	0	1870
Замовлення 5		0	0	10 грн + 0,5 % від ціни товару	367,78

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

1.3. Системи лінійних рівнянь

Графічний спосіб розв'язання

Два чи більше рівняння, що мають спільний розв'язок, утворюють **систему рівнянь.**

Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом?

Крок 1. В одній системі координат побудувати графік кожного з рівнянь системи.

Крок 2. Визначити координати точки перетину цих графіків або переконатись, що прямі не перетинаються або співпадають (збігаються).

Загальний вигляд системи двох лінійних рівнянь з двома змінними

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

Приклад

1 Розв'яжіть графічно систему лінійних рівнянь.

$$\begin{cases} x + 3y = 9, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

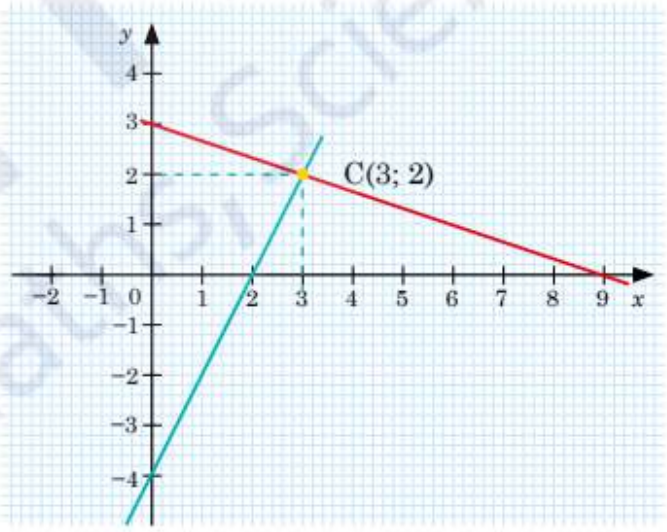
Розв'язання

$x + 3y = 9$

x	0	3
y	3	2

$2x - y = 4$

x	0	1
y	−4	−2



Відповідь. (3; 2).

Кількість розв'язків системи рівнянь можна визначити за співвідношенням коефіцієнтів рівнянь.

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ — має один розв'язок (графіки рівнянь перетинаються)

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ — має безліч розв'язків (графіки рівнянь збігаються)

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ — не має розв'язків (графіки рівнянь не перетинаються)

Спосіб підстановки

Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки?

Крок 1. Виразити з якого-небудь її рівняння одну змінну через іншу.

Крок 2. Підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної отриманий вираз.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Крок 3. Розв'язати утворене рівняння з однією змінною.
Крок 4. Знайти відповідне значення другої змінної.
Крок 5. Записати пару чисел, яка є розв'язком системи.

Приклад

2 Розв'яжіть систему лінійних рівнянь способом підстановки.

$$\begin{cases} 4(y-2) = 5x + 6, \\ 13x + 3y = 5(1-y). \end{cases}$$

Розв'язання

$$\begin{cases} 4y - 5x = 14, \\ 13x + 8y = 5 \end{cases}$$ ← Розкриваємо дужки і зводимо подібні доданки.

$$4y = 14 + 5x$$

$$y = \frac{14 + 5x}{4}$$ ← Виражаємо з першого рівняння одну змінну через іншу.

$$13x + 8\,\frac{(14 + 5x)}{4} = 5$$ ← Підставляємо в друге рівняння замість цієї змінної отриманий вираз.

$$13x + 28 + 10x = 5$$

$$23x = -23$$ ← Розв'язуємо утворене рівняння з однією змінною.

$$x = -1$$

$$y = \frac{14 + 5(-1)}{4}$$ ← Знаходимо відповідне значення другої змінної.

$$y = 2{,}25$$

Відповідь. $(-1;\ 2{,}25)$.

Спосіб додавання

Як розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання?

Крок 1. Знайти додаткові множники, які дають змогу перетворити коефіцієнти рівнянь на протилежні числа.
Крок 2. Відповідно помножити рівняння системи на ці додаткові множники.
Крок 3. Додати рівняння системи та розв'язати отримане рівняння-суму відносно другої змінної.
Крок 4. Підставити знайдене значення змінної в одне з рівнянь системи й розв'язати його.
Крок 5. У відповідь записати пару чисел, яка є розв'язком системи.

Приклад

3 Розв'яжіть систему лінійних рівнянь способом додавання.

$$\begin{cases} 3y - 5x = 11, \\ 4x + 7y = 10. \end{cases}$$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Розв'язання

$\begin{cases} 3y - 5x = 11, & | \cdot 4 \\ 4x + 7y = 10 & | \cdot 5; \end{cases}$ ← Множимо рівняння системи на додаткові множники.

$\begin{cases} 12y \boxed{- 20x} = 44, \\ 35y \boxed{+ 20x} = 50; \end{cases}$ ← Додаємо отримані рівняння та розв'язуємо рівняння-суму.

$47y = 94$

$y = 2$

$\begin{cases} y = 2, \\ 3 \cdot 2 - 5x = 11; \end{cases}$ ← Підставляємо знайдений корінь у перше рівняння системи та розв'язуємо його.

$\begin{cases} y = 2, \\ x = -1. \end{cases}$ ← У відповідь записуємо пару чисел, яка є розв'язком.

Відповідь. $(-1; 2)$.

Попрактикуйтеся

30 Розв'яжіть системи лінійних рівнянь графічним способом.

а) $\begin{cases} 3x + y = 0, \\ 4x + y - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0, \\ 6x + 2y - 4 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{2x - y}{3} = 1, \\ 3(y - 1) = 2x; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ -2x + 5y = 10; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 5x - 2y = 9, \\ 10x - 4y = 3; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 2(x - 4) + 3(y + 1) = -3, \\ 4(x + 1) - 2(y - 1) = 6. \end{cases}$

31 Розв'яжіть системи лінійних рівнянь способом підстановки.

а) $\begin{cases} 55y + 12x = 19, \\ 8x - 33y = 19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4(x + 2y) + 2 = 5x + 8, \\ 24y - 6 = 3(2x - y) - 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 1{,}4m + 2{,}5n = 25, \\ 3{,}4m - 1{,}2n = -12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2x - 1}{6} = \dfrac{9 - 2y}{8}, \\ 0{,}5x - 1{,}5y = 2{,}5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} - \dfrac{y}{3} = 1, \\ \dfrac{2x - 1}{2} - \dfrac{3y - 1}{3} = \dfrac{5}{6}; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} - 2 = \dfrac{x - y}{3}, \\ x + y - 7 = \dfrac{x - y}{6}. \end{cases}$

32 Розв'яжіть системи лінійних рівнянь способом додавання.

а) $\begin{cases} 3a + 2b = 9, \\ 4a - b = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x - 4y = 5, \\ 8x - 3y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 6 + 5x = 4(x + 2y), \\ 24y + 6 = 3(2x - y); \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4(a - 1) - 2 = 2(b - 1), \\ 15 - 5(b + 1) = 3(2 - a); \end{cases}$ д) $\begin{cases} 6 + 5(3x + y) = 7(2x + y), \\ 3(x + 2y) + 6 = 2(x + 3y); \end{cases}$

е) $\begin{cases} \dfrac{y - 4}{7} + \dfrac{x + 7}{3} = 2, \\ \dfrac{y + 11}{4} + \dfrac{x - 4}{2} = 1; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} \dfrac{x + 1}{2} = 8 - \dfrac{y - 1}{4}, \\ \dfrac{y + 1}{2} = 9 - \dfrac{x - 1}{2}. \end{cases}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

33 До рівняння $2x - 7y = 10$ підберіть друге лінійне рівняння так, щоб отримати систему рівнянь, яка:

а) має єдиний розв'язок; б) має безліч розв'язків; в) не має розв'язків.

34 При яких значеннях a і b пряма $ax + by = 28$ перетинає осі координат у точках $A(4; 0)$ і $B(0; 7)$?

35 Запишіть рівняння прямої $y = kx + b$, яка проходить через точки $C(2; 6)$ і $D(1; -2)$.

36 Рената їхала 4 години на велосипеді із середньою швидкістю x км/год, а потім 1 годину зі швидкістю y км/год. Загалом вона проїхала 24 км. Складіть рівняння з невідомими x та y, використовуючи наведені дані.

37 Складіть систему рівнянь та розв'яжіть задачу. 4 чашки обліпихового чаю і 4 шматочки чизкейка коштують 508 грн. 7 чашок чаю і 2 шматочки чизкейка коштують 514 грн. Знайдіть ціну чашки чаю та шматочка чизкейка.



38 За 4 ручки та 5 олівців заплатили 131 грн. А за 9 ручок та 9 олівців заплатили 270 грн. Скільки гривень коштує одна ручка та один олівець?

39 Родина із 4 дорослих та 6 дітей заплатила 870 грн за вхід у парк розваг. Інша родина з 3 дорослих і 8 дітей заплатила 880 грн за вхід. Знайдіть ціну вхідного квитка для дорослого та для дитини.

40 На благодійній виставці картин було представлено 26 робіт двох художниць: x — від першої та y — від другої. Кожна робота першої художниці одержала 18 схвальних відгуків, а кожна робота другої — 14, а всього було отримано 432 схвальних відгуки. Складіть за умовою задачі систему рівнянь та розв'яжіть її.

41 Дорога від дому бабусі до ставка пролягає горизонтально, а потім угору. Бабуся проїхала на велосипеді горизонтальну її частину зі швидкістю 10 км/год, а вгору йшла пішки зі швидкістю 2 км/год і прибула через 2,7 год після виїзду з дому. Додому вона їхала згори зі швидкістю 15 км/год, а горизонтальну ділянку — 12 км/год і прибула додому через 1 год 12 хв після виїзду. Знайдіть відстань від бабусиної оселі до ставка.

42 Визначте значення a, при якому система рівнянь $\begin{cases} ax + y = 9, \\ 14x + 7y = 21 \end{cases}$ немає розв'язків.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

1.4. Степінь із цілим показником

Використання степенів — це короткий спосіб записати добуток, що складається із числа, помноженого на себе два або більше разів.

Добуток $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ можна записати як 8^4.

8^4 → Число 4 називається **показником** степеня.
↳ Число 8 називається **основою** степеня.

8^4 читається як «8 у четвертому степені».
a^n читається як «a в n-му степені».

Показник степеня показує, скільки разів потрібно помножити основу саму на себе.

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}$, де n — натуральне число.

$a^1 = a$

Показник першого степеня не прийнято записувати, адже будь-яке число, піднесене до першого степеня, є те саме число.

8^4 не дорівнює $8 \cdot 4$.

Будь-яке число або змінну можна подати в першому степені. Для будь-яких чисел правильно, що $a = a^1$.

Степінь з нульовим показником

Число, піднесене до нульового степеня, дорівнює одиниці. $a^0 = 1$, де $a \neq 0$.

Якщо $a \neq 0$,
$1 = \frac{a}{a} = \frac{a^1}{a^1} = a^{1-1} = a^0 = 1$.

Приклад 1

Спростіть вирази.

а) r^0 б) x^0 в) $(4a)^0$ г) $(-3)^0$ д) $5b^0$

Розв'язання

а) $r^0 = 1$ б) $x^0 = 1$ в) $(4a)^0 = 1$ г) $(-3)^0 = 1$

д) $5b^0 = 5 \cdot b^0 = 5 \cdot 1 = 5$

Степінь з від'ємним показником

Степенем із цілим від'ємним показником числа a називають дріб із чисельником 1 та знаменником, у якому число a з додатним показником.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, де $a \neq 0$, n — натуральне число.

$2^{-2} \neq -4$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

2 Запишіть у вигляді дробу.

а) 2^{-2} б) a^{-5} в) $(-2)^{-3}$ г) $(2t+p)^{-8}$

Розв'язання

а) $2^{-2}=\frac{1}{2^2}$ б) $a^{-5}=\frac{1}{a^5}$ в) $(-2)^{-3}=\frac{1}{(-2)^3}$ г) $(2t+p)^{-8}=\frac{1}{(2t+p)^8}$

Дріб, піднесений до степеня із цілим від'ємним показником, дорівнює дробу, оберненому до цього, з додатним показником.

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, де $a\neq 0$, $b\neq 0$, n — натуральне число.

Приклад

3 Запишіть у вигляді степеня із цілим від'ємним показником.

а) $\frac{1}{2^3}$ б) $\frac{1}{a}$ в) $\frac{1}{(b-c)^7}$

Розв'язання

а) $\frac{1}{2^3}=2^{-3}$ б) $\frac{1}{a}=a^{-1}$ в) $\frac{1}{(b-c)^7}=(b-c)^{-7}$

Приклад

4 Спростіть вирази.

а) $\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}$ б) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5}$ в) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2}$

Розв'язання

а) $\left(\frac{a}{4}\right)^{-3}=\left(\frac{4}{a}\right)^{3}=\frac{4^3}{a^3}=\frac{64}{a^3}$ б) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-5}=\left(\frac{y}{x}\right)^{5}=\frac{y^5}{x^5}$ в) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{2}=\frac{3^2}{5^2}=\frac{9}{25}$

Попрактикуйтеся

43 Заповніть таблицю.

	$n=0$	$n=1$	$n=-1$	$n=2$	$n=-2$	$n=3$	$n=-3$
$(4)^n$							
$(-4)^n$							

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

44 Обчисліть.

а) 2^{-3} б) $(-2)^{-3}$ в) $(-2)^{-4}$ г) -2^{-4} д) 2^0 е) $(-2)^0$

45 Запишіть у вигляді дробу.

а) 3^{-1} б) b^{-7} в) $(-5)^{-4}$ г) $(3b)^{-3}$ д) $(m-p)^{-2}$

46 Запишіть дріб у вигляді степеня із цілим від'ємним показником.

а) $\frac{1}{5}$ б) $\frac{1}{b^2}$ в) $\frac{1}{mn}$ г) $-\frac{1}{5^9}$ д) $\frac{1}{(t+p)^2}$

47 Обчисліть.

а) 5^{-2} б) 6^{-2} в) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ г) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$ д) $\left(\frac{7}{10}\right)^0$ е) $\left(-\frac{3}{8}\right)^{-2}$

48 Обчисліть.

а) $0{,}6^3$ б) $(-0{,}3)^2$ в) $-0{,}1^4$ г) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3}$

д) $\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}$ е) $-\left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$ ж) $0{,}1^{-2}$ и) $\left(\frac{13}{21}\right)^0$

49 Знайдіть значення виразів.

а) $(-3)^{-4}$ б) $-\left(\frac{9}{10}\right)^{-4}$ в) $\left(-\frac{5}{6}\right)^0$ г) $-(-5)^{-1}$ д) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{-2}$

е) $1{,}5^{-2}$ ж) $(-1{,}2)^{-1}$ и) $(-3{,}45)^0$ к) $-(2{,}1)^{-3}$ л) $-(-1)^{-13}$

50 Спростіть вирази.

а) $\left(\frac{x}{5}\right)^{-3}$ б) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-7}$ в) $\left(\frac{c+1}{7}\right)^{-1}$ г) $\left(\frac{xy}{4k}\right)^{-3}$ д) $\left(\frac{b}{0{,}1a}\right)^{-2}$

51 Знайдіть значення виразів.

а) $80 + 4^{-1}$ б) $\left(-\frac{10}{13}\right)^2 \cdot (1{,}3)^{-3}$ в) $-1^5 + (-5)^0$ г) $(1 - 4^{-1})^{-3}$

52 Знайдіть значення m.

а) $\left(\frac{2}{3}\right)^m = \frac{8}{27}$ б) $\left(\frac{4}{7}\right)^m = \frac{49}{16}$ в) $\left(\frac{3}{11}\right)^m = 1$

г) $\left(-\frac{7}{8}\right)^m = \frac{64}{49}$ д) $0{,}2^m = \frac{10}{2}$ е) $-\left(\frac{5}{6}\right)^m = -\frac{36}{25}$

53 Упорядкуйте вирази за зростанням їхніх значень.

а) 5^{-2}, 5^2, 5^{-3}, 5^0, 5^{-1} б) $\left(\frac{1}{4}\right)^3, \left(\frac{1}{4}\right)^0, \left(\frac{1}{4}\right)^2, \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}, \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

54 Обчисліть.

а) $(1 + (1 - 2^{-4})^{-1})^{-1}$ б) $(1 - (1 + 4^{-1})^{-3})^{-1}$

55 (*) За якого цілого значення n виконується нерівність $(-2)^{-6} < 5^n \leq 5{,}5^2$?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

1.5. Властивості степеня із цілим показником

Степінь із цілим показником має такі ж самі властивості, як і степінь з натуральним показником, який ми вивчали у 7 класі. Для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$ та будь-яких цілих m та n правильно, що:

Властивості	Приклади
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$2^9 : 2^4 = 2^{9-4} = 2^5$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 7)^3 = 2^3 \cdot 7^3$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$	$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$
$a^0 = 1$, $a \neq 0$	$5^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$	$8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0$, $b \neq 0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

Неможливо обчислити значення 0^0. Отже, помилково писати a^n, де $a = n = 0$.

$(-5)^2 = 25$
$(-5)^3 = -125$

Множення степенів

Щоб помножити степені з однаковою основою, потрібно основу залишити ту саму, а показники степенів додати.

Для будь-яких $a \neq 0$, цілих m та n правильно, що $\boldsymbol{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$.

Типова помилка:
$a^r \cdot a^q = a^{rq}$
Це неправильно!

$$a^2 \cdot a^3 = \underbrace{(a \cdot a)}_{2 \text{ множники}} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_{3 \text{ множники}} = a^5$$

2 множники + 3 множники — 5 множників

Приклад

1 Спростіть вирази.

а) $a^3 \cdot a^4$ б) $3^{-4} \cdot 3^5$ в) $a^3 \cdot a^{-5}$
г) $5a^2 \cdot 3a^{-4}$ д) $a^{-2} \cdot a^{-5}$ е) $c^6 \cdot c^{-7} \cdot c$

$3^4 \cdot 3^5$ не дорівнює 6^9.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Розв'язання

а) $a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$ б) $3^{-4} \cdot 3^5 = 3^{-4+5} = 3^1 = 3$

в) $a^3 \cdot a^{-5} = a^{3+(-5)} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$ г) $5a^2 \cdot 3a^{-4} = 5 \cdot 3 \cdot a^{2+(-4)} = 15a^{-2} = 15 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{15}{a^2}$

д) $a^{-2} \cdot a^{-5} = a^{-2+(-5)} = a^{-7} = \frac{1}{a^7}$ е) $c^6 \cdot c^{-7} \cdot c^1 = c^0 = 1$

Ділення степенів

Щоб поділити два степені з однаковою основою, потрібно основу залишити ту саму, а від показника діленого відняти показник дільника.

Для будь-яких $a \neq 0$, цілих m та n правильно, що
$\boldsymbol{a^m : a^n = a^{m-n}}$ або $\boldsymbol{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$.

$$a^5 : a^2 = (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) : (a \cdot a) = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^3$$

5 множників
2 множники
$5 - 2 = 3$ множники

Приклад

2 Спростіть вирази.

а) $a^4 : a^2$ б) $7^6 : 7^{-4}$ в) $4x^3y^{-5} : y^2$ г) $\frac{6x^6}{x^4}$ д) $\frac{a^4}{a^6}$ е) $\frac{-16a^3b^5}{4a^4b^3}$

Розв'язання

а) $a^4 : a^2 = a^{4-2} = a^2$

б) $7^6 : 7^4 = 7^{6-(-4)} = 7^{10}$

в) $4x^3y^{-5} : y^2 = 4x^3y^{-5-2} = \frac{4x^3}{y^7}$

г) $\frac{6x^6}{x^4} = 6x^{6-4} = 6x^2$

д) $\frac{a^4}{a^6} = a^{4-6} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

е) $\frac{-16a^3b^5}{4a^4b^3} = \frac{-4b^2}{a}$

Піднесення степеня до степеня

Щоб піднести степінь до степеня, потрібно основу залишити ту саму, а показники степеня перемножити.

Для будь-яких $a \neq 0$, цілих m та n правильно, що $\boldsymbol{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$.

$$(a^2)^3 = (a^2) \cdot (a^2) \cdot (a^2) = (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) = a^{2 \cdot 3} = a^6$$

2 множники 2 множники 2 множники

$2 \cdot 3$ множники

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

3 Спростіть вирази.

а) $(2^3)^4$ б) $(x^9)^2 : (x^4)^{-2}$ в) $(a^7)^{-3} : (a^{-3})^2$ г) $\dfrac{(a^3)^{-5} \cdot (ab)^4}{(a^{-1}b)^2}$

Розв'язання

а) $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

б) $(x^9)^2 : (x^4)^{-2} = x^{9 \cdot 2} : x^{4 \cdot -2} = x^{18} : x^{-8} = x^{18 - (-8)} = x^{26}$

в) $(a^7)^{-3} : (a^{-3})^2 = a^{7 \cdot -3} : a^{-3 \cdot 2} = a^{-21} : a^{-6} = a^{-21 - (-6)} = a^{-15} = \dfrac{1}{a^{15}}$

г) $\dfrac{(a^3)^{-5} \cdot (ab)^4}{(a^{-1}b)^2} = \dfrac{a^{-10} \cdot a^4 b^4}{a^{-2}b^2} = a^{-10+4-(-2)} \cdot b^{4-2} = a^{-4}b^2 = \dfrac{b^2}{a^4}$

Щоб піднести добуток до степеня, потрібно кожен множник піднести до цього степеня, а результати перемножити. Для спрощення виразів можна використовувати будь-яку властивість степенів в обох напрямах.

Для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$, цілих n правильно, що $\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$.

$$(a \cdot b)^3 = (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot (a \cdot b) = \underbrace{(a \cdot a \cdot a)}_{\text{3 множники}} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot b)}_{\text{3 множники}} = a^3 \cdot b^3$$

Приклад

4 Спростіть вирази.

а) $(a \cdot y)^7$ б) $(8 \cdot w)^{-2}$ в) $(a^9 \cdot x^{-2})^6$ г) $2^3 \cdot 3^3$ д) $2^{-5} \cdot 5^{-5}$

Розв'язання

а) $(a \cdot y)^7 = a^7 \cdot y^7 = a^7 y^7$ б) $(8 \cdot w)^{-2} = \dfrac{1}{(8 \cdot w)^2} = \dfrac{1}{8^2 \cdot w^2} = \dfrac{1}{64w^2}$

в) $(a^9 \cdot x^{-2})^6 = (a^9)^6 \cdot (x^{-2})^6 = a^{9 \cdot 6} \cdot x^{-2 \cdot 6} = a^{54} \cdot x^{-12} = \dfrac{a^{54}}{x^{12}}$

г) $2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3 = 6^3$ д) $2^{-5} \cdot 5^{-5} = (2 \cdot 5)^{-5} = 10^{-5} = \dfrac{1}{10^5} = \dfrac{1}{1000000}$

Щоб піднести звичайний дріб до степеня, потрібно чисельник і знаменник дробу піднести до цього степеня.

Для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$, цілих n правильно, що $\boldsymbol{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}}$, $b \neq 0$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a}^{\text{4 множники}}}{\underbrace{b\cdot b\cdot b\cdot b}_{\text{4 множники}}} = \frac{a^4}{b^4}$$

Приклад

5 Обчисліть, використовуючи властивості степенів.

а) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$ б) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ в) $\frac{6^5}{3^5}$ г) $\frac{10^2}{2^2}$

Розв'язання

а) $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64}$

в) $\frac{6^5}{3^5} = \left(\frac{6}{3}\right)^5 = 2^5 = 32$

г) $\frac{10^2}{2^2} = \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 5^2 = 25$

Попрактикуйтеся

56 Виконайте дії.

а) $a^2 \cdot a^4$ б) $p^5q^3 \cdot p^6q^5$ в) $36x^5 : 2x^3$ г) $a^5 \cdot a^{-3}$

д) $2x^2 \cdot 3x^4$ е) $y^9 : y^7$ ж) $24x^7y^6 : 4xy^5$ и) $y^7 : y^{-1}$

57 Піднесіть степінь до степеня.

а) $(2^2)^5$ б) $(a^2b)^3$ в) $(2ab^3)^4$ г) $(x^2)^{-3}$ д) $(y^{-4})^{-5}$

58 Обчисліть, використовуючи властивості степенів.

а) $(k \cdot l)^4$ б) $(a^6 \cdot b^3)^5$ в) $1^3 \cdot 7^3$ г) $(a \cdot b)^{-3}$

д) $\left(\frac{3}{4}\right)^3$ е) $\left(\frac{8}{9}\right)^2$ ж) $\frac{35^3}{7^3}$ и) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$

59 Спростіть вирази.

а) $(x^3)^4 \cdot x^7$ б) $(a^3)^5 : (a^3)^4$ в) $(5a^4b^6)^2$

г) $9d^4 \cdot 2d^{-5}$ д) $7x^3y^4(5x^{-2}y^5)$ е) $-5x^{-1}(x^3 - 4x + 3)$

ж) $\frac{12x^4}{3x}$ и) $\frac{x^5}{x^7}$ к) $\frac{16x^{-3}y^3}{2xy}$

60 Спростіть вирази, використовуючи властивості степенів.

а) $\frac{3y^4 \cdot y^{-5}}{y^3}$ б) $\frac{4a^2 \cdot 3a^5}{2a^{-4}}$ в) $\frac{7k^{-12} \cdot 4k^3}{2k^5}$

г) $\frac{6r^5 \cdot 6r^7}{12r^{-4}}$ д) $\frac{4x^{-4} \cdot 9x^5}{2x^2}$ е) $\frac{6q^7 \cdot 8q^{-5}}{16q^{-6} \cdot 2q}$

ж) $\frac{(5x)^2 \cdot x^{-2}}{x^{-5} \cdot x^4}$ и) $\frac{(3y)^3 \cdot y^{-4}}{y^{-3} \cdot (-3y)^6}$ к) $\frac{t^{10} \cdot 6t^{-9}}{2t^7 \cdot t^{-7}}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

61 Спростіть вирази. Результат запишіть за допомогою дробу, що не містить степеня з від'ємним показником.

а) $-a^{-3} \cdot a^{-3} : a^2$ б) $a^{-2} \cdot a^{-4} : a^3$ в) $a^{-5} \cdot a^{-3} : a^6$

г) $a^{-4} \cdot a^{-1} : a^4$ д) $a^{-1} \cdot a^{-3} : a^2$ е) $a^{-8} \cdot a^{-4} : a^7$

62 Спростіть вирази.

а) $\dfrac{(a^3)^{-4} \cdot (ab)^2}{(a^{-2}b)^3}$ б) $\dfrac{(a^2)^{-6} \cdot (ab)^3}{(a^{-1}b)^2}$ в) $\dfrac{(x^4)^{-4} \cdot x^2y^3}{x^{-2}y^3}$

г) $\dfrac{(x^2)^{-5} \cdot x^3y^2}{x^{-3}y^3}$ д) $\dfrac{x^{-8} \cdot x^4y^2}{x^{-2}y^2}$ е) $\dfrac{x^{-7} \cdot x^3y^6}{x^{-4}y^4}$

63 Установіть відповідність між виразами та їх значеннями. Заповніть таблицю літерами у вказаному порядку й дізнайтеся назву української страви часів чумацтва, яка стала нематеріальною спадщиною Донеччини.

1	$256 \cdot 4^{-5}$	І	8
2	$32 \cdot (2^2)^{-4}$	А	$\frac{1}{8}$
3	$5^{-6} \cdot 125^5 : 25^6$	К	32
4	$64^{-1} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-3}$	З	$\frac{1}{4}$
5	$\dfrac{25^{-3} \cdot 5^{-6}}{(-5)^{-9}}$	Р	$-\frac{1}{125}$
6	$\dfrac{8^{-3} \cdot 2^{-10}}{16^{-6}}$	Т	$\frac{1}{125}$



1	2	3	4	5	6	2

64 Шматки льоду розміром $2x$ см на $3x$ см на $5x$ см потрібно запакувати в коробку розміром $4x^2$ см на $5x^3$ см на $6x^4$ см. Запишіть вираз, за допомогою якого можливо визначити кількість шматків льоду, які помістяться в коробку.

65 Заповніть пропуски так, щоб утворилася правильна рівність.

а) $2^n \cdot 2^3 = 2^{\square + \square}$ б) $25^m = 5^{\square}$ в) $7^{x-1} = 7^{\square} : 7^{\square}$

г) $2^{x+4} = 2^{\square} \cdot 2^{\square}$ д) $3^{3x} = (3^{\square})^{\square}$ е) $3^{3n-1} = (3^{\square})^{\square} \cdot 3^{\square}$

66 Знайдіть значення виразів.

а) $\dfrac{7^4 \cdot (-7)^3 \cdot (-7)^2 \cdot 7^3}{(-7)^{-4} \cdot 7^2 \cdot (-7)^5 \cdot 7^{-4}}$ б) $\left(\left(\frac{7}{9}\right)^9 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right)^6\right) : \left(\left(-\frac{7}{18}\right)^{11} \cdot \left(-\frac{18}{7}\right)^{-4}\right)$

в) $\dfrac{8^{-2} \cdot 8^5 \cdot (-8)^3 \cdot (-8)^{-4}}{8^{-3} \cdot (-8)^{-2} \cdot (-8)^{-3} \cdot (-8)^4}$ г) $\left((-3)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^0 : \left((-1)^{12} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}$

67 Спростіть вирази.

а) $(x^{-2} - 2)(x^{-2} + 2) - (x^{-2} - 2)^2$ б) $(x^{-2} - 3)^2 - (x^{-2} - 5)(x^{-2} + 5)$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

1.6. Стандартний вигляд числа

За допомогою **стандартного вигляду числа** можна записати будь-яке число у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$ і n — ціле число.

Представлення дуже великих чи дуже малих чисел у такому вигляді дає змогу зменшити кількість нулів, і, відповідно, полегшує читання, запис та обчислення з такими числами. Наприклад, позбудемося нулів у таких числах, як 100 000 000 і 0,0000000001:

100 000 000 можна записати як $1 \cdot 10^8$;

Перенесемо кому на 8 знаків ліворуч.

0,0000000001 можна записати як $1 \cdot 10^{-9}$.

Перенесемо кому на 9 знаків праворуч.

Показник степеня n ще називають **порядком** числа.

Поміркуйте!
Яким є порядок чисел $1 \cdot 10^8$ та $1 \cdot 10^{-9}$?

Поміркуйте!
Що означає вислів: «Одне число на порядок більше за інше»?

Приклад 1

Запишіть числа в стандартному вигляді.

а) 456 000 000 б) 0,0000123

Розв'язання

а) $456\,000\,000 = 4{,}56000000 \cdot 10^8 = 4{,}56 \cdot 10^8$

Кому перенесли на 8 знаків ліворуч.

б) $0{,}0000123 = 1{,}23 \cdot 10^{-5}$

Кому перенесли на 5 знаків праворуч.

$1{,}0 = 1$
$1{,}00 = 1$
$1{,}000 = 1$

Приклад 2

Перетворіть числа зі стандартного вигляду у звичайну форму.

а) $5{,}78 \cdot 10^6$ б) $8{,}93 \cdot 10^{-6}$

Розв'язання

а) $5{,}78 \cdot 10^6 = 5\,780\,000$

Кому перенесли на 6 знаків ліворуч.

б) $8{,}93 \cdot 10^{-6} = 0{,}00000893$

Кому перенесли на 6 знаків праворуч.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Попрактикуйтеся

68 Запишіть числа в стандартному вигляді.

а) 6578 б) 124 000 в) 25,009
г) 0,02468 д) 0,000063 е) 0,023

69 Перетворіть числа зі стандартного вигляду у звичайну форму.

а) $4{,}2 \cdot 10^{2}$ б) $9{,}431 \cdot 10^{8}$ в) $2{,}34 \cdot 10^{-7}$
г) $7{,}82 \cdot 10^{5}$ д) $7{,}81 \cdot 10^{-3}$ е) $2{,}46 \cdot 10^{-4}$

70 Запишіть числа в стандартному вигляді.

а) 1001 б) 53 в) 6 926 300 000 г) −392
д) 0,00361 е) 0,13592 ж) −0,0038 и) 0,00000013

71 Перетворіть числа зі стандартного вигляду у звичайну форму.

а) $1{,}92 \cdot 10^{3}$ б) $3{,}051 \cdot 10^{1}$ в) $-4{,}29 \cdot 10^{2}$ г) $6{,}251 \cdot 10^{9}$
д) $8{,}317 \cdot 10^{6}$ е) $1{,}03 \cdot 10^{-2}$ ж) $8{,}862 \cdot 10^{-1}$ и) $9{,}512 \cdot 10^{-8}$

72 Прочитайте текст. Випишіть усі числа з тексту та подайте їх у стандартному вигляді числа.

Україна — найбільша країна в Центрально-Східній Європі. Площа її території становить 603 628 км². За даними першого і єдиного Всеукраїнського перепису населення 2001 року в Україні проживало 48 457 000 осіб. Станом на 1 грудня 2019 року в м. Києві та Київській області проживає 3 730 000 осіб, це найбільш чисельний регіон. Область з найменшим населенням — Чернівецька, тут проживає лише 727 000 мешканців та мешканок.

Інтернет-джерело

73 Запишіть величини в стандартному вигляді.

а) Середня відстань від Венери до Сонця становить 108 мільйонів кілометрів.
б) Відомо, що вік Землі становить приблизно 4 600 000 000 років.

74 У таблиці наведено орієнтовні дані споживання електроенергії побутовими приладами. Запишіть числа, подані в таблиці, у стандартному вигляді. Упорядкуйте результати за зростанням.

Побутовий прилад	К-сть електроенергії, кВт/год	У стандартному вигляді
Телевізор	0,08	
Телефон	0,005	
Електрочайник	2,3	
Пральна машина	0,8	
Холодильник	0,77	
Мікрохвильова піч	1,4	

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

1.7. Виконуємо дії з числами у стандартному вигляді

Додавання з однаковими показниками

Використаємо розподільну властивість множення, щоб виконати додавання чисел.

Розподільна властивість множення: $ab + ac = a(b + c)$

однакові показники

$(p \cdot 10^y) + (q \cdot 10^y) = (p + q) \cdot 10^y$

Крок 1. Додайте числа p та q, запишіть результат.

Крок 2. Помножте результат на 10^y.

Під час додавання та віднімання десяткових дробів потрібно кому підписати під комою, розряд під розрядом.

Приклад 1

Виконайте додавання: $(3{,}65 \cdot 10^4) + (5{,}23 \cdot 10^4)$.

Розв'язання

$(3{,}65 \cdot 10^4) + (5{,}23 \cdot 10^4) = (3{,}65 + 5{,}23) \cdot 10^4 = 8{,}88 \cdot 10^4$

Додавання з різними показниками

Щоб додати числа з різними показниками, спочатку потрібно змінити їх так, щоб вони мали однакові показники.

Наприклад, маємо $(5{,}13 \cdot 10^6) + (2{,}52 \cdot 10^4)$.

$(5{,}13 \cdot 10^6) + (2{,}52 \cdot 10^4) =$

$= (513 \cdot 10^4) + (2{,}52 \cdot 10^4) =$

$= (513 + 2{,}52) \cdot 10^4 =$

$= 515{,}52 \cdot 10^4$

$= 5{,}1552 \cdot 10^6$

Крок 1. Змініть одне із чисел так, щоб показники в обох числах були однакові.

Крок 2. Додайте 513 і 2,52.

Крок 3. Помножте результат на 10^4.

Крок 4. Подайте результат у стандартному вигляді.

Поміркуйте! Чи правильно, що числа $5{,}13 \cdot 10^6$ та $2{,}52 \cdot 10^4$ мають різні порядки?

Віднімання з однаковими показниками

Використаємо розподільну властивість множення, щоб виконати віднімання чисел.

однакові показники

$(p \cdot 10^y) - (q \cdot 10^y) = (p - q) \cdot 10^y$

Крок 1. Відніміть число q від p та запишіть результат.

Крок 2. Помножте результат на 10^y.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

2 Виконайте віднімання: $9{,}63 \cdot 10^6 - 1{,}09 \cdot 10^6$.

Розв'язання

однакові показники

$$9{,}63 \cdot 10^6 - 1{,}09 \cdot 10^6 = (9{,}63 - 1{,}09) \cdot 10^6 = 8{,}54 \cdot 10^6$$

Віднімання з різними показниками

Щоб відняти числа з різним показниками, спочатку потрібно змінити їх так, щоб вони мали однакові показники.

Наприклад, маємо

різні показники

$$(9{,}82 \cdot 10^{-4}) - (8{,}2 \cdot 10^{-6}) =$$
$$= (9{,}82 \cdot 10^{-4}) - (0{,}082 \cdot 10^{-4}) =$$
$$= (9{,}82 - 0{,}082) \cdot 10^{-4} =$$
$$= 9{,}738 \cdot 10^{-4}$$

Крок 1. Змініть одне із чисел так, щоб показники в обох числах були однакові.

Крок 2. Відніміть 0,082 від 9,82.

Крок 3. Помножте результат на 10^{-4}.

Множення

Щоб помножити числа, представлені в стандартному вигляді, спочатку перемножимо їхні коефіцієнти, а тоді — степені з основою 10.

$$(a \cdot 10^a) \cdot (b \cdot 10^b) = (a \cdot b) \cdot 10^{a+b}$$

Для множення використовуємо властивості $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$ та $(10^a)^b = 10^{ab}$.

Приклад

3 Виконайте множення: $(6{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot (5{,}2 \cdot 10^6)$.

Розв'язання

Перемножте коефіцієнти та додайте показники.

$$(6{,}1 \cdot 10^{-3}) \cdot (5{,}2 \cdot 10^6) = (6{,}1 \cdot 5{,}2) \cdot (10^{-3+6}) = 31{,}72 \cdot 10^3 = 3{,}172 \cdot 10^4$$

Ділення

Щоб поділити числа, представлені у стандартному вигляді, спочатку потрібно поділити їхні коефіцієнти, а тоді — степені з основою 10.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

$$(a \cdot 10^a) : (b \cdot 10^b) = (a : b) \cdot 10^{a-b}$$

Для ділення використовуємо властивості $10^a : 10^b = 10^{a-b}$ та $(10^a)^b = 10^{ab}$.

Приклад

4 Виконайте ділення: $(-9 \cdot 10^{-6}) : (-3 \cdot 10^{-2})$.

Розв'язання

Поділіть коефіцієнти та віднімі́ть показники.

$(-9 \cdot 10^{-6}) : (-3 \cdot 10^{-2}) = (-9 : (-3)) \cdot (10^{-6} : 10^{-2}) = 3 \cdot 10^{-6-(-2)} = 3 \cdot 10^{-6+2} =$
$= 3 \cdot 10^{-4}$

Поєднуючи дії додавання і віднімання або множення і ділення із числами у стандартному вигляді, завжди рухаємося зліва направо.

Приклад

5 Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді.

а) $3{,}1 \cdot 10^9 - 4{,}8 \cdot 10^8 + 5{,}2 \cdot 10^9$ б) $(6 \cdot 10^{12}) \cdot (2 \cdot 10^6) : (3 \cdot 10^4)$

Розв'язання

а) $3{,}1 \cdot 10^9 - 4{,}8 \cdot 10^8 + 5{,}2 \cdot 10^9 =$
$= (3{,}1 \cdot 10^9 - 0{,}48 \cdot 10^9) + 5{,}2 \cdot 10^9 =$ → Рухаємося зліва направо.
$= (2{,}62 \cdot 10^9) + (5{,}2 \cdot 10^9) = 7{,}82 \cdot 10^9$

б) $(6 \cdot 10^{12}) \cdot (2 \cdot 10^6) : (3 \cdot 10^4) =$ → Рухаємося зліва направо.
$= (12 \cdot 10^{18}) : (3 \cdot 10^4) = 4 \cdot 10^{14}$

Попрактикуйтеся

75 Прочитайте текст та дайте відповіді на запитання.

Чорнозем — тип ґрунту, що характеризується високим показником родючості та високим вмістом мікро- та макроелементів, які потрібні для життєдіяльності багатьох видів рослин. Україна володіє найбільшим запасом чорнозему в світі. На території України найбільшу площу займають так звані звичайні чорноземи — $1{,}05 \cdot 10^7$ га, типові чорноземи становлять $5{,}8 \cdot 10^6$ га, південні — $3{,}6 \cdot 10^6$ га, опідзолені — $3{,}4 \cdot 10^6$ га. Україна має 30 % світового чорнозему та відіграє ключову роль у забезпеченні глобальної продовольчої безпеки.

Інтернет-джерело

а) Знайдіть загальну площу всіх чорноземів України. Запишіть результат у звичайній формі.

б) Порівняйте площу чорноземів України з площею Великої Британії, якщо площа Великої Британії становить $2{,}44 \cdot 10^5$ км².

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

76 Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді.

а) $6{,}72 \cdot 10^6 + 2{,}49 \cdot 10^6$
б) $5{,}87 \cdot 10^5 + 7{,}1 \cdot 10^5$
в) $9{,}49 \cdot 10^5 + 8{,}9 \cdot 10^4$
г) $2{,}8 \cdot 10^4 + 3{,}2 \cdot 10^5$
д) $9{,}56 \cdot 10^8 - 7{,}65 \cdot 10^8$
е) $6{,}89 \cdot 10^7 - 4{,}51 \cdot 10^7$
ж) $8{,}21 \cdot 10^{-6} - 9{,}11 \cdot 10^{-7}$
и) $7{,}6 \cdot 10^5 - 8{,}7 \cdot 10^4$

77 Виконайте дії та подайте результат у стандартному вигляді.

а) $(6{,}2 \cdot 10^3) \cdot (4{,}1 \cdot 10^2)$
б) $(7{,}2 \cdot 10^5) \cdot (3{,}4 \cdot 10^3)$
в) $(5{,}2 \cdot 10^8) \cdot (4{,}5 \cdot 10^9)$
г) $(3{,}5 \cdot 10^8) \cdot (-2 \cdot 10^4)$
д) $(-8 \cdot 10^{-5}) \cdot (3 \cdot 10^{-7})$
е) $(-6 \cdot 10^{-3}) \cdot (2 \cdot 10^{-9})$
ж) $(1{,}4 \cdot 10^7) : (-2 \cdot 10^3)$
и) $(-3{,}6 \cdot 10^{11}) : (-6 \cdot 10^7)$
к) $(2{,}1 \cdot 10^6) : (-7 \cdot 10^2)$
л) $(4{,}2 \cdot 10^6) : (-6 \cdot 10^2)$
м) $(5{,}4 \cdot 10^6) : (1{,}2 \cdot 10^{-3})$
н) $(8 \cdot 10^{20}) : (5 \cdot 10^{-2})$

78 Довжина та ширина сторін прямокутного поля дорівнює $7{,}5 \cdot 10^2$ м і $3{,}7 \cdot 10^2$ м. Обчисліть його площу та периметр, подавши результат у стандартному вигляді.

79 Швидкість світла становить 300 000 000 м/с. Обчисліть відстань у метрах, яку світло долає за 1 хвилину. Відповідь запишіть у стандартному вигляді.

80 Одна склянка свіжого апельсинового соку містить $1{,}12 \cdot 10^5$ калорій. Скільки кілокалорій отримує щотижня Христина із цього напою, якщо щодня випиває одну таку склянку соку? Якби дівчина щодня пила яблучний сік, то наскільки змінилася б кількість отриманих кілокалорій? (Одна склянка яблучного соку містить $1{,}08 \cdot 10^5$ калорій.)



1 ккал = 1000 кал

81 Світове виробництво зернових у 2023 році оцінюється на рівні $3 \cdot 10^9$ т. Україна в цьому ж році зібрала $6 \cdot 10^7$ т зернових. Визначте, у скільки разів кількість зібраного урожаю у світі більша за кількість врожаю зернових в Україні.

82 Обчисліть.

а) $(8{,}1 \cdot 10^{12}) : (9 \cdot 10^4) - (7{,}6 \cdot 10^7)$
б) $(2{,}8 \cdot 10^{13}) \cdot (1{,}2 \cdot 10^6) - (7{,}8 \cdot 10^{18})$
в) $(1{,}38 \cdot 10^{17}) + (1{,}17 \cdot 10^{17} - 3{,}62 \cdot 10^{16})$
г) $(3{,}46 \cdot 10^9 - 3{,}6 \cdot 10^9) \cdot (9 \cdot 10^8)$
д) $-1{,}71 \cdot 10^{13} + (5{,}5 \cdot 10^{14} + 7{,}5 \cdot 10^{13})$
е) $1{,}93 \cdot 10^{17} \cdot (2 \cdot 10^{-7} : 5 \cdot 10^7)$

83 Подайте результат у стандартному вигляді. Якщо $k = 9 \cdot 10^4$, то яким є:

а) $6k$;
б) k^2?

84 Знайдіть значення a^2 і b^3, якщо $a = 2{,}4 \cdot 10^{-4}$, $b = 4 \cdot 10^{-2}$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Короткий огляд розділу

1 $ax = b$ — загальний вигляд лінійного рівняння з однією змінною, де a і b — деякі числа, x — змінна. Лінійне рівняння може не мати коренів, мати один або безліч коренів. Лінійні рівняння можна використовувати як модель для розв'язування сюжетних і навіть практичних задач.

2 $ax + by = c$ — загальний вигляд лінійного рівняння з двома змінними, де a, b, c — деякі числа, x та y — змінні ($a \neq 0$, $b \neq 0$). Графік лінійного рівняння з двома змінними — пряма.

3 Систему двох лінійних рівнянь з двома змінними можна розв'язати графічним способом, способом підстановки, способом додавання.

4 Число, піднесене до нульового степеня, дорівнює одиниці. $a^0 = 1$, де $a \neq 0$.

5 Степенем із цілим від'ємним показником числа a називають дріб із чисельником 1 та знаменником, у якому число a з додатним показником.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, де $a \neq 0$, n — натуральне число.

6 Дріб, піднесений до степеня із цілим від'ємним показником, дорівнює дробу, оберненому до цього, з додатним показником.

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, n — натуральне число.

7 Для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$ та будь-яких цілих m та n правильно, що:

Властивості	Приклади
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$2^9 : 2^4 = 2^{9-4} = 2^5$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 7)^3 = 2^3 \cdot 7^3$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$	$\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2^2}{5^2} = \frac{4}{25}$
$a^0 = 1$, $a \neq 0$	$5^0 = 1$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$	$8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, $a \neq 0$, $b \neq 0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

8 За допомогою стандартного вигляду числа можна записати будь-яке число у вигляді добутку $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$ і n — ціле число.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Перевірте свої досягнення

1 Обчисліть: $27{,}5 \cdot 10^{-3} + 3{,}2 \cdot 10^{-2}$.

а) $5{,}95 \cdot 10^{-2}$ б) $6{,}75 \cdot 10^{-3}$ в) $2{,}75 \cdot 10^{2}$ г) $6{,}0 \cdot 10^{3}$

2 Виконайте дії: $\dfrac{54 \cdot 10^{-3}}{9 \cdot 10^{-2}} - \dfrac{2{,}4 \cdot 10^{5}}{0{,}08 \cdot 10^{7}}$.

а) $30 \cdot 10^{2}$ б) $3 \cdot 10^{-2}$ в) $3 \cdot 10^{-3}$ г) $3 \cdot 10^{-1}$

3 Подайте 337 000 у стандартному вигляді.

а) $33{,}7 \cdot 10^{5}$ б) $3{,}37 \cdot 10^{5}$ в) $337 \cdot 10^{5}$ г) $0{,}00337 \cdot 10^{5}$

4 У рівнянні $ax + by = 37$ коефіцієнти a і b — цілі числа. Виберіть пару чисел, яка може бути розв'язком цього рівняння.

а) (5; 9) б) (9; 6) в) (6; 36) г) (1; 36)

5 Оберіть пару чисел, яка є розв'язком системи лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ -2x + 5y = 10. \end{cases}$$

а) (0; 2) б) (2; 0) в) (2; 2) г) (0; 0)

6 Знайдіть корінь рівняння $\dfrac{3m - 2}{2} - \dfrac{m - 2}{3} = 2$.

а) 2 б) 3 в) 4 г) 5

7 Обчисліть: $(4^{-3})^2 : (4^{-5})^2 : 4^3$.

а) 4 б) 5 в) 6 г) 7

8 Розв'яжіть задачу.

Параолімпійська легкоатлетка Анастасія Москаленко 1 вересня 2021 року виборола золоту медаль, встановивши світовий рекорд у штовханні ядра. Їй вдалось покращити свій попередній рекорд 2020 року на 0,69 м. Знайдіть довжину рекорду 2020 року, якщо здобутий світовий рекорд у 2021 році становив 7,61 м.



а) 7,61 м б) 8,3 м в) 6,92 м г) 6,02 м

9 Спростіть вираз $\left(\dfrac{m^2}{3n^2}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{3m}{2n^2}\right)^4$.

а) $\dfrac{4}{5}m^6n^{-10}$ б) $\dfrac{7}{10}m^8n^{12}$ в) $\dfrac{9}{16}m^8n^{-12}$ г) $\dfrac{1}{3}m^5n^{-10}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Проєктна робота «Степінь у різних галузях знань»

Крок ① Об'єднайтеся у 4 групи за інтересами. Розподіліть ролі. Підготуйте необхідні матеріали (картон, ножиці, кольорові олівці).

Крок ② За допомогою літератури, інтернет-джерел знайдіть необхідні дані, зображення та виконайте завдання.

Група 1. Біологія

1. Відомо, що маса найменшої у світі пташки — колібрі становить $1{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг. А дрохва важить $2 \cdot 10$ кг, це найбільша у світі пташка, що літає. Представте маси пташок у звичайній формі та визначте, на скільки дрохва важча, ніж колібрі.

2. Знайдіть масу найбільшого та найменшого звіра в Україні. Представте їх маси у стандартному вигляді числа. Порівняйте маси найбільшого і найменшого звіра в Україні.

Колібрі



$1{,}7 \cdot 10^{-3}$ кг

Дрохва



$2 \cdot 10$ кг

3. Створіть 20 карток для гри «Знайдіть пару» з теми «Степінь із цілим показником»: 10 карток повинні містити вирази зі степенями, а 10 — значення виразів.

Зразок

$(-1)^{-2}$	7^{-1}	8^{-3}	$\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$	$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-3}$
1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{25}$	$-\frac{1}{64}$

Група 2. Географія

1. Відомо, що площа басейну найбільшої річки в Україні — річки Дніпро становить $5{,}04 \cdot 10^5$ км^2. А площа басейну річки Амазонка — $6{,}9 \cdot 10^6$ км^2, це найбільша у світі річка. Представте площі басейнів річок у звичайній формі та визначте, на скільки площа басейну річки Амазонка більша за площу басейну річки Дніпро.

2. Знайдіть висоту найвищої точки України та світу (відносно рівня моря). Представте їх висоту у стандартному вигляді числа. Порівняйте висоти найвищої точки в Україні та світі.

р. Дніпро



$5{,}04 \cdot 10^5$ км^2

р. Амазонка



$6{,}9 \cdot 10^6$ км^2

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

3. Створіть 20 карток для гри «Знайдіть пару» з теми «Степінь із цілим показником»: 10 карток повинні містити вирази зі степенями, а 10 — значення виразів.

Група 3. Астрономія

1. Відомо, що відстань від планети Земля до Сонця становить $1{,}496 \cdot 10^8$ км. Найдальша планета від Сонця — Плутон, відстань від Плутона до Сонця становить $5{,}9 \cdot 10^8$ км. Представте відстані планет до Сонця у звичайній формі та визначте, на скільки планета Земля ближча до Сонця, ніж Плутон.

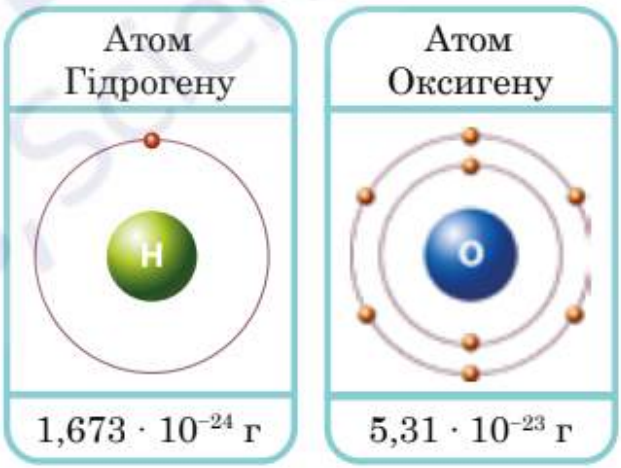


2. Щоб подолати силу тяжіння Землі й опинитися на орбіті, ракета повинна летіти з першою космічною швидкістю, а щоб «відірватися» від земного тяжіння та полетіти до Марса, ракета повинна летіти з другою космічною швидкістю. Знайдіть першу та другу космічні швидкості. Представте ці швидкості у м/с та у стандартному вигляді числа.

3. Створіть 20 карток для гри «Знайдіть пару» з теми «Степінь із цілим показником»: 10 карток повинні містити вирази зі степенями, а 10 — значення виразів.

Група 4. Хімія

1. Відомо, що маса атома Гідрогену становить $1{,}673 \cdot 10^{-24}$ г, а маса атома Оксигену — $5{,}31 \cdot 10^{-23}$ г. Представте маси атомів у звичайній формі та визначте, на скільки Гідроген легший, ніж Оксиген.



2. Знайдіть найвищу та найнижчу температуру, створену людиною. Представте ці температури у стандартному вигляді числа. Хто, де і за яких умов отримав такі показники?

3. Створіть 20 карток для гри «Знайдіть пару» з теми «Степінь і цілим показником»: 10 карток повинні містити вирази зі степенями, а 10 — значення виразів.

Крок ③ Систематизуйте зібрані дані та продемонструйте іншим групам у довільній формі (презентація, відео, плакат, доповідь, схема, малюнок, діаграма) відповідно до завдань. Обміняйтеся створеними картками з іншими групами та пограйте у гру «Знайдіть пару» на швидкість.

Крок ④ Обговоріть підсумки проєкту з усім класом.

Що цікавого дізналися? Що вразило найбільше? Що було складним?

Над чим ще треба попрацювати? Яка група найшвидше зібрала пари карток?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

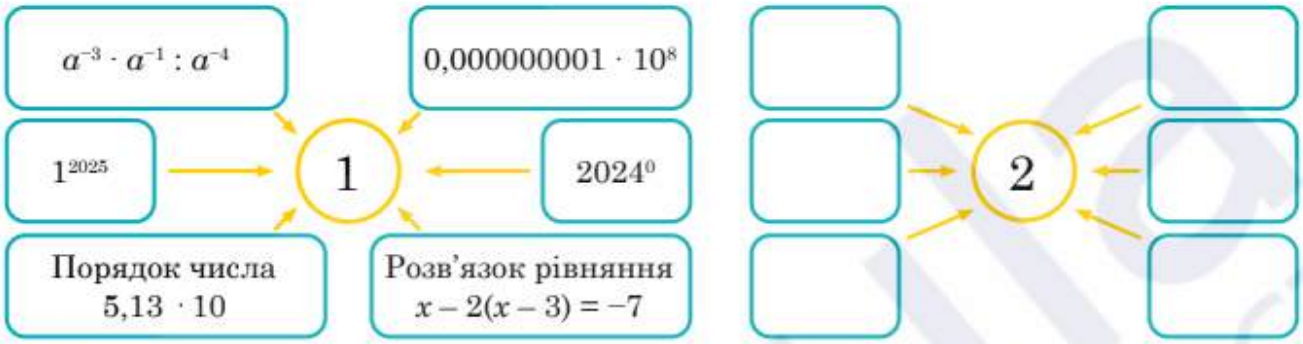
Додаткові завдання до розділу

85 За зразком підберіть такі запитання, відповіддю на які є подане число.

Зразок

1 — це відповідь на питання. Які можуть бути запитання?

2 — це відповідь на питання. Які можуть бути запитання?



86 Для того, щоб збудувати дах будинку, Тарас розглядає різні варіанти балок, що мають форму прямокутного паралелепіпеда з вимірами 4 м, 20 см, 20 см. Знайдіть масу однієї дубової, соснової та ясенової балки за формулою праворуч та густиною в таблиці. Дізнайтеся вартість шести балок з дуба, шести — із сосни, шести балок з ясена за цінами, поданими в таблиці.

	Густина, ρ, кг/м^3	Маса, m, кг	Ціна, грн/м	Вартість, грн
Дубові балки	$6{,}9 \cdot 10^2$		1200	
Соснові балки	$4{,}2 \cdot 10^2$		900	
Ясенові балки	$7 \cdot 10^2$		1100	

$m = \rho \cdot V$,
де m — маса,
ρ — густина,
V — об'єм

87 EN Match the pairs.

1	9^2	2	$9 \cdot 10^{-3}$	3	9^2	4	9^2
A	power	B	exponential notation	C	exponent	D	base

88 EN Solve the problem.

The side length of a square is 2 cm greater than the width of a rectangle. The length of the rectangle is three times its width. Let the width of the rectangle be x cm.

length — довжина
width — ширина
find the unknown value — знайдіть невідому величину

a) Express the given information in terms of one unknown value.

b) If the two shapes have the same perimeter, find the unknown value.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2

Раціональні вирази

У повсякденній діяльності ми часто використовуємо раціональні вирази, хоч і не завжди це усвідомлюємо. Ми можемо скористатися ними, щоб виразити площу будівлі або швидкість об'єкта, щоб зібрати комп'ютер чи телефон, або щоб створити комп'ютерну графіку чи анімацію. Також і для розв'язування реальних задач застосовують раціональні вирази, наприклад для підрахунку очок у шкільному баскетбольному матчі.

$$ax^2 + bx + c$$

$$12y : 4x = \frac{12y}{4x}$$

$$-y^3a^5 + 8y$$

У цьому розділі ми:

- повторимо, що таке одночлени і многочлени;
- пригадаємо формули скороченого множення;
- ознайомимося з раціональними дробами та дізнаємось основну властивість раціонального дробу;
- виконуватимемо додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня та ділення раціональних дробів;
- розв'язуватимемо раціональні рівняння, а також задачі за допомогою раціональних рівнянь.

Ключові слова

- Одночлен (*monomial*)
- Многочлен (*polynomial*)
- Формули скороченого множення (*special products*)
- Тотожність (*identity*)
- Раціональний дріб (*algebraic fraction*)
- Раціональні рівняння (*rational equations*)

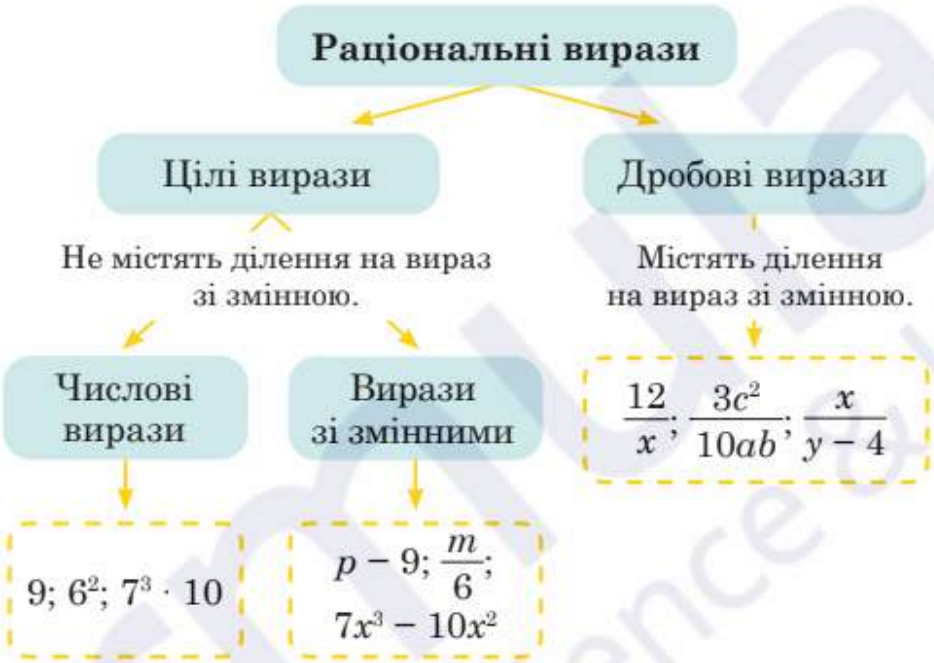
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2 Раціональні вирази

2.1. Раціональні вирази. Одночлени і многочлени



Раціональні вирази ще називають **алгебраїчними виразами**.



Дії з одночленами та многочленами



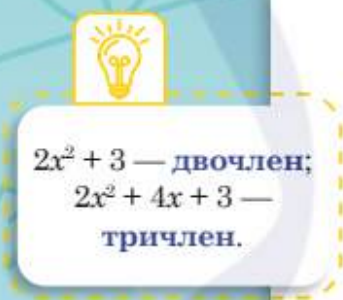
Поміркуйте!
Чи є вираз $4t^{-2}pz^3$ одночленом?

Вираз, що складається із чисел, змінних та їх степенів, називається одночленом.

$3x^2$, $4a^3b$ і $-\frac{1}{5}x^{-2}z^3y$ — **одночлени**.

Вираз, що складається із суми кількох одночленів, називають многочленом.

$3x^2 - 4a^3b$, $-\frac{7}{8}x^{-2}z^3y + xy$ — **многочлени**.



$2x^2 + 3$ — **двочлен**;
$2x^2 + 4x + 3$ — **тричлен**.

Одночлен вважають окремим видом многочлена.

Переставна властивість

$a + b = b + a \quad a \cdot b = b \cdot a$

Сполучна властивість

$(a + b) + c = a + (b + c) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Розподільна властивість

$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(a + b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Виконуючи додавання та віднімання многочленів, спочатку потрібно розкрити дужки, а тоді звести подібні доданки. Розкриваючи дужки, перед якими стоїть знак «–», пам'ятайте, що потрібно змінити знаки на протилежні.

Приклад

1 Спростіть вирази.

а) $(5x^2 + 9x^2) + (12x^2 - x)$ б) $(13x^2 + 8x + 1) - (13x^2 + 7x - 4)$

Розв'язання

$-(a + b) = -a - b$

а) $(5x^2 + 9x^2) + (12x^2 - x) = 5x^2 + 9x^2 + 12x^2 - x = 17x^2 + 8x$

б) $(13x^2 + 8x + 1) - (13x^2 + 7x - 4) = 13x^2 + 8x + 1 - 13x^2 - 7x + 4 = x + 5$

Приклад

2 Розкрийте дужки.

а) $3(y^3x + xk - 2l)$ б) $-7z(4x^3 - bzy - y + 9z^4)$

Розв'язання

$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

а) $3(y^3x + xk - 2l) = 3y^3x + 3xk - 6l$

б) $-7z(4x^3 - bzy - y + 9z^4) = -28zx^3 + 42z^2y + 7zy - 63z^5$

Приклад

3 Розкрийте дужки та спростіть вирази.

а) $(2y - 6)(y - 4)$ б) $(x - 11)(4x^2 + 5x + 6)$

Розв'язання

$(x + y)(z + w) = xz + xw + yz + yw$

а) $(2y - 6)(y - 4) = 2y^2 - 8y - 6y + 24 = 2y^2 - 14y + 24$

б) $(x - 11)(4x^2 + 5x + 6) = 4x^3 + 5x^2 + 6x - 44x^2 - 55x - 66 =$
$= 4x^3 - 39x^2 - 49x - 66$

Доведення тотожностей

Як можна довести тотожність?

1. Ліву частину рівності тотожними перетвореннями звести до правої частини.
2. Праву частину рівності тотожними перетвореннями звести до лівої частини.
3. Спростити обидві частини рівності та перевірити, чи вони тотожні.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

4 Доведіть тотожність.

$b - 3(3 + b) = 4(1 - b) - (13 - 2b)$

Рівність, ліва і права частина якої є тотожно рівними виразами, називається **тотожністю.**

Розв'язання

$b - 3(3 + b) = 4(1 - b) - (13 - 2b)$

$b - 9 - 3b = 4 - 4b - 13 + 2b$ ← Спрощуємо обидві частини рівності та перевіряємо, чи ця рівність є тотожністю.

$-9 - 2b = -9 - 2b$

Відповідь. Тотожність доведено.

Попрактикуйтеся

89 Виберіть лише дробові раціональні вирази.

З букв, що позначають лише дробові раціональні вирази, складіть назву медалі (аналог Нобелівської премії в математиці), яку отримала Марина В'язовська, друга жінка в історії, що є власницею цієї нагороди. Математикиня отримала цю медаль за розв'язання задачі про найщільніше пакування сфер у 8-вимірному просторі.

Ф	$\frac{12}{x}$	Б	5^2	І	$\frac{3}{x-7}$
О	$\frac{9}{15}$	Л	$\frac{4}{10t-7}$	Д	$\frac{4-p}{yx^2}$
Г	$\frac{5^2x}{7}$	С	$\frac{-7z}{x^2-y^2}$	А	$\frac{x^2-4}{x}$



90 Спростіть вирази.

а) $x^2 + 4x + 3 - x^2 + 5x - 17$

б) $6 - 5x + 2x^2 + 4x^2 + 8x + 20$

в) $\left(x^2 + \frac{x}{6}\right) + (19x^2 - 4x)$

г) $(2x^2 + 9x + 5) - (-12x^2 + 7x - 1)$

91 Розкрийте дужки та спростіть вирази.

а) $6(x^2 - 3) + 4(2x^2 + 5)$

б) $12(5x^2 + 3x - 7) + 5(-2x^2 - x + 1)$

в) $-(3a^2 + 8a - 1) + 2(-4a^2 + 2a + 11)$

г) $7(-2x^2 + 3x - 4) - 6(-3x^2 + 2x - 18)$

д) $-(9y^2 + 12y - 6) - 3\left(-y^2 + \frac{y}{7}\right)$

е) $2(x^2 - 7) + 4(-3x - 2x^2 + 2) + 9(-5x + 2x^2)$

ж) $7(a^2 + 14a - 9) + 5(-4a^2 - 6a + 8) - 6(4a^2 - 4a - 1)$

Пам'ятайте правила розкриття дужок!

$+ (a - b) = + a - b$

$- (a - b) = - a + b$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

92 Спростіть вирази.

а) $(3 + 5x)(3 - 5x)$ б) $(8a - 6)(a - 7)$ в) $(x - 9y)(x - 9y)$
г) $4(2x - 3y)(7x - y)$ д) $5b(6b + c)(9a + 8)$ е) $-z(3x + 4y)(-5a - 6b)$

93 Спростіть вирази.

а) $(2x + 1)(3x + 6x + 7)$ б) $(4y - 5)(2y - 3x + 9)$
в) $(2k + 7l + 13)(k - 6l)$ г) $5x^2 - (7x + 3)(7x - 3)$
д) $6(x + 2)(x - 3) - 9(4x + 7)$ е) $(5x + 4y)(-3t - u) - (7x + 6y)(7t - 3u)$

94 Доведіть тотожності.

а) $-4(4 - 5x) = 12x - (-8x + 16)$
б) $4(a - b - c) + 5(a - b) + 4c = 9(a - b)$
в) $5(0{,}5 + 2a) - 5(1{,}1 - a) = 15a - 3$
г) $4{,}5n + \left(1\frac{1}{3}\,m + 2{,}5n\right) - 0{,}5m = 7\left(n - \frac{1}{7}m\right) + 1\frac{5}{6}m$

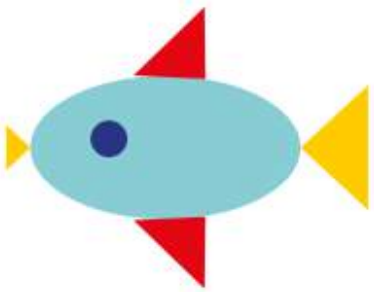
95 За даними в таблиці знайдіть пройдений шлях. Обчисліть значення s, якщо $x = 3$.

$s = v \cdot t$

Швидкість, v, км/год	Час, t, год	Шлях, s, км
$x + 10$	2	
$18x - 1$	5	
$33x - 15$	$2x + 1$	
$15 + 27x$	$5x - 3$	

96 Складена фігура складається з квадрата і трикутника. Знайдіть загальну площу складеної фігури, якщо площі квадрата і трикутника дорівнюють відповідно $(a^2 - 4a + 5)$ см^2 і $(2a^2 + 7a + 1)$ см^2.

97 Знайдіть загальну площу складеної фігури «рибки», якщо відомо, що площа овала — $(3x^2 + x + 2)$ см^2, площа червоних трикутників — $(x^2 + 3x + 1)$ см^2, жовтого більшого трикутника — $(2x^2 + x + 3)$ см^2, жовтого меншого — $(x^2 + 4)$ см^2 та площа круга — $(x^2 + x)$ см^2.



98 Довжина школи дорівнює $(5x - 9)$ м, а ширина — $(x + 3)$ м.

а) Знайдіть периметр школи.
б) Знайдіть площу школи.
в) У школі є квадратна кімната зі стороною $(x - 4)$ м. Знайдіть площу решти приміщень школи.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2.2. Розкладання многочленів на множники

Розкладання многочленів на множники — це перетворення виразу на тотожно рівний йому вираз у вигляді добутку двох або більше множників. Такі дії допомагають спростити вирази. Існують різні способи розкладання многочленів на множники.

Перший і найпростіший — це **винесення спільного множника** за дужки. За розподільною властивістю маємо:

$$10x^2 + 35x - 95xy = 5x(2x + 7 - 19y)$$

Інший спосіб розкладання многочленів на множники полягає в об'єднанні їхніх членів у групи, які мають спільний множник. Його називають **методом групування**.

$$xz + xw + yz + yw =$$
$$= (xz + xw) + (yz + yw) = x(z + w) + y(z + w) = (x + y)(z + w)$$

Метод групування протилежний до властивості:

$(x + y)(z + w) =$

$= xz + xw + yz + yw$

Приклад 1

Розкладіть многочлен на множники.

а) $4(5x + y) - 9a(5x + y)$

б) $cx(a - 2b) + cy(a - 2b)$

в) $14k + 4l - 21km - 6lm$

г) $2su - 18sv - 3tu + 27tv$

Розв'язання

а) $4(5x + y) - 9a(5x + y) = (5x + y)(4 - 9a)$

б) $cx(a - 2b) + cy(a - 2b) = c(a - 2b)(x + y)$

в) $14k + 4l - 21km - 6lm = (14k + 4l) - (21km + 6lm) =$
$= 2(7k + 2l) - 3m(7k + 2l) = (7k + 2l)(2 - 3m)$

г) $2su - 18sv - 3tu + 27tv = (2su - 18sv) - (3tu - 27tv) =$
$= 2s(u - 9v) - 3t(u - 9v) = (u - 9v)(2s - 3t)$

Іноді під час розкладання многочлена на множники використовують декількаспособів, тому спочатку перевірте наявність спільного множника, а потім застосовуйте інші способи.

Формули скороченого множення

Для розкладання многочленів на множники можна застосовувати вже відомі нам формули скороченого множення алгебраїчних виразів.

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ — квадрат суми
$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ — квадрат різниці
$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ — різниця квадратів

Формули скороченого множення працюють в обох напрямках.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

2 Розкладіть многочлен на множники, використовуючи формули скороченого множення.

а) $x^2 + 14x + 49$ б) $36 + 60xy + 25x^2y^2$ в) $x^2 - 18x + 81$
г) $x^2 - 4$ д) $64x^2 - 25y^2$ е) $9x^2 - (2x - 3)^2$

Розв'язання

Поміркуйте!
$(x - 9)^2 = (9 - x)^2$?

а) $x^2 + 14x + 49 = x^2 + 2 \cdot 7 \cdot x + 7^2 = (x + 7)^2$

б) $36 + 60xy + 25x^2y^2 = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot 5xy + (5xy)^2 = (6 + 5xy)^2$

в) $x^2 - 18x + 81 = x^2 - 2 \cdot 9x + 9^2 = (x - 9)^2$

г) $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

д) $64x^2 - 25y^2 = (8x)^2 - (5y)^2 = (8x + 5y)(8x - 5y)$

е) $9x^2 - (2x - 3)^2 = (3x + (2x - 3))(3x - (2x - 3)) =$
$= (3x + 2x - 3) \cdot (3x - 2x + 3) = (5x - 3)(x + 3)$

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сума кубів
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — різниця кубів

Приклад

3 Розкладіть многочлен на множники, використовуючи формули скороченого множення.

а) $m^3 + 1$ б) $8 - x^3$ в) $1000a^3b^3 + 27$ г) $216 - c^6d^3$ д) $(w - 2)^3 + 125$

Розв'язання

а) $m^3 + 1 = (m + 1)(m^2 - m + 1)$

б) $8 - x^3 = 2^3 - x^3 = (2 - x)(2^2 + 2x + x^2) = (2 - x)(4 + 2x + x^2)$

в) $1000a^3b^3 + 27 = (10^3a^3b^3 + 3^3) = (10ab + 3)\,(100a^2b^2 - 30ab + 9)$

г) $216 - c^6d^3 = 6^3 - (c^2)^3d^3 = (6 - c^2d)(36 + 6c^2d + c^4d^2)$

д) $(w - 2)^3 + 125 = (w - 2)^3 + 53 = ((w - 2) + 5)((w - 2)^2 - 5(w - 2) + 5^2) =$
$= (w + 3)(w^2 - 4w + 4 - 5w + 10 + 25) = (w + 3)(w^2 - 9w + 39)$

Як розкласти на множники тричлен виду $ax^2 + bx + c$?

$x^2 - 5x - 6$

$-5x = x - 6x$
$x^2 + x - 6x - 6$
$(x^2 + x) + (-6x - 6) =$
$= x(x + 1) - 6(x + 1) =$
$= (x + 1)(x - 6)$

Крок 1. Потрібно представити один із членів виразу у вигляді суми, щоб у виразі було 4 члени, а тоді використати метод групування.

Крок 2. Представимо доданок $-5x$ у вигляді суми $x - 6x$.

Крок 3. Підставимо отриманий вираз у початковий.

Крок 4. Застосуємо метод групування, щоб розкласти вираз на множники.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

У такий спосіб не завжди легко вирішити, який член представляти і як представляти. Тому зовсім скоро (у розділі 5) ви дізнаєтеся про ще один швидкий спосіб розкладання тричленів такого вигляду на множники.

Приклад

4 Доведіть тотожність.

$(4x + 3y)^2 - (3x + 4y)^2 = 7(x + y)(x - y)$

Спростіть обидві частини тотожності й перевірте, чи вони рівні.

Розв'язання

$(4x + 3y)^2 - (3x + 4y)^2 = 7(x + y)(x - y)$

$(4x)^2 + 2(4x)(3y) + (3y)^2 - (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 4y + (4y)^2 = 7(x^2 - y^2)$

$16x^2 + 24xy + 9y^2 - (9x^2 + 24xy + 16y^2) = 7x^2 - 7y^2$

$16x^2 + 24xy + 9y^2 - 9x^2 - 24xy - 16y^2 = 7x^2 - 7y^2$

$7x^2 - 7y^2 = 7x^2 - 7y^2$

Відповідь. Тотожність доведено.

Попрактикуйтеся

99 Розкладіть многочлен на множники.

а) $2(x + 3y) - 9b(x + 3y)$
б) $(8a - b)k + (8a - b)l$
в) $54ak - 48al - 9k + 8l$
г) $24xz - 6z + 4yx - y$

100 Розкладіть многочлен на множники, використовуючи формули скороченого множення.

а) $x^2 + 4 - 4x$
б) $12x^2 - 36x + 27$
в) $9x^2 + 12x + 4$
г) $25x^2 + 4y^2 - 20xy$
д) $49x^2 + 140xy + 100y^2$
е) $144k^2 + 72kl + 9l^2$

101 Розкладіть на множники вирази, скориставшись формулами скороченого множення. Спростіть їх.

а) $(x + 4y)^2 - (x - 4y)^2$
б) $(6a + b)^2 + (7a + 8b)^2$
в) $(3k - 10l)^2 + (12k - 3l)(12k + 3l)$
г) $(p + 5q)^2 - (2p + 6q)(2p - 6q)$

102 Виконайте обчислення, скориставшись формулами скороченого множення.

а) $153^2 - 147^2$
б) 299^2
в) 4019^2
г) 3005^2
д) $307 \cdot 293$
е) $(16 - 15)(16 + 15)$
ж) $492 \cdot 508$
и) $109{,}6^2$
к) $95^2 + 950 + 25$

103 Розкладіть на множники вирази.

а) $100x^2 + 4xy + \frac{y^2}{25}$
б) $81 + 90kl + 25k^2l^2$
в) $12x^2 - 48xy + 48y^2$
г) $4x^3 + 56x^2y + 196xy^2$
д) $5x^3 - 80x$
е) $16a^2 - (2a - 8)^2$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

104 Виконайте обчислення, скориставшись формулами скороченого множення. Заповніть таблицю літерами у вказаному порядку та дізнайтеся назву старовинного українського струнно-щипкового інструмента.

1 $117^2 - 103^2$ 2 $\frac{28^2 - 18^2}{46}$ 3 $\frac{87^2 - 13^2}{57^2 - 43^2}$

4 $399^2 + 798 + 1$ 5 $62^2 - 248 + 4$

1	2	3	4	5

О 10 З 160 000 Б $5\frac{2}{7}$ А 3600 К 3080

105 Розкладіть на множники вирази.

а) $(x + 2)^2 - 6(x + 2) + 9$
б) $9(2a - b)^2 - 6a(2a - b) + a^2$
в) $(a^2 - 2ac + c^2) - 4a^2b^2$
г) $27(x + y)^2 - 3(x - 2y)^2$
д) $4x^2 + 20xy + 25y^2 - 1$
е) $121 - (16a^2 + 48ab + 36b^2)$

106 Розкладіть многочлен на множники, використовуючи формули скороченого множення.

а) $t^3 + 64$ б) $1 - x^3$ в) $27a^3 + 0{,}001$
г) $216c^6d^3 - 1000z^3$ д) $343 - (a + 6)^3$ е) $125b^3 - (7 + c)^6$

107 Доведіть тотожності.

а) $(2x - 1)(2x + 1) - (2x - 3)^2 = 12x - 10$
б) $(a + 3)^2 + (a - 3)^2 - 2(a + 3)(a - 3) = 36$
в) $2 + (x - 2)^2 = 2(x - 1)^2 - (x + 2)(x - 2)$

108 Квадратне вікно має скло зі стороною $4y$ см і дерев'яну раму шириною 2 см навколо скла.

а) Складіть вираз для знаходження площі вікна з рамою.
б) Знайдіть площу скла, якщо площа вікна становить 25 600 см^2.

109 В шкільному спортзалі, готуючись до проведення змагань, розставили стільці у $(a + 5)$ рядів по $(a + 5)$ стільців у кожному ряду. Скільки всього стільців для глядачів та глядачок розставили у спортзалі?

а) Складіть вираз для знаходження кількості стільців.
б) Знайдіть значення складеного виразу, якщо $a = 3; 4; 5$.

110 Розкладіть на множники вирази.

а) $x^4 - y^4$ б) $256a^4 - 16$ в) $x^2 - 3x + 2$ г) $6 - 5x + x^2$

111 Розв'яжіть рівняння.

а) $(2x - 3)^2 - (2x + 4)^2 = 21$ б) $x^2 + 4(x + 1) = 0$
в) $(2y + 1)(y + 7) + (3y + 2)(2y + 1) = 0$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2

2.3. Раціональні дроби

Відомо, що звичайний дріб має вигляд $\frac{a}{b}$, де a і b — цілі числа та $b \neq 0$. Раціональні дроби містять у чисельнику та знаменнику многочлени. Вираз вигляду $\frac{a}{b}$, де a і b — многочлени, називають **раціональним дробом**.

$\frac{5a+9b}{3ab}$, $\frac{x}{x-4}$, $\frac{4(x+zk)}{kx^2}$, $\frac{18kl}{(x+7)(v+33)^5}$ — раціональні дроби.

Знаменник дробу не може бути 0, тому маємо виключити всі значення, які перетворюють знаменник на 0. Маємо $\frac{x}{x-4}$, отже $x-4 \neq 0$, тому $x \neq 4$. То вираз $\frac{x}{x-4}$ має зміст при всіх значеннях змінної x, крім 4. Усі значення змінних, при яких вираз має зміст, називаються допустимими значеннями змінних у виразі.

Поміркуйте!
Що відбувається з $\frac{1}{n}$, коли $n = 0$?

Усі допустимі значення змінних у виразі утворюють **область допустимих значень** (ОДЗ) змінних у виразі.

Область допустимих значень ще називають областю визначення.

Приклад 1

Знайдіть допустимі значення змінних у виразах.

а) $\frac{m+2}{5}$ б) $\frac{7}{c+2}$ в) $\frac{y+3}{y(y-2)}$ г) $\frac{x+1}{(8-x)(2x+7)}$

Розв'язання

а) $\frac{m+2}{5}$, m — будь-яке число.

б) $\frac{7}{c+2}$, $c+2 \neq 0$, $c \neq -2$.

в) $\frac{y+3}{y(y-2)}$, $y(y-2) \neq 0$, $y \neq 0$ або $y-2 \neq 0$, $y \neq 2$.

г) $\frac{x+1}{(8-x)(2x+7)}$, $(8-x)(2x+7) \neq 0$,
$8-x \neq 0$ або $2x+7 \neq 0$,
$x \neq 8$ або $x \neq -3{,}5$.

Поміркуйте!
Чи має зміст вираз $\frac{x}{x^2+2}$, при $x = -2$?

Умови рівності дробу нулю

$\frac{a}{b} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $a = 0$, $b \neq 0$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

2 При якому значенні y дріб дорівнює нулю?

а) $\frac{y+3}{y-2}$ б) $\frac{(y+1)(y-4)}{y(y+5)}$ в) $\frac{y}{y^2-25}$

Розв'язання

а) $\frac{y+3}{y-2}$, $y+3=0$, $y=-3$

ОДЗ: $y-2\neq 0$, $y\neq 2$.

Відповідь. $y=-3$.

б) $\frac{(y+1)(y-4)}{y(y+5)}$, $(y+1)(y-4)=0$, $y+1=0$ або $y-4=0$, $y=-1$ або $y=4$

ОДЗ: $y(y+5)\neq 0$, $y\neq 0$ або $y+5\neq 0$, $y\neq -5$.

Відповідь. $y=-1$, $y=4$.

в) $\frac{y}{y^2-25}$, $y=0$,

ОДЗ: $y^2-25\neq 0$, $(y-5)(y+5)\neq 0$, $y-5\neq 0$ або $y+5\neq 0$, $y\neq 5$ або $y\neq -5$.

Відповідь. $y=0$.

Попрактикуйтеся

112 Виберіть лише ті дроби, які мають зміст при будь-яких значеннях змінних.

З букв, що позначають вказані дроби, складіть назву міста України, у якому збудували перший в Україні сміттєпереробний завод.

А	$\frac{12}{x}$	Р	$\frac{x+4}{15}$	Ж	$\frac{52z}{7}$
Т	$\frac{5-p}{5^3}$	О	$\frac{-7z}{1^2-2^2}$	И	$\frac{5x^2+10x}{17-7}$
М	$\frac{x^2-1}{5^2+1}$	Н	$\frac{5}{10t-7}$	К	$\frac{4a}{b^2-a^2}$



113 Знайдіть допустимі значення змінних у виразах.

а) $(y-3)^2$ б) $\frac{x-16}{5}$ в) $\frac{3a-9}{a}$ г) $\frac{2-n}{n-1}$

д) $\frac{z+7}{z(z-4)}$ е) $\frac{x}{(x-1)^2}$ ж) $\frac{t+6}{(t+8)(2t-13)}$ и) $\frac{2y-4}{8-4y}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

114 Знайдіть допустимі значення змінних у виразах.

а) $x + 3$ б) $\frac{2x - 4}{x}$ в) $\frac{4a - 10}{a + 3}$ г) $\frac{n - 2}{n^3 - 16n}$

д) $\frac{b + 5}{6b - b^2}$ е) $\frac{c}{(c + 1)^2}$ ж) $\frac{x - 5}{(8 + x)(2x - 11)}$ и) $\frac{2x - 4}{6 - 3x}$

115 При якому значенні y дріб дорівнює нулю?

а) $\frac{y - 3}{y}$ б) $\frac{y + 1}{y^2}$ в) $\frac{y - 5}{y(y + 5)}$

г) $\frac{6y - 1}{3y + 9}$ д) $\frac{(3y + 5)(y + 4)}{(y - 5)^2}$ е) $\frac{(y - 7)(y + 8)}{y^2 - 4y + 4}$

116 При якому значенні x дріб дорівнює нулю? Якщо таке значення одне, то у відповіді запишіть це число. Якщо таких чисел кілька, то у відповіді запишіть їх суму.

а) $\frac{x(x - 5)}{x^2}$ б) $\frac{x}{|x| - 5}$ в) $\frac{(x + 3)(9x - 7)}{x(x + 4)}$

г) $\frac{15x + 4}{x(x - 3)(x + 13)}$ д) $\frac{3x + 5}{x^2 - 14x + 49}$ е) $\frac{(3x - 15)(2 + 4x)}{x(|x| - 5)}$

117 Розрахуйте індекс маси тіла за даними в таблиці, де m — маса (кг), h — зріст (м). Результат округліть до сотих.

Індекс маси тіла — це спеціально розроблена формула бельгійським соціологом і статистиком Адольфом Кетеле, що дає змогу оцінити відповідність маси тіла людини до її зросту. За допомогою цієї формули оцінюють ризики для здоров'я та з'ясовують, чи є маса тіла людини нормальною, недостатньою, зайвою.

Індекс маси тіла	$m = 50$, $h = 1{,}6$	$m = 60$, $h = 1{,}7$	$m = 55$, $h = 1{,}5$
$I = \frac{m}{h^2}$			

118 Доведіть, що дріб $\frac{a^2 - 3a - 18 + 6a}{6 - |a|}$ дорівнює нулю при $a = 3$.

119 Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{4m + n}{n}$, якщо відомо, що $\frac{m - 3n}{n} = 15$;

б) $\frac{2b + k}{k}$, якщо відомо, що $\frac{b - 6k}{k} = 15$.

120 Відомо, що $2a + 6b = 5$. Знайдіть значення виразу $\frac{9b^2 + 6ab + a^2}{2(a + 3b) + 5}$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2.4. Основна властивість раціонального дробу

Під час множення чи ділення чисельника і знаменника дробу на один і той самий вираз, відмінний від нуля, значення дробу не зміниться. Для будь-яких раціональних виразів a, b і c, причому $b \neq 0$, $c \neq 0$, правильно, що:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc} \quad (\cdot c \text{ зверху}, \ \cdot c \text{ знизу}) \qquad \text{і} \qquad \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b} \quad (:c \text{ зверху}, \ :c \text{ знизу})$$

$$\frac{a}{b} = -\frac{-a}{b} = -\frac{a}{-b}$$

Як скоротити раціональний дріб?

Крок 1. Розкласти на множники чисельник і знаменник дробу.

Крок 2. Поділити чисельник і знаменник на їхній спільний множник.

Крок 3. Записати отриманий результат.

Спільні множники — це однакові вирази, наприклад $(a - b)$ і $(a - b)$.

Приклад 1

Скоротіть дріб: а) $\frac{24xy}{16}$; б) $\frac{x^2y}{xy}$; в) $\frac{5a - 20}{4a - a^2}$.

Розв'язання

а) $\frac{24xy}{16} = \frac{3xy}{2}$

б) $\frac{x^2y}{xy} = x$

в) $\frac{5a - 20}{4a - a^2} = \frac{5(a - 4)}{a(4 - a)} = \frac{-5(4 - a)}{a(4 - a)} = -\frac{5}{a}$

Приклад 2

Скоротіть дріб: а) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9}$; б) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - a - b - b^2}$.

Розв'язання

а) $\frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} = \frac{(x - 3)^2}{(x + 3)(x - 3)} = \frac{x - 3}{x + 3}$

б) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - a - b - b^2} = \frac{a^2 - b^2}{(a^2 - b^2) + (-a - b)} =$

$= \frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)(a - b) - (a + b)} = \frac{(a + b)(a - b)}{(a + b)(a - b - 1)} =$

$= \frac{a - b}{a - b - 1}$

! Ми не можемо скоротити чисельник і знаменник на вираз $(a - b)$, бо він не є множником.

$\frac{a - b}{a - b - 1} \neq \frac{1}{-1}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

3 Використовуючи основну властивість дробу, зведіть дроби до нового знаменника.

а) $\frac{3m}{4x^3y^6}$ і $\frac{2n^2}{3x^6y^3}$ до знаменника $12x^6y^6$

б) $\frac{1}{m-n}$ і $\frac{1}{m+n}$ до знаменника m^2-n^2

Розв'язання

а) $\frac{3m}{4x^3y^6}=\frac{3m\cdot 3x^3}{4x^3y^6\cdot 3x^3}=\frac{9mx^3}{12x^6y^6}$ $\quad\frac{2n^2}{3x^6y^3}=\frac{2n^2\cdot 4y^3}{3x^6y^3\cdot 4y^3}=\frac{8n^2y^6}{12x^6y^6}$

б) $\frac{1}{m-n}=\frac{1\cdot(m+n)}{(m-n)(m+n)}=\frac{m+n}{m^2-n^2}$ $\quad\frac{1}{m+n}=\frac{1\cdot(m-n)}{(m+n)(m-n)}=\frac{m-n}{m^2-n^2}$

Попрактикуйтеся

121 Скоротіть дроби. Упишіть пропущені многочлени.

а) $\frac{9ac}{18ap}=\frac{c}{\square}$ б) $\frac{-4xy^3}{-8y^5}=\frac{\square}{2y^2}$ в) $\frac{b^5t^7}{t^8b^4}=\frac{b}{\square}$

г) $\frac{m(n-3)}{c(n-3)}=\frac{m}{\square}$ д) $\frac{18a^3(k+4)}{27a^2(k+4)^3}=\frac{\square}{3(k+4)^2}$ е) $\frac{5x-15y}{7x-21y}=\frac{5}{\square}$

122 Скоротіть дроби.

а) $\frac{24x^3y}{16x}$ б) $\frac{2x+10y}{2x}$ в) $\frac{b^2+14b+49}{b^2+7b}$

г) $\frac{m(c-b)}{a(b-c)}$ д) $\frac{xy-3y}{x^2-6x+9}$ е) $\frac{a^2-10a+25}{a^2-25}$

123 Скоротіть дроби.

а) $\frac{4a^3b^2c^2}{14a^2b^2c}$ б) $\frac{(x+y)^2(z-w)}{x+y}$ в) $\frac{y^2-1}{y^2+2y+1}$

г) $\frac{4a^2+12a+9}{4a^2-9}$ д) $\frac{14p^3-14p^2q}{21p^2q^2-21pq^3}$ е) $\frac{6c^2+6c+6}{c^3-1}$

ж) $\frac{2k^2-10kn}{k^2-10kn+25n^2}$ и) $\frac{4m+bn-4n-bm}{b^2-8b+16}$ к) $\frac{t^3+1}{t^2-t+1}$

124 Заповніть таблицю, використовуючи основну властивість дробу. Запишіть дроби з новими знаменниками.

Дріб	Новий знаменник	Додатковий множник	Дріб, зведений до нового знаменника
$\frac{x+4y}{3}$	18		
$\frac{a+2b}{ab^2}$	a^2b^2		

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

125 Доповніть рівності многочленами, поданими нижче.

Тоді заповніть таблицю літерами, які позначають многочлени, у вказаному порядку та дізнайтеся прізвище українки, що є володаркою світового рекорду в жіночих стрибках у висоту, чемпіонка Олімпійських ігор 2024 року.

а) $\frac{\square}{6a^5b^9} = \frac{7b^2}{a^4}$ б) $\frac{3m}{5n^7} = \frac{\square}{15m^4n^9}$ в) $\frac{14x^5y^6}{\square} = \frac{7x^3}{3y^2}$

г) $\frac{\square}{c^2-k^2} = \frac{c-k}{c+k}$ д) $\frac{p}{p-2} = \frac{\square}{4-p^2}$ е) $\frac{\square}{x^2-2xy+y^2} = \frac{4}{x-y}$

ж) $\frac{m+n}{7} = \frac{m^2+mn}{\square}$

У	$(c-k)^2$	Г	$6x^2y^4$	А	$9m^5n^2$	Х	$7m$
М	$42ab^{11}$	І	$(4x-4y)$	Ч	$(-p^2-2p)$		

а)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)



126 Скоротіть дроби.

а) $\frac{2x-10}{x^2-4x-5}$ б) $\frac{3b-6}{b^2+2b-8}$ в) $\frac{a^2-5a+6}{a^2-4a+3}$

г) $\frac{m^2-3m-4}{m^2-2m-8}$ д) $\frac{n^3-n^2-n+1}{n^3+n^2-n-1}$ е) $\frac{(p-2)^3}{p^3-4p-2p^2+8}$

127 Запишіть частку у вигляді дробу та скоротіть цей дріб.

а) $(2x-6y):(4x+8y)$ б) $(m^2-n^2):(km+kn)$

в) $(a^5-3a^2):(2a^7-6a^4)$ г) $(x^2-4):(x-2)^2$

128 Використовуючи основну властивість дробу, зведіть дроби до нового знаменника.

а) $\frac{2}{5c}$ і $\frac{c}{c^2}$ до знаменника $5c^2$ б) $\frac{m+n}{3m^3}$ і $\frac{3n-4m}{4m^4}$ до знаменника $12m^4$

в) $\frac{2t}{7t^5a^2}$ і $\frac{a}{14t}$ до знаменника $14t^5a^2$ г) $\frac{b}{6b^3x}$ і $\frac{7}{9b^2x^3}$ до знаменника $18b^3x^3$

129 Зведіть дроби до нового знаменника.

а) $\frac{3x}{6x}$ і $\frac{x}{6x-9}$ до знаменника $6x(2x-3)$ б) $\frac{2a}{a-5}$ і $\frac{4a+1}{a+5}$ до знаменника a^2-25

130 Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{3}{a-b}$, якщо $\frac{3a+3b}{a^2-b^2}=1$; б) $\frac{t+c}{c-t}$, якщо $\frac{tc^2+c^3}{c^3-c^2t}=2$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2.5. Множення дробів. Піднесення до степеня

Щоб помножити дріб на дріб, потрібно **чисельник помножити на чисельник, а знаменник — на знаменник**. У процесі множення потрібно скорочувати спільні множники. У результаті, якщо можливо, скоротити отриманий дріб.

$$\ominus \cdot \ominus = \oplus$$
$$-\frac{a}{b} \cdot -\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \text{ де } b \neq 0,\ d \neq 0.$$

Приклад 1

Виконайте множення.

а) $\frac{5a^2b}{c} \cdot \frac{3c^2}{10ab}$ б) $\frac{3x+9}{x^2} \cdot \frac{(2x)^2}{x^2+3x}$

в) $\frac{x^2-25}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{x+5}$ г) $-\frac{x^3-8}{5x^2-20} \cdot \frac{x+2}{x^2+2x+4}$

Розв'язання

$$\ominus \cdot \oplus = \ominus$$
$$-\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = -\frac{ac}{bd}$$

а) $\frac{5a^2b}{c} \cdot \frac{3c^2}{10ab} = \frac{15a^2bc^2}{10abc} = \frac{3ac}{2}$

б) $\frac{3x+9}{x^2} \cdot \frac{(2x)^2}{x^2+3x} = \frac{3(x+3) \cdot 4x^2}{x^2 \cdot x(x+3)} = \frac{12}{x}$

в) $\frac{x^2-25}{x^2-4} \cdot \frac{x-2}{x+5} = \frac{(x+5)(x-5) \cdot (x-2)}{(x+2)(x-2) \cdot (x+5)} = \frac{(x-5)}{(x+2)}$

г) $-\frac{x^3-8}{5x^2-20} \cdot \frac{x+2}{x^2+2x+4} =$

$= -\frac{(x-2)(x^2+2x+4) \cdot (x+2)}{5(x-2)(x+2) \cdot (x^2+2x+4)} = -\frac{1}{5}$

$$\oplus \cdot \ominus = \ominus$$
$$\frac{a}{b} \cdot -\left(\frac{c}{d}\right) = -\frac{ac}{bd}$$

Піднесення дробу до степеня

Як піднести дріб до степеня?

Крок 1. Піднести до степеня чисельник і результат записати у чисельник дробу.

Крок 2. Піднести до степеня знаменник і результат записати у знаменник.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

2 Піднесіть до степеня.

а) $\left(\frac{5x^6y}{7c^3}\right)^2$ б) $\left(-\frac{3p^2}{2t^5}\right)^3$

Не забудьте піднести до степеня знак перед дробом.
$(-1)^2 = 1$
$(-1)^3 = -1$

Розв'язання

а) $\left(\frac{5x^6y}{7c^3}\right)^2 = \frac{(5x^6y)^2}{(7c^3)^2} = \frac{5^2(x^6)^2y^2}{7^2(c3)^2} = \frac{25x^{12}y^2}{49c^6}$

б) $\left(-\frac{3p^2}{2t^5}\right)^3 = -\frac{(3p^2)^3}{(2t^5)^3} = -\frac{3^3(p^2)^3}{2^3(t^5)^3} = -\frac{27p^6}{8t^{15}}$

Попрактикуйтеся

131 Знайдіть добуток.

а) $\frac{b}{7} \cdot \frac{3}{a}$ б) $\frac{2x}{p} \cdot \frac{4}{3p}$ в) $\frac{t}{4} \cdot \frac{5}{wt}$ г) $\frac{1}{25a} \cdot \frac{5}{a^2}$

д) $\frac{x^3}{9c} \cdot \frac{3}{x}$ е) $\frac{5a^4}{15l} \cdot \frac{3}{a^2}$ ж) $-\frac{6x}{7p} \cdot \frac{28p^4}{12x^2}$ и) $\frac{2y^2}{3} \cdot \left(-\frac{6}{y^3}\right)$

132 Виконайте множення.

а) $\frac{5a}{7} \cdot \frac{28}{15a^2}$ б) $\frac{11x^5}{36p} \cdot \left(-\frac{9p}{22x^3}\right)$ в) $\frac{7}{26a^5b^2} \cdot 13a^2b$

г) $-\frac{1}{15y^4p^5} \cdot \left(-\frac{45y^6p^5}{7}\right)$ д) $-\frac{7x^3}{9c^4} \cdot \frac{36c^7}{35x^3}$ е) $-3mn^2 \cdot \left(-\frac{5m}{9n^3}\right)$

133 Піднесіть дроби до степеня.

а) $\left(\frac{a}{b}\right)^3$ б) $\left(\frac{4c^3}{n}\right)^4$ в) $\left(-\frac{3m^5}{2n^3}\right)^3$ г) $\left(-\frac{3m^2}{n^7}\right)^2$

д) $\left(-\frac{6a^2b}{7}\right)^3$ е) $\left(-\frac{3x^2y^4}{5c^3}\right)^2$ ж) $\left(\frac{5}{wts^4}\right)^3$ и) $\left(-\frac{c^3m^2}{a}\right)^8$

134 Виконайте множення.

а) $\frac{b^2+3b}{7} \cdot \frac{b}{2b+6}$ б) $\frac{3c-a}{9} \cdot \frac{15c^3}{a-3c}$ в) $\frac{5m}{n} \cdot \frac{n^2+nm}{30}$

г) $\frac{x^2-y^2}{6ab} \cdot \frac{36b}{x+y}$ д) $\frac{7a-7b}{12mn} \cdot \left(-\frac{24m}{xa-xb}\right)$ е) $\frac{a^2-2ab+b^2}{xy} \cdot \frac{x^2}{a^2-ab}$

135 Спростіть вирази.

а) $\frac{8t-8k}{t^2+tk+k^2} \cdot \frac{t^3-k^3}{t^2-k^2}$ б) $\frac{x^2-8x+16}{x^2-4x+16} \cdot \frac{x^3+64}{6x-24}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

136 Виконайте множення дробів.

Тоді заповніть таблицю літерами, які позначають результати множення, та дізнайтеся місто, в якому народився Олександр Усик, українець, який є абсолютним чемпіоном світу в першій важкій вазі та важкій вазі. Боксер переміг 7 бійців за титул чемпіона світу в першій важкій вазі, із 22 боїв здобув перемогу у 22 боях.

а) $\frac{14}{x^2} \cdot \frac{x^3}{28}$ б) $\frac{8a^3}{6b} \cdot \frac{12b^2}{4a^2}$ в) $\frac{3m}{5n^7} \cdot \frac{5n^5}{15m^4}$ г) $\frac{25}{c^2k^2} \cdot \frac{ck}{5}$

д) $\frac{ps^2}{-2} \cdot \frac{4}{p^6s}$ е) $\frac{16x}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{4}$ ж) $\frac{m+n}{7} \cdot \frac{14}{m^2+mn}$

и) $\frac{p}{p+2} \cdot \frac{4-p^2}{p^4}$ к) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b} \cdot \frac{1}{a+b}$ л) $\frac{t^2+tn}{(t-n)^2} \cdot \frac{t-n}{t}$

а)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)	и)	ж)	к)	л)

Р $\frac{4x}{x+y}$ І $4ab$ О $\frac{2}{m}$

С $\frac{x}{2}$ М $\frac{1}{5n^2m^3}$ П $\frac{2-p}{p^3}$

Е $-\frac{2s}{p^5}$ Л $\frac{a+b}{a-b}$ Ф $\frac{5}{ck}$

Ь $\frac{t+n}{t-n}$



137 Знайдіть добуток.

а) $\frac{16x^2y}{11b^5} \cdot \frac{121xb^2}{5y^2} \cdot \frac{20y^3b^3}{64x^4}$ б) $\frac{128a^4b^3}{c^5} \cdot 20ac^3 \cdot \frac{b^2}{32a^5b}$

в) $\frac{a^2-12ab+36b^2}{a^2+4a+4} \cdot \frac{5(a+2)^2}{a^2-36b^2}$ г) $\left(-\frac{c}{7c^2-112}\right) \cdot (c^2+8c+16)$

д) $(m^2-6m+9) \cdot \left(-\frac{m}{3m^2-27}\right)$ е) $\frac{7ab-b}{9a+b} \cdot \frac{81a^2-b^2}{7a-1}$

138 Виконайте множення.

а) $\frac{mn^2-m^2n}{8a^2} \cdot \frac{4a}{m-n}$ б) $\frac{x^2-5x}{x^2-49} \cdot \frac{x^2-7x}{x^2-25}$

в) $\frac{a^2-4a+4}{5a^2+5a+5} \cdot \frac{1-a^3}{a^2-1}$ г) $\left(\frac{4a^2b^3}{9x^5}\right)^2 \cdot \left(-\frac{3x^7}{2a^2b^2}\right)^3$

139 Виконайте послідовно множення дробів та дізнайтесь довжину (у км) Тунелю Кохання — популярного туристичного об'єкта, розташованого біля с.Клевань на Рівненщині.

$\frac{2x-2}{3}$ · $\frac{9}{x^2-1}$ · $\frac{(x+1)^2}{2}$ · $\frac{x^3}{6(x+1)}$ · $\frac{8}{x^3}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

140 Виконайте дії.

а) $(-64x^5y^2)\cdot\left(\frac{3p^4}{(4x^2y)}\right)^3$

б) $\frac{x^2-2x+1}{x^2-9}\cdot\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2$

в) $\left(\frac{5k^3}{p^4}\right)^4\cdot\frac{p^{18}}{50k^{16}}$

г) $\left(\frac{x-2}{2x-3}\right)^2\cdot\frac{4x^2-12x+9}{x^3-8}$

д) $\left(\frac{16x^3}{25y^4}\right)^3\cdot\left(-\frac{125y^6}{64x^4}\right)^2$

е) $\left(-\frac{7a^4}{6b^2}\right)^3\cdot\left(\frac{36b^3}{49a^5}\right)^2$

141 Маємо дріб $\frac{7}{4}$.

а) У скільки разів чисельник цього дробу більший від знаменника?

б) На скільки потрібно помножити знаменник цього дробу, щоб чисельник нового дробу став удвічі меншим, ніж його знаменник?

142 Учитель записав на дошці розв'язання кількох прикладів. Хтось із учнів випадково витер частину записів. Відновіть утрачені записи.

а) $\frac{m^4n^4}{k^2-p^2}\cdot\frac{k+p}{\square}=\frac{m^4n^4(k+p)}{(k+p)(\square)m^3n^5}=\frac{m}{n(\square)}$

б) $\frac{2c^2d^3}{7a^3b^4}\cdot\frac{49\square}{4\square}=\frac{2c^2d^3\cdot\square a^2b^2}{\square a^3b^4\cdot\square c^2d}=\frac{\square}{\square}$

143 Обчисліть значення виразу:

$\frac{a^2+a}{2a+8}\cdot\frac{a^2-16}{5a^4+10a^3+5a^2}\cdot\frac{2a^2+2a}{2a-8}$, якщо $a=12345$.

144 Спростіть вирази, якщо a — натуральне число.

а) $\frac{c^{a+2}b^{a+1}}{p^{a+4}}\cdot\frac{p^{a+9}}{c^{a+3}b^{2a+1}}$

б) $\frac{x^{a-2}y^{3a+2}}{c^{2a-5}}\cdot\frac{c^{2a+2}}{x^{a+3}y^{3a-4}}$

145 Відомо, що:

а) $x-\frac{1}{x}=5$, знайдіть значення виразу $x^2+\frac{1}{x^2}$;

б) $2x+\frac{1}{x}=13$, знайдіть значення виразу $4x^2+\frac{1}{x^2}$.

146 (*) Доведіть тотожність.

$\frac{(y-x)^2}{x}\cdot\frac{y^2-xy}{x+y}\cdot\frac{y^2x+2x^2y+x^3}{y^3-2y^2x+yx^2}=y^2-x^2$

147 (*) Допомагаючи сестрі Вікторії розібратися зі степенями, Міка вигадала приклад, але Вікторія швидко впоралася з ним. Перевірте і ви свої знання. Обчисліть:

$2^{2024}-2^{2023}-2^{2022}-\ldots-2^2-2^1-2^0$

Виносити спільний множник треба по черзі: спочатку згрупувавши перший і другий елемент, потім результат з третім елементом і т. д.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2

2.6. Ділення дробів

Ділення — це математична операція, обернена до множення. Щоб поділити дріб на дріб, потрібно ділене помножити на дріб, обернений до дільника.

Крок 1. Замінити знак «:» на «·».

Крок 2. Обернути дільник.

Крок 3. Перемножити дроби, якщо можливо, скоротити.

Дроби $\frac{c}{d}$ і $\frac{d}{c}$ є оберненими.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \text{ де } b \neq 0,\ c \neq 0,\ d \neq 0.$$

Під час ділення 1 на дріб отримуємо дріб, обернений даному.

$$1 : \frac{c}{d} = 1 \cdot \frac{d}{c} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

Приклад 1

Виконайте ділення.

а) $\frac{4a^2b}{cd} : \frac{6ab}{3c^2}$

б) $\frac{a^4 - a^2}{a - 1} : (a^3 + a)$

в) $\frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2} : \frac{4x^2 - 9}{x - 1}$

г) $\frac{x^2 - 4}{x + 3} : \frac{x + 2}{x^2 - 9}$

Розв'язання

а) **Спосіб 1:** $\frac{4a^2b}{cd} : \frac{6ab}{3c^2} = \frac{4a^2b}{cd} \cdot \frac{3c^2}{6ab} = \frac{2ac}{d}$

Спосіб 2: $\frac{4a^2b}{cd} : \frac{6ab}{3c^2} = \frac{\frac{4a^2b}{cd}}{\frac{6ab}{3c^2}} = \frac{4a^2b \cdot 3c^2}{cd \cdot 6ab} = \frac{12a^2bc^2}{6abcd} = \frac{2ac}{d}$

б) $\frac{a^4 - a^2}{a - 1} : (a^3 + a) = \frac{a^4 - a^2}{a - 1} \cdot \frac{1}{(a^3 + a)} = \frac{a^2(a^2 - 1)}{a - 1} \cdot \frac{1}{a(a^2 + 1)} =$

$= \frac{a^2(a + 1)(a - 1)}{a - 1} \cdot \frac{1}{a(a^2 + 1)} = \frac{a(a + 1)}{a^2 + 1}$

в) $\frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2} : \frac{4x^2 - 9}{x - 1} = \frac{2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \cdot \frac{x - 1}{4x^2 - 9} =$

$= \frac{2x + 3}{(x - 1)(x - 2)} \cdot \frac{x - 1}{(2x + 3)(2x - 3)} = \frac{1}{(x - 2)(2x - 3)}$

г) $\frac{x^2 - 4}{x + 3} : \frac{x + 2}{x^2 - 9} = \frac{x^2 - 4}{x + 3} \cdot \frac{x^2 - 9}{x + 2} =$

$= \frac{(x + 2)(x - 2)}{x + 3} \cdot \frac{(x + 3)(x - 3)}{x + 2} = (x - 2)(x - 3) =$

$= x^2 - 2x - 3x + 6 = x^2 - 5x + 6$

Поміркуйте!
Як розкласти вираз $x^2 - 3x + 2$ на множники?
(Поверніться на с. 43.)

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Попрактикуйтеся

148 Виконайте ділення.

а) $\frac{c}{3} : \frac{5}{p}$ б) $\frac{8a}{a} : \frac{16}{b}$ в) $\frac{x}{y} : 5x$ г) $7t : \left(\frac{3t}{n}\right)^2$

д) $\frac{x^3}{6c} : \frac{x}{3}$ е) $\frac{7a^4}{12k} : \frac{a^2}{3k}$ ж) $-\frac{4p}{x^7} : \frac{28p^4}{12x^2}$ и) $\frac{3a^2}{8} : \left(-\frac{15a^5}{6}\right)$

149 Виконайте ділення.

а) $\frac{3c}{4p} : \frac{15c^2}{16p}$ б) $-\frac{7a^2}{3b^4} : \frac{14a^4}{21b^3}$ в) $-\frac{20x^3}{y} : (-35x^4)$

г) $9m^2 : \left(-\frac{3m^2}{n}\right)$ д) $-\frac{4ab^2}{27c^2p} : \left(-\frac{4a^2b}{9c^3p^4}\right)$ е) $\frac{5x-6y}{11y^3} : \frac{6y-5x}{33y^2}$

150 Знайдіть частку.

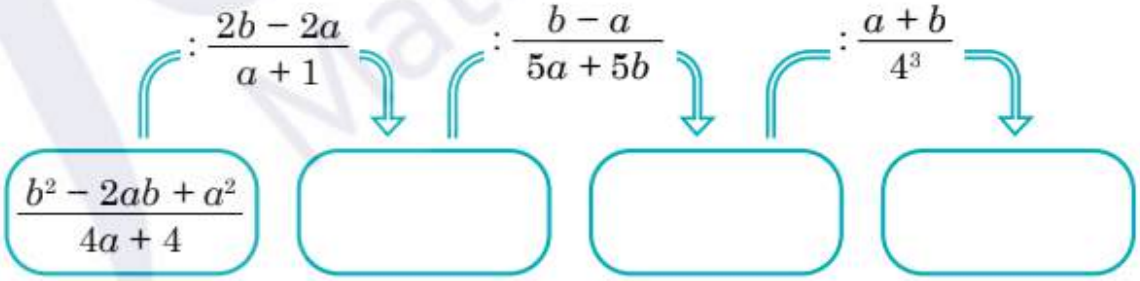
а) $\frac{a^3}{2b} : \frac{a^2}{4b^2}$ б) $\frac{a^2-4}{a^2+6a+9} : \frac{a-2}{a+3}$ в) $\frac{x^3-1}{14x^7} : \frac{3x-3}{21x^2}$

г) $\frac{c^2-2a}{c^2-a^2} : \frac{7a}{c-a}$ д) $\frac{3p+6q}{ab+a^2} : \frac{2p+4q}{a^2-b^2}$ е) $\frac{4b^2-4ba+a^2}{b^2-a^2} : \frac{2b-a}{a-b}$

151 Виконайте ланцюжок обчислень.



У результаті ви дізнаєтеся, скільки тисяч експонатів налічується в Національному художньому музеї. Це один із найбільших і найдавніших музеїв України. У музеї зберігається одна з найкращих в Україні збірка іконопису, козацьких портретів XVIII ст., колекція народних картин «Козак Мамай».



152 Заповніть таблиці.

:	$\frac{6a^{10}}{b-10}$	$\frac{27a^7}{20c^8d^6}$
$\frac{12a^6}{10-b}$		
$\frac{6a^5}{20c^9d^{12}}$		

·	$\left(-\frac{b^2c}{2a^2}\right)^4$	$\left(-\frac{b^3c^3}{3a^2}\right)^5$
$\left(-\frac{2a^3}{bc^2}\right)^2$		
$\left(\frac{3a^2}{b^2c^2}\right)^4$		

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

153 Спростіть вирази.

а) $\dfrac{x^2+10x+25}{7x-7}:\dfrac{x^2-25}{x^2-x}$

б) $\dfrac{x^2-2x+4}{81-x^4}:\dfrac{8+x^3}{9+x^2}$

в) $(9y^2-12xy+4x^2):\dfrac{(9y-6x)^2}{2}$

г) $\dfrac{3b^3}{7c^4}:\dfrac{9b^4}{4a^5}:\dfrac{24a^3}{7c^4}$

д) $\dfrac{36x^4}{121y^3}:\dfrac{108x^6}{242y^7}:\dfrac{7y^4}{9x^2}$

е) $\dfrac{2x-y}{3x^2+3xy}:\dfrac{xy-2x^2}{12x^2-12y^2}$

154 Знайдіть значення виразу:

а) $\dfrac{5m^2-5n^2}{m^2+n^2}:\dfrac{10n-10m}{4n^2+4m^2}$, якщо $m=3{,}7$, $n=-1{,}8$;

б) $\dfrac{a^3-27b^3}{6b-3a}:\dfrac{(a^2+3ba+9b^2)}{a-2b}$, якщо $b=\dfrac{1}{3}$, $a=2\dfrac{1}{3}$.

155 Спростіть вирази.

а) $\dfrac{25+5a+5b+ab}{25+5a-5b-ab}:\dfrac{ab+5a+5b+25}{ab-5a-5b+25}$

б) $\dfrac{64+8x+8y+xy}{64+8x-8y-xy}:\dfrac{xy+8x+8y+64}{xy-8x-8y+64}$

в) $\dfrac{b^2-49}{b^2+cb-7b-7c}:\dfrac{b^2+bc+7b+7c}{b^2+2bc+c^2}$

г) $\dfrac{a^2-36}{a^2+ab-6a-6b}:\dfrac{a^2+ab+6a+6b}{a^2+2ab+b^2}$

156 Спростіть вирази.

а) $\dfrac{8a^2}{a-3c}\cdot\dfrac{a^2-9c^2}{6a^3}:\dfrac{4a+12c}{3a}$

б) $\dfrac{a^2+a}{2a-12}\cdot\dfrac{a+1}{a^2+6a}:\dfrac{a^2+2a+1}{36-a^2}$

157 Заповніть пропуски так, щоб утворилися правильні рівності.

а) $\dfrac{4a^3}{b}:\square=\dfrac{a^2b}{2}$

б) $\left(\dfrac{a}{b^4}\right)^3\cdot\square=1$

158 Дарина потрапила під дощ і намочила зошит з алгебри. Частину записів у зошиті не можливо прочитати. Відновіть утрачені записи.

$$\frac{2x^5}{15y^3}\cdot\frac{10y^2}{\square}:\frac{4x^2}{15y^3}=\frac{2x^5}{15y^3}\cdot\frac{10y^2}{\square z^4}\cdot\frac{\square}{\square}=\frac{x^5\cdot 5y^2\cdot\square}{\square\cdot 7\square\cdot x^2}=\frac{\square}{\square}.$$

159 (*) Доведіть тотожність $\dfrac{7a^2+7a}{2a+14}:\dfrac{7a^3+14a^2+7a}{a^2-49}=\dfrac{a-7}{2a+2}$.

160 (*) Спростіть вирази, якщо n — натуральне число.

а) $\dfrac{a^{n+4}b^{3n+2}}{c^{n+5}}:\dfrac{a^{n+3}b^{3n+1}}{c^{n+8}}$

б) $\dfrac{(a^n+b^n)^2-4a^nb^n}{a^{3n}+b^{3n}}:\dfrac{a^{2n}-b^{2n}}{(a^n-b^n)^2+4a^nb^n}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Короткий огляд тем 2.1. - 2.6.

1 Вираз вигляду $\frac{a}{b}$, де a і b — многочлени, називають **раціональним дробом.**

2 Усі допустимі значення змінних у виразі утворюють область допустимих значень (ОДЗ) змінних у виразі.

3 Раціональний дріб $\frac{a}{b}$ дорівнює 0 тоді і тільки тоді, коли $a = 0$, $b \neq 0$.

4 **Основна властивість раціонального дробу**. Для будь-яких раціональних виразів a, b і c, причому $b \neq 0$, $c \neq 0$, правильно, що:

$$\frac{a}{b} \overset{\cdot c}{=} \frac{ac}{bc} \quad \text{і} \quad \frac{ac}{bc} \overset{:c}{=} \frac{a}{b}$$

5 **Як скоротити раціональний дріб?**

Крок 1. Розкласти на множники чисельник і знаменник дробу.
Крок 2. Поділити чисельник і знаменник на їхній спільний множник.
Крок 3. Записати отриманий результат.

6 Дії з раціональними дробами.

Множення	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
Піднесення до степеня	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
Ділення	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ac}{bd}$

7 Щоб помножити дріб на дріб, потрібно **чисельник помножити на чисельник, а знаменник — на знаменник**. У процесі множення потрібно скорочувати спільні множники. У результаті, якщо можливо, скоротити отриманий дріб.

8 Щоб піднести дріб до степеня, потрібно чисельник і знаменник дробу піднести до цього степеня.

9 **Як поділити дріб на дріб?**

Крок 1. Замінити знак «:» на «·».
Крок 2. Обернути дільник.
Крок 3. Перемножити дроби, якщо можливо, скоротити.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Перевірте свої досягнення

1 Вираз $a^2 + 2ab + b^2$ дорівнює:

а) $(a - b)^2$; б) $(a + b)^2$; в) $a^2 - b^2$; г) $a^2 + b^2$.

2 Розкладіть многочлен на множники: $9\left(x + \frac{y}{3}\right) - 2z\left(x + \frac{y}{3}\right)$.

а) $\left(x + \frac{y}{3}\right)(9 - 2z)$ б) $5x^2 - 6x$ в) $\left(x + \frac{y}{3}\right)(2z + 9)$ г) $x + 3y$

3 Розкладіть на множники многочлен $x + 3y + 5xc + 15yc$.

а) $(5c + 1)(3y - x)$ б) $(x + 3y)(1 + 5c)$ в) $(x - 3y)(5c + 1)$ г) $(3y + x)(c + 5)$

4 Скоротіть дріб $\frac{5t + 20}{t^2 + 8t + 16}$.

а) 5 б) $\frac{1}{5}$ в) $\frac{5}{t + 4}$ г) $\frac{5t + 20}{(t + 4)^2}$

5 Виконайте множення: $\frac{5x - 10}{a - b} \cdot \frac{a - b}{2x - 4}$.

а) $\frac{5}{2}$ б) $a - b$ в) $\frac{10}{2}$ г) $x - 2$

6 $\frac{1}{a}$ — результат скорочення дробу. Який дріб скоротили?

а) $\frac{a(b - 2)}{5(b - 2)}$ б) $\frac{2(x + 4)}{4c(x + 4)}$ в) $\frac{b(y + 3)}{ab(y + 3)}$ г) $\frac{15a(a - b)}{20b(a - b)}$

7 Спростіть вираз $\frac{x + 1}{x^3 - 1} : \frac{2x + 2}{x^2 + x + 1}$.

а) $\frac{2x^2 + 2}{x^3 - 1}$ б) $\frac{2}{x - 1}$ в) $\frac{1}{2(x - 1)}$ г) $\frac{1}{x - 1}$

8 Виконайте множення та обчисліть значення виразу $\frac{-7x^5}{60} \cdot \frac{-15}{14x^2}$, якщо $x = 2$.

а) 8 б) 1 в) -1 г) 2

9 Піднесіть до степеня: $\left(-\frac{2a^2b}{3mn^3}\right)^2$.

а) $-\frac{4a^2b}{6mn^3}$ б) $\frac{2a^4b^2}{3m^2n^6}$ в) $-\frac{2a^4b^2}{3m^2n^6}$ г) $\frac{4a^4b^2}{9m^2n^6}$

10 Подайте у вигляді дробу $\frac{8x^2y}{7ab^2} : \frac{4xy^2}{7a^2b} \cdot \frac{ab}{2x^2y}$.

а) $\frac{a^2}{xy^2}$ б) $\frac{a}{xy}$ в) $\frac{xy}{ab}$ г) $\frac{b}{x^2y}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2.7. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками

Додавання та віднімання раціональних дробів з однаковими знаменниками виконується за аналогією, як і додавання та віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками.

$$\frac{4}{13}+\frac{6}{13}=\frac{4+6}{13}=\frac{10}{13} \qquad \frac{7}{11}-\frac{3}{11}=\frac{7-3}{11}=\frac{4}{11}$$

Як додати (відняти) раціональні дроби з однаковими знаменниками?

Крок 1. Додати (відняти) чисельники.
Крок 2. Знаменник залишити той самий.

$$\frac{a}{b}\pm\frac{c}{b}=\frac{a\pm c}{b}, \text{ де } b\neq 0.$$

Приклад 1

Знайдіть суму і різницю дробів $\frac{4x+1}{5y}$ і $\frac{7-3x}{5y}$.

Розв'язання

$$\frac{4x+1}{5y}+\frac{7-3x}{5y}=\frac{4x+1+7-3x}{5y}=\frac{8+x}{5y}$$

$$\frac{4x+1}{5y}-\frac{7-3x}{5y}=\frac{4x+1-(7-3x)}{5y}=\frac{4x+1-7+3x}{5y}=$$

$$=\frac{7x-6}{5y}$$

$$\frac{a}{c-b}=\frac{a}{-(b-c)}=-\frac{a}{b-c}$$

Приклад 2

Знайдіть суму дробів $\frac{9a}{3a-2}$ і $\frac{11a}{2-3a}$.

Розв'язання

$$\frac{9a}{3a-2}+\frac{11a}{2-3a}=\frac{9a}{3a-2}+\frac{11a}{-(3a-2)}=\frac{9a}{3a-2}-\frac{11a}{3a-2}=$$

$$=\frac{9a-11a}{3a-2}=\frac{-2a}{3a-2}$$

Поміркуйте!
$3a-2=2-3a$?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Алгоритм додавання та віднімання працює для трьох і більше раціональних дробів.

Приклад 3

Обчисліть: $\frac{4a}{x+2y}+\frac{3a-5}{x+2y}-\frac{2a-1}{x+2y}+\frac{a-3}{x+2y}$.

Розв'язання

$$\frac{4a}{x+2y}+\frac{3a-5}{x+2y}-\frac{2a-1}{x+2y}+\frac{a-3}{x+2y}=\frac{4a+3a-5-2a+1+a-3}{x+2y}=\frac{6a-7}{x+2y}$$

Приклад 4

Подайте дріб $\frac{4x+6b-8xb}{xb}$ у вигляді цілого виразу і дробу.

Розв'язання

$$\frac{4x+6b-8xb}{xb}=\frac{4x}{xb}+\frac{6b}{xb}-\frac{8xb}{xb}=\frac{4}{b}+\frac{6}{x}-8$$

$$\frac{a\pm c}{d}=\frac{a}{d}\pm\frac{c}{d}$$

Попрактикуйтеся

161 Спростіть вирази.

а) $\frac{5}{a}+\frac{7}{a}$ б) $\frac{3x}{14}-\frac{x}{14}$ в) $\frac{4k}{10a}+\frac{3k}{10a}$

г) $\frac{6+t}{x}-\frac{6}{x}$ д) $\frac{a-7}{15}+\frac{14+2a}{15}$ е) $\frac{b-2}{7b}-\frac{5b+4}{7b}$

162 Спростіть вирази.

а) $\frac{3b+4a}{5b^2}-\frac{4a-2b}{5b^2}$ б) $-\frac{2c-7b}{16a}+\frac{2c+9b}{16a}$

в) $\frac{3n^2-nm}{n^2m}+\frac{5nm-2n^2}{n^2m}$ г) $\frac{x}{x^2-25}-\frac{5}{x^2-25}$

д) $\frac{8y+16}{y+4}+\frac{y^2}{y+4}$ е) $\frac{c^2}{(c-7)^2}-\frac{49}{(c-7)^2}$

163 Виконайте ланцюжок обчислень.

$$\frac{1640m-252}{3m}\xrightarrow{+}\frac{2720m-348}{3m}\xrightarrow{-}\frac{150m+180}{3m}\xrightarrow{+}\frac{1380m+540}{3m}$$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

164 Виконайте дії.

а) $\dfrac{b^2+3a}{(b-7)(a+1)}-\dfrac{3a+49}{(b-7)(a+1)}$

б) $\dfrac{a^3}{(a-3b)^2}-\dfrac{27b^3}{(3b-a)^2}$

в) $\dfrac{8y+5}{y^2-9}-\dfrac{y+7}{9-y^2}+\dfrac{6-3y}{y^2-9}$

г) $\dfrac{x^2+6x+36}{x^3-125}+\dfrac{x+11}{125-x^3}$

д) $\dfrac{6a+1}{5a-5}+\dfrac{7a-4}{5a-5}+\dfrac{3a+7}{5-5a}$

е) $\dfrac{2x^2-10x}{x^2-36}+\dfrac{-4x-9}{36-x^2}-\dfrac{x^2+6x-27}{x^2-36}$

165 За даними в таблиці знайдіть, скільки всього часу витратили транспортні засоби, долаючи дві дистанції. Знайдіть значення часу, якщо $x = 100$.

	Час на першу дистанцію, t_1, год	Час на другу дистанцію, t_2, год	Час разом, $t_1 + t_2$, год
Багі	$\dfrac{130}{x+20}$	$\dfrac{170}{x+20}$	
Квадроцикл	$\dfrac{60}{x-5}$	$\dfrac{35}{x-5}$	
Позашляховик	$\dfrac{135}{x+10}$	$\dfrac{195}{x+10}$	
Мотоцикл позашляховий	$\dfrac{30}{x-20}$	$\dfrac{50}{x-20}$	

166 Заповніть таблиці.

+	$-\dfrac{a^3}{a-b}$	$\dfrac{b^3}{a-b}$
$\dfrac{b^3}{a-b}$		
$\dfrac{a^3}{b-a}$		

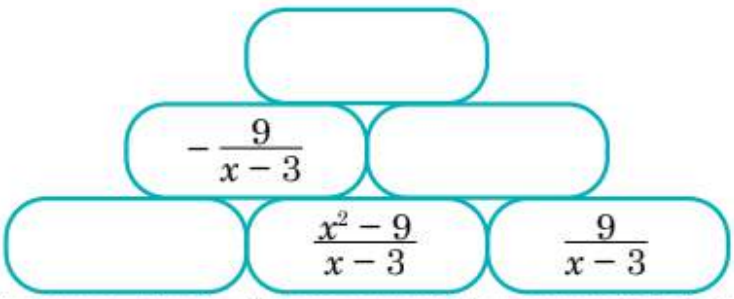
–	$\dfrac{x-1}{x^2-y^2}$	$\dfrac{y^3}{x^2-y^2}$
$\dfrac{2x}{x^2-y^2}$		
$-\dfrac{x^3}{x^2-y^2}$		

167 Доведіть тотожності.

а) $\dfrac{a^2+5a}{(a-2)^2}-\dfrac{9a-4}{(a-2)^2}=1$

б) $\dfrac{(m+n)^2+n^2}{m^2+n^2}+\dfrac{(m-n)^2+m^2}{n^2+m^2}=3$

168 Заповніть математичну піраміду, в якій кожен многочлен угорі є сумою двох многочленів під ним.



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

169 Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінних вираз набуває:

а) від'ємних значень $\dfrac{2-c^2}{(c-3)^4}-\dfrac{5-3c}{(c-3)^4}+\dfrac{3c-6}{(3-c)^4}$;

б) додатних значень $\dfrac{x^2+7}{(x-5)^6}+\dfrac{6-8x}{(x-5)^6}-\dfrac{2x-12}{(5-x)^6}$.

170 Подайте дроби у вигляді цілого виразу і дробу.

а) $\dfrac{9a-b}{a}$ б) $\dfrac{c^6-c^5+4}{c^3}$ в) $\dfrac{m^2-6m+5}{m-6}$ г) $\dfrac{7x-7y-2}{x-y}$

171 Відомо, що $\dfrac{x}{y}=2$. Знайдіть значення усіх виразів, тоді додайте ці значення і отримаєте максимальну довжину (у м) найдовшого музичного інструмента у світі — української трембіти.

а) $\dfrac{x}{y}$ б) $\dfrac{6x-3y}{y}$ в) $\dfrac{y^2-x^2}{xy}$

г) $\dfrac{(x-y)^2}{xy}$ д) $\dfrac{2xy-5y^2}{y^2}$ е) $\dfrac{4x^2y^2+3xy^3}{4x^3y+3y^2x^2}$



172 Спростіть вирази.

а) $\dfrac{2x+3}{(2+x)(x-5)}+\dfrac{1+x}{(x+2)(5-x)}$ б) $\dfrac{9x^2}{9x^2-4}+\dfrac{4}{(3x-2)(2+3x)}+\dfrac{12x}{9x^2-4}$

в) $\dfrac{16x^2}{16x^2-1}-\dfrac{8x}{(4x-1)(4x+1)}-\dfrac{1}{1-16x^2}$

173 Знайдіть значення виразу:

$\dfrac{a^2-5}{a^2-25}+\dfrac{a^2+10}{25-a^2}-\dfrac{15-5a}{(a-5)(a+5)}$, якщо $a=-2;\ 10;\ 6$.

174 Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні m значення дробу є цілим числом.

а) $\dfrac{m^3-5m+2}{m^2+2m-1}$ б) $\dfrac{m^3-6m-5}{m^2-m-5}$

175 За день кур'єрка планувала доставити певну кількість посилок на три вулиці. На першу вулицю — половину всіх посилок та ще 2, на другу — половину тих, що залишилися, та ще 3, а на третю — половину тих, що залишилися, та ще 4. Після цього в кур'єрки посилок не залишилося. Скільки посилок планувала доставити кур'єрка?

176 Марко за літні канікули мав прочитати певну кількість книжок. За перший місяць він прочитав половину всього списку та ще 3, за другий — половину від залишку та ще 2, а за третій — решту, а це 4 книжки. Скільки всього книг мав прочитати Марко за літо?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2.8. Додавання і віднімання дробів з різними знаменниками

Додавання та віднімання раціональних дробів з різними знаменниками виконується за аналогією, як і додавання та віднімання звичайних дробів з різними знаменниками. Спочатку зводимо дроби до спільного знаменника, а потім додаємо (віднімаємо) дроби з однаковими знаменниками.

Для того, щоб звести дроби до спільного знаменника, потрібно знайти **найменше спільне кратне (НСК)** знаменників, тобто найменший спільний знаменник. НСК чисел 4 та 6 дорівнює 12.

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{6}=\frac{9}{12}-\frac{2}{12}=\frac{7}{12}$$

$$\frac{3}{4}\overset{\cdot 3}{=}\frac{9}{12} \qquad \frac{1}{6}\overset{\cdot 2}{=}\frac{2}{12}$$

НСК — це найменше число, яке націло ділиться на задані числа.

Як знайти спільний знаменник двох чи більше раціональних дробів?

Крок 1. Розкласти знаменники на множники.
Крок 2. Знайти НСК числових коефіцієнтів.
Крок 3. Записати у вигляді добутку знайдене НСК та кожен множник із розкладу. Якщо множники повторюються, то записати цей множник з найбільшим показником степеня.

НСК чисел можна знайти за допомогою розкладання числа на прості множники.

Приклад

1 Знайдіть спільний знаменник дробів.

а) $\frac{1}{5a^2b^3c}, \frac{1}{15a^3bc}, \frac{1}{45ab^3c^2}$ б) $\frac{1}{x^2-1}, \frac{1}{x^2-3x+2}, \frac{1}{x^2-x}$

Розв'язання

а) Спільний знаменник цих дробів дорівнює $45a^3b^3c^2$.

б) Спочатку розкладемо всі знаменники на множники, а потім знайдемо спільний знаменник.

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{(x-1)(x-2)}$$

$$\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{x(x-1)}$$

Спільний знаменник цих дробів дорівнює $x(x+1)(x-1)(x-2)$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Як додати (відняти) раціональні дроби з різними знаменниками?

Крок 1. Знайти спільний знаменник.

Крок 2. Звести дроби до спільного знаменника.

Крок 3. Додати (відняти) одержані дроби з однаковими знаменниками.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}, \text{ де } b \neq 0,\ d \neq 0.$$

Приклад

2 Обчисліть: а) $\frac{2}{ab} + \frac{3}{bc}$; б) $\frac{12}{x-y} - \frac{8}{x+y}$; в) $\frac{2x+1}{x^2-4} - \frac{4x+1}{x+2}$; г) $5 - \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$.

Розв'язання

а) $\frac{2}{ab} + \frac{3}{bc} = \frac{2 \cdot c}{ab \cdot c} + \frac{3 \cdot a}{bc \cdot a} =$

$= \frac{2c}{abc} + \frac{3a}{abc} =$

$= \frac{2c + 3a}{abc}$

Крок 1. Знайдіть спільний знаменник. Спільний знаменник дорівнює abc.

Крок 2. Перетворіть $\frac{2}{ab}$ і $\frac{3}{bc}$ на рівні їм дроби зі знаменником abc.

Крок 3. Додайте дроби з однаковими знаменниками abc.

б) $\frac{12}{x-y} - \frac{8}{x+y} = \frac{12 \cdot (x+y)}{(x-y) \cdot (x+y)} - \frac{8 \cdot (x-y)}{(x+y) \cdot (x-y)} =$

$= \frac{12x + 12y}{(x-y)(x+y)} - \frac{8x - 8y}{(x+y)(x-y)} =$

$= \frac{12x + 12y - (8x - 8y)}{(x-y)(x+y)} =$

$= \frac{12x + 12y - 8x + 8y}{(x-y)(x+y)} =$

$= \frac{4x + 20y}{(x-y)(x+y)}$

Крок 1. Знайдіть спільний знаменник. Спільний знаменник дорівнює $(x-y)(x+y)$.

Крок 2. Перетворіть $\frac{12}{x-y}$ і $\frac{8}{x+y}$ на рівні їм дроби зі знаменниками $(x-y)(x+y)$.

Крок 3. Відніміть дроби з однаковими знаменниками $(x-y)(x+y)$.

в) $\frac{2x+1}{x^2-4} - \frac{4x+1}{x+2} = \frac{2x+1}{(x+2)(x-2)} - \frac{4x+1}{x+2} =$

$= \frac{2x+1}{(x+2)(x-2)} - \frac{(4x+1) \cdot (x-2)}{(x+2) \cdot (x-2)} =$

$= \frac{2x+1}{(x+2)(x-2)} - \frac{4x^2 - 8x + x - 2}{(x+2)(x-2)} =$

$= \frac{2x + 1 - (4x^2 - 8x + x - 2)}{(x+2)(x-2)} =$

$= \frac{2x + 1 - 4x^2 + 8x - x + 2}{(x+2)(x-2)} =$

$= \frac{-4x^2 + 9x + 3}{(x+2)(x-2)}$

Крок 1. Розкладіть знаменники на множники. Знайдіть спільний знаменник $(x+2)(x-2)$.

Крок 2. Перетворіть дроби $\frac{2x+1}{(x+2)(x-2)}$ і $\frac{4x+1}{x+2}$ на рівні їм дроби зі знаменниками $(x+2)(x-2)$.

Крок 3. Відніміть дроби з однаковими знаменниками $(x+2)(x-2)$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

г) $5-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{5\cdot x^2}{1\cdot x^2}-\frac{3}{x^2}-\frac{2\cdot x}{x\cdot x}=$

$=\frac{5x^2}{x^2}-\frac{3}{x^2}-\frac{2x}{x^2}=$

$=\frac{5x^2-3-2x}{x^2}=$

$=\frac{5x^2-2x-3}{x^2}$

Крок 1. Знайдіть спільний знаменник x^2.

Крок 2. Перетворіть 5, $\frac{3}{x^2}$ і $\frac{2}{x}$ на рівні їм дроби зі знаменниками x^2.

Крок 3. Віднімітьте дроби з однаковими знаменниками x^2.

Попрактикуйтеся

177 Виконайте дії.

а) $\frac{x}{3}-\frac{x}{4}$ б) $\frac{2a}{5}+\frac{a}{10}$ в) $\frac{3c}{d}-\frac{7}{c}$ г) $\frac{11}{3k}+\frac{k}{9}$

д) $\frac{5}{6b}+\frac{b}{2}$ е) $\frac{y}{2x}+\frac{1}{7x}$ ж) $\frac{2}{m^2}+\frac{4}{m}$ и) $\frac{2a}{a^2b}+\frac{b}{b^2}$

178 Спростіть вирази.

а) $\frac{a}{3a}+\frac{a-1}{7a}$ б) $\frac{x+y}{xy}-\frac{a-y}{xa}$ в) $\frac{2a+5}{3b}-\frac{a+2}{4b}$

г) $\frac{x}{7x^3}+\frac{x+2}{4x^4}$ д) $\frac{3c+2}{c^2d}-\frac{7c+3}{cd}$ е) $\frac{b^2-25}{5b^7}-\frac{b-5}{5b^6}$

ж) $\frac{z+y}{zy}-\frac{z-y}{z^2}$ и) $\frac{1-xy}{xyd}-\frac{1-xc}{xcd}$ к) $\frac{m^2-9n}{m^3n^3}-\frac{m+n}{mn^4}$

179 Знайдіть спільний знаменник дробів.

а) $\frac{1}{5b}, \frac{1}{20bx}, \frac{1}{4b^2}$ б) $\frac{1}{8x^4y^2w}, \frac{1}{4x^2yw^3}, \frac{1}{32xy^3w^2}$

в) $\frac{1}{x-4}, \frac{1}{(x-4)^2}, \frac{1}{x^2}$ г) $\frac{1}{7(a-b)^2}, \frac{1}{14(a^2-b^2)}, \frac{1}{2(a+b)^2}$

д) $\frac{1}{64-y^2}, \frac{1}{8-y}, \frac{1}{64-16y+y^2}$ е) $\frac{1}{x^2-4x+4}, \frac{1}{x^2+x-6}, \frac{1}{x^2-4}$

180 Обчисліть.

а) $\frac{2}{xy}+\frac{3}{x^2z}$ б) $\frac{3}{a+b}-\frac{12}{a-b}$ в) $\frac{5}{k-2}+\frac{4}{(k-2)^2}$

г) $\frac{3x-1}{x+4}-\frac{x+7}{x^2-16}$ д) $\frac{3}{(y+1)^2}-\frac{2}{(y+1)}+8$ е) $\frac{7}{x-3}-\frac{2}{9-x^2}+x$

181 Спростіть вирази.

а) $\frac{2c(3a+b)}{6a^2+2ab+3ac+bc}-\frac{2b-3a}{2a+c}$ б) $\frac{x^2-4xz+3yz}{x^2-xy+yz-xz}+\frac{x+3y}{y-x}+\frac{x+2z}{x-z}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

182 Виконайте дії.

а) $\frac{13}{x^2+5x}-\frac{2}{x}$ б) $\frac{4}{2a-6}+\frac{1-a}{a-3}$ в) $\frac{2m-3n}{5m+5n}+\frac{m+3n}{2m+2n}$

г) $\frac{x-12}{x^2-16}-\frac{2}{x+4}$ д) $\frac{5a^2+11a+2}{25a^2-1}+\frac{4a-1}{5a-1}$ е) $\frac{y}{y+6}-\frac{y^2}{y^2+12y+36}$

183 За даними в таблиці знайдіть, скільки всього часу витратили дрони, виконуючи два завдання.

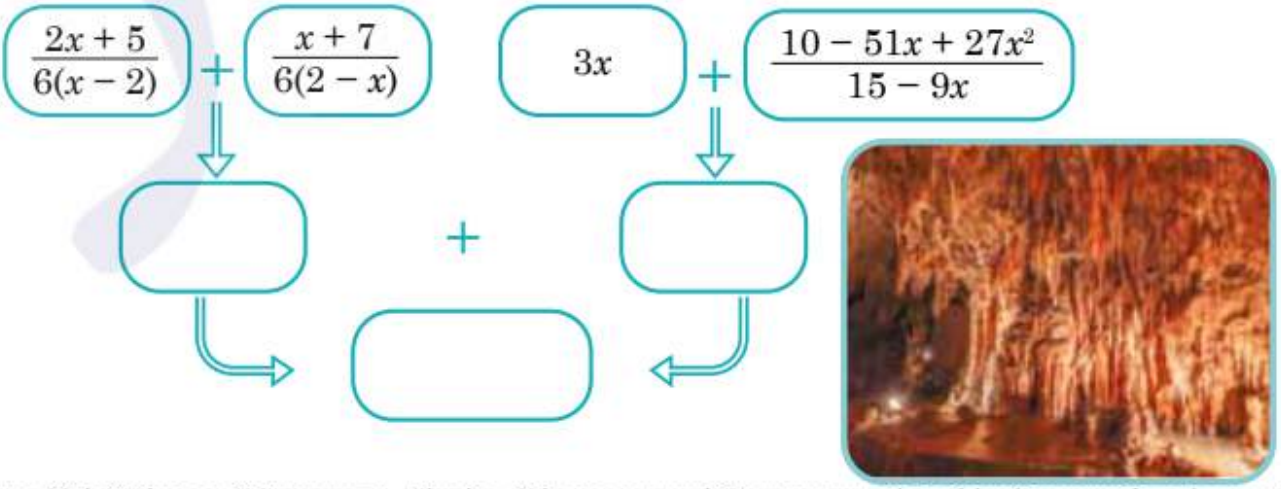
	Час на перше завдання, t_1, год	Час на друге завдання, t_2, год	Час разом, $t_1 + t_2$, год
Квадрокоптер для відеозйомки	$\frac{5}{x-2}$	$\frac{3}{x+2}$	
Дрон для обприскування полів	$\frac{4}{x-10}$	$\frac{6}{x+10}$	
Військовий дрон	$\frac{30}{x+20}$	$\frac{40}{x+10}$	
Вантажний дрон	$\frac{5}{x-5}$	$\frac{7}{x+5}$	

184 Заповніть таблицю.

+	$\frac{5a-9}{4a^2-9}$	$\frac{2a+3}{3}$	$\frac{-4a^2}{4a^2-6a+9}$	$\frac{4a^2}{3(3-2a)}$
$\frac{3}{2a-3}$				

185 Виконайте дії, тоді помножте отриманий результат на 312.

Так ви дізнаєтеся довжину (у км) найдовшої у світі печери. Печера Оптимістична на Тернопільщині — це чудо природи, підземний скарб, справжня перлина спелеосвіту. Занесена до Книги рекордів Гіннеса як найдовша у світі гіпсова печера, найдовша печера Євразії та п'ята за довжиною серед печер світу.



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

186 Перетворіть вирази у дроби.

а) $\frac{2}{b} + b - 3$

б) $\frac{4a^2}{a-5} - 4a$

в) $\frac{a^2+b^2}{2a+b} + 2a - b$

г) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} - \frac{a+b}{a-b}$

д) $\frac{x+2}{x} - \frac{x}{x+4} - \frac{8+x}{x^2+4x}$

е) $\frac{3}{4x-20} - \frac{x-5}{x^2-10x+25} + \frac{5}{4(x-5)}$

ж) $\frac{c^2}{(c-2)^2} - \frac{c+2}{2c-4} + \frac{4}{c-2}$

и) $\frac{2}{(a-1)(a-2)} + \frac{2}{(a-3)(a-2)}$

187 Доведіть тотожності.

а) $\frac{m+n}{m} + \frac{n^2}{(m^2-mn)} - \frac{m}{m-n} = 0$

б) $\frac{2}{a^2-1} - \frac{1}{a+1} + \frac{a-2}{a-1} = \frac{a-1}{a+1}$

в) $\frac{1}{1+2c} - \frac{1}{1-2c} - \frac{4c}{1+4c^2} + \frac{8c}{1-16c^4} = 0$

г) $\left(\frac{a-2}{a^2-2a+4} - \frac{ab-2b}{a^3+8}\right) : \frac{a-b+2}{a^3b+8b} = ab - 2b$

д) $\frac{a}{(a-b)(a-c)} - \frac{b}{(b-c)(b-a)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} = \frac{2b}{(a-b)(b-c)}$

188 Ігор та Роман вирішили поїхати до лісу на велосипедах. Відстань, яку вони подолали в обидві сторони, становить 4 км. У ліс хлопці їхали з горбка зі швидкістю $(v + 2)$ км/год, а назад — під горбок зі швидкістю $(v - 2)$ км/год.

а) Складіть модель до задачі, за якою можна визначити загальний час, витрачений хлопцями на всю подорож.

б) Обчисліть загальний витрачений час, якщо середня швидкість, з якою їхали хлопці, становила 6 км/год.

189 Доведіть, що при кожному цілому m вираз $\frac{m^5}{60} - \frac{m^3}{12} + \frac{m}{15}$ також є цілим числом.

190 Перекладіть одну паличку так, щоб рівність стала правильною.



I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
1	2	3	4	5	6	7	8	9

X	XI	XII	XIII	XIV	XV
10	11	12	13	14	15

XVI	XVII	XVIII	XIX	XX
16	17	18	19	20

L	C	D	M
50	100	500	1000

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2.9. Тотожні перетворення раціональних виразів

Два вирази, відповідні значення яких рівні, називаються **тотожно рівними**, або **тотожними**.

Заміна одного виразу тотожно рівним йому виразом називається тотожним перетворенням.

Поміркуйте!
Як правило ПоДуМноДіДоВі допомагає запам'ятати порядок дій?

Як правильно виконати тотожні перетворення?

Крок 1. Дотримуйтеся порядку виконання дій.

Крок 2. Дотримуйтеся правил виконання цих дій.

Крок 3. Враховуйте ОДЗ. Усі дії виконуються тільки для значень змінних, що належать ОДЗ.

ОДЗ — область допустимих значень, тобто всі значення змінної, при яких вираз має зміст.

Приклад 1

Спростіть вираз $\left(\frac{2a}{a-3}-\frac{12a}{a^2-6a+9}\right):\frac{a-9}{a^2-9}-\frac{a^2+9a}{a-3}$.

Розв'язання

① $\frac{2a}{a-3}-\frac{12a}{a^2-6a+9}=\frac{2a}{a-3}-\frac{12a}{(a-3)^2}=$

$=\frac{2a(a-3)}{(a-3)(a-3)}-\frac{12a}{(a-3)^2}=\frac{2a(a-3)-12a}{(a-3)^2}=$

$=\frac{2a^2-6a-12a}{(a-3)^2}=\frac{2a^2-18a}{(a-3)^2}=\frac{2a(a-9)}{(a-3)^2}$

② $\frac{2a(a-9)}{(a-3)^2}:\frac{a-9}{a^2-9}=\frac{2a(a-9)}{(a-3)^2}\cdot\frac{a^2-9}{a-9}=$

$=\frac{2a\cancel{(a-9)}\cdot\cancel{(a-3)}(a+3)}{\cancel{(a-3)^2}\cdot\cancel{(a-9)}}=\frac{2a(a+3)}{a-3}$

③ $\frac{2a(a+3)}{a-3}-\frac{a^2+9a}{a-3}=\frac{2a(a+3)-(a^2+9a)}{a-3}=$

$=\frac{2a^2+6a-a^2-9a}{a-3}=\frac{a^2-3a}{a-3}=\frac{a(a-3)}{(a-3)}=a$

Приклад 2

Доведіть тотожність $\left(4-\frac{12a}{b}+\frac{9a^2}{b^2}\right):\frac{3a-2b}{b}-\frac{3a}{b}=-2$.

Розв'язання

$\left(4-\frac{12a}{b}+\frac{9a^2}{b^2}\right):\frac{3a-2b}{b}-\frac{3a}{b}=-2$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

$$\left(\frac{4b^2-12ab+9a^2}{b^2}\right)\cdot\frac{b}{3a-2b}-\frac{3a}{b}=-2$$

$$\frac{(2b-3a)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{b}}{b^{\cancel{2}}\cdot(-(2b-3a))}-\frac{3a}{b}=-2$$

$$\frac{2b-3a}{-b}-\frac{3a}{b}=-2$$

Тотожними перетвореннями зведемо ліву частину тотожності до правої.

$$\frac{\cancel{3a}-2b-\cancel{3a}}{b}=-2$$

$$\frac{-2\cancel{b}}{\cancel{b}}=-2$$

$$-2=-2$$

Відповідь. Тотожність доведено.

Приклад

3 Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2-x}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)$ не залежить від значення x.

Розв'язання

$$\left(\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2-x}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)=\left(\frac{(2-x)-(2+x)}{(2+x)(2-x)}\right)\left(\frac{x^2-4}{2x}\right)=$$

$$=\frac{(2-x-2-x)\cdot(-(\cancel{4-x^2}))}{(\cancel{4-x^2})\cdot 2x}=\frac{-2x}{1}\cdot\frac{-1}{2x}=1$$

Отже, при всіх допустимих значеннях x значення цього виразу дорівнює 1, тобто не залежить від значення змінної.

Попрактикуйтеся

191 Виконайте дії.

а) $\frac{a-b}{2b}:\frac{(a-b)^2}{4b}-\frac{2}{a+b}$

б) $\frac{12x+y}{6x}-\frac{5x}{8y}\cdot\frac{4y^2}{15x^2}$

в) $\frac{m^2}{(m+n)^2}\cdot\frac{m^2+2mn+n^2}{m^2}$

г) $\frac{c}{t+4}-\frac{c^2-k^2}{t^2-16}:\frac{c-k}{t-4}$

д) $\left(\frac{7}{a-b}-\frac{3}{a+b}\right):\frac{4a+10b}{a-b}$

е) $\left(\frac{y}{9}+\frac{9}{y}+2\right)\cdot\left(\frac{3}{y+9}\right)^2$

192 Спростіть вирази.

а) $\left(\frac{15}{a-7}-a-7\right)\cdot\frac{7-a}{a^2-16a+64}$

б) $\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{a}{b^2}\right)\cdot\frac{ab}{a^2-b^2}\cdot\frac{2}{a-b}$

в) $\frac{a^2+14a+49}{a+6}:\left(\frac{13}{a+6}-a+6\right)$

г) $\left(b-\frac{2b-9}{b+8}\right):\frac{b^2+3b}{b^2-64}+\frac{24}{b}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

193 Спростіть вирази.

а) $\dfrac{m+5}{m^2+25}\cdot\left(\dfrac{m+5}{m-5}+\dfrac{m-5}{m+5}\right)$

б) $\left(\dfrac{2x-5}{x^2-6x+9}-\dfrac{x-2}{x^2-3x}\right):\dfrac{x^2-6}{x^3-9x}$

в) $\dfrac{a+2}{a^2-2a+1}:\dfrac{a^2-4}{6a-6}-\dfrac{6}{a-2}$

г) $\left(\dfrac{a-2}{a^2-2a+4}-\dfrac{ab-2b}{a^3+8}\right):\dfrac{a-b+2}{a^3b+8b}$

д) $\left(x-\dfrac{x+y}{x-y}+y\right):\left(1-\dfrac{x+y}{x^2-y^2}\right)$

е) $\dfrac{y}{x}\cdot\left(\dfrac{y^2-xy}{x+y}\right)^2\cdot\left(\dfrac{x+y}{(x-y)^2}+\dfrac{x+y}{xy-y^2}\right)$

194 Знайдіть значення виразу:

а) $(1+x)(1-x)$, якщо $x=\dfrac{a}{b}$;

б) $\dfrac{2}{5x}-\dfrac{4}{xy}-\dfrac{1}{5y}$, якщо $x=a-5$, $y=a+5$;

в) $xy\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)$, якщо $x=a-3$, $y=a+3$;

г) $\left(\dfrac{1}{xy}-\dfrac{1}{x}\right):\dfrac{y-1}{y^2}$, якщо $x=a-7$, $y=a+7$.

195 Виконайте дії.

а) $\left(\dfrac{2}{b^2-9}-\dfrac{1}{b^2+3b}\right)^2:\dfrac{1}{b^2-6b+9}-\dfrac{1+b}{b^2}$

б) $\dfrac{64}{a-4}:\left(\dfrac{a+4}{a-4}-\dfrac{a-4}{a+4}+\dfrac{64}{a^2-16}\right)$

в) $\left(\dfrac{x+3y}{x-3y}-\dfrac{x-3y}{x+3y}-\dfrac{4x^2}{x^2-9y^2}\right)\cdot\dfrac{x+3y}{4x}$

г) $\left(\dfrac{2a-5}{a^2-3a+9}+\dfrac{1}{a+3}-\dfrac{7a-33}{(a+3)(a^2-3a+9)}\right):\dfrac{3}{a^2-9}$

д) $\left(\dfrac{4x+2}{64x^3-1}+\dfrac{4x+1}{16x^2+4x+1}\right)\left(1+\dfrac{4x+1}{3x}-\dfrac{12x^2+11x+2}{12x^2+3x}\right)$

196 Доведіть тотожності.

а) $\dfrac{4x}{x+2}-\dfrac{x-5}{3x+6}\cdot\dfrac{48}{x^2-5x}=\dfrac{4x-8}{x}$

б) $\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{y}{x^2}\right)^2-\left(\dfrac{x}{y^2}+\dfrac{y}{x^2}\right)^2=-\dfrac{4}{xy}$

в) $\dfrac{3-x}{x^2-14x+49}\cdot\left(\dfrac{40}{x-3}-x-3\right)=\dfrac{x+7}{x-7}$

г) $\left(1-\dfrac{b^2-4}{b^2-2b+4}\right):\left(\dfrac{1}{b+2}-\dfrac{b-2}{b^2-2b+4}\right)=b+2$

197 Спростіть вираз. Знайдіть його значення, якщо $a=7{,}458$.

$$\left(\frac{3a}{a-2}-\frac{6a}{a^2-4a+4}\right):\frac{a-4}{a^2-4}-\frac{2a^2+8a}{a-2}$$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

198 Спростіть вирази. Заповнивши таблицю літерами, які позначають числа у вказаному порядку, дізнаєтеся назву міста, де розташована фортеця, що відноситься до одного із семи чудес України.

1 $\left(\dfrac{3x}{x-2}-\dfrac{6x}{x^2-4x+4}\right):\dfrac{x-4}{x^2-4}-\dfrac{2x^2+8x}{x-2}$

2 $\dfrac{3x}{x-3}-\dfrac{x+5}{6x-18}\cdot\dfrac{54x}{5x+x^2}$

3 $\left(\dfrac{x-7}{3x-1}+\dfrac{x-7}{x+1}\right)\cdot\dfrac{3x-1}{x^2-7x}$

4 $\dfrac{6x+y}{3x}-\dfrac{5y^2}{x^2}\cdot\dfrac{x}{15y}$

5 $\left(1-\dfrac{x+y}{y-x}\right):\dfrac{1}{x-y}$

1	2	3	4	5

И 2 Н $2x$ Х x Т $\dfrac{4}{x+1}$ О 3

199 Спростіть вирази.

а) $\left(\dfrac{2x}{2x+y}-\dfrac{4x^2}{4x^2+4xy+y^2}\right):\left(\dfrac{2x}{4x^2-y^2}+\dfrac{1}{y-2x}\right)$

б) $\left(\dfrac{x-1}{3x+(x-1)^2}-\dfrac{1-3x+x^2}{x^3-1}-\dfrac{1}{x-1}\right):\dfrac{x^2+1}{1-x}$

200 Підставте замість x поданий вираз і спростіть його:

а) $\dfrac{x-a}{x-b}$, якщо $x=\dfrac{ab}{a+b}$;

б) $\dfrac{a-bx}{b+ax}$, якщо $x=\dfrac{a-b}{a+b}$.

201 Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\left(\dfrac{2}{a+3}-\dfrac{2a}{a^2-3a+9}-\dfrac{6(-2a+3)}{a^3+27}\right)\cdot\dfrac{a+3}{9}$ не залежить від значення a.

202 Доведіть, що при всіх допустимих значеннях змінної значення виразу $\dfrac{m^2-m+2}{2m-m^2}+\left(\dfrac{m+2}{m-2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{m-2}+\dfrac{4}{4-m^2}-\dfrac{2}{m^2+2m}\right)$ не залежить від значення m.

203 Спростіть вирази.

а) $\dfrac{1+\dfrac{2}{x}}{1-\dfrac{2}{x}}$

б) $\dfrac{\dfrac{2}{3t}+\dfrac{2}{t}}{\dfrac{2}{3t^2}+\dfrac{2}{t^2}}$

в) $\dfrac{\dfrac{c-b}{c+b}+\dfrac{b}{c}}{\dfrac{c}{c+b}-\dfrac{c-b}{c}}$

г) $1+\dfrac{1}{b-\dfrac{b}{1-\dfrac{1}{b+1}}}$

д) $1-\dfrac{2x}{1+\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{1-x}}}$

е) $\dfrac{m}{m+\dfrac{1}{1+\dfrac{m}{1-m}}}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2.10. Раціональні рівняння

Раціональні рівняння — це рівняння, що містять раціональні вирази у правій та лівій частині рівняння.

Раціональні рівняння

Цілі рівняння

Ліва і права частини рівняння є цілими виразами.

$p - 9 = 4(p + 1)$

$10x^2 - 5 = \frac{x}{6}$

Дробові рівняння

В одній із частин рівняння є дробовий вираз.

$\frac{x}{y - 4} = \frac{1}{3}$

$\frac{1}{x - 3} + \frac{1}{x + 4} = 0$

Дробовий вираз містить невідому змінну у знаменнику.

Рівносильні рівняння — це рівняння, які мають однакові розв'язки або кожне з рівнянь не має розв'язку.

Дробові раціональні рівняння містять невідому змінну у знаменнику.

$\frac{1}{2x} + 5 = 9$, $\frac{1}{x} = \frac{1}{2x - 1}$ і $\frac{4}{4x - 5} = \frac{1}{3}$ — дробові раціональні рівняння.

Шукаючи розв'язки раціональних рівнянь, використовують властивості рівносильності рівнянь і тотожні перетворення виразів.

Методи розв'язування раціональних рівнянь

Як розв'язати дробове раціональне рівняння?

Крок 1. Знайти область допустимих значень (ОДЗ) змінної у рівнянні.

Крок 2. Знайти спільний знаменник для усіх членів рівняння.

Крок 3. Помножити обидві частини рівняння на цей знаменник.

Крок 4. Виконати тотожні перетворення виразів та розв'язати отримане рівняння.

Крок 5. Виключити корені, що не належать ОДЗ.

Крок 6. Записати відповідь.

Розв'язуючи дробове раціональне рівняння, можна знайти корінь, у разі підстановки якого, один або декілька знаменників перетвориться на 0. У таких випадках ми повинні відкинути знайдений розв'язок. Тому важливо шукати ОДЗ рівняння та виключати корені, що не належать ОДЗ.

Коренем рівняння $\frac{1}{x - 2} = 1$ не може бути число 2, оскільки при заміні x на 2 знаменник перетворюється на 0.

Поміркуйте!
Які можливі корені слід виключити у рівнянні $\frac{2}{(x - 1)(x + 1)} = 0$?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій інший формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

1 Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{5}{2x+3}=4$ б) $\frac{1}{x-3}+\frac{1}{x+4}=0$ в) $\frac{x+5}{x-2}-\frac{x+3}{x+2}=\frac{4}{x^2-4}$

Розв'язання

а) Знайдемо можливі корені, які слід виключити після розв'язання.

ОДЗ: $x\neq -\frac{3}{2}$, оскільки $2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+3=0$.

$(2x+3)\cdot\left(\frac{5}{2x+3}\right)=4\cdot(2x+3)$ ← Помножте обидві частини рівняння на $(2x+3)$.

$5=4(2x+3)$

$5=8x+12$

$8x+12-12=5-12$ ← Відніміть від обох частин 12.

$8x=5-12$

$8x=-7$

$\frac{8x}{8}=\frac{-7}{8}$ ← Поділіть обидві частини на 8.

$x=-\frac{7}{8}$

Відповідь. $-\frac{7}{8}$.

б) ОДЗ: $x\neq 3$, $x\neq -4$.

Помножте всі члени рівняння на вираз $(x-3)(x+4)$, що є їх спільним знаменником.

$(x-3)(x+4)\cdot\frac{1}{x-3}+(x-3)(x+4)\cdot\frac{1}{x+4}=(x-3)(x+4)\cdot 0$

$x+4+x-3=0$

$2x+1=0$

$2x+1-1=0-1$ ← Відніміть від обох частин 1.

$2x=-1$

$\frac{2x}{2}=\frac{-1}{2}$ ← Поділіть обидві частини на 2.

$x=-\frac{1}{2}$

Відповідь. $-\frac{1}{2}$.

в) ОДЗ: $x\neq 2$, $x\neq -2$.

$\frac{x+5}{x-2}-\frac{x+3}{x+2}=\frac{4}{x^2-4}\Big|\cdot(x-2)(x+2)$ ← Помножте всі члени рівняння на вираз $(x-2)(x+2)$, що є їх спільним знаменником.

$(x+2)(x+5)-(x-2)(x+3)=4$

$x^2+5x+2x+10-x^2-3x+2x+6=4$

$6x+16=4$

$6x=-12$

$x=-2$ ← Це число не належить ОДЗ рівняння, тому не може бути його розв'язком.

Відповідь. Рівняння не має розв'язків.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Попрактикуйтеся

204 Виберіть лише дробові раціональні рівняння. Розв'яжіть їх.

З букв, що позначають лише дробові раціональні рівняння, складіть назву реабілітаційного центру для хижих диких тварин, створеного в 2020 році. Парк хижих тварин розташований у Хмельницькій області на території Національного природного парку «Подільські Товтри». Тут реабілітують тварин, які тривалий час утримувалися в поганих умовах.

А $\frac{2}{x}+4=7$ Б $\frac{x+5}{8}=16$

Р $\frac{4x-1}{x+1}=\frac{4x+1}{x-1}$ О $2x+1=0$

Д $\frac{x^2-25}{x+3}=0$ М $\frac{x^2-1}{4}+\frac{x+5}{8}=6$

Т $\frac{1}{3}+6x=3$ Е $\frac{x}{x^2-16}=0$ Н $\frac{2x}{x+2}=\frac{x}{x-2}$



205 Виберіть лише те рівняння, коренем якого є число 3.

а) $\frac{x}{x+3}=0$ б) $\frac{x-3}{x+3}=0$ в) $\frac{x-3}{x^2-9}=0$ г) $\frac{x}{3}=0$

206 Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{x}{x+4}=0$ б) $\frac{x-7}{3-x}=0$ в) $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ г) $\frac{x-5}{x^2-25}=0$

207 Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{7}{5x+4}-2=0$ б) $\frac{40}{x-2}=-8$ в) $\frac{5}{2x}=\frac{4}{x+1}$

г) $\frac{3}{5(1-x)}=\frac{9}{10}$ д) $\frac{5}{2x+3}=\frac{7}{3x-4}$ е) $\frac{4}{5x-2}=\frac{7}{1-4x}$

208 Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{8x-5}{2x+3}=3$ б) $\frac{x}{x+2}=-3$ в) $\frac{2}{2x+5}=\frac{3}{4x-7}$

г) $\frac{5}{3-4x}=\frac{4}{7x-1}$ д) $\frac{18}{x+3}-5=1$ е) $\frac{5}{x+8}=\frac{15}{2x+6}$

209 Розв'яжіть рівняння $x-\frac{9}{x+6}=36-\frac{9}{x+6}$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

210 Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{6}{x^2-9}+\frac{4x}{x-3}=4$

б) $\frac{x-3}{x+2}-\frac{1}{2-x}=\frac{x^2-20}{x^2-4}$

в) $\frac{8x+4}{x^2-25}+\frac{6}{x^2+5x}=\frac{8}{x-5}$

г) $\frac{3x-1}{3x+1}=\frac{3x+1}{3x-1}+\frac{4}{1-9x^2}$

д) $\frac{9}{(x-3)(x+7)}-\frac{4}{(x-3)^2}=\frac{5}{(x+7)^2}$

е) $\frac{2x-3}{x^2-25}-\frac{x-6}{x^2-5x}-\frac{x-2}{x^2+5x}=0$

211 Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{x-2}{x+1}-\frac{7}{1-x}=\frac{x^2+29}{x^2-1}$

б) $\frac{3}{4x}+\frac{5}{4x-1}=\frac{30x+2}{16x^2-1}$

в) $\frac{3x^2-3x}{x^2-9}+\frac{9}{x+3}=\frac{3x+3}{x-3}$

г) $\frac{3x+4}{x^2-4}-\frac{1}{x^2+2x}=\frac{x+1}{x^2-2x}$

д) $\frac{x+3}{x-4}+\frac{x-4}{x}=\frac{x^2-5x+32}{x^2-4x}$

е) $\frac{4}{x-5}+\frac{2}{x}-\frac{6}{x-3}=0$

212 Визначте, чи є рівняння рівносильними.

а) $-3x=9$ і $-4x=-12$

б) $(x-1)(x+1)=0$ і $\frac{x-1}{x+7}=0$

в) $\frac{2x+5}{x+5}-1=\frac{25}{x^2+5x}$ і $\frac{5-x}{x}=0$

г) $\frac{2}{x+1}-\frac{4-2x}{x^2+x}=0$ і $\frac{x-1}{x+1}=0$

213 За даними в таблиці складіть рівняння та розв'яжіть його. За x прийнято швидкість кожного транспортного засобу. Розв'язавши рівняння, дізнаєтесь орієнтовну швидкість кожного з транспортних засобів.

	Час на першу дистанцію, t_1, год	Час на другу дистанцію, t_2, год	
Тролейбус	$\frac{10}{x}$	$\frac{9}{x-4}$	$t_1=t_2$
Трамвай	$\frac{4}{x-2}$	$\frac{5}{x+2}$	$t_1=t_2$
Поїзд	$\frac{440}{x+10}$	$\frac{360}{x}$	$t_1=t_2$
Автобус	$\frac{220}{x}$	$\frac{253}{x+12}$	$t_1=t_2$

214 Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{9x+20}{x^3-125}-\frac{1}{x-5}=\frac{1}{x^2+5x+25}$

б) $\frac{|x-2|}{6x+1}=1$

в) $\left|\frac{x+3}{5-2x}\right|=2$

215 При яких значеннях a рівняння $\frac{(x-3)(x-4)}{x-a}=0$ має один корінь?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2.11. Розв'язування задач за допомогою раціональних рівнянь

Як розв'язати задачу за допомогою раціонального рівняння?

Крок 1. Прочитайте умову та визначте невідому величину.
Крок 2. Позначте невідому величину буквою, наприклад x.
Крок 3. Виразіть інші величини через x, склавши вирази за умовою задачі.
Крок 4. Складіть рівняння на основі виразів й умови задачі.
Крок 5. Розв'яжіть отримане рівняння.
Крок 6. Перевірте отриманий результат на відповідність ОДЗ та умові задачі.
Крок 7. Запишіть відповідь до задачі.

Приклад

1 Чисельник звичайного дробу на 7 менший від його знаменника. Якщо чисельник зменшити на 1, а знаменник збільшити на 4, то дріб зменшиться на $\frac{1}{6}$. Знайдіть цей дріб.

Розв'язання

Потрібно знайти чисельник і знаменник дробу. ← Визначимо невідомі величини.

Нехай x — чисельник початкового дробу. ← Позначимо невідому величину буквою x.

Тоді $x + 7$ — знаменник початкового дробу.
$x - 1$ — чисельник зміненого дробу.
$x + 7 + 4$ — знаменник зміненого дробу. ← Виразимо інші величини через x.

Різниця початкового і зміненого дробу дорівнює $\frac{1}{6}$. ← Складемо рівняння та розв'яжемо його.

$$\frac{x}{x+7} - \frac{x-1}{x+11} = \frac{1}{6} \quad \Big| \cdot 6(x+7)(x+11)$$

$$6x(x+11) - 6(x+7)(x-1) = (x+7)(x+11)$$
$$6x^2 + 66x - 6(x^2 - x + 7x - 7) = x^2 + 11x + 7x + 77$$
$$6x^2 + 66x - 6x^2 + 6x - 42x + 42 - x^2 - 11x - 7 - 77 = 0$$
$$-x^2 + 12x - 35 = 0$$
$$x^2 - 12x + 35 = 0$$ ← Представимо $-12x$ у вигляді $-5x - 7x$, щоб застосувати метод групування.
$$x^2 - 5x - 7x + 35 = 0$$
$$x(x-5) - 7(x-5) = 0$$
$$(x-7)(x-5) = 0$$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

$x - 7 = 0$ $\quad$ $x - 5 = 0$

$x_1 = 5$ $\quad$ $x_2 = 7$

$\frac{5}{12} - \frac{4}{16} = \frac{1}{6}$ $\quad$ $\frac{7}{14} - \frac{6}{18} = \frac{1}{6}$

$\frac{20 - 12}{48} = \frac{8}{48}$ $\quad$ $\frac{63 - 42}{126} = \frac{21}{126}$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ $\quad$ $\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

Відповідь. $\frac{5}{12}$; $\frac{7}{14}$.

ОДЗ: $(x + 7)(x + 11) \neq 0$

$x + 7 \neq 0$ або $x + 11 \neq 0$

$x \neq -7$ або $x \neq -11$

Приклад

2 Туристка пропливла на байдарці до наметового містечка 4,5 км за течією річки та 3 км проти течії річки, повертаючись додому, за 45 хв. Визначте швидкість байдарки в стоячій воді, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

Розв'язання

Потрібно знайти швидкість байдарки в стоячій воді. ← Визначимо невідому величину.

Нехай x — швидкість байдарки в стоячій воді. ← Позначимо невідому величину буквою x.

Систематизуємо умову задачі у вигляді таблиці.

	s, км	v, км/год	t, год
Рух за течією річки	4,5	$x + 2$	$\frac{4,5}{x + 2}$
Рух проти течії річки	3	$x - 2$	$\frac{3}{x - 2}$

$v_{\text{за течією}} = v_{\text{власна}} + v_{\text{течії}}$

$v_{\text{проти течії}} = v_{\text{власна}} - v_{\text{течії}}$

$45 \text{ хв} = \frac{45}{60} \text{ год} = \frac{3}{4} \text{ год}$

$\frac{4,5}{x + 2} + \frac{3}{x - 2} = \frac{3}{4} \Big| \cdot 4(x - 2)(x + 2)$ ← Складемо рівняння та розв'яжемо його.

$4,5 \cdot 4 \cdot (x - 2) + 3 \cdot 4 \cdot (x + 2) = 3(x - 2)(x + 2)$

$18(x - 2) + 12(x + 2) = 3(x^2 - 4)$

$18x - 36 + 12x + 24 = 3x^2 - 12$

$30x - 12 = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 30x = 0$

$3x(x - 10) = 0$

$x_1 = 0$ або $x_2 = 10$ ← Перевіримо результат на відповідність умові та ОДЗ. Перший корінь не відповідає змісту задачі, оскільки швидкість байдарки не може бути 0.

ОДЗ: $(x - 2)(x + 2) \neq 0$

$x - 2 \neq 0$ або $x + 2 \neq 0$

$x \neq 2$ або $x \neq -2$

Відповідь. 10 км/год.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

3 Ольга та Левко мають ідею щодо власного стартапу. Щоб взяти участь у відбірковому турі конкурсу, їм необхідно набрати 50 сторінок тексту, описуючи концепцію власної ідеї. Оля уже мала такий досвід і, працюючи самостійно, виконала цей обсяг роботи за 10 год. Цього разу діти працюють разом і набрали текст концепції за 6 год. За скільки годин набрав би текст Левко, працюючи самостійно?

Розв'язання

Потрібно знайти, за скільки годин виконає роботу Левко. ← Визначимо невідому величину.

Нехай x — кількість годин, що потрібна Левку для набору тексту самостійно. ← Позначимо невідому величину буквою x.

Швидкість виконання роботи називають продуктивністю праці. Якщо не вказано, який саме обсяг роботи виконується, то цю роботу прийнято позначати одиницею ($A = 1$).

Систематизуємо умову задачі у вигляді таблиці:

	Робота, A	Час, t	Продуктивність, P
Ольга	1	10	$\frac{1}{10}$
Левко	1	x	$\frac{1}{x}$
Разом	1	6	$\frac{1}{6}$

$$P = \frac{A}{t}$$

P — продуктивність,
t — час,
A — робота.

$\frac{1}{10} - \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \Big| \cdot 30x$ ← Складемо рівняння та розв'яжемо його.

$3x + 30 = 5x$

$2x = 30$

$x = 15$

ОДЗ: $x \neq 0$

Відповідь. 15 год.

Попрактикуйтеся

216 Знайдіть дріб, що дорівнює $\frac{2}{3}$, у якого знаменник на 7 більший за чисельник.

217 Знайдіть дріб, що дорівнює $\frac{1}{5}$, у якого чисельник на 8 менший від знаменника.

218 Яке число треба додати до чисельника дробу $\frac{2}{9}$, щоб отримати дріб $\frac{1}{3}$?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

219 Яке одне й те саме число можна додати до чисельника й знаменника дробу $\frac{7}{11}$, щоб одержати дріб $\frac{4}{5}$?

220 Чисельник дробу на 5 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 12, а від знаменника відняти 3, то одержимо дріб, обернений цьому. Знайдіть початковий дріб.

221 Марія загадала дріб $\frac{13}{17}$. Кирило відняв від чисельника і знаменника дробу одне й те саме число та отримав дріб, який дорівнює $\frac{1}{2}$. Яке число відняв Кирило?

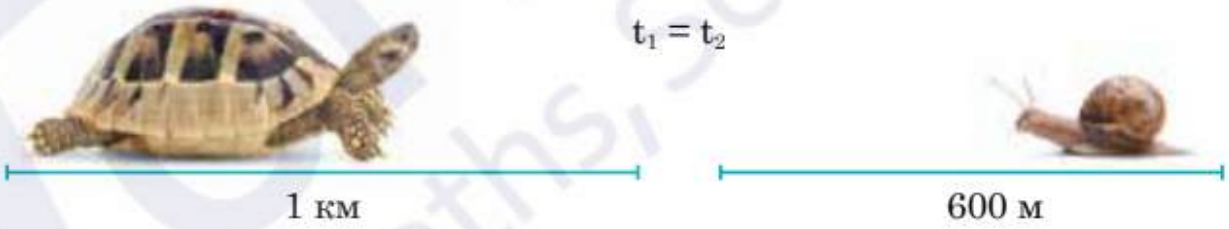
222 Брат старший за сестру на 5 років.

а) По скільки років сестрі і братові, якщо через два роки їх літа будуть відноситись як 2 : 3?

б) По скільки років братові і сестрі, якщо два роки тому їх літа відносились як 3 : 4?

223 Павло старший за Оскара на 6 років. По скільки років буде братам через два роки, якщо три роки тому їх літа відносились як 2 : 3?

224 Черепаха проповзає 1 км, а равлик — 600 м за той самий час. Знайдіть швидкість (км/год) кожної тварини, якщо швидкість равлика менша за швидкість черепахи на 0,2 км/год.



225 Степан проїжджає на мотоциклі 270 км за той самий час, що на електросамокаті 70 км. Знайдіть швидкість руху на електросамокаті, якщо вона на 50 км/год менша від швидкості мотоцикла.

226 Пасажирський поїзд проїжджає 150 км за той самий час, що й товарний поїзд 171 км. Яка швидкість кожного поїзда, якщо швидкість товарного поїзда на 7 км/год більша, ніж швидкість пасажирського?

227 Катер проплив від міста до бази відпочинку 72 км, рухаючись проти течії річки. Власна швидкість катера дорівнює 18 км/год, а швидкість течії річки — 2 год. Яку відстань подолає катер, рухаючись за течією річки за час, який витратив на подорож від міста до бази відпочинку?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

228 Ашот, випробовуючи катер після ремонту, пройшов на ньому відстань до човникової станції, рухаючись за течією річки, 68 км. Рухаючись проти течії річки за час, який витратив на подорож до човникової станції, він пройшов 52 км. З якою швидкістю рухався катер, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год?

229 Готуючись до міжнародних змагань з веслування на каяках, Поліна пройшла 18 км проти течії річки за той самий час, що і 48 км за течією річки. Дівчинка знає, що швидкість каяка в стоячій воді — 5,5 км/год. Для виконання наступного запливу потрібно знайти швидкість течії річки.

230 Моторний човен проплив 4,5 км за течією річки і 3 км проти течії річки, витративши на весь шлях 45 хв. Яка власна швидкість човна, якщо швидкість течії річки дорівнює 2 км/год?

231 Надія та Євген працюють операторами на гарячій лінії в банку, відповідаючи на запитання клієнтів по телефону. Надія в середньому обслуговує 32 клієнти за 4 години, Євген — у середньому обслуговує 36 клієнтів за x годин. За одну годину вони разом обслуговують 14 клієнтів. Складіть модель до задачі. Знайдіть x.

232 Для обробки своїх угідь фермер придбав два трактори різної потужності. Якщо обидва трактори будуть працювати одночасно, то всю роботу вони виконають за 20 днів. За допомогою ж лише першого всі поля можна обробити за 36 днів. Визначте, скільки днів необхідно другому трактору, щоб виконати всю роботу.

233 Для участі у фешн-виставці в Мілані українська модельєрка замовила трьом майстрам пошиття моделей одягу та виготовлення біжутерії. Якби всю роботу виконував лише перший майстер, то він би впорався за 10 днів, якби лише другий, то — за 12 днів. Якщо ж усі майстри будуть працювати разом, то колекція буде готова за 4 дні. Скільки днів для виконання цієї роботи знадобиться третьому майстру, якщо він буде все робити сам?

234 Перед початком літнього сезону в готелі потрібно було наповнити басейн. Якщо відкрити обидві труби одночасно, то басейн наповниться за 6 год. Якщо ж відкрити лише першу трубу, то для наповнення басейну потрібно буде 10 год. Через який час басейн буде наповнений при відкритті лише другої труби?

235 Дитячий басейн в аквапарку наповнюється з двох труб за 4,8 хв. Якщо ж відкрити лише першу трубу, то басейн наповниться за 12 хв. За який час наповниться басейн на $\frac{3}{4}$ свого об'єму, якщо відкрити лише другу трубу?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Короткий огляд тем 2.7. - 2.11.

1 Дії з раціональними дробами.

Додавання і віднімання з однаковими знаменниками	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$
Додавання і віднімання з різними знамениками	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} \pm \frac{c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$

2 Щоб додати (відняти) раціональні дроби **з однаковими знаменниками**, потрібно додати (відняти) чисельники, а знаменник залишити той самий.

3 Щоб додати (відняти) раціональні дроби **з різними знаменниками**, спочатку потрібно звести дроби до спільного знаменника, а потім додати (відняти) дроби з однаковими знаменниками.

4 **Алгоритм виконання тотожних перетворень раціональних виразів.**

Крок 1. Дотримуйтеся порядку виконання дій.
Крок 2. Дотримуйтеся правил виконання цих дій.
Крок 3. Враховуйте ОДЗ. Усі дії виконуються тільки для значень змінних, що належать ОДЗ.

5 **Як розв'язати дробове раціональне рівняння?**

Крок 1. Знайти область допустимих значень (ОДЗ) змінної у рівнянні.
Крок 2. Знайти спільний знаменник для всіх членів рівняння.
Крок 3. Помножити обидві частини рівняння на цей знаменник.
Крок 4. Виконати тотожні перетворення виразів та розв'язати ціле рівняння.
Крок 5. Відкинути корені, що не належать ОДЗ.
Крок 6. Записати відповідь.

6 **Як розв'язати задачу за допомогою раціонального рівняння?**

Крок 1. Прочитайте умову та визначте невідому величину.
Крок 2. Позначте невідому величину буквою, наприклад x.
Крок 3. Виразіть інші величини через x, складіть вираз за умовою задачі.
Крок 4. Складіть рівняння на основі виразу й умов задачі.
Крок 5. Розв'яжіть рівняння.
Крок 6. Перевірте отриманий результат на відповідність ОДЗ та умовам задачі.
Крок 7. Запишіть відповідь до задачі.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Перевірте свої досягнення

1 Які допустимі значення змінної у виразі $\frac{y}{y+6}+\frac{10}{y-6}$?

а) $y \neq 36$ б) $y \neq 6$ в) $y \neq -6$ г) $y \neq 6, y \neq -6$

2 Виконайте додавання дробів $\frac{a}{5}+\frac{b}{5}$.

а) $\frac{ab}{5}$ б) $\frac{a+b}{5}$ в) $\frac{a+b}{10}$ г) $\frac{a+b}{25}$

3 Виконайте віднімання: $\frac{a}{a-3}-\frac{a+8}{a-3}$.

а) $\frac{8}{a-3}$ б) $\frac{-8}{a-3}$ в) $\frac{8}{-6}$ г) $\frac{2a-8}{a-3}$

4 Виконайте віднімання: $\frac{5a+b^5}{8b}-\frac{5a-7b^5}{8b}$.

а) $\frac{-6b^5}{8b}$ б) $\frac{-3b^5}{4b}$ в) $\frac{-8b^5}{8b}$ г) b^4

5 Подайте у вигляді дробу: $\frac{2x}{2x-1}-\frac{1}{2x+1}$.

а) $\frac{2x-1}{4x^2-1}$ б) 1 в) $\frac{4x^2+1}{4x^2-1}$ г) $\frac{x^2+1}{4x^2-1}$

6 Виконайте додавання: $\frac{5}{x-1}+\frac{x+7}{x^2-1}$.

а) $\frac{1}{2}$ б) $\frac{6x+12}{x^2-1}$ в) $\frac{12+x}{x^2-1}$ г) $\frac{5x+7}{x^3-2}$

7 Спростіть вираз $a+b-\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

а) $a+b$ б) 0 в) $\frac{2ab}{a+b}$ г) $\frac{2ab}{a-b}$

8 Знайдіть корінь рівняння $\frac{2x-8}{x^2-16}=0$.

а) 4 б) -4 в) 2 г) немає коренів

9 Оберіть математичну модель задачі. Чисельник дробу на 2 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 16, а до знаменника — 5, то одержимо дріб, обернений цьому.

а) $\frac{x}{x+2}=\frac{x+7}{x+16}$ б) $\frac{x}{x-2}=\frac{x-7}{x+16}$ в) $\frac{x}{x+2}=\frac{x+16}{x+5}$ г) $\frac{x}{x+2}=\frac{x+16}{x+7}$

10 Розв'яжіть рівняння $\frac{|x-1|}{3x+2}=2$.

а) розв'язків немає б) $-\frac{2}{3}$ в) 3; -1 г) $-\frac{3}{7}$; -1

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Додаткові завдання до розділу

236 EN Complete the table. Find the LCM of the denominators algebraic fractions.
Example

$\frac{1}{(x-2)(x+3)}$	1 over the product of x minus 2 and x plus 3
$\frac{1}{x^2-4}$	1 over the x squared minus 4

The LCM of $(x-2)(x+3)$ and x^2-4 is $(x^2-4)(x+3)$.

	2 over the x
	$5x$ over the product of x and 3 minus $2x$

The LCM of ____ and ____ is ____

Проєктна робота «Лабіринт раціональних дробів»

Крок ① Проєкт можна виконувати індивідуально, у парах чи групах. Підготуйте необхідні матеріали (аркуші паперу, кольорові олівці чи фломастери).

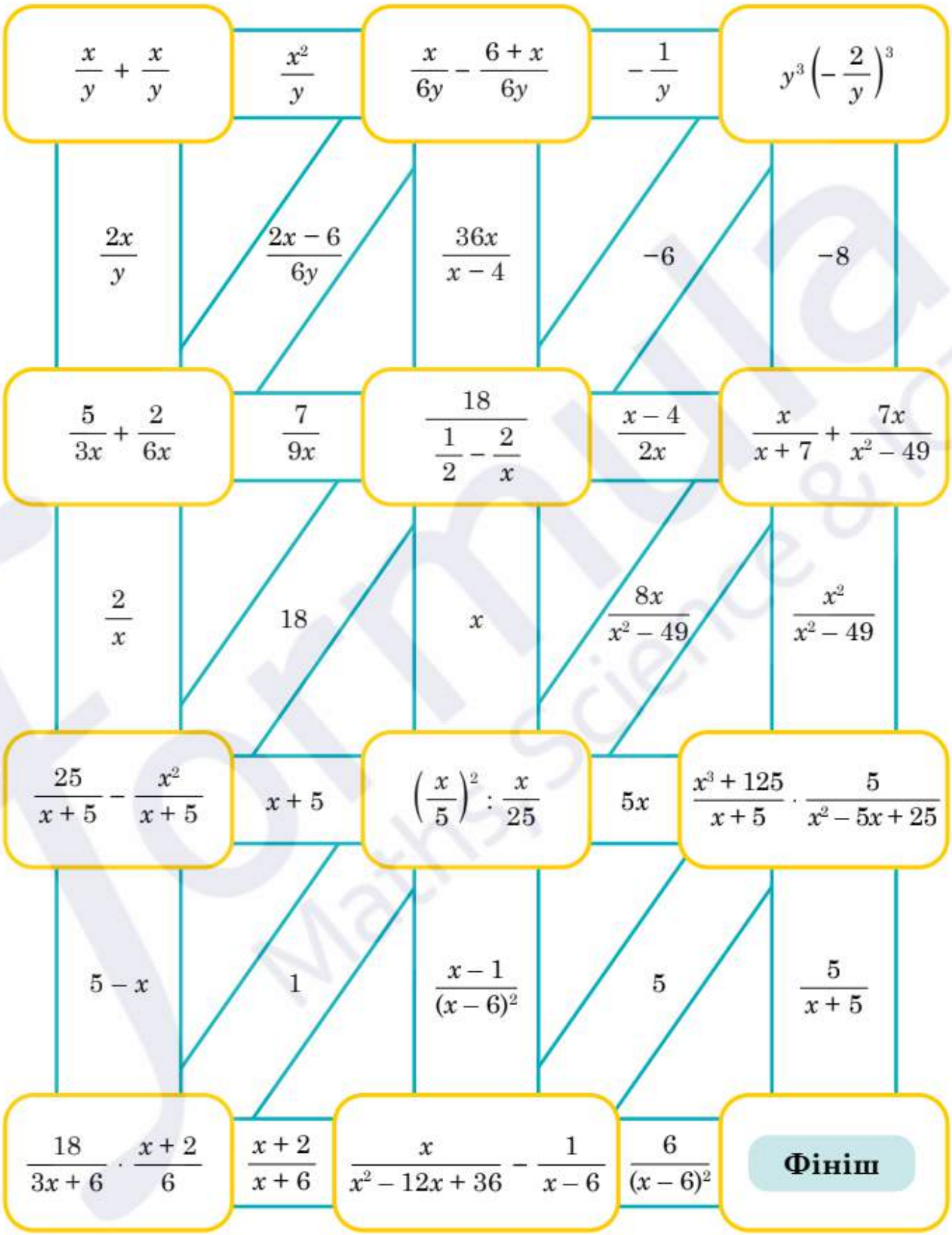
Крок ② Пройдіть лабіринт на наступній сторінці, перемалювавши у зошит шлях від старту до фінішу. Тоді за зразком створіть власний лабіринт на закріплення теми «Раціональні вирази». Завдання лабіринту повинні містити додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками, додавання і віднімання дробів з різними знаменниками, множення і ділення дробів, піднесення дробів до степеня.

Крок ③ Представте однокласникам і однокласницям свої лабіринти. Обміняйтеся ними. Пройдіть лабіринт, створений іншою групою чи парою.

Крок ④ Обговоріть підсумки проєкту з усім класом.
Що було складного у створенні лабіринту?
Скільки часу зайняло проходження лабіринту, а скільки — його створення? Яку пораду можете дати, щоб створити цікавий лабіринт?
Що цікавого помітили під час створення лабіринту?
Над чим ще треба попрацювати?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Старт



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

3

Множини

У повсякденному житті зазвичай ми розуміємо множини як сукупність об'єктів, пов'язаних між собою. Колекція улюблених пісень, список продуктів, планети нашої Сонячної системи, учні та учениці, які отримали оцінку 12 балів за тестування з біології, — усе це приклади множин. У математиці множини потрібні для організації, аналізу та дослідження взаємодії між групами об'єктів. Для наочного зображення множин часто використовують діаграми Венна.



У цьому розділі ми:

- ознайомимося з множинами та їх елементами;
- ознайомимося з мовою множин та відповідними позначеннями;
- дізнаємося способи представлення множин;
- довідаємося про відношення, які існують між множинами;
- будемо визначати, які з множин порожні, які — скінченні та нескінченні;
- будемо зображати діаграми Венна;
- дізнаємося, що таке об'єднання та перетин множин.

Ключові слова

- Множина (*set*)
- Підмножина (*subset*)
- Порожня множина (*empty set*)
- Діаграма Венна (*Venn diagram*)
- Перетин (*intersection*)
- Об'єднання (*union*)

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій інший формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

3 Множини

3.1. Множина та її елементи

$A = \{а; о; у; і; и; е\}$
$B = \{+; -; \cdot; :\}$
$C = \{\leftarrow; \uparrow; \rightarrow; \downarrow\}$

Множина — це сукупність різних об'єктів, які мають спільні властивості. Об'єкти множини називають **елементами множини**.

Множини позначають великими латинськими літерами (A, M, S тощо), а їх елементи — маленькими літерами (a, k, x тощо). Одним із способів представлення елементів множини є ***список усіх її елементів***. При цьому всі елементи під час перелічування відокремлюються один від одного крапкою з комою (;) та записуються у фігурні дужки ({ }).

Наприклад, множину, яка містить *дільники* числа 6, можна записати так:

$$A = \{1; 2; 3; 6\}.$$

А множину, що містить усі *прості числа*, менші за 10, так:

$$B = \{2; 3; 5; 7\}.$$

Елементи множини не обов'язково перелічувати в певному порядку. Наприклад, множину парних чисел, менших за 10, можна записати так:

$C = \{2; 4; 6; 8\}$, або $C = \{4; 8; 2; 6\}$, або $C = \{8; 2; 6; 4\}$.

Множину також можна описувати словами, вказавши властивість, яку мають усі її елементи, — ***характеристичну властивість***. Наприклад, B — множина літер слова «добридень». Варто зауважити, що елементи не можуть повторюватися у множині, тому правильно буде представити множину B так:

$$B = \{д; о; б; р; и; е; н; ь\}.$$

Якщо елемент належить або не належить множині, використовуються символи $\in$ і $\notin$ відповідно.

Дільники числа — це ті числа, на які це число ділиться без остачі.

Кратні числа — це числа, які діляться на це число без остачі.

Просте число — це число, що ділиться тільки на 1 і само на себе.

$1 \in A$ означає, що 1 **належить** множині A.
$1 \notin A$ означає, що 1 **не належить** множині A.

Щоб представити кількість елементів у множині A, використовують позначення $n(A)$. Іншими словами, $n(A)$ — це розмір або потужність множини A. Якщо $A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11\}$, то запис $n(A) = 6$ означає, що множина A містить 6 елементів.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

1 Подайте кожну множину у вигляді переліку її елементів та знайдіть $n(A)$.

а) A — множина літер слова «калина».

б) B — множина парних чисел, менших за 14.

в) C — множина натуральних чисел, більших за 6 і менших або рівних 18.

Розв'язання

Натуральні числа використовуються для лічби предметів.

а) Оскільки $A = \{к; а; л; и; н;\}$, то $n(A) = 5$.

б) $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$, $n(A) = 6$.

в) $C = \{7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18\}$, $n(A) = 12$.

Приклад

2 $A = \{яблуко; апельсин; банан; диня\}$, $B = \{диня; апельсин; яблуко; банан\}$.

а) Знайдіть $n(A)$ і $n(B)$. б) Чи правильний запис «банан $\in A$»?

в) Чи правильний запис «кавун $\notin B$»?

Розв'язання

а) Оскільки в кожній множині міститься по 4 елементи, то $n(A) = 4$ і $n(B) = 4$.

б) Множина A містить елемент «банан», тому запис «банан $\in A$» правильний.

в) Множина B не містить елемента «кавун», тому запис «кавун $\notin B$» правильний.

Приклад

3 A — множина парних чисел, менших за 12, а B — множина квадратів чисел, менших за 100. Визначте, який із записів правильний:

а) $9^2 \in B$; б) $81 \in A$; в) $n(A) = n(B)$;

г) $6 \notin B$; д) $6^2 \in B$; е) $n(A) < n(B)$.

Розв'язання

Спочатку перелічимо елементи множин A і B. $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, $B = \{1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81\}$.

а) $9^2 = 81$, отже $9^2 \in B$ — правильно.

б) 81 не є елементом A, тому $81 \in A$ — неправильно.

в) $n(A) = 5$, тоді як $n(B) = 9$, тому $n(A) = n(B)$ — неправильно.

г) 6 не є елементом B, тому $6 \notin B$ — правильно.

д) $6^2 = 36$, тому $6^2 \in B$ — правильно.

е) $n(A) = 5$, тоді як $n(B) = 9$, отже $n(A) < n(B)$ — правильно.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Попрактикуйтеся

237 Подайте кожну множину у вигляді переліку її елементів.

а) A — множина літер слова «мальва».
б) B — множина непарних натуральних чисел, менших за 13.
в) C — множина натуральних чисел, більших за 8 і менших або рівних 16.

238 Задано множини $A = \{456; 789\}$, $B = \{a; b; c\}$ і $C = \{1; 4; 7; 10\}$. Знайдіть кількість елементів у кожній множині. Порівняйте $n(A)$, $n(B)$ та $n(C)$.

239 Доповніть записи символами $\in$ або $\notin$, щоб кожне твердження було правильним.

а) 3 ☐ $A = \{3; 5; 7\}$ б) а ☐ $C = \{b; c; d; e\}$
в) 11 ☐ $B = \{3; 6; 9; 12\}$ г) я ☐ $F = \{а; е; у; и; о; і\}$
д) 2 ☐ D — множина коренів рівняння $x^2 - 9 = 0$.

240 Доповніть таблицю.

Опис множини	Список елементів
A — множина літер слова «соняшник»	
	$C = \{4; 8; 12; 16; 20; 24\}$
E — множина дільників числа 24	
B — множина простих чисел другого десятка	
	$F = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17\}$

241 Наведіть 3 приклади елементів кожної з множин.

а) Множина парних чисел.
б) Множина чисел, які кратні 3.
в) Множина простих чисел, менших за 18.
г) Множина дільників числа 25.
д) Множина чотирикутників.
е) Множина трикутників.
ж) Множина кутів.
и) Множина плоских геометричних фігур.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

242 Оберіть тільки правильні записи, якщо Z — множина цілих чисел, N — множина натуральних чисел.

З букв, що позначають лише правильні записи, складіть назву найдорожчої картини одного з найвідоміших художників українського сучасного мистецтва Анатолія Криволапа. Ця картина була продана на аукціоні в Лондоні 2013 року за \$186 200. (Примітка: деякі букви можуть використовуватися двічі.)

К	$0 \in Z$	О	$0 \in N$	І	$\pi \notin Z$	Н	$-1 \notin N$
Ь	$\frac{1}{2} \notin Z$	М	$0{,}7 \in N$	В	$2^{-1} \notin Z$	А	$3^{-1} \in N$
Е	$3^2 \in Z$	Ч	$2{,}1 \notin Z$	Ф	$\frac{4}{4} \notin N$	Р	$\frac{3}{3} \in N$

До **цілих чисел** належать усі натуральні числа, їм протилежні та число 0.

243 Подайте кожну множину у вигляді списку її елементів та знайдіть $n(A)$.

а) A — множина чисел, кратних 7, причому більших за 7 та менших за 49.

б) A — множина додатних цілих чисел, причому більших за 5 та менших або рівних 12.

в) A — множина коренів рівняння $(x + 4)(x^2 - 9) = 0$.

д) A — множина кубів чисел, менших за 100.

244 Подайте кожну множину у вигляді списку її елементів та знайдіть $n(A)$.

а) Множина непарних натуральних чисел, які є дільниками числа 140.

б) Множина від'ємних цілих чисел, причому менших за 0 та більших за -12.

в) Множина розв'язків рівняння $\frac{(x - 5)(x + 1)}{(x + 2)} = 0$.

г) Множина квадратів круглих двоцифрових чисел.

245 Подайте кожну множину у вигляді списку її елементів.

а) A — множина чисельників правильних дробів зі знаменником 5.

б) B — множина знаменників неправильних дробів із чисельником 7.

в) C — множина букв у слові «геометрія».

Порівняйте значення $n(A)$, $n(B)$, $n(C)$.

246 Подайте кожну множину у вигляді списку її елементів.

а) K — множина двоцифрових чисел, що мають однакову цифру в розряді одиниць і десятків.

б) L — множина трицифрових чисел, що мають однакову цифру в розряді одиниць, десятків і сотень.

в) M — множина двозначних десяткових дробів, які в розряді одиниці і десятих мають однакову цифру.

Порівняйте значення $n(K)$, $n(L)$, $n(M)$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

3.2. Рівність множин. Підмножина

Множини можуть мати різні відношення між собою залежно від своїх елементів.

Коли дві множини A і B містять абсолютно однакові елементи, вони називаються **рівними множинами**, це позначають так: $A = B$. Аналогічно, коли дві множини A і B не містять абсолютно однакових елементів, то вони **не рівні**, і це позначають так: $A \neq B$.

Множини, які складаються з одних і тих самих елементів, називають **рівними**.

$A = B$ означає, що множини A і B рівні.
$A \neq B$ означає, що множини A і B не рівні.

Наприклад, дано множини:
$A = \{2; 4; 6\}$, $B = \{4; 6\}$, $C = \{6; 4; 2\}$.

$A \neq B$, тому що існує елемент множини A $(2 \in A)$ такий, що не є елементом множини B $(2 \notin B)$.

$A = C$, бо обидві ці множини складаються з тих самих елементів.

$B \neq C$, тому що обидві множини містять різну кількість елементів.

Отже, якщо $A = B$, то $n(A) = n(B)$, але якщо $n(A) \neq n(B)$, то $A \neq B$.

Поміркуйте! Якщо A є підмножиною B, чи правильно, що B також є підмножиною A?

Підмножина

Якщо множина A є частиною множини B (тобто всі елементи множини A належать множині B), то множину A називають **підмножиною** множини B і позначають $A \subset B$. Аналогічно, коли множина A **не є підмножиною** множини B, це позначають так: $A \not\subset B$.

Символи $\subset$ і $\not\subset$ стосуються множин, тоді як символи $\in$ і $\notin$ позначають елементи множин.

$A \subset B$ означає, що A є підмножиною B.
$A \not\subset B$ означає, що A не є підмножиною B.

Наприклад, маємо множини $A = \{1; 2\}$ та $B = \{1; 2; 3\}$. Можна зробити висновок, що $A \subset B$.

Якщо множина A є підмножиною множини B або дорівнює множині B, тобто кожен елемент множини A також є елементом множини B, то замість запису $A \subset B$ застосовують запис $A \subseteq B$. Тобто якщо $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{3; 2; 1\}$, то правильно, що $A \subseteq B$.

Прийнято вважати, що будь-яка множина A є рівною підмножиною сама собі, тобто $A \subseteq A$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

1 Нехай A — множина непарних натуральних чисел, менших за 11, а B — множина цифр числа 8 138 579. Визначте, які з тверджень правильні. Поясніть свою думку.

а) $A = B$ б) $A \subset B$

Розв'язання

Спочатку перелічимо елементи множин A і B. Маємо: $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$ і $B = \{1; 3; 5; 7; 8; 9\}$.

а) Неправильне. Тому що $A \neq B$, оскільки існує елемент множини B ($8 \in B$), який не є елементом множини A ($8 \notin A$).

б) Правильне. $A \subset B$, оскільки кожен елемент множини A також є елементом множини B, а множина B має ще один елемент, відмінний від будь-якого з елементів A.

Попрактикуйтеся

247 Серед запропонованих множин знайдіть рівні між собою множини. Зробіть відповідні записи.

а) $A = \{2; 4; 6; 8\}$ б) $B = \{8; 2; 6\}$ в) $C = \{8; 4; 6; 2\}$
г) $D = \{2; 4; 8\}$ д) $F = \{2; 6; 8\}$ е) $E = \{2; 8; 64\}$

248 Серед запропонованих множин знайдіть рівні між собою множини. Зробіть відповідні записи.

а) $A = \{17^0; 2^2; 4^3; 5^{-1}\}$ б) $B = \{1; 2^2; 5^{-1}\}$ в) $C = \{1; 4; 64; \frac{1}{5}\}$
г) $D = \{17^0; 4; \frac{1}{5}\}$ д) $F = \{64; \frac{1}{5}; 0\}$ е) $E = \{0; 4; 64; 5^{-1}\}$

249 Нехай $X = \{к; л; м\}$, а P — множина букв українського алфавіту. Визначте, яке з наведених тверджень є правильним.

а) $X \subset P$ б) $X \in P$ в) $\{к; л\} \in X$ г) $м \in X$
д) $X \subseteq P$ е) $к \notin P$ ж) $л \in P$ и) $м \notin P$

250 Доповніть записи символами $\subset$, $\subseteq$, $\not\subset$, щоб кожне твердження було правильним.

а) $\{3\}$ ☐ $\{1; 3; 5; 7\}$ б) $\{d\}$ ☐ $\{a; b; c\}$
в) {стіл} ☐ {стіл; стілець; шафа} г) $\{9; 21\}$ ☐ $\{21; 9\}$
д) $\{5; 10\}$ ☐ $\{25; 20; 15; 10\}$ е) {м; а; к} ☐ {а; к; м}
ж) {шапка; шарф} ☐ {рукавиці} и) $\{>; <; \geq; \leq\}$ ☐ $\{>; \geq; <; \leq\}$
к) $\{0{,}5; 0{,}05; 0{,}005\}$ ☐ $\{5{,}0; 5{,}00; 5{,}000\}$ л) $\{+; -; \cdot; :\}$ ☐ $\{+; -\}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

251 Доповніть записи символами $\subset$ або $\not\subset$, щоб кожне твердження було правильним.

а) $X = \{1; 2\}$ ☐ Y — множина дільників числа 7 692 018.

б) $O = \{-1; -2; -3\}$ ☐ C — множина натуральних чисел.

в) $M = \{2\}$ ☐ A — множина парних чисел.

г) $N = \{r; t\}$ ☐ B — множин літер українського алфавіту.

252 Нехай A — множина букв слова «паралелограм». Множина букв якого зі слів є підмножиною множини A:

а) грам; б) рагу; в) пара;
г) мало; д) лапа; е) папка;
ж) паралель; и) гарно; к) реле?

253 Нехай множина B — множина цифр числа 2025. Множина цифр якого з чисел є підмножиною множини B:

а) 25; б) 2024; в) 225;
г) 2520; д) 25 200; е) 200 250?

254 Дано множини: A — множина букв слова «Україна», B — множина букв слова «край» і C — множина букв слова «країна». Перелічіть елементи множин A, B і C. Знайдіть $n(C)$. Опишіть відношення між множинами A і B, A і C, B і C, використовуючи символи $\subset$ і $\not\subset$.

255 Дано множини: A — множина всіх коренів рівняння $x^2 - 16 = 0$, $B = \{4\}$, $C = \{4; 5; 6\}$ і $D = \{-4; 4\}$. Опишіть зв'язки між множинами, використовуючи символи $\subset$ або $\not\subset$:

а) A і B; б) A і C; в) B і C; г) A і D.

256 Дано множини P — множина парних натуральних чисел, менших за 8, Q — множина коренів рівняння $(x - 2)(x - 6) = 0$, $R = \{2; 4; 6; 8; 10\}$ і $S = \{2; 6\}$. Знайдіть $n(P)$, $n(Q)$ і $n(R)$. Опишіть відношення між множинами, використовуючи символи $=$ або $\neq$:

а) P і Q; б) P і R; в) Q і S.

257 Дизайнерка, обираючи шрифт до нової книги, визначила 3 критерії. Відповідно до кожного критерію підібрала шрифти, що відповідають множинам A = {Times New Roman; Roboto; Cambria}, B = {Times New Roman; Cambria}, C = {Georgia; Roboto; Cambria}.

а) Чи правильно, що до першого критерію дизайнерка дібрала найбільше шрифтів? Запишіть кількість елементів кожної з множин.

б) Шрифти, дібрані за першим та третім критерієм, однакові? Чи рівні множини A та C? Запишіть, використовуючи символи $=$ або $\neq$.

в) Чи є така добірка шрифтів, що відповідає одночасно двом критеріям? Опишіть зв'язки між множинами A, B та C, використовуючи символи $\subset$ або $\not\subset$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

258 У таблиці наведено оцінки (у балах) за контрольні роботи з різних предметів для семи учнів та учениць. Розгляньте таблицю та виконайте завдання.

Ім'я учня / учениці	Математика	Українська мова	Англійська мова
Захар	11	7	12
Карина	8	12	7
Катерина	9	11	9
Давид	7	10	8
Магда	5	6	9
Семен	10	9	10
Мія	12	10	4

а) Перелічіть елементи множин, якщо A — множина учнів та учениць, які отримали оцінку з математики нижчу за 8 балів, B — множина учнів та учениць, які отримали оцінку з української мови вищу за 9 балів, C — множина учнів та учениць, які отримали оцінку з англійської мови від 7 до 9 балів.

б) Використайте символи $\subset$ або $\not\subset$, щоб описати відношення між множинами A і B; B і C; A і C.

259 Дано множини: A — множина чисел, кратних 2, $B = \{2^1; 2^2; 2^3; 2^4; 2^5\}$, C — множина парних натуральних чисел і $D = \{2; 4; 8; 16; 32\}$. Використовуючи символи $\subset$ або $\not\subset$, опишіть відношення між множинами:

а) A і B; б) B і C; в) C і D; г) B і D.

260 Дано множини: F — множина квадратів чисел першого десятка, $E = \{4; 16; 25; 64; 81\}$, $M = \{2^2; 4^2; 8^2\}$. Використовуючи символи $\subset$ або $\not\subset$, опишіть відношення між множинами:

а) F і E; б) E і M; в) F і M.

Чи правильно, що $M \subset E \subset F$?

261 Розташуйте множини в такій послідовності, щоб кожна наступна множина була підмножиною попередньої множини.

а) A — множина восьмикласників і восьмикласниць вашої школи, B — множина учнів та учениць вашої школи, які старші 10 років, C — множина дівчат у вашому класі.

б) A — множина чотирикутників, B — множина квадратів, C — множина паралелограмів, D — множина прямокутників.

в) Q — множина раціональних чисел, N — множина натуральних чисел, Z — множина цілих чисел.

262 (*) Знайдіть три множини X, Y, Z, для яких правильно, що $X \subset Y$, $Y \subset Z$. Опишіть відношення між множинами X і Z.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

3.3. Різновиди множин

Множина, яка не містить жодного елемента, називається **порожньою множиною**. Її позначають символом **Ø** або **{}**. Наприклад, A — множина коренів рівняння $x = x - 16$. Оскільки це рівняння не має коренів, то $A = Ø$, а $x \in Ø$.

Кількість елементів порожньої множини дорівнює 0, тобто $n(A) = 0$.

Варто зазначити, що кожну порожню множину Ø прийнято розглядати як підмножину кожної непорожньої множини. Тому для кожної множини A правильно, що $Ø \subset A$.

Поміркуйте!
Чи правильно, що $\{Ø\} = Ø$. Чому?

Множини є важливим компонентом у програмуванні. Так позначають порожню множину в мові програмування Python.

```
empty_set = set()
```

Приклад

1 Перелічіть усі елементи множини A, якщо A — множина непарних цифр числа 82 406. Поясніть свою думку.

Розв'язання

$A = Ø$, оскільки в числі 82 406 немає непарних цифр.

Приклад

2 Нехай A — множина парних чисел, більших за 4 і менших за 8, а B — множина парних цифр числа 395 713. Визначте, які з тверджень правильні. Поясніть свою думку.

а) $A = B$ б) $B \subset A$

Розв'язання

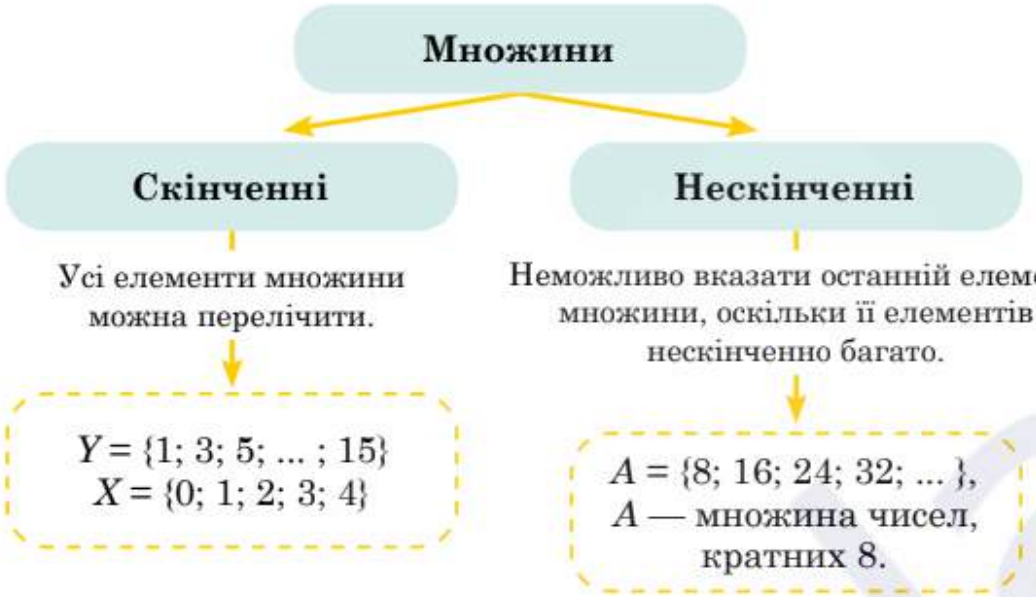
Спочатку перелічимо елементи множин A і B. Маємо: $A = \{6\}$ і $B = \{\}$.

а) Неправильне. Правильно, що $A \neq B$, оскільки множина B не має елементів.

б) Правильне. $B \subset A$, оскільки кожна порожня множина є підмножиною будь-якої непорожньої множини.

Поміркуйте!
Скільки елементів містить множина трикутників зі сторонами 1 см, 2 см і 5 см?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.



Множини Y та X — скінченні, адже множина Y містить 8 елементів, $n(Y) = 8$, а множина X — 5 елементів, $n(X) = 5$.

Множина A є нескінченною, адже кількість її елементів $n(A)$ не можна визначити, вони продовжуються до нескінченності. Такі множини можна задавати характеристичною властивістю або списком елементів, поставивши три крапки.

Попрактикуйтеся

263 Укажіть множини, які є порожніми.

а) Множина коренів рівняння $|x| = -3$.
б) Множина всіх чисел, які діляться на нуль.
в) Множина людей, що народилися 30 лютого.
г) Множина всіх слонів Антарктиди.
д) Множина чотирикутників, які мають усі рівні сторони.
е) Множина міст України.
ж) Множина триголових драконів, що проживають у Карпатах.

264 Перелічіть усі елементи множини A, якщо A — це множина:

а) усіх коренів рівняння $|x| = 3$;
б) усіх коренів рівняння $\frac{x-2}{x^2-4} = 0$;
в) усіх чотирикутників, периметр яких менший за 0;
г) усіх материків на планеті Земля;
д) усіх поїздів, швидкість яких від'ємна;
е) усіх видів трикутників;
ж) усіх прямокутних трикутників із гострими кутами 38° та 62°.

265 Визначте, які з множин є скінченними, а які — нескінченними.

а) {0; 2; 4; 6; 8} б) {0; 2; 4; 6; 8; …} в) {10; 20; 30; 40; ... ;100}
г) {11; 22; 33; 44; ... } д) {0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; …} е) {10; 27; 56; 87}

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

266 Оберіть правильне твердження для множини $K = \{d; o; g\}$.

а) $d \in K$ б) $\{o; g\} \subset K$ в) $\varnothing \subset K$
г) $\{c\} \subset K$ д) $K \subseteq K$ е) $\{d; g\} \not\subset K$

267 Знайдіть кількість елементів кожної з множин.

а) $F = \{\}$ б) $C = \varnothing$ в) $D = \{\varnothing\}$ г) $E = \{\text{О}\}$

268 Множина A складається з усіх літер слова «ананас». Яке з тверджень є правильним?

а) $\{\text{а}; \text{н}\} \subset A$ б) $\{\text{а}\} \in A$ в) $\varnothing \subset A$
г) $n(A) = 6$ д) $\{\text{н}; \text{с}\} \subset A$ е) $\text{а} \notin A$

269 У магазині можна скласти морозиво з кульок з такими смаками: полуниця, банан, шоколад, ваніль, вишня, карамель, ківі. Марина вибрала 4 різних кульки морозива, а Катерина — 2 різних кульки морозива. Нехай смаки кульок морозива Марини є множиною A, а смаки кульок морозива Катерини є множиною B. Знайдіть:

а) можливу множину A;
б) можливу множину B таку, що B є підмножиною множини A.

270 Дано множини: $\{7\}$, $\{11\}$, $\{19\}$, $\{7; 11\}$, $\{7; 19\}$, $\{11; 19\}$, $\varnothing$, кожна з яких є підмножиною деякої множини A. Запишіть множину A.

271 Запишіть усі можливі підмножини множини $B = \{1; 2; 3\}$.

272 Задайте нескінченні множини за допомогою характеристичної властивості.

а) $A = \{1; 2; 3; 5; 7; 11; \ldots\}$
б) $B = \{3; 6; 9; 12; 15; \ldots\}$
в) $C = \{5; 10; 15; 20; \ldots\}$

273 Задайте нескінченні множини за допомогою списку їх елементів.

а) A — множина натуральних чисел, кратних 7.
б) B — множина непарних натуральних чисел.
в) C — множина від'ємних цілих чисел.

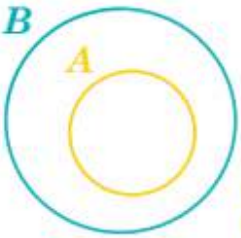
274 (*) Доведіть, що множина A — порожня множина, якщо A — множина розв'язків рівняння $\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{4}{x - 1} = \frac{-4}{x + 1}$.

275 (*) Доведіть, що множини A і B рівні, якщо A — множина розв'язків рівняння $\frac{x - 5}{x - 6} = \frac{1}{x - 6}$, а B — множина розв'язків рівняння $\frac{3y - 1}{y + 5} - \frac{4 + 5y}{y - 5} = \frac{160}{y^2 - 25}$. Чи є подані рівняння рівносильними?

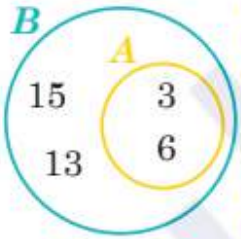
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

3.4. Діаграма Венна

Для наочного зображення відношень між різними множинами часто використовують **діаграми Венна**. Якщо множина A є підмножиною множини B, то це можна зобразити так:

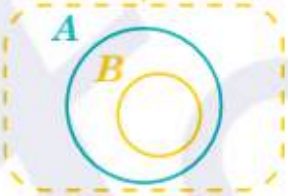


На діаграмі Венна праворуч представлена множина $B = \{3; 6; 13; 15\}$ та множина $A = \{3; 6\}$. Елементи 3 та 6 належать множині A та B, а елементи 13 та 15 — лише множині B.



Джон Венн був першим, хто заговорив про діаграми Венна в 1880-х роках, опублікувавши статтю «Про діаграмне і механічне подання тверджень та міркувань». Термін «діаграма Венна» був введений пізніше, приблизно в 1920 році Кларенсом Ірвінгом Льюїсом в книзі «Огляд символічної логіки». Однак раніше за Джона Венна подібні діаграми також використовували Леонард Ейлер, Рамон Лулль та інші логіки.

Відношення між двома множинами A і B

Одна множина є підмножиною іншої	Мають деякі спільні елементи	Не мають жодного спільного елемента
		

Приклад

1 Нехай $A = \{2; 4\}$ і $B = \{2; 4; 6; 8\}$.

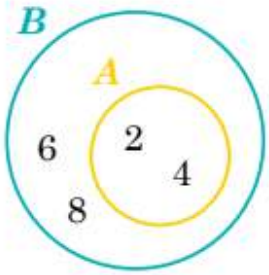
а) Чи є множина A підмножиною множини B? Поясніть свою думку.

б) Зобразіть множини A і B за допомогою діаграми Венна.

Розв'язання

а) Кожен елемент множини A також є елементом множини B, але множина B ще містить елементи 6 і 8, тому множина A є підмножиною множини B, $A \subset B$.

б)



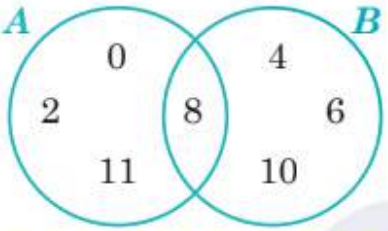
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

2 Нехай $A = \{0; 2; 8; 11\}$ і $B = \{4; 6; 8; 10\}$. За допомогою діаграми Венна покажіть відношення між множинами A і B.

Розв'язання

Множини A і B мають один спільний елемент 8.

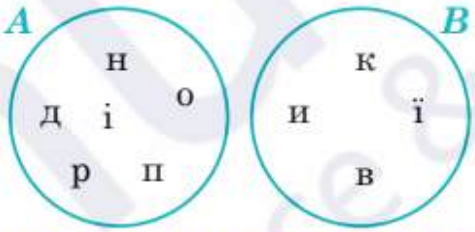


Приклад

3 Нехай $A = \{д; н; і; п; р; о\}$ і $B = \{к; и; ї; в\}$. За допомогою діаграми Венна покажіть відношення між множинами A і B.

Розв'язання

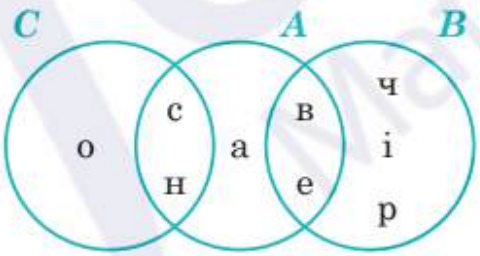
Множини A і B не мають спільних елементів.



Приклад

4 Нехай $A = \{в; е; с; н; а\}$, $B = \{в; е; ч; і; р\}$ і $C = \{с; о; н\}$. За допомогою діаграми Венна покажіть відношення між множинами A, B і C.

Розв'язання



Щоб показати відношення між трьома і більше множинами, спочатку слід показати відношення між двома множинами, а потім доповнити діаграму наступною множиною.

Попрактикуйтеся

276 Нехай $A = \{4; 16; 18\}$ і $B = \{16; 18; 20\}$. Зобразіть множини A і B за допомогою діаграми Венна. Чи є множина B підмножиною множини A? Поясніть свою думку.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

277 Нехай A = {в; р; б} і B = {в; е; р; б; а}. Зобразіть множини A і B за допомогою діаграми Венна. Чи правильний запис $A \subset B$? Поясніть свою думку.

278 Нехай A = {понеділок; вівторок; середа; четвер; п'ятниця; субота}, B = {середа; четвер} і C = {субота}. Зобразіть множини A, B і C за допомогою діаграми Венна. Який зв'язок між множинами B і C? Поясніть свою думку.

279 Зобразіть за допомогою діаграм Венна співвідношення між множинами:

а) A — множина всіх невід'ємних раціональних чисел, B = {0} та N — множина натуральних чисел;

б) Z — множина цілих чисел, A — множина натуральних чисел, що кратні 2, B — множина натуральних чисел, що кратні 6, та C — множина натуральних чисел, що кратні 3.

280 Зобразіть за допомогою діаграми Венна множини A та B, якщо A — множина дільників числа 48, а B — множина дільників числа 36.

281 Нехай P — множина цілих чисел, менших за 10, S — множина коренів рівняння $x^2 - 64 = 0$ і T — множина парних додатних чисел. Задайте множини P, S і T переліком елементів. Зобразіть множини P, S і T за допомогою діаграми Венна.

282 Нехай N — множина натуральних чисел, менших за 20, M — множина парних натуральних чисел, менших за 18, і K — множина чисел, кратних 3, менших за 20, більших за -5. Задайте множини N, M і K переліком елементів. Зобразіть множини N, M і K за допомогою діаграми Венна.

283 Нехай A = {1; 2; 3; 4; 6}, B = {1; 3; 6; 9} і C = {1; 2; 3; 6; 7; 8}. Зобразіть множини A, B і C за допомогою діаграми Венна. Чи правильно, що $A \subset C$?

284 Нехай R — множина чотирикутників, K — множина квадратів і P — множина прямокутників. Зобразіть ці множини за допомогою діаграми Венна.

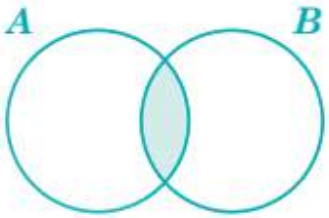
285 Нехай M — множина коренів рівняння $\frac{8 - 6x}{3} + x = 9 - \frac{4x + 8}{6}$, а N — множина коренів рівняння $|4 - 3x| = 7$. Зобразіть діаграму Венна, щоб показати відношення між множинами M і N. Чи правильно, що $N \subset M$? Поясніть свою думку.

286 З нагоди Всесвітнього дня Землі учні та учениці 8-го класу вирішили взяти участь в акціях зі збереження навколишнього середовища. Із 33 учнів та учениць 26 долучилися до акції висаджування дерев, а 19 — до прибирання берегу річки. Скільки учнів та учениць долучились одночасно до двох акцій? Для розв'язання задачі побудуйте діаграми Венна.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

3.5. Перетин та об'єднання множин

Перетином множин A і B називається множина всіх елементів, що належать обом множинам A і B одночасно. Перетин множин A і B позначають $A \cap B$.



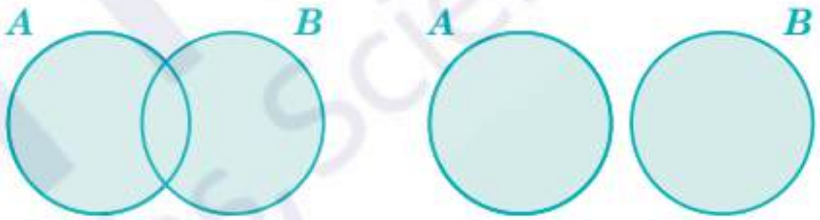
$A \cap B$ — перетин множин A і B.

Якщо дві множини A і B не мають спільних елементів, то їх перетин є порожньою множиною. Тобто $A \cap B = \varnothing$.



Об'єднанням множин A і B називається множина всіх елементів, які належать принаймні одній множині A чи B. Об'єднання множин A і B позначають $A \cup B$.

$A \cup B$ — об'єднання множин A і B.



Поміркуйте!
Чи правильно, що $n(A \cap B) < n(A)$ для будь-яких множин A і B?

Поміркуйте!
Чи правильно, що $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ для будь-яких множин A і B?

Щоб описати відношення між трьома і більше множинами, використовують дужки. Дія в дужках виконується найперше.
$A \cap (B \cap C)$

Приклад

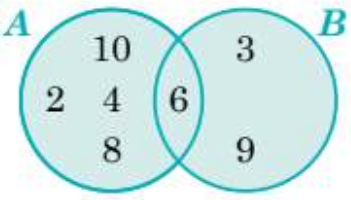
1 Нехай $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, $B = \{3; 6; 9\}$.

а) Зобразіть відношення між множинами за допомогою діаграми Венна.

б) Знайдіть перетин та об'єднання цих множин.

Розв'язання

а)



б) $A \cap B = \{6\}$
$A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10\}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

2 Нехай $P = \{a; b; g\}$, $Q = \{c; f\}$. Знайдіть:

а) $P \cup Q$; б) $n(P \cup Q)$; в) $A \cap B$; г) $n(A \cap B)$;

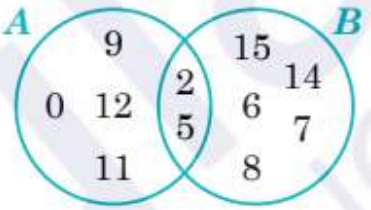
Розв'язання

а) $P \cup Q = \{a; b; c; f; g\}$ б) $n(P \cup Q) = 5$ в) $A \cap B = \varnothing$
г) $n(A \cap B) = 0$

Приклад

3 Розгляньте діаграму Венна та знайдіть:

а) $n(A \cup B)$; б) $n(A \cap B)$;



Розв'язання

а) $A \cup B = \{0; 2; 5; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 14; 15\}$, $n(A \cup B) = 11$
б) $A \cap B = \{2; 5\}$, $n(A \cap B) = 2$

Приклад

4 Нехай A — множина натуральних чисел, кратних 10, B — множина натуральних чисел, кратних 5.

а) Перелічіть елементи множин A і B.
б) Перелічіть елементи множин $A \cup B$ та $A \cap B$.

Розв'язання

а) $A = \{10; 20; 30; 40; 50; \ldots\}$,
$B = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; \ldots\}$

б) $A \cup B = \{5; 10; 15; 20; 25; 30; \ldots\} = B$,
$A \cap B = \{10; 20; 30; 40; 50; \ldots\} = A$

Множини A і B є нескінченними, оскільки кількість їх елементів неможливо перелічити.

Попрактикуйтеся

287 Дано множини: $A = \{11; 12; 13; 16; 17; 18; 19; 20\}$, $B = \{11; 13; 15; 17\}$, $C = \{12; 14; 16; 18; 20\}$. Знайдіть:

а) $A \cup B$; б) $B \cup C$; в) $B \cap C$; г) $A \cap C$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

288 Дано множини: D = {ш; а; н; у; й; т; е}, E = {н; а; ш; у} і F = {м; о; в; а}. Знайдіть:

а) $D \cup F$; б) $E \cup F$; в) $D \cap E$; г) $E \cap F$.

289 Нехай P = {c; a; t}, Q = {t; i; d; e} і R = {d; e; s; i; g; n}. Знайдіть:

а) $P \cap Q$ та $n(P \cap Q)$; б) $P \cap R$ та $n(P \cap R)$; в) $Q \cap R$ та $n(Q \cap R)$.

290 Нехай A = {г; е; р; б}, B = {г; і; м; н} і C = {г; е; р; о; й}. Зобразіть множини A, B і C за допомогою діаграми Венна. Знайдіть:

а) $A \cap B$ та $n(A \cap B)$; б) $B \cap C$ та $n(B \cap C)$; в) $C \cap A$ та $n(C \cap A)$.

291 Розгляньте таблицю та виконайте завдання. У таблиці наведено ціни (у гривнях) різнокольорових футболок та штанів.

Тип одягу	Жовтий	Синій	Блакитний	Білий	Чорний	Коричневий	Зелений
Футболка	480	440	280	320	400	520	560
Штани	760	800	730	600	640	400	680

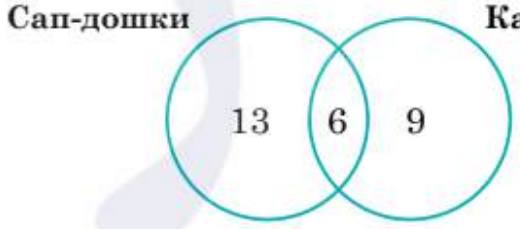
Яків має подарунковий сертифікат на 1000 грн у магазин одягу. Він планує витратити всю суму, купивши футболку і штани. Нехай A — множина кольорів футболок, які коштують менше ніж 480 грн, а B — множина кольорів штанів, які коштують більше, ніж 520 грн.

а) Перелічіть елементи множин $A \cup B$ і $A \cap B$.

б) Перелічіть елементи множини C, яка міститиме кольори футболок та штанів з множин A та B, які найімовірніше купить Яків. Поясніть свою думку.

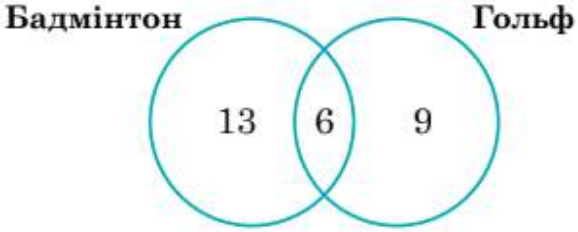
292 Розгляньте діаграми Венна та дайте відповіді на запитання.

а) Діаграма Венна показує, на чому люблять кататися деякі бабусі та дідусі.



1) Скільки дідусів і бабусь любить кататися на сап-дошках?
2) Скільки дідусів і бабусь любить кататися і на сап-дошках, і на каяках?

б) Діаграма Венна показує, що люблять грати деякі дідусі і бабусі.



1) Скільки дідусів і бабусь не люблять гольф?
2) Скільки всього дідусів і бабусь було опитано?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

293 Нехай A — множина натуральних чисел, кратних 2 та 3, більших від 0, але менших за 25, а B — множина цілих чисел більших за 2, але менших за 15. Перелічіть елементи кожної множини. Знайдіть перетин цих множин.

294 Нехай A — множина натуральних чисел, кратних 6, а B — множина натуральних чисел, кратних 9. Задайте переліком множини A і B. Знайдіть $A \cup B$ та $A \cap B$.

295 Вікторія та Дмитро обирають кличку для свого кошеняти. Вікторія віддає перевагу кличкам з множини S = {Зірочка; Белла; Пушинка}, тоді як Дмитро віддає перевагу кличкам з множини T = {Сімба; Белла; Плямка}. Перелічіть елементи множин $S \cap T$ і $S \cup T$ та зобразіть їх за допомогою діаграми Венна. Яку кличку найімовірніше Вікторія та Дмитро дадуть своєму кошеняті? Поясніть власну думку.

296 Побудуйте діаграму Венна для зображення двох множин A і B таких, що:

а) $A \cap B = A$; б) $A \cup B = A$.

297 Знайдіть дві множини A і B такі, що $A \cap B$ = {а; ф; к}.

298 Знайдіть перетин та об'єднання множин цифр, що використовують для запису чисел:

а) 28 782 та 35 683; б) 22 222 та 33 333.

299 Знайдіть об'єднання множин A та B, якщо:

а) A — множина рівнобедренних трикутників, B — множина рівносторонніх трикутників;

б) A — множина простих чисел, B — множина складених чисел;

в) A — множина простих чисел, B — множина непарних чисел.

300 Знайдіть об'єднання множин A і B, якщо A — множина всіх розв'язків рівняння $x^2 - 1 = 0$, а B — множина всіх коренів рівняння $(x - 1)(x + 2) = 0$.

301 Накресліть два трикутники так, щоб їх перетином був:

а) відрізок; б) точка; в) трикутник; г) шестикутник.

302 Відомо, що з 30 учнів та учениць класу 20 вивчають англійську мову, 15 — французьку. Скільки учнів та учениць вивчають обидві мови? Для розв'язання задачі побудуйте діаграму Венна.

303 У класі провели опитування про домашніх улюбленців. Виявилося, що 16 дітей мають вдома котів, 12 — собак та 5 дітей мають і кота, і собаку. Скільки всього дітей у класі? Для розв'язання задачі побудуйте діаграму Венна.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Короткий огляд розділу

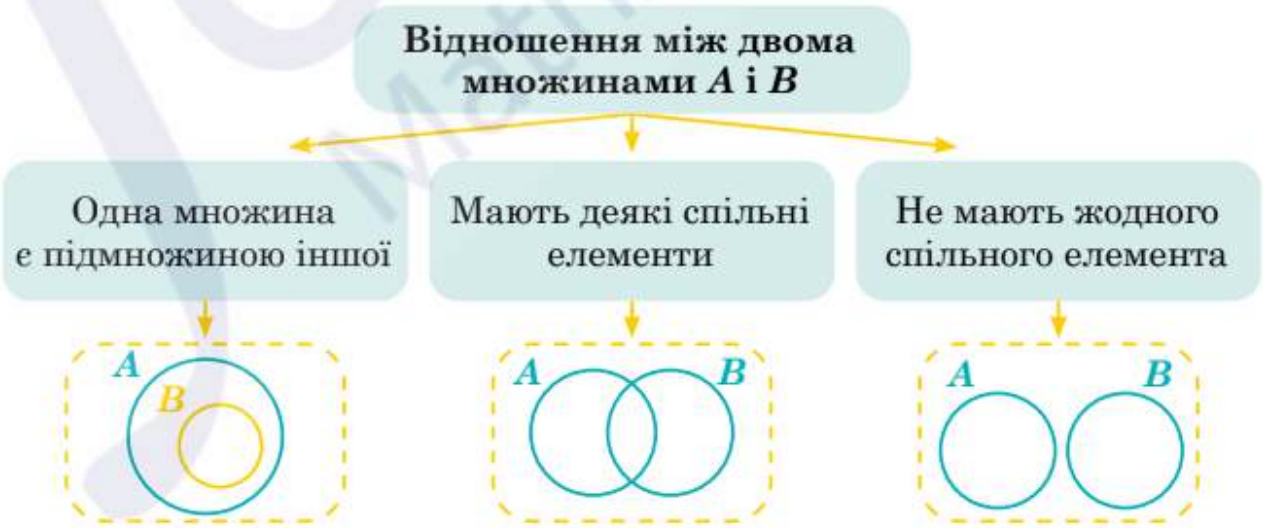
1

$1 \in A$	1 належить множині A
$1 \notin A$	1 не належить множині A
$A = B$	рівні множини
$A \neq B$	нерівні множини
$A \subset B$	множина A є підмножиною B
$A \not\subset B$	множина A не є підмножиною B
$n(A)$	кількість елементів множини A
Ø або $\{\}$	порожня множина
$A \cup B$	об'єднання множин A і B
$A \cap B$	перетин множин A і B

2 **Множина** — це сукупність різних об'єктів, які мають спільні властивості. Об'єкти множини називаються елементами множини. Множину можна задавати, вказавши:
- перелік її елементів ($A = \{5; 10; 15; 20\}$);
- характеристичну властивість (A — множина чисел, кратних 5).

3 Множини бувають:
- скінченні (всі елементи множини можна перелічити);
- нескінченні (неможливо вказати останній елемент множини, оскільки її елементів нескінченно багато).

4 Для наочного зображення відношень між різними множинами використовують діаграми Венна.



5 Множина всіх елементів, які належать принаймні одній множині A чи B, називається **перетином** множин. Множина всіх елементів, що належать обом множинам A і B одночасно, називається **об'єднанням** множин A і B.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Перевірте свої досягнення

1 Знайдіть $n(K)$, якщо K — множина літер слова «голуб».

а) 6 б) 5 в) 4 г) 0

2 Знайдіть $n(B)$, якщо B — множина коренів рівняння $|x| = 5$.

а) 0 б) 1 в) -1 г) 5

3 Оберіть правильний запис, якщо D — множина коренів рівняння $-7x + 9 = 5x - 3$, а $E = \{-1; 2\}$.

а) $D \subset E$ б) $D \notin E$ в) $D = E$ г) $D \notin E$

4 Оберіть правильний запис, якщо Z — множина цілих чисел.

а) $0{,}5 \in Z$ б) $\pi \in Z$ в) $-3 \in Z$ г) $\frac{1}{5} \in Z$

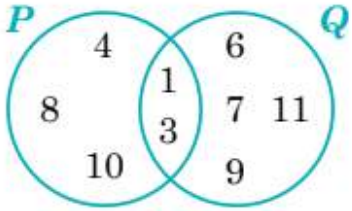
5 Оберіть неправильний запис, якщо $X = \{30; 31\}$.

а) $\{30\} \subset X$ б) $30 \notin X$ в) $31 \in X$ г) $\{31\} \subset X$

6 Яка з множин порожня?

а) P — множина простих чисел, що діляться на 3.
б) R — множина багатокутників з більш ніж 10 сторонами.
в) Q — множина чисел, кратних 8, між 25 і 30.
г) S — множина трикутників з двома гострими кутами.

7 З яких елементів складається множина $P \cap Q$?



а) $\{1; 3\}$ б) а) $\{4; 8; 10\}$
в) $\{6; 7; 9; 11\}$ г) $\{1; 3; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$

8 Знайдіть $n(M \cup N)$, якщо $M = \{\text{т; и}\}$ і $N = \{\text{в; і; л; ь; н; а}\}$.

а) 0 б) 2 в) 6 г) 8

9 Оберіть істинне твердження, якщо множини $A = \{\text{в; е; л; и; ч}\}$, $B = \{\text{м; и; р}\}$ та $C = \{\text{м; и; р; н; й}\}$.

а) $n(B \cup C) < n(A)$ б) $n(B \cup C) < n(B)$
в) $n(A \cap B) < n(A)$ г) $n(A \cap B) > n(A)$

10 Знайдіть $n(T)$, якщо множина $T = \varnothing$.

а) -1 б) 0 в) 1 г) 10

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Проєктна робота «Множини»

Крок ① Об'єднайтеся у групи за інтересами.

Крок ② Проведіть соціологічне опитування у класі та виконайте завдання.

Група 1. «Кулінарія»

1 Проведіть соціологічне опитування у класі та з'ясуйте, хто з ваших однокласників та однокласниць полюбляє страви української кухні, кому більше смакує італійська кухня, а кому — французька, хто з них любить споживати страви всіх цих кухонь, хто — української та італійської, хто їсть страви української і французької, кому до смаку страви французької та італійської і кому з учнів та учениць вашого класу не смакують страви жодної з цих кухонь.

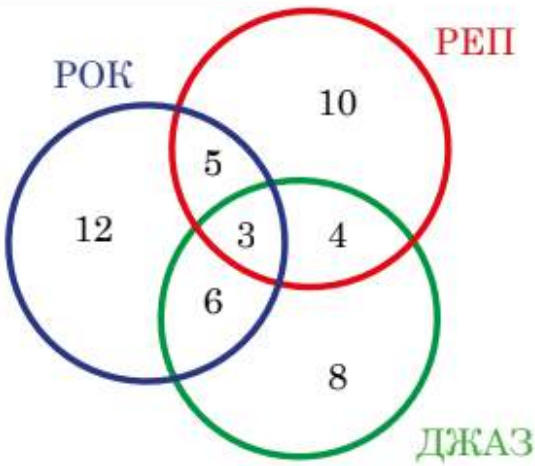
2 Оформіть отримані дані за допомогою діаграми Венна.

3 Презентуйте діаграму у класі. Поставте запитання однокласникам та однокласницям:

- Скільки однокласників та однокласниць полюбляють страви української кухні, але не їдять страви італійської та французької кухонь?
- Скільком однокласникам та однокласницям смакує італійська кухня, але не подобається французька та українська?
- Скільки однокласників та однокласниць полюбляють страви лише української кухні?
- Скільки ваших однокласників та однокласниць не їдять страви жодної з цих кухонь?
- Скільки учнів та учениць взяли участь в опитуванні?

Група 2. «Музика»

1 Проведіть соціологічне опитування у класі та з'ясуйте, хто з ваших однокласників та однокласниць полюбляє слухати реп, хто надає перевагу джазу, кому подобається рок, хто слухає музику всіх цих напрямів, хто слухає реп і джаз, хто — джаз і рок, хто — рок і реп, хто не слухає музику жодного напряму.



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

2 Оформіть отримані дані за допомогою діаграми Венна.

3 Презентуйте діаграму у класі. Поставте запитання однокласникам та однокласницям:

- Скільки однокласників та однокласниць полюбляють слухати джаз і рок, але не слухають реп?
- Скільком однокласникам та однокласницям подобається слухати реп і рок, але до вподоби джаз?
- Скільки однокласників та однокласниць полюбляють слухати лише реп?
- Скільки ваших однокласників та однокласниць слухають музику всіх цих напрямів?
- Скільки учнів та учениць взяли участь в опитуванні?

Група 3. «Спорт»

1 Проведіть соціологічне опитування у класі та з'ясуйте, хто з ваших однокласників та однокласниць займається гімнастикою, хто надає перевагу легкій атлетиці, хто — командним іграм, хто займається видами спорту всіх цих трьох напрямів, хто з учнів та учениць вашого класу займається гімнастикою та легкою атлетикою, хто — легкою атлетикою та командними іграми, хто — командними іграми та гімнастикою, а хто не займається жодним із цих напрямків спорту.

2 Оформіть отримані дані за допомогою діаграми Венна.

3 Презентуйте діаграму у класі. Поставте запитання однокласникам та однокласницям:

- Скільки однокласників та однокласниць займаються гімнастикою та легкою атлетикою, але не займаються командними видами спорту?
- Скільки однокласників та однокласниць надають перевагу командним видам спорту та гімнастиці, але не займаються легкою атлетикою?
- Скільки однокласників та однокласниць займаються лише гімнастикою?
- Скільки ваших однокласників та однокласниць не займаються жодним із цих напрямів спорту?
- Скільки учнів та учениць взяли участь в опитуванні?

Крок ③ Презентуйте свої діаграми іншим групам. Розгляньте діаграми, а тоді обговоріть відповіді на питання до діаграм.

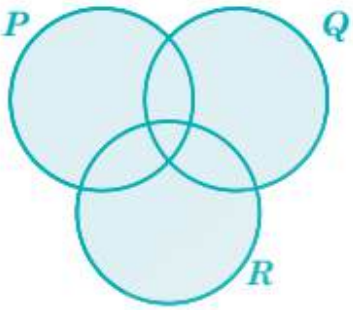
Крок ④ Обговоріть підсумки проєкту з усім класом.

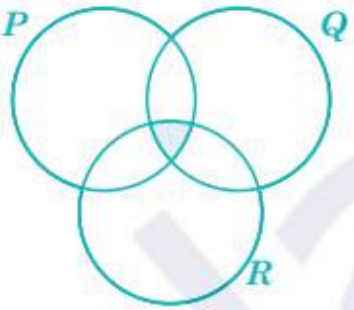
Що нового ви дізналися одне про одного?
Про які вподобання ви хотіли б ще поговорити?
Що вдалося найкраще, а що викликало труднощі?
Що було найцікавішим? Що не сподобалося?
Що ви б зробили по-іншому?

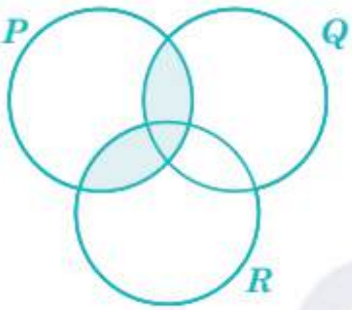
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

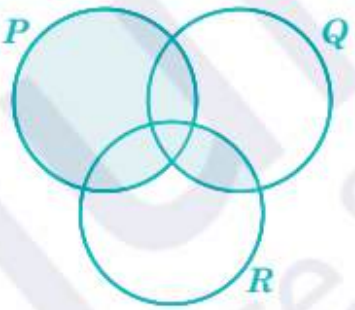
Додаткові завдання до розділу

304 За готовими діаграмами Венна опишіть відношення між множинами P, Q та R.

а) 

б) 

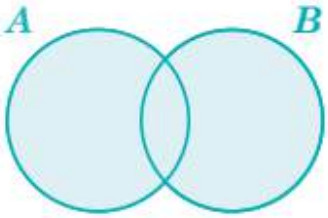
в) 

г) 

EN **305** Match the pairs.

1 

2 

3 

A Union

B Empty set ($A \cap B = \varnothing$)

C Intersection

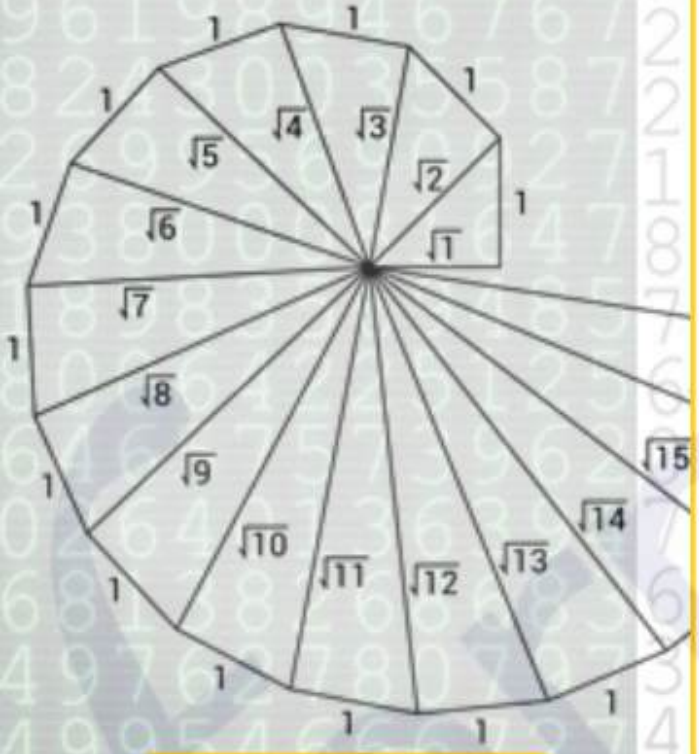
EN **306** Complete the table.

Description	List
E is the set of all odd natural numbers less than 12.	
	$C = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14\}$
F is the set of the letters in the word «flower».	
	$M = \{p; i; g\}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

4

Дійсні числа. Квадратні корені



Більшість людей думає, що всі наявні числа є звичайними, їх легко читати, легко використовувати і вони мають звичну для нас форму цілого числа, звичайного або десяткового дробу з кількома знаками після коми. Але це неправда! Світ чисел — це світ без обмежень! Переважно числа, якими ми користуємося, насправді не працюють так, як ми очікуємо. Це означає, що ми не можемо записати всі їхні цифри, оскільки цифри після коми ніколи не закінчуються. Через це їх важко використовувати. Розглянемо координатну пряму, зупинимося детальніше між цілими числами 1 і 2. Числа 1,1, 1,01, 1,011, 1,0112 лежать між ними. Чи можна дописати ще один знак після коми знову і знову, і так до нескінченності? Числа 1,1, 1,12, 1,123, 1,1234, …, 1,12345… тощо також розташовані на координатній прямій між числами 1 і 2. І саме в цьому розділі ми будемо говорити про всі наявні числа — дійсні числа.

У цьому розділі ми:

- дізнаємося про множини раціональних та ірраціональних чисел;
- довідаємося, що множина дійсних чисел складається з раціональних та ірраціональних чисел;
- навчимося відрізняти квадратний корінь від арифметичного квадратного кореня;
- будемо добувати квадратні корені з чисел;
- дізнаємося про властивості арифметичного квадратного кореня та застосуємо їх, виконуючи тотожні перетворення виразів, що містять корені;
- будемо розв'язувати рівняння виду $x^2 = a$ та $\sqrt{x} = a$.

Ключові слова

- Раціональне число (*rational number*)
- Ірраціональне число (*irrational number*)
- Дійсне число (*real number*)
- Корінь квадратний (*square root*)

© Vector, Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

4 Дійсні числа. Квадратні корені

4.1. Раціональні числа

Позначення множини **натуральних чисел** літерою N походить від латинського слова natura — природа.

Як ви вже знаєте, **множина** — це сукупність різних об'єктів, які прийнято називати елементами. Відповідно до властивостей чисел їх можна класифікувати в різні множини чисел, які позначаються спеціальними літерами.

Наприклад, множину **натуральних чисел** позначають літерою N і вона складається з усіх чисел, які ми використовуємо під час лічби предметів {1; 2; 3; ...}.

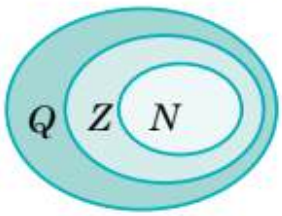


Позначення множини **цілих чисел** літерою Z походить від німецького слова zahl — число.

Множина **цілих чисел** позначається літерою Z, складається з натуральних чисел, їм протилежних і числа 0 {...; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; ...}. Множина натуральних чисел є підмножиною цілих, тобто $N \subset Z$.

Поміркуйте!
Чи правильно, що число 0 належить до множини натуральних чисел? Чому?

Цілі числа та дробові, додатні й від'ємні утворюють множину раціональних чисел. Множину **раціональних чисел** позначають Q.



Множина натуральних чисел є підмножиною множини цілих, а множина цілих — підмножиною множини раціональних. Співвідношення між цими множинами за допомогою діаграм Венна подано праворуч. Одне число може належати до кількох множин чисел одночасно. Наприклад, $2 \in N$, $2 \in Z$ і $2 \in Q$.

Термін «раціональне число» походить від латинського слова ratio — розум (буквальний переклад «раціональне число — розумне число»).

Раціональні числа — це будь-які числа, які можна записати як відношення двох цілих чисел, тобто у вигляді $\frac{a}{b}$, де a і $b \in Z$ і $b \neq 0$.

$-\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{7}$; 5; 0,3; 5,614... — це раціональні числа.

Число 5 можна записати як $\frac{5}{1}$.

Число 0,3 можна записати як $\frac{3}{10}$.

Число 5,614 можна записати як $5\frac{614}{1000}; 5\frac{307}{500}; \frac{2807}{500}$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Раціональні числа також можна подати у вигляді десяткового дробу. Для цього необхідно чисельник поділити на знаменник.

$\frac{5}{8} = 5 : 8 = 0{,}625 \quad -\frac{7}{4} = -7 : 4 = -1{,}75 \quad \frac{5}{9} = 5 : 9 = 0{,}5555\ldots = 0{,}(5)$

0,625 та −1,75 називаються ***скінченними десятковими дробами***.

А от у дробі 0,5555... бачимо, що число 5 повторюється знову і знову. Десяткові дроби, які мають у дробовій частині цифри, що постійно повторюються, називаються ***нескінченними періодичними десятковими дробами***. Запис у дужках означає, що цифра 5 постійно повторюється, і читається: «0 цілих і 5 у періоді». Наведемо ще приклади нескінченних періодичних десяткових дробів:

$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots = 0{,}(3) \quad \frac{13}{15} = 0{,}8666\ldots = 0{,}8(6) \quad \frac{23}{33} = 0{,}696969\ldots = 0{,}(69)$

Усі натуральні та цілі числа, звичайні дроби та десяткові дроби із скінченною кількістю знаків після коми або періодичні десяткові дроби є **раціональними числами**.

Приклад

1 Користуючись символами $\in$ або $\notin$, заповніть пропуски. Поясніть свою думку.

а) 2,31 ☐ N б) −8 ☐ Q в) 0,8 ☐ Q г) $\frac{121}{11}$ ☐ Z

Розв'язання

а) $2{,}31 \notin N$. Число 2,31 не є елементом множини натуральних чисел, бо не використовується для лічби предметів.

б) $-8 \in Q$. Число −8 є елементом множини раціональних чисел,0 оскільки може бути записано у вигляді $\frac{-8}{1}$.

в) $0{,}8 \in Q$. Число 0,8 є елементом множини раціональних чисел, оскільки може бути записано у вигляді $\frac{8}{10}$.

г) $\frac{121}{11} \in Z$. Число $\frac{121}{11}$ є елементом множини цілих чисел, оскільки дорівнює 11.

Попрактикуйтеся

307 Прочитайте твердження і визначте, які з них істинні, а які — хибні. Поясніть свою думку.

а) Усі цілі числа є раціональними. б) 0 не є раціональним числом.

в) Усі десяткові дроби є раціональними числами.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

г) Є деякі раціональні числа, які не можуть бути подані у вигляді $\frac{a}{b}$, де a і $b \in Z$ і $b \neq 0$.

308 Виберіть лише цілі числа.

З букв, що позначають цілі числа, складіть назву нагороди, володарем якої у 2004 році став Андрій Шевченко як найкращий гравець Європи. До того це звання здобували лише Олег Блохін та Ігор Беланов. Андрій — найкращий бомбардир збірної України в історії, на його рахунку 48 голів. Шевченко — перший тренер збірної України, який вивів команду у плей-оф та дійшов з нею вже до чверть фіналу.

А	π	З	1065	Е	$-4{,}5$
О	65	Ф	6,75	Л	-102
Т	$\frac{21}{7}$	И	$\frac{121}{11}$	Й	$\frac{36}{18}$
М	2^2	Я	3^3	Ч	0



								’						

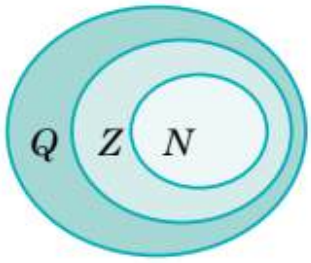
309 Запишіть у вигляді звичайного дробу.

а) 45 б) -4 в) 23,1 г) $-92{,}725$ д) $5\frac{3}{14}$ е) $-3\frac{4}{7}$

310 Запишіть у вигляді десяткового дробу.

а) $\frac{3}{4}$ б) $\frac{7}{12}$ в) $\frac{5}{13}$ г) $-\frac{1}{3}$ д) $-\frac{7}{11}$ е) $\frac{23}{33}$

311 Запишіть числа $\frac{9}{4}$; $-32{,}1$; 0; $\frac{99}{400}$; $-6{,}781$; -17 у відповідну частину діаграми Венна та дайте відповіді на запитання.



а) Елементом якої множини (множин) є число $\frac{9}{4}$?
б) Елементом якої множини (множин) є число $-32{,}1$?
в) Елементом якої множини (множин) є число 0?
г) Елементом якої множини (множин) є число $\frac{99}{400}$?
д) Елементом якої множини (множин) є число $-6{,}781$?
е) Елементом якої множини (множин) є число -17?

312 Обчисліть і вкажіть множину, до якої належить результат.

а) $-385 + 370 - 335 + 220$ б) $-325 : 13 \cdot (-17)$ в) $166{,}05 + 32{,}33$
г) $\frac{4}{5} - \frac{13}{12}$ д) $\frac{3}{4} + \frac{5}{12}$ е) $1 - \frac{16}{15}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

4.2. Квадратні корені. Арифметичний квадратний корінь

Розглянемо проблемну ситуацію. Господар равликової ферми, що має квадратну форму, хоче обгородити ділянку сіткою для вирощування равликів. Знайдіть довжину ділянки, якщо її площа становить 100 м².

Як бачимо, перед нами постала проблема у виконанні дії, за допомогою якої можна знайти число, квадрат якого відомий. Нехай x м² — довжина ділянки, тоді її площа x^2 м². За умовою задачі маємо рівняння:

$x^2 = 100$

$10^2 = 100^2$ і $(-10)^2 = 100$

$x_1 = 10$ (м) — довжина ділянки.

$x_2 = -10$ — не задовольняє умову задачі.

Відповідь. 10 м — довжина ділянки.



Числа 10 і –10 є квадратними коренями із числа 100, тому що $10^2 = 100$, $(-10)^2 = 100$.

Квадратний корінь із числа a — це число, квадрат якого дорівнює a.

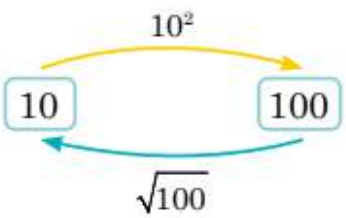
Але лише число 10 є **арифметичним квадратним коренем** із числа 100. Це число і є відповіддю до проблемної ситуації.

Арифметичний квадратний корінь із числа a — це невід'ємне значення квадратного кореня з числа a. Це позначають $\sqrt{a}$.

$\sqrt{a}$ → $\sqrt{}$ — знак квадратного кореня, або радикал;

a — підкореневий вираз;

$\sqrt{a}$ читається як «квадратний корінь із числа a».



$\sqrt{100}$ читається як «квадратний корінь із числа 100».

Щоб знайти значення квадратного кореня із числа 100 виконують дію **«добування квадратного кореня»**.

$10^2 = 100$, отже $\sqrt{100} = 10$.

Більшість значень арифметичних коренів — нескінченні неперіодичні десяткові дроби. Проте є такі значення, як натуральні числа, їх називають точними ква-

Поміркуйте!
Чи правильно, що числа −3 та 3 є квдратними коренями із числа 9?

Для зручності під час читання слово **«арифметичний»** домовилися не вживати.

Вираз $\sqrt{a}$ не має змісту, якщо $a < 0$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

дратами. Наприклад, $\sqrt{16} = 4$, $\sqrt{25} = 5$...

Добути квадратний корінь із від'ємного числа неможливо, адже не існує такого числа, яке в квадраті було б від'ємним числом. $(-1)^2 = 1$; $0^2 = 0$; $1^2 = 1$; $(2)^2 = 4$... Це означає, що підкореневий вираз не може бути від'ємним.

Підкореневий вираз завжди додатне число або нуль. Отже, $a \geq 0$.

Приклад

1 Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня.

а) $\sqrt{4}$ б) $\sqrt{121}$ в) $\sqrt{2500}$

г) $\sqrt{25600}$ д) $\sqrt{\frac{4}{25}}$ е) $\sqrt{0,64}$

Розв'язання

а) $\sqrt{4} = 2$ б) $\sqrt{121} = 11$ в) $\sqrt{2500} = 50$

г) $\sqrt{25600} = 160$ д) $\sqrt{\frac{4}{25}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$ е) $\sqrt{0,64} = 0,8$

Щоб добувати корені з більших чисел, використовують таблицю квадратів чисел від 0 до 99, розміщену на форзаці, або калькулятор.

Приклад

2 Обчисліть.

а) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ б) $\sqrt{29316}$ в) $\sqrt{65^2 - 16^2}$

Щоб добути корінь із мішаного числа, спочатку потрібно перетворити його в неправильний дріб, а тоді добути корінь з чисельника та знаменника окремо.

Розв'язання

а) $\sqrt{2\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ б) $\sqrt{29316} = 54$

в) $\sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{4225 - 256} = \sqrt{3969} = 63$

Попрактикуйтеся

313 Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня:

а) $\sqrt{9}$ б) $\sqrt{36}$ в) $\sqrt{49}$ г) $\sqrt{81}$ д) $\sqrt{144}$

е) $\sqrt{289}$ ж) $\sqrt{324}$ и) $\sqrt{484}$ к) $\sqrt{529}$ л) $\sqrt{625}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

314 Обчисліть, використовуючи таблицю квадратів натуральних чисел, подану на форзаці.

а) $\sqrt{8649}$ б) $\sqrt{2116}$ в) $\sqrt{1369}$ г) $\sqrt{5184}$ д) $\sqrt{6724}$

315 Визначте, чи мають зміст вирази. Поясніть свою думку.

а) $\sqrt{2}$ б) $\sqrt{0}$ в) $\sqrt{9}$ г) $\sqrt{-9}$ д) $-\sqrt{5}$

316 Виконайте завдання.



317 Знайдіть усі квадратні корені з чисел.

а) 49 б) 64 в) 81 г) 121 д) 196
е) 3,24 ж) 4,41 и) 6,76 к) 10,89 л) 14,44

318 Знайдіть арифметичний квадратний корінь із числа.

а) 0,01 б) 0,0841 в) 0,1024 г) 0,0036 д) $\frac{1}{100}$
е) $\frac{1}{225}$ ж) $\frac{1}{729}$ и) $\frac{1}{1600}$ к) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$ л) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$

319 Обчисліть.

а) $\sqrt{\frac{49}{64}}$ б) $\sqrt{\frac{25}{81}}$ в) $\sqrt{\frac{0,09}{0,16}}$ г) $\sqrt{\frac{121}{36}}$
д) $\sqrt{2\frac{28}{36}}$ е) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ ж) $\sqrt{\frac{2,25}{1,21}}$ и) $\sqrt{\frac{6,76}{0,16}}$

320 Знайдіть значення виразів.

а) $\sqrt{36}+\sqrt{16}$ б) $\sqrt{81}-\sqrt{25}$ в) $2\sqrt{169}$ г) $5\sqrt{0,36}+\sqrt{144}$
д) $\sqrt{4}\cdot\sqrt{0,64}$ е) $10:\sqrt{0,25}$ ж) $\sqrt{225}:\sqrt{100}$ и) $3\sqrt{676}\cdot 0,1\sqrt{1}$
к) $\frac{3}{4}+\sqrt{6,25}$ л) $\frac{1}{7}\sqrt{49}-\sqrt{0,09}$ м) $\sqrt{200-79}$ н) $\sqrt{10^2-8^2}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

321 Обчисліть значення виразу:

а) $\sqrt{a+7}$, якщо $a = 9; 18; 29$;

б) $\sqrt{2n-m}$, якщо $n = 55$, $m = 10$;

в) $x + 2\sqrt{x}$, якщо $x = 0{,}16; 0{,}25; 1{,}21$.

322 Знайдіть значення виразів та дізнайтеся досягнення найтитулованішої української спортсменки Ольги Харлан.



а) $\sqrt{49}-\sqrt{4}$ ☐ Олімпійських ігор у кар'єрі;

б) $\sqrt{16}\cdot\sqrt{2{,}25}$ ☐ олімпійських медалей;

в) $\sqrt{100}:\sqrt{25}$ ☐ золотих медалей;

г) $\sqrt{9^2-5\cdot 4^2}$ ☐ срібних медалей;

д) $3\sqrt{121}-\sqrt{900}$ ☐ бронзових медалей;

е) $\frac{3}{4}\sqrt{576}-4\sqrt{0{,}5625}$ ☐ медалей чемпіонатів світу;

ж) $\sqrt{1{,}96}:0{,}35+\frac{2}{7}\sqrt{3136}$ ☐ медалей чемпіонатів Європи;

и) $\sqrt{\frac{16}{81}}:\sqrt{\frac{64}{225}}+\frac{1}{6}\sqrt{361}$ ☐ рази визнана спортсменкою року;

к) $\frac{5}{9}(\sqrt{400}-\sqrt{225}):\left(\sqrt{1}-\sqrt{\frac{16}{81}}\right)$ ☐ разів перемагала у загальному заліку Кубка світу.

323 Обчисліть, використовуючи формули скороченого множення.

а) $\sqrt{13^2-12^2}$ б) $\sqrt{25^2-24^2}$ в) $\sqrt{761^2-760^2}$

г) $\sqrt{2113^2-2112^2}$ д) $\sqrt{2035^2-2034^2}$ е) $\sqrt{4901^2-4900^2}$

324 При яких значеннях a має зміст вираз:

а) $\sqrt{a}$; б) $\sqrt{7a}$; в) $\sqrt{9-a}$; г) $\sqrt{a-4}$; д) $\sqrt{-a-2}$;

е) $\sqrt{(a-1)^2}$; ж) $\sqrt{a^4}$; и) $\sqrt{a^7}$; к) $\sqrt{-a}$; л) $\sqrt{-a^6}$.

325 Знайдіть сторону квадрата, площа якого дорівнює:

а) 256 м²; б) 0,49 см²; в) 0,01 км²; г) 1,21 га.

1 га = 10 000 м²
1 а = 100 м²

326 Знайдіть периметр поля квадратної форми, якщо його площа дорівнює:

а) 1 а; б) 64 га; в) 2500 км²; г) 1,69 м².

327 Фруктовий сад, який має квадратну форму, засаджено деревами. 5 а засаджено яблунями, 4 а — вишнями, 2 а — грушами, 3 а — сливами та 2 а — черешнями. Знайдіть периметр саду.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

4.3. Ірраціональні числа. Дійсні числа

На початку розділу ми розповідали, що в математиці є такі числа, які важко використовувати в реальному житті, оскільки кількість їх цифр після коми ніколи не закінчується. Що ж це за числа? Це **ірраціональні числа**.

Приклади таких чисел: $\sqrt{2}$, π, e.

Згідно з розрахунком на калькулярорі маємо $\sqrt{2} = 0{,}414213562373\ldots$ Із числом π («пі») ви вже знайомились раніше, це число, що є відношенням довжини кола до його діаметра. Число e («е»), або число Ейлера, використовується для обчислень у математиці старшої школи. Обчисливши значення цих чисел, отримаємо ***нескінченні неперіодичні десяткові дроби***:

$\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots \quad \pi = 3{,}1415926\ldots \quad e = 2{,}7182818\ldots$

У їхньому десятковому записі не існує періоду. За потреби їх використовують, округливши до певного розряду. Наприклад, число π найчастіше округлюють до сотих і під час обчислень використовують значення 3,14.

Прикладами ірраціональних чисел також є числа:

$\sqrt{5} = 2{,}2360679\ldots \quad \sqrt{15} = 3{,}872983\ldots$

$\sqrt{29} = 5{,}385164\ldots \quad \sqrt{101} = 10{,}04987\ldots$

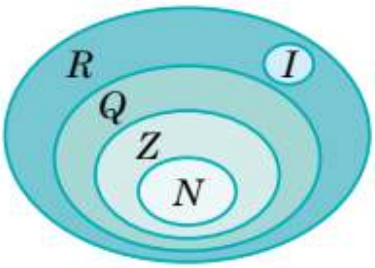
З такими числами ми ознайомимося під час вивчення наступних тем. Вирази, що містять змінну під знаком кореня, називаються ***ірраціональними виразами***. Множину ірраціональних виразів позначають літерою $\boldsymbol{I}$.

Щоб обчислити значення $\sqrt{2}$, натисніть на калькуляторі символ $\sqrt{}$ (корінь квадратний), потім цифру 2 і тоді знак =.

Термін «ірраціональне число» походить від латинського слова ratio — розум (буквальний переклад «ірраціональне число — нерозумне число»).

Ірраціональні числа — це числа, які не можна записати у формі звичайного дробу $\frac{a}{b}$, де a і $b \in Z$ і $b \neq 0$.

Множина, що об'єднує всі наявні числа — раціональні та ірраціональні, називається множиною **дійсних чисел**. Будь-яке число є раціональним або ірраціональним. Множину дійсних чисел позначають літерою $\boldsymbol{R}$. Взаємозв'язок між натуральними, цілими, раціональними, ірраціональними та дійсними числами можна зобразити за допомогою діаграм Венна.



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

1 Визначте, яке з чисел ірраціональне, а яке — раціональне.

а) 3,1415 б) e в) 0 г) $\sqrt{7}$

Розв'язання

а) $3{,}1415 = \frac{31415}{10000}$. Можна записати у вигляді звичайного дробу, тому це раціональне число.

б) $e = 2{,}7182818\ldots$ — не можливо записати у вигляді звичайного дробу, тому це ірраціональне число.

в) $0 = \frac{0}{1}$ — можна записати у вигляді звичайного дробу, тому це раціональне число.

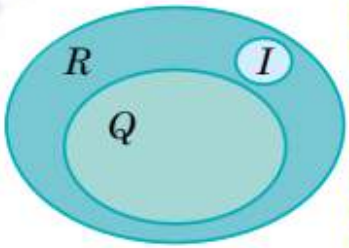
г) Скористаємося калькулятором, щоб знайти значення $\sqrt{7}$. Маємо $\sqrt{7} = 2{,}645751311\ldots$ Це число не можливо записати у вигляді звичайного дробу, отже це ірраціональне число.

Приклад

2 Дано: I — множина ірраціональних чисел, Q — множина раціональних чисел, R — множина дійсних чисел. Зобразіть відношення між множинами за допомогою діаграми Венна. Чи правильний запис $I \subset R$? Аргументуйте свою думку.

Розв'язання

Оскільки кожен елемент множини I також є елементом множини R, то запис $I \subset R$ — правильний.



Попрактикуйтеся

328 Виберіть лише ірраціональні числа.

а) 1,789 б) 5,555... в) π г) $\sqrt{2}$ д) 0,12 е) $\sqrt{25}$

329 Визначте, які із записів правильні.

а) $56 \in R$ б) $56 \notin N$ в) $-4{,}542 \in R$ г) $-18{,}7 \in Q$ д) $\sqrt{5} \in Z$

е) $\frac{18}{9} \in N$ ж) $\sqrt{7} \in Q$ и) $-12 \in Z$ к) $2\frac{3}{5} \in R$ л) $8 \notin Q$

330 Користуючись калькулятором, знайдіть значення виразів. Результат округліть до сотих.

а) $\sqrt{2}$ б) $\sqrt{3}$ в) $\sqrt{7}$ г) $\sqrt{1{,}2}$ д) $\sqrt{99}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

331 Об'єднайтеся в пари та обговоріть, що означають ці словосполучення. За потреби скористайтесь інтернет-джерелами.

Нераціональне рішення *Ірраціональний світ*

Ірраціональна інтуїтивна впевненість *Ірраціональна віра*

Раціональне мислення *Раціональне використання*

332 Серед чисел -81; 5; $-91{,}4$; $9{,}(9)$; $\frac{3}{5}$; $24{,}5$; $\sqrt{11}$; 564; $-1\frac{1}{2}$; $-\sqrt{8}$; $\frac{18}{3}$; $\sqrt{36}$ оберіть:

а) натуральні; б) цілі; в) раціональні; г) ірраціональні; д) дійсні.

333 Користуючись символами $\in$ або $\notin$, заповніть пропуски. Поясніть свою думку.

а) $-1 \square N$ б) $0{,}3 \square Q$ в) $-3{,}49 \square Z$ г) $8{,}9(1) \square Q$

д) $\sqrt{3} \square R$ е) $\sqrt{2} \square I$ ж) $\frac{7}{8} \square R$ и) $-\frac{2}{7} \square I$

334 Розв'яжіть рівняння і вкажіть усі множини, до яких належать їх корені.

а) $\frac{x-2}{3} - \frac{3x}{2} = 5$ б) $\frac{6x-1}{5} - \frac{2-x}{4} = \frac{3x+2}{2}$ в) $\frac{x-1}{2} - \frac{2x-4}{8} = x$

г) $\frac{x-1}{5} - \frac{3x}{8} = 2$ д) $\frac{1}{6x-12} = \frac{1}{9x+18}$ е) $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x}{x-2} + 1$

335 Користуючись калькулятором, порівняйте:

а) $\sqrt{3}$ та 3; б) $\sqrt{5}$ та -1; в) $\sqrt{43}$ та $7{,}1$; г) $\sqrt{17}$ та 4.

336 Оберіть серед поданих чисел ірраціональні та розташуйте їх в порядку зростання, щоб дізнатися, в якому українському місті Голлівуд замовляє спецефекти для своїх фільмів, зокрема для таких стрічок, як «Гаррі Поттер», «Халк», «Людина-павук» тощо.

0	$\sqrt{17}$	11	π	-3	9	$\sqrt{25}$	1,5	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{8}$	-18	$\sqrt{11}$	14
А	В	К	В	О	Е	П	Р	Ь	Л	К	І	Я

337 Побудуйте координатний промінь та позначте на ньому такі числа:

а) $-\sqrt{2}$; б) 0; в) -4; г) $2{,}5$; д) $\sqrt{16}$; е) $\sqrt{11}$;

ж) -3; и) -2; к) $1{,}5$; л) 1; м) $\sqrt{8}$; н) $\sqrt{25}$.

338 Доведіть, що число $\sqrt{7}$ є ірраціональним.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

4

4.4. Розв'язування рівнянь

У цій темі ми ознайомимося з рівняннями, що містять квадратні корені. Найпростіші **ірраціональні рівняння** мають вигляд $\sqrt{x} = a$, де a — деяке число. Іншими словами, невідома змінна міститься під знаком квадратного кореня. Наприклад:

$$\sqrt{x} = 5,\ \sqrt{y} + 3 = 12,\ \sqrt{2x - 3} = 18.$$

Щоб розв'язати такі рівняння, потрібно пригадати означення арифметичного квадратного кореня. Відповідно, розв'язок рівняння $\sqrt{x} = a$ зводиться до рівності $x = a^2$. При цьому наявність коренів залежить від того, яким є число a. Рівняння не має коренів, коли $a < 0$, адже за означенням це число має бути невід'ємним.

Рівняння, що містять змінну під знаком кореня, називаються **ірраціональними**.

Арифметичний корінь квадратний — це невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a.

Ірраціональні рівняння мають зміст, якщо підкореневий вираз набуває невід'ємних значень.

$\sqrt{x} = a$

ОДЗ: $x \geq 0$

Поміркуйте!
Чи правильно, що рівняння $\sqrt{y} + 3 = 0$ не має коренів? Чому?

Рівняння виду $\sqrt{x} = a$, де a — деяке число

Має розв'язки	Не має розв'язків
Якщо $a \geq 0$, то $x = a^2$.	Якщо $a < 0$.
$\sqrt{x} = 5$ $x = 5^2$ $x = 25$	$\sqrt{x} = -5$ Рівняння не має коренів

Приклад 1

Розв'яжіть рівняння. Вважайте, що підкореневі вирази невід'ємні.

а) $\sqrt{x} = 9$ б) $\sqrt{x} = -7$ в) $\sqrt{14 + 5x} = 8$ г) $\sqrt{\sqrt{w} + 12} = 4$

Розв'язання

а) $\sqrt{x} = 9$, $x = 9^2$, $x = 81$

б) Рівняння не має коренів.

в) $\sqrt{14 + 5x} = 8$

$14 + 5x = 8^2$

$14 + 5x = 64$

$5x = 50$

$x = 10$

г) $\sqrt{\sqrt{w} + 12} = 4$

$\sqrt{w} + 12 = 4^2$

$\sqrt{w} + 12 = 16$

$\sqrt{w} = 16 - 12$

$\sqrt{w} = 4$

$w = 4^2$

$w = 16$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Рівняння виду $x^2 = a$

З рівняннями такого виду ви вже мали справу в 7 класі. Наприклад: $x^2 = 9$, $x^2 = 64$, $x^2 = 100$. Кількість та наявність коренів таких рівнянь залежить від того, яким є число a.

Рівняння виду $x^2 = a$, де a — деяке число

Має два розв'язки	Має один розв'язок	Не має розв'язків
Якщо $a > 0$. $x_1 = \sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$	Якщо $a = 0$. $x = 0$	Якщо $a < 0$. $x \in \varnothing$
$x^2 = 16$ $x_1 = \sqrt{16} = 4$ $x_2 = -\sqrt{16} = -4$	$x^2 = 0$ $x = \sqrt{0} = 0$	$x^2 = -16$ Рівняння не має коренів

Приклад

2 Розв'яжіть рівняння.

а) $x^2 = 9$ б) $x^2 = -9$ в) $x^2 = 11$ г) $(x + 2)^2 = 4$

Розв'язання

а) $x_1 = \sqrt{9} = 3$, $x_2 = -\sqrt{9} = -3$

б) Рівняння не має коренів.

в) $x_1 = \sqrt{11}$, $x_2 = -\sqrt{11}$

г) $x + 2 = \sqrt{4}$ або $x + 2 = -\sqrt{4}$

$x + 2 = 2$ $x + 2 = -2$

$x_1 = 0$ $x_2 = -4$

Попрактикуйтеся

339 Розв'яжіть рівняння.

З букв, що позначають лише ті рівняння, які не мають коренів, складіть назву найскладнішого народного танцю у світі.

В	$\sqrt{x} = 2$	О	$\sqrt{x} = -2$	А	$\sqrt{x} + 3 = 2$	Б	$3 - \sqrt{x} = 0$
Л	$x^2 = 49$	К	$x^2 = -49$	Ь	$x^2 = 17$	П	$x^2 = -0{,}04$
Г	$\sqrt{x} + \frac{2}{3} = 0$	С	$x^2 - \frac{4}{9} = 0$				

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

340 Розв'яжіть рівняння. Вважайте, що підкореневі вирази невід'ємні.

а) $\sqrt{x} = 3$ б) $\sqrt{x} = 0$ в) $\sqrt{x} = -7$ г) $5 - \sqrt{x} = 0$

д) $\sqrt{5x+2} = 5$ е) $\sqrt{3x+5} = 2$ ж) $\sqrt{2x} - 4 = 10$ и) $\sqrt{2x-6} = 2$

341 Знайдіть корені рівняння.

а) $x^2 = 81$ б) $x^2 = -81$ в) $x^2 = 37$ г) $x^2 = 1{,}21$

д) $x^2 - 7 = 0$ е) $x^2 + 13 = 0$ ж) $-x^2 - 2 = 0$ и) $x^2 + 3 = 7$

342 Розв'яжіть рівняння. Вважайте, що підкореневі вирази невід'ємні.

а) $3\sqrt{x} = 30$ б) $\frac{1}{4}\sqrt{x} = 3$ в) $\sqrt{x+4} = 5$ г) $\sqrt{3x-5} = 4$

д) $\sqrt{0{,}34+x} = -2$ е) $\sqrt{6x+7} = 7$ ж) $\frac{36}{\sqrt{x-5}} = 12$ и) $\frac{24}{\sqrt{x+1}} = 4$

343 Знайдіть корені рівняння.

а) $x^2 = \frac{4}{25}$ б) $x^2 = -\frac{9}{36}$ в) $\frac{1}{3}x^2 = 6$ г) $\frac{2}{5}x^2 = -10$

д) $(x-1)^2 = 4$ е) $(2x-1)^2 = 16$ ж) $(0{,}2-x)^2 = -7$ и) $(0{,}3-x)^2 = 1{,}69$

344 Розв'яжіть рівняння. Вважайте, що підкореневі вирази невід'ємні.

а) $\sqrt{58-x^2} = 7$ б) $\sqrt{\sqrt{x}+9} = 4$ в) $\sqrt{\sqrt{x+5}} = 4$

г) $\sqrt{19+\sqrt{\sqrt{x}-2}} = 5$ д) $\sqrt{2+\sqrt{3+x}} = 6$ е) $\sqrt{8+\sqrt{7-\sqrt{x}}} = 3$

345 Розв'яжіть рівняння.

а) $\sqrt{|9x+1|} = 19$ б) $\sqrt{|2x-7|} = 8$ в) $\sqrt{|3x-1|} = 8$

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

346 Розв'яжіть рівняння. Тоді вставте отримані результати по порядку в текст нижче, щоб дізнатися цікаві відомості про сміття.

а) $\sqrt{x} = \sqrt{29}$ б) $5\sqrt{x} - 25 = 0$ в) $\sqrt{3x-35} = 2$

г) $\sqrt{47-2x} = 5$ д) $\sqrt{13+\sqrt{x+5}} = 4$ е) $\sqrt{2x-36} = 0$

Кожну секунду в світі з'являється 3,8 кг «екологічно нешкідливого сміття»: недоїдки, яєчна шкарлупа, шкірка від картоплі та інше. Воно становить ____ % від середньостатистичного сміттєвого кошика сучасної людини. Що ж стосується інших складових, то ____ % — це картон і папір, ____ % — скло, ____ % — пластик, ____ % — метал і ____ % — інші матеріали.

347 Розв'яжіть рівняння.

а) $3(x^2 - 4) + 2(3x^2 + 1) = 71$ б) $(x - 5)^2 + (x + 5)^2 = 58$

в) $(3x + 2)(3x - 2) = 5$ г) $(7x + 1)^2 - 2 = 14x$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

4.5. Властивості арифметичного квадратного кореня

Розглянемо властивості, які ґрунтуються на визначенні арифметичного квадратного кореня.

$(\sqrt{a})^2 = a$, якщо $a \geq 0$	$(\sqrt{3})^2 = 3$
$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$, якщо a — будь-яке дійсне число	$\sqrt{(-2)^2} = \lvert -2 \rvert = 2$
$\sqrt{a^{2n}} = \lvert a^n \rvert$, якщо a — будь-яке дійсне число	$\sqrt{3^4} = \lvert 3^2 \rvert = 9$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, якщо $a \geq 0, b \geq 0$	$\sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, якщо $a \geq 0, b \geq 0$	$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$
$\sqrt{a} \geq 0$, якщо $a \geq 0$	$\sqrt{2} \geq 0$
$\sqrt{a} > \sqrt{b}$, якщо $a > 0$, $b \geq 0$, $a > b$	$\sqrt{7} > \sqrt{5}$

Квадратний корінь має своє неофіційне свято — день квадратного кореня. Воно відзначається дев'ять разів на століття у день, коли і число, і порядковий номер місяця є квадратними коренями з двох останніх цифр року (наприклад, 05.05.2025).

Доведення властивостей арифметичного квадратного кореня

Тотожності $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a^2} = |a|$

1. Для будь-якого $a \geq 0$ правильно, що $(\sqrt{a})^2 = a$.

2. Для будь-якого дійсного a, правильно, що $\sqrt{a^2} = |a|$.

У чому полягає відмінність між тотожностями?

1. Знайдемо значення виразу $(\sqrt{16})^2$. Якщо спочатку добути корінь із числа 16, тоді піднести його до квадрата, маємо $(\sqrt{16})^2 = 4^2 = 16$. Значення підкореневого виразу не змінилося, але ця тотожність працює лише для невід'ємних чисел. А, наприклад, вираз $(\sqrt{-16})^2$ не має змісту, тому що неможливо добути корінь з від'ємного числа.

2. У другій тотожності змінна a може набувати будь-яких значень і, наприклад, вираз $\sqrt{(-16)^2}$ має зміст. Адже число в квадраті завжди невід'ємне і, як наслідок, значення кореня існує. Отже, $\sqrt{(-16)^2} = |-16| = 16$. Значення арифметичного квадратного кореня має набувати лише невід'ємних значень, тому використання модуля дає змогу отримати таке значення.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

1 Знайдіть значення виразів.

а) $(\sqrt{4})^2$ б) $(-\sqrt{7})^2$ в) $\sqrt{(3,4)^2}$

г) $\sqrt{(-8,3)^2}$ д) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{12}$ е) $\sqrt{2\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{2\frac{3}{4}}$

Розв'язання

а) $(\sqrt{4})^2 = 4$ б) $(-\sqrt{7})^2 = 7$ в) $\sqrt{(3,4)^2} = |3,4| = 3,4$ г) $\sqrt{(-8,3)^2} = |-8,3| = 8,3$

д) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{12} = (\sqrt{12})^2 = 12$ е) $\sqrt{2\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{2\frac{3}{4}} = \left(\sqrt{2\frac{3}{4}}\right)^2 = 2\frac{3}{4}$

Корінь із степеня, добутку та частки

Щоб добути корінь із степеня, потрібно основу залишити ту саму, а показник степеня поділити на 2.

Теорема про корінь із степеня. Для будь-якого дійсного a, натурального n правильно, що $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$.

Приклад

2 Знайдіть значення виразу: а) $\sqrt{13^4}$; б) $\sqrt{(-2)^6}$.

Розв'язання

а) $\sqrt{13^4} = |13^2| = 169$ б) $\sqrt{(-2)^6} = |-2^3| = |-8| = 8$

Приклад

3 Знайдіть значення виразу:

а) $\sqrt{a^{18}}$; б) $\sqrt{c^{16}}$; в) $\sqrt{16a^6}$, якщо $a \le 0$; г) $\sqrt{x^2y^{10}}$, якщо $x \le 0, y \ge 0$.

Розв'язання

а) $\sqrt{a^{18}} = |a^9| = \begin{cases} a^9, \text{ якщо } a \ge 0; \\ -a^9, \text{ якщо } a < 0 \end{cases}$ б) $\sqrt{c^{16}} = |c^8|,\ c^8 \ge 0 \to \sqrt{c^{16}} = |c^8| = c^8$

в) $\sqrt{16a^6} = 4\cdot|a^3| = -4a^3$

г) $\sqrt{x^2y^{10}} = |x|\cdot|y^5|,\ x \le 0 \to |x| = -x,\ y \ge 0 \to |y^5| = y^5,\ |x|\cdot|y^5| = -xy^5$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Щоб добути корінь із добутку, потрібно добути корінь із кожного з множників, а результати перемножити. Властивість справджується для двох і більше множників.

Теорема про корінь із добутку. Для будь-яких $a \geq 0$, $b \geq 0$ правильно, що $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Властивість працює в обох напрямках. Це означає, що маємо обернене твердження:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}.$$

Приклад

4 Знайдіть значення виразу: а) $\sqrt{49 \cdot 2{,}25}$; б) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$; в) $\sqrt{360 \cdot 90}$.

Розв'язання

а) $\sqrt{49 \cdot 2{,}25} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{2{,}25} = 7 \cdot 1{,}5 = 10{,}5$ б) $\sqrt{27} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{27 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$

в) $\sqrt{360 \cdot 90} = \sqrt{36 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 10} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{10^2} = 6 \cdot 3 \cdot 10 = 180$

Щоб добути корінь із частки (або дробу), потрібно добути корінь із діленого і дільника, а результати поділити.

Теорема про корінь із частки. Для будь-яких $a \geq 0$, $b > 0$ правильно, що $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Властивість працює в обох напрямках. Це означає, що маємо обернене твердження:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Приклад

5 Знайдіть значення виразу: а) $\sqrt{\frac{25}{36}}$; б) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}}$; в) $\sqrt{450} : \sqrt{2}$.

Розв'язання

а) $\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$ б) $\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{64}} = \sqrt{\frac{9}{64}} = \frac{3}{8}$ в) $\sqrt{450} : \sqrt{2} = \sqrt{450 : 2} = \sqrt{225} = 15$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Порівняння виразів з коренями

Щоб порівнювати вирази з коренями, використовують такі властивості:

$\sqrt{a} \geq 0$, якщо $a \geq 0$;

$\sqrt{a} > \sqrt{b}$, якщо $a > 0$, $b \geq 0$, $a > b$.

Приклад 6

Порівняйте числа: а) $\sqrt{12}$ і 4; б) 1,6 і $\sqrt{2}$.

Розв'язання

а) $4 = \sqrt{4^2} = \sqrt{16}$, $12 < 16$, $\sqrt{12} < \sqrt{16}$, $\sqrt{12} < 4$

б) $1{,}6 = \sqrt{1{,}6^2} = \sqrt{2{,}56}$, $2{,}56 > 2$, $\sqrt{2{,}56} > \sqrt{2}$, $1{,}6 > \sqrt{2}$

Приклад 7

Знайдіть значення виразу: а) $\sqrt{20^2 - 16^2}$; б) $\sqrt{3 \cdot 363}$.

Розв'язання

а) $\sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{(20-16)(20+16)} = \sqrt{4 \cdot 36} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12$

б) $\sqrt{3 \cdot 363} = \sqrt{3 \cdot 3 \cdot 121} = \sqrt{3^2 \cdot 121} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{121} = 3 \cdot 11 = 33$

Попрактикуйтеся

348 Розгляньте записи. Які з них правильні, а які — ні? Поясніть свою думку.

а) $(\sqrt{10})^2 = 10$

б) $(\sqrt{-10})^2$ — вираз не має змісту

в) $\sqrt{3^2} = |3| = 3$

г) $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$

д) $\sqrt{\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{\frac{3}{7}} = \left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2 = \frac{3}{7}$

е) $\sqrt{-13} \cdot \sqrt{-13} = \left(\sqrt{-13}\right)^2 = -13$

349 Заповніть таблицю. Знайдіть значення виразів.

Вираз	$a = 1$	$a = 5$	$a = 7$	$a = 9$	$a = 20$	$a = 0{,}6$	$a = 0{,}75$	$a = 0{,}8$
$(\sqrt{a})^2$								
$(-\sqrt{a})^2$								

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

350 Заповніть таблицю. Знайдіть значення виразів. Що ви помітили?

Вираз	$a = 1$	$a = -1$	$a = 3$	$a = -3$	$a = 40$	$a = -40$	$a = 0{,}68$	$a = -0{,}68$
$\sqrt{a^2}$								
$-\sqrt{a^2}$								

351 Заповніть таблицю. Знайдіть значення виразів. Що ви помітили?

Вираз	$a = 1, n = 4$	$a = -1, n = 4$	$a = 2, n = 6$	$a = -2, n = 6$	$a = 3, n = 8$	$a = -3, n = 8$
$\sqrt{a^n}$						
$-\sqrt{a^n}$						

352 Обчисліть.

а) $\sqrt{5^2}$ б) $\sqrt{(-8)^2}$ в) $\left(-\sqrt{3}\right)^2$ г) $\sqrt{0^2}$ д) $\sqrt{7^6}$

е) $\sqrt{0{,}2^4}$ ж) $\sqrt{4^6}$ и) $\sqrt{(-1)^{10}}$ к) $\sqrt{(-0{,}3)^6}$ л) $\left(-\sqrt{(-3)^8}\right)^2$

353 Знайдіть значення виразів та розташуйте результати в порядку зростання.

З букв, що позначають результати виразів, упорядкованих за зростанням, ви дізнаєтеся, яких птахів любив Рене Декарт, французький філософ, математик і вчений. Його спостереження за ними стало джерелом натхнення для його філософських роздумів. Головне правило у філософії Декарта — «сумнівайся у всьому». У XVII ст. ввів термін «дійсні числа», що включає раціональні та ірраціональні числа.

Г $-\frac{1}{3}\sqrt{0{,}9^2}$ И $0{,}5\sqrt{(-10)^4}$

О $-2{,}1\sqrt{\left(-\frac{1}{21}\right)^2}$ У $\frac{3}{7}\sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2}$

Б $\frac{5}{8}\sqrt{\left(-\frac{64}{25}\right)^2}$ Л $\left(\sqrt{\left(\frac{2}{7}\right)^4}\right)^2 \cdot 12\frac{1}{4}$



354 Знайдіть значення виразів.

а) $\sqrt{9 \cdot 49}$ б) $\sqrt{36 \cdot 100}$ в) $\sqrt{225 \cdot 1{,}21}$ г) $\sqrt{0{,}81 \cdot 196}$

д) $\sqrt{64 \cdot 0{,}09}$ е) $\sqrt{361 \cdot 0{,}04}$ ж) $\sqrt{1{,}69 \cdot 2{,}56}$ и) $\sqrt{0{,}01 \cdot 4 \cdot 16}$

к) $\sqrt{4{,}84 \cdot 0{,}01}$ л) $\sqrt{0{,}16 \cdot 5{,}29}$ м) $\sqrt{7{,}84 \cdot 0{,}49}$ н) $\sqrt{8{,}41 \cdot 0{,}25}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

355 Знайдіть значення виразів.

а) $\sqrt{\frac{49}{64}}$ б) $\sqrt{\frac{25}{81}}$ в) $\sqrt{\frac{0,09}{0,16}}$ г) $\sqrt{\frac{676}{4}}$

д) $\sqrt{\frac{49}{529}}$ е) $\sqrt{\frac{6,25}{0,25}}$ ж) $\sqrt{\frac{3,24}{0,64}}$ и) $\sqrt{\frac{0,01}{100}}$

356 Обчисліть значення виразів.

а) $\sqrt{16 \cdot 40}$ б) $\sqrt{1,69 \cdot 0,36}$ в) $\sqrt{0,01 \cdot 2,25 \cdot 2500}$ г) $\sqrt{8^2 \cdot 3^6}$

д) $\sqrt{\frac{64}{484}}$ е) $\sqrt{10\frac{1}{36}}$ ж) $\sqrt{4\frac{21}{25} \cdot 1\frac{104}{121}}$ и) $\sqrt{\frac{196 \cdot 529}{784 \cdot 2116}}$

357 Знайдіть значення виразів.

а) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{2}$ б) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{50}$ в) $\sqrt{0,016} \cdot \sqrt{1000}$ г) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{14} \cdot \sqrt{28}$

д) $\sqrt{\frac{1}{12}} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{12}}$ е) $\sqrt{\frac{4}{49}} \cdot \sqrt{\frac{7}{22}} \cdot \sqrt{3\frac{1}{7}}$ ж) $\sqrt{3\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{2,7} \cdot \sqrt{\frac{3}{25}}$

и) $\sqrt{4^3 \cdot 5} \cdot \sqrt{4 \cdot 5^3}$ к) $\sqrt{2^3 \cdot 3} \cdot \sqrt{2 \cdot 3^3}$ л) $\sqrt{7^2 \cdot 5} \cdot \sqrt{7 \cdot 5^3}$

358 Знайдіть значення арифметичного квадратного кореня з числа 168 100, якщо $41^2 = 1681$.

359 Розкладіть число 10 404 на множники так, щоб можна було знайти значення кореня. А тоді знайдіть $\sqrt{10404}$.

360 Відомо, що $\sqrt{1296} = 36$. Знайдіть $\sqrt{5184}$.

361 Порівняйте числа.

а) 0 і $-\sqrt{7}$ б) $-\sqrt{6}$ і $\sqrt{28}$ в) -11 і $-\sqrt{121}$ г) $\sqrt{11}$ і 3

д) $\sqrt{\frac{16}{5}}$ і 3 е) $\sqrt{\frac{3}{4}}$ і 1 ж) 6 і $\sqrt{35}$ и) $-\sqrt{33}$ і -6

362 Установіть відповідність між точкам A, B, C, D, F та їх координатами.



1) A 2) B 3) C 4) D 5) F

а) $\sqrt{\frac{29}{5}}$ б) $-\sqrt{2}$ в) $\sqrt{\frac{3}{4}}$ г) $-\sqrt{\frac{5}{6}}$ д) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

363 Знайдіть значення виразів. Тоді побудуйте координатний промінь та позначте на ньому всі числа-результати.

а) $\sqrt{3}$ б) $-(\sqrt{3})^2$ в) $\sqrt{9}$ г) $-\sqrt{100 \cdot 0,09}$ д) 3^{-1} е) $-\frac{1}{27}\sqrt{3^4}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

364 Обчисліть.

а) $\sqrt{98}\cdot\sqrt{8}$ б) $\sqrt{14{,}4\cdot 2{,}5}$ в) $\sqrt{33}\cdot\sqrt{132}$ г) $\sqrt{98}\cdot\sqrt{128}$

д) $\sqrt{32}\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{3}$ е) $\sqrt{14}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{21}$ ж) $\sqrt{44}\cdot\sqrt{18}\cdot\sqrt{88}$ и) $\sqrt{200\cdot 1250}$

365 Знайдіть декілька цілих чисел, які задовольняють нерівність:

а) $\sqrt{x}\geq 5$; б) $\sqrt{x}\leq 3$; в) $\sqrt{x}>-1$.

366 Спростіть вираз:

а) $\sqrt{a^4}$; б) $\sqrt{b^2}$, якщо $b>0$;

в) $\sqrt{4c^8}$; г) $\sqrt{0{,}25a^{10}}$, якщо $a<0$;

д) $2\sqrt{b^{14}}$; е) $\sqrt{49b^{42}}$, якщо $b\geq 0$;

ж) $-0{,}3\sqrt{c^{30}}$; и) $\sqrt{81c^{26}}$, якщо $c\leq 0$.

367 Якщо $a<0$, чи правильно, що:

а) $\sqrt{a^{10}}=|a^5|=-a^5$; б) $\sqrt{25a^{18}}=5\cdot|a^9|=-5a^9$;

в) $\sqrt{64a^{26}b^{20}}=8\cdot|a^{13}|\cdot|b^{10}|=-8a^{13}b^{10}$;

г) $\sqrt{a^{14}b^{12}c^8}=|a^7|\cdot|b^6|\cdot|c^4|=a^7b^6c^4$?

368 Спростіть вираз:

а) $\sqrt{0{,}25m^2}$, якщо $m>0$; б) $2\frac{1}{3}\cdot\sqrt{\frac{9}{49}n^2}$, якщо $n<0$;

в) $\sqrt{121x^2y^6}$, якщо $x<0$, $y>0$; г) $\frac{1}{9}mn^3\sqrt{81m^6n^8}$, якщо $m>0$;

д) $\frac{3{,}6b^5}{a^4}\sqrt{\frac{a^{20}}{144b^{30}}}$, якщо $b<0$; е) $\sqrt{\frac{p^{12}c^{22}m^{20}}{p^2c^5m^{15}}}$, якщо $c>0$, $m<0$;

ж) $\sqrt{(a-b)^2}$, якщо $a\geq b$; и) $\sqrt{x^2-14x+49}$, якщо $x<7$;

к) $(a-b)\sqrt{\frac{9}{a^2-2ab+b^2}}$, якщо $a<b$; л) $(2a-b)\sqrt{\frac{16}{4a^2-4ab+b^2}}$, якщо $a>b$.

369 Знайдіть значення виразів.

а) $\sqrt{52^2-48^2}$ б) $\sqrt{29^2-20^2}$ в) $\sqrt{\frac{139^2-86^2}{53}}$ г) $\sqrt{\frac{2(98{,}5^2-97{,}5^2)}{228^2-164^2}}$

д) $\sqrt{(\sqrt{2}-7)^2}+\left(\sqrt{\sqrt{2}+3}\right)^2$ е) $\sqrt{(5-\sqrt{11})^2}+\sqrt{(\sqrt{11}-1)^2}$

ж) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{7})^2}-\sqrt{(\sqrt{7}+9)^2}$ и) $\sqrt{(3-\sqrt{13})^2}+\sqrt{(\sqrt{13}-3)^2}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

4

4.6. Тотожні перетворення виразів, що містять квадратні корені

Ірраціональні вирази можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити. Але є перетворення, що властиві лише ірраціональним виразам: винесення множника з-під знака кореня, внесення множника під знак кореня та звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу (дізнаєтеся в наступній темі).

Винесення множника з-під знака кореня

Для будь-яких $a \geq 0$, $b \geq 0$ правильно, що $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

Для будь-якого дійсного a, натурального n правильно, що $\sqrt{a^{2n}} = |a^n|$.

Щоб виконувати різні дії з ірраціональними виразами, їх слід подати в найпростішій формі, тобто число під знаком кореня має бути найменшим з можливих. Щоб це зробити, потрібно винести множник з-під знака кореня.

$\sqrt{32} = \sqrt{\underbrace{16 \cdot 2}_{32}} =$

$= \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Крок 1. Розкладемо підкореневий вираз на такі множники, щоб хоча б з одного добути корінь.

Крок 2. Добудемо корінь із 16, запишемо множник 4 перед знаком кореня.

Приклад

1 Винесіть множник з-під знака кореня.

а) $\sqrt{48a^8}$ б) $\sqrt{x^{23}}$ в) $\sqrt{-y^{17}}$

Розв'язання

а) $\sqrt{48a^8} = \sqrt{16 \cdot 3 \cdot a^8} = 4a^4\sqrt{3}$.

б) За умовою $x \geq 0$, отже маємо: $\sqrt{x^{23}} = \sqrt{x^{22}x^1} = x^{11}\sqrt{x}$.

в) За умовою $y \leq 0$, отже маємо: $\sqrt{-y^{19}} = \sqrt{y^{18} \cdot (-y)} =$
$= |y^9|\sqrt{-y} = -y^9\sqrt{-y}$.

Внесення множника під знак кореня

Під знак кореня можна вносити тільки додатний множник.

Розглянемо попереднє перетворення у зворотному порядку і внесемо множник 4 під знак кореня.

$4\sqrt{2} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{2} =$

$= \sqrt{16 \cdot 2} = \sqrt{32}$

Крок 1. Піднесемо множник 4 до квадрата.

Крок 2. Запишемо 16 під знак кореня.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

2 Внесіть множник під знак кореня: а) $-3\sqrt{5}$; б) $c\sqrt{3}$; в) $p\sqrt{p^{11}}$.

Розв'язання

Якщо множник перед коренем від'ємний, то «мінус» залишаємо перед коренем.

а) $-3\sqrt{5} = -\sqrt{9}\cdot\sqrt{5} = -\sqrt{45}$.

б) $c\sqrt{3} = \sqrt{c^2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3c^2}$ за умови, що $c \geq 0$;

$c\sqrt{3} = -\sqrt{c^2}\cdot\sqrt{3} = -\sqrt{3c^2}$ за умови, що $c \leq 0$.

в) За умовою $p \geq 0$, отже маємо: $p\sqrt{p^{11}} = \sqrt{p^2}\cdot\sqrt{p^{11}} = \sqrt{p^{13}}$.

Додавання і віднімання ірраціональних виразів

Можна додавати і віднімати лише такі ірраціональні вирази, які містять одне й те саме число під коренем, — подібні радикали. Їх додають та віднімають за тими самими правилами, що й подібні доданки.

$3\sqrt{7}, 8\sqrt{7}, 2\sqrt{7}, 3\sqrt{7}$ — **подібні радикали.**

$3\sqrt{7}, 3\sqrt{6}, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{3}$ — **неподібні радикали.**

Приклад

3 Виконайте додавання та віднімання.

а) $2\sqrt{3} + 8\sqrt{3}$ б) $14\sqrt{5} - 6\sqrt{5}$ в) $\sqrt{48} + \sqrt{75} - \sqrt{27}$

Розв'язання

а) $2\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$ б) $14\sqrt{5} - 6\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$

в) $\sqrt{48} + \sqrt{75} - \sqrt{27} = \sqrt{16\cdot 3} + \sqrt{25\cdot 3} - \sqrt{9\cdot 3} = \left(\sqrt{16}\cdot\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{25}\cdot\sqrt{3}\right) +$

$+ \left(\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

Множення і ділення ірраціональних виразів

Множити та ділити можна як подібні радикали, так і неподібні, застосовуючи властивості арифметичного квадратного кореня.

Приклад

4 Виконайте множення і ділення.

а) $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}$ б) $\sqrt{6}\left(\sqrt{2} + \sqrt{8}\right)$ в) $\left(5 + 3\sqrt{2}\right)\left(7 - \sqrt{2}\right)$

г) $\left(5\sqrt{7} + 3\sqrt{2}\right)^2$ д) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)\left(\sqrt{3} - \sqrt{6}\right)$ е) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$ ж) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Розв'язання

а) $2\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{2}=2\cdot 3\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}=6\cdot\sqrt{6}=6\sqrt{6}$

б) $\sqrt{6}(\sqrt{2}+\sqrt{8})=(\sqrt{6}\cdot\sqrt{2})+(\sqrt{6}\cdot\sqrt{8})=\sqrt{12}+\sqrt{48}=(\sqrt{4}\cdot\sqrt{3})+$
$+(\sqrt{4}\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3})=2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

в) $(5+3\sqrt{2})(7-\sqrt{2})=5(7-\sqrt{2})+3\sqrt{2}(7-\sqrt{2})=5\cdot 7-5\sqrt{2}+21\sqrt{2}-3\cdot 2=$
$=35-5\sqrt{2}+21\sqrt{2}-6=29+16\sqrt{2}$

г) $(5\sqrt{7}+3\sqrt{2})^2=(5\sqrt{7})^2+2(5\sqrt{7})(3\sqrt{2})+(3\sqrt{2})^2=175+30\sqrt{14}+18=$
$=193+30\sqrt{14}$

д) $(\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{3}-\sqrt{6})=(\sqrt{3})^2-(\sqrt{6})^2=3-6=-3$

е) $\dfrac{3\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{3}{4}$ ж) $\dfrac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{6}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{5\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{2}{5\sqrt{2}}$

Для будь-якого $a\geq 0$ правильно, що $(\sqrt{a})^2=a$.

Приклад **5**

Розкладіть на множники вираз: а) a^2-3; б) $\sqrt{y}-y$; в) $\sqrt{5}+15$.

Розв'язання

а) $a^2-3=a^2-(\sqrt{3})^2=(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})$

б) $\sqrt{y}-y=$ б) $\sqrt{y}-(\sqrt{y})^2=\sqrt{y}(1-\sqrt{y})$

в) $\sqrt{5}+15=\sqrt{5}+3\cdot(\sqrt{5})^2=\sqrt{5}(1+3\sqrt{5})$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$
$ax\pm ab=a(x\pm b)$

Попрактикуйтеся

370 Винесіть множник з-під знака кореня.

а) $\sqrt{8}$ б) $\sqrt{48}$ в) $\sqrt{27}$ г) $\sqrt{44}$ д) $\sqrt{32}$

е) $\sqrt{24}$ ж) $\sqrt{50}$ и) $\sqrt{125}$ к) $\sqrt{20}$ л) $\sqrt{98}$

371 Винесіть множник з-під знака кореня. Отримані результати розташуйте в порядку спадання.

а) $\sqrt{112}$ б) $\sqrt{28}$ в) $\sqrt{343}$ г) $\sqrt{63}$ д) $\sqrt{175}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

372 Винесіть множник з-під знака кореня.

Установіть відповідність між виразом та його числовим значенням. Тоді заповніть таблицю літерами, які позначають значення виразів, у вказаному порядку і дізнайтеся назву унікального рожевого озера на Херсонщині. Один літр води цього озера містить на 50 г більше солі, ніж літр води Мертвого моря. Рожевий колір озеру надають водорості Дуналієлли солоноводної, єдині живі організми в цьому озері.

а) $\sqrt{12}$ б) $\sqrt{45}$ в) $\sqrt{275}$ г) $\sqrt{300}$ д) $\sqrt{147}$

е) $-\sqrt{4^2 \cdot 17}$ ж) $\sqrt{3^4 \cdot 5^3}$ и) $\frac{3}{4}\sqrt{48}$ к) $-0{,}9\sqrt{1000a}$ л) $0{,}8\sqrt{1250}$

М $5\sqrt{11}$	С $3\sqrt{3}$	К $20\sqrt{2}$	Р $7\sqrt{3}$						
Ь $-9\sqrt{10a}$	Л $2\sqrt{3}$	І $-4\sqrt{17}$							
В $45\sqrt{5}$	У $10\sqrt{3}$	Е $3\sqrt{5}$							



а)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)	и)	к)	л)	б)

373 Внесіть множник під знак кореня.

а) $7\sqrt{3}$ б) $-5\sqrt{6}$ в) $\frac{2}{3}\sqrt{45}$ г) $-0{,}8\sqrt{10a}$

д) $11\sqrt{\frac{1}{11}b}$ е) $\frac{1}{4}\sqrt{128m}$ ж) $-\frac{5}{6}\sqrt{72kx}$ и) $\frac{3}{7}\sqrt{\frac{98}{99}}$

374 Виконайте додавання та віднімання за таблицями.

+	$4\sqrt{7}$	$\sqrt{28}$
$2\sqrt{7}$		
$9\sqrt{7}$		

−	$11\sqrt{3}$	$2\sqrt{12}$
$5\sqrt{3}$		
$7\sqrt{3}$		

375 Виконайте додавання та віднімання.

а) $\sqrt{20} + \sqrt{5}$ б) $9\sqrt{3} - 4\sqrt{3}$ в) $\sqrt{28} - \sqrt{24} + \sqrt{175}$

г) $\sqrt{75} + \sqrt{27} - \sqrt{108}$ д) $\sqrt{10} + \sqrt{5}$ е) $\sqrt{32b} - \sqrt{50b} + \sqrt{162b}$

376 Спростіть вирази.

а) $(1 + \sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2})$ б) $4\sqrt{7} + 6\sqrt{2} - 11\sqrt{7} + 9\sqrt{2}$

в) $2(\sqrt{5} - 3\sqrt{3}) + 3(2\sqrt{5} - \sqrt{3})$ г) $\sqrt{18} + \sqrt{72} - \sqrt{98}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

377 Спростіть вирази.

а) $5\sqrt{a} - 2\sqrt{a}$

б) $\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 7\sqrt{x}$

в) $\sqrt{16m} + \sqrt{25m} - \sqrt{36m}$

г) $8\sqrt{3} + 4\sqrt{2} - 5\sqrt{3} + 6\sqrt{2}$

д) $\sqrt{50a} - \frac{5}{6}\sqrt{72a}$

е) $3\sqrt{9x} - 4\sqrt{16x} + 0{,}8\sqrt{100x}$

ж) $-\sqrt{0{,}16n} - 0{,}3\sqrt{121n} + \frac{5}{12}\sqrt{\frac{144}{25}n}$

и) $2{,}4\sqrt{700} - \sqrt{112} - \sqrt{847}$

378 Виконайте множення і ділення за таблицями.

·	$\sqrt{9}$	$\sqrt{72}$
$\sqrt{5}$		
$9\sqrt{2}$		

:	$5\sqrt{2}$	$\sqrt{18}$
$\sqrt{2}$		
$\sqrt{8}$		

379 Виконайте множення і ділення.

а) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{5}$

б) $\sqrt{21} \cdot \sqrt{6}$

в) $2\sqrt{18} \cdot 3\sqrt{20}$

г) $5\sqrt{6} \cdot 3\sqrt{3}$

д) $\frac{5\sqrt{12}}{15\sqrt{6}}$

е) $\frac{\sqrt{28}}{8\sqrt{14}}$

ж) $\frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$

и) $\frac{4\sqrt{7}}{6\sqrt{8}}$

380 Спростіть вирази.

а) $\sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{27})$

б) $(\sqrt{24} - \sqrt{600})\sqrt{6}$

в) $2\sqrt{2}(\sqrt{32} - \sqrt{8} + \sqrt{98})$

г) $(3\sqrt{5} - \frac{1}{2}\sqrt{20} + \frac{1}{4}\sqrt{80})\sqrt{5}$

ж) $(8\sqrt{3} - \sqrt{75} + 2)4\sqrt{3}$

и) $6\sqrt{7}(\frac{\sqrt{7}}{3} - \frac{\sqrt{14}}{2} - \frac{\sqrt{28}}{6})$

381 Спростіть вирази.

а) $(1 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2})$

б) $(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})(5\sqrt{2} - \sqrt{3})$

в) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})(\sqrt{7} - \sqrt{2})$

г) $(\sqrt{b} - \sqrt{c})(\sqrt{b} + \sqrt{c})$

д) $(7 - \sqrt{10})(7 + \sqrt{10})$

е) $(\sqrt{13} + \sqrt{5})(\sqrt{13} - \sqrt{5})$

ж) $(3 + \sqrt{2})(7 - \sqrt{2})$

и) $(\sqrt{6} - 1)(4 + \sqrt{6})$

382 Спростіть вирази, використовуючи формули скороченого множення.

а) $(3 - \sqrt{2})^2$

б) $(\sqrt{6} - 3\sqrt{3})^2$

в) $(\sqrt{2} + \sqrt{11})^2 - 13$

г) $(\sqrt{3} + \sqrt{7})^2 - 2\sqrt{21}$

д) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})(\sqrt{7} + \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{5})^2$

е) $(12\sqrt{5} + 9\sqrt{3})^2$

ж) $(2\sqrt{3} - 4)^2 - 5(2\sqrt{12} + 5\sqrt{27})$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

383 Спростіть вирази.

а) $(\sqrt{3}+1)^2-(2\sqrt{3}+1)(2\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}-1)^2$

б) $21(\sqrt{15}-34\sqrt{42})+24(18\sqrt{15}+10\sqrt{42})$

в) $\sqrt{20}+\sqrt{150}-\sqrt{294}-\sqrt{180}$

384 Винесіть множник з-під знака кореня:

а) $\sqrt{b^{14}}$, якщо $b \geq 0$; б) $\sqrt{b^7}$;

в) $\sqrt{4a^6}$, якщо $a < 0$; г) $\sqrt{25a^{17}}$.

385 Внесіть множник під знак кореня:

а) $x^2\sqrt{3}$; б) $a\sqrt{4}$, якщо $a \geq 0$;

в) $a\sqrt{a^9}$; г) $2x\sqrt{6}$, якщо $x < 0$.

386 Розкладіть на множники вирази.

а) b^2-5 б) $9a^2-7$ в) $m-16$ г) $25x-36y$

д) $6-\sqrt{6}$ е) $3\sqrt{11}-11$ ж) $\sqrt{24}-\sqrt{8}$ и) $5+2\sqrt{5n}+n$

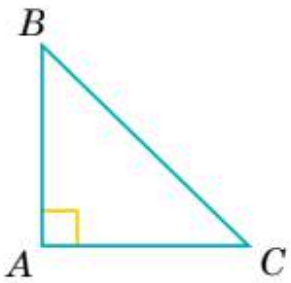
387 Скоротіть дроби.

а) $\dfrac{a^2-7}{a-\sqrt{7}}$ б) $\dfrac{b+\sqrt{3}}{3-b^2}$ в) $\dfrac{c^2-11}{c-\sqrt{11}}$ г) $\dfrac{b+\sqrt{21}}{21-b^2}$

388 Відомо, що $a = 3+2\sqrt{2}$, $b = 3-2\sqrt{2}$, знайдіть значення:

а) $A = ab$; б) $B = a^2-2ab+b^2$.

389 Катети прямокутного трикутника ABC відповідно дорівнюють $(6-\sqrt{2})$ см і $(6+\sqrt{2})$ см. Знайдіть площу прямокутного трикутника ABC. Площа прямокутного трикутника дорівнює півдобутку його катетів: $S = \dfrac{1}{2}a \cdot b$.



390 Площа прямокутного трикутника дорівнює $(2+\sqrt{12})$ см^2. Знайдіть невідомий катет прямокутного трикутника, якщо відомий катет дорівнює $(1+\sqrt{3})$ см. За потреби використайте формулу для обчислення площі прямокутного трикутника з попереднього завдання

391 (*) Основи трапеції відповідно дорівнюють $(12\sqrt{2}+4\sqrt{5})$ і $(8\sqrt{2}-2\sqrt{5})$ см. Висота становить $(20\sqrt{2}-2\sqrt{5})$ см. Знайдіть площу трапеції. Площа трапеції дорівнює півсумі основ, помножених на висоту $S = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

4.7. Звільнення від ірраціональності в знаменнику дробу

Звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу означає перетворити дріб так, щоб його знаменник не містив квадратного кореня.

Щоб звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу, коли в знаменнику одночлен, потрібно чисельник і знаменник помножити на цей ірраціональний вираз.

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$(\sqrt{a})^2 = a,\ a \geq 0$

Приклад

1 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу.

а) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ б) $\frac{8}{\sqrt{2}}$ в) $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{7}}$ г) $\frac{6}{5\sqrt{3}}$

Розв'язання

а) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

б) $\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

в) $\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{21}$

г) $\frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{6}{5\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{15} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

Немає сенсу скорочувати однакові множники в чисельнику та знаменнику, тому що в результаті отримаємо початковий дріб.

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\cancel{\sqrt{2}}} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Щоб звільнитися від ірраціональності в знаменнику дробу, коли в знаменнику двочлен, потрібно чисельник і знаменник помножити на вираз, спряжений до ірраціонального виразу в знаменнику. **Спряженим** називається вираз, який під час множення на поданий дає формулу різниці квадратів.

$$\underbrace{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}_{\text{спряжені вирази}} = (\sqrt{x})^2 - (\sqrt{y})^2 = x - y$$

Формула різниці квадратів:
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

$$\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}\cdot\frac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}=\frac{4(\sqrt{2}-\sqrt{7})}{\sqrt{2^2}-\sqrt{7^2}}=\frac{4(\sqrt{2}-\sqrt{7})}{2-7}=$$

$$=\frac{4(\sqrt{2}-\sqrt{7})}{-5}=-\frac{4(\sqrt{2}-\sqrt{7})}{5}$$

Приклад

2 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу.

а) $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ б) $\frac{\sqrt{2}}{6+\sqrt{2}}$ в) $\frac{62}{4\sqrt{2}-3\sqrt{7}}$

Розв'язання

а) $\frac{1}{3-\sqrt{5}}=\frac{1}{3-\sqrt{5}}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{9-5}=\frac{3+\sqrt{5}}{4}$

б) $\frac{\sqrt{2}}{6+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{6+\sqrt{2}}\cdot\frac{6-\sqrt{2}}{6-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(6-\sqrt{2})}{36-2}=\frac{6\sqrt{2}-2}{34}=\frac{\cancel{2}(3\sqrt{2}-1)}{\cancel{34}}=\frac{3\sqrt{2}-1}{17}$

в) $\frac{62}{4\sqrt{2}-3\sqrt{7}}=\frac{62}{4\sqrt{2}-3\sqrt{7}}\cdot\frac{4\sqrt{2}+3\sqrt{7}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{7}}=\frac{62(4\sqrt{2}+3\sqrt{7})}{(4\sqrt{2})^2-(3\sqrt{7})^2}=\frac{62(4\sqrt{2}+3\sqrt{7})}{32-63}=$

$=\frac{\cancel{62}(4\sqrt{2}+3\sqrt{7})}{\cancel{-31}}=-2(4\sqrt{2}+3\sqrt{7})=-8\sqrt{2}-6\sqrt{7}$

Приклад

3 Скоротіть дріб: а) $\frac{c^2-2}{c-\sqrt{2}}$; б) $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{7+\sqrt{7}}$; в) $\frac{m-2\sqrt{mn}+n}{m-n}$.

Розв'язання

а) $\frac{c^2-2}{c-\sqrt{2}}=\frac{\cancel{(c-\sqrt{2})}(c+\sqrt{2})}{\cancel{c-\sqrt{2}}}=c+\sqrt{2}$

б) $\frac{\sqrt{14}+\sqrt{2}}{7+\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{2}\cancel{(\sqrt{7}+1)}}{\sqrt{7}\cancel{(\sqrt{7}+1)}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{2}{7}}$

в) $\frac{m-2\sqrt{mn}+n}{m-n}=\frac{(\sqrt{m}-\sqrt{n})^{\cancel{2}}}{\cancel{(\sqrt{m}-\sqrt{n})}(\sqrt{m}+\sqrt{n})}=\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}$

Пам'ятайте: щоб скоротити дріб, потрібно розкласти чисельник і знаменник на множники.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Попрактикуйтеся

392 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу.

а) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ б) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ в) $\frac{1}{\sqrt{3}+1}$ г) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ д) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ е) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$

393 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу.

Доповніть рівності числовими виразами, поданими нижче. Заповнивши таблицю літерами, які позначають числа, у вказаному порядку, дізнаєтеся назву історико-культурного заповідника Чернігівщини.

а) $\frac{6}{\sqrt{12}}=\frac{\square}{2}$ б) $\frac{10}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{\square}$ в) $\frac{28}{3\sqrt{7}}=\frac{\square}{3}$ г) $\frac{45}{2\sqrt{5}}=\frac{\square}{2}$

д) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=\frac{\square}{2}$ е) $\frac{6}{\sqrt{18}-\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{18}+\sqrt{6}}{\square}$

а)	б)	в)	б)	г)	д)	е)	а)	б)

Ч $4\sqrt{7}$ І $3-\sqrt{3}$ К $\sqrt{12}$

А 1 В 2 Н $9\sqrt{5}$



394 Позбудьтеся ірраціональності в знаменнику дробу.

а) $\frac{8+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$ б) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+6}$ в) $\frac{4}{3\sqrt{2}-2\sqrt{7}}$

г) $\frac{1}{7\sqrt{3}-3\sqrt{7}}$ д) $\frac{13+20\sqrt{6}}{13-20\sqrt{6}}$ е) $\frac{\sqrt{8}-\sqrt{50}+\sqrt{72}}{6\sqrt{12}}$

395 Спростіть вирази.

а) $\frac{m}{\sqrt{m}-3}-\frac{6\sqrt{m}-9}{\sqrt{m}+3}$ б) $\frac{\sqrt{m}-8}{\sqrt{m}-4}+\frac{16}{\sqrt{m}}$ в) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{ab}-a}$

г) $\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$ д) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$ е) $\frac{\sqrt{a}-4}{\sqrt{a}}:\frac{a-16}{9a}$

396 Основа трикутника дорівнює $\frac{2}{\sqrt{3}}$ см, а висота, проведена до цієї основи, — $\frac{6}{5\sqrt{3}}$ см. Знайдіть площу трикутника, якщо $S=\frac{1}{2}a\cdot b$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

397 Спростіть вирази.

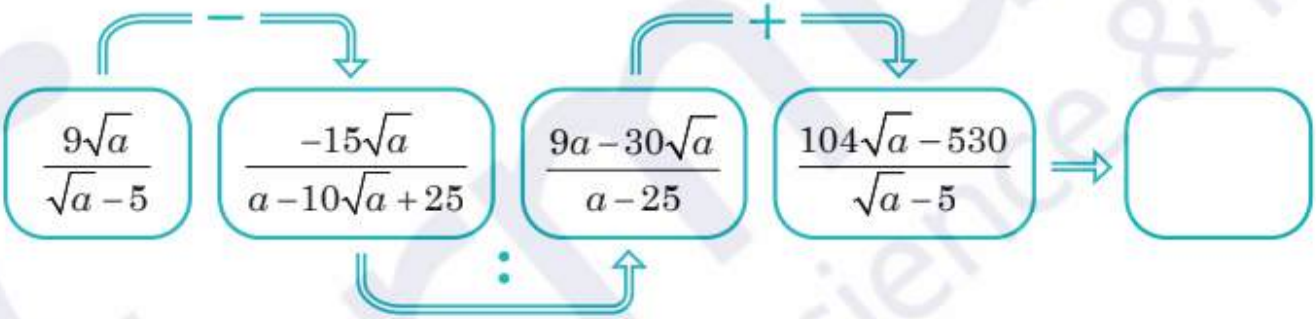
а) $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}\right):\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ б) $\left(\dfrac{16\sqrt{x}}{x-16}+\dfrac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+4}\right):\dfrac{\sqrt{x}+4}{x-4\sqrt{x}}$

398 Подайте дріб $\dfrac{9+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}-3}$ у формі $p+q\sqrt{2}$, де p і q — цілі числа.

399 Виконайте ланцюжок обчислень.



У результаті ви дізнаєтеся глибину станції метро «Арсенальна» в Києві, що вважається найглибшою у світі. Настільки глибоку станцію довелося збудувати через складний рельєф поблизу річки Дніпро. Станційний комплекс є пам'яткою архітектури.



400 Зведіть дроби до спільного знаменника та виконайте дії.

а) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{6}}$ в) $\dfrac{1}{\sqrt{27}}+\dfrac{1}{\sqrt{48}}$

г) $\dfrac{1}{\sqrt{12}}+\dfrac{1}{\sqrt{18}}$ д) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ е) $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{7+\sqrt{11}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{7-\sqrt{11}}\right)^2$

401 Виконайте дії.

а) $\left(\sqrt{a}-\dfrac{a}{\sqrt{a}+1}\right)\cdot\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}$ б) $\dfrac{\sqrt{cd}-d}{c+d}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{d}}+\dfrac{\sqrt{c}}{\sqrt{c}-\sqrt{d}}\right)$

в) $\dfrac{x-10\sqrt{x}+25}{3\sqrt{x}+12}:\dfrac{2\sqrt{x}-10}{x-16}$ г) $\dfrac{1+c-5\sqrt{c}}{c^2-50c+625}:\left(\dfrac{1}{\sqrt{c}+5}+\dfrac{\sqrt{c}}{c-25}\right)$

402 Знайдіть суму.

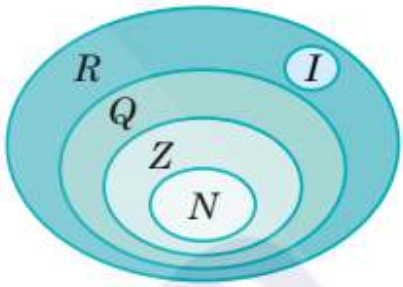
$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{100}}$$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Короткий огляд розділу

1

N	множина натуральних чисел
Z	множина цілих чисел
Q	множина раціональних чисел
I	множина ірраціональних чисел
R	множина дійсних чисел



2 Будь-яке **раціональне число** можна записати у вигляді $\frac{a}{b}$, де a і $b \in Z$ і $b \neq 0$. **Ірраціональне число** — це число, яке не можна записати у формі звичайного дробу $\frac{a}{b}$, де a і $b \in Z$ і $b \neq 0$. Множина, що об'єднує всі наявні числа — раціональні та ірраціональні, називається множиною **дійсних чисел**.

3 **Арифметичний квадратний корінь із числа a** — це невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a. Позначають $\sqrt{\ }$.

4 Властивості арифметичного квадратного кореня:

Властивості	Приклад
$(\sqrt{a})^2 = a$, якщо $a \geq 0$	$(\sqrt{3})^2 = 3$
$\sqrt{a^2} = \lvert a \rvert$, якщо a — будь-яке дійсне число	$\sqrt{(-2)^2} = \lvert -2 \rvert = 2$
$\sqrt{a^{2n}} = \lvert a^n \rvert$, якщо a — будь-яке дійсне число	$\sqrt{3^4} = \lvert 3^2 \rvert = 9$
$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$	$\sqrt{4 \cdot 16} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{16} = 2 \cdot 4 = 8$
$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$	$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$
$\sqrt{a} \geq 0$, якщо $a \geq 0$	$\sqrt{2} \geq 0$
$\sqrt{a} > \sqrt{b}$, якщо $a > 0$, $b \geq 0$, $a > b$	$\sqrt{7} > \sqrt{5}$

5 Тотожні перетворення, які властиві лише ірраціональним виразам:
- винесення множника з-під знака кореня;
- внесення множника під знак кореня;
- звільнення від ірраціональності в знаменнику.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Перевірте свої досягнення

1 Яке з чисел ірраціональне?

а) $\frac{22}{7}$ б) $\sqrt{3}$ в) 3,14 г) 3,142

2 Знайдіть арифметичний квадратний корінь із числа 1296.

а) 13 б) 26 в) 36 г) 46

3 Оберіть множину, в якій усі числа раціональні.

а) $\sqrt{7}$; 0,64; $\frac{1}{2}$; π б) 3; 0,81; $\sqrt{4}$; $\frac{1}{9}$ в) $-\frac{5}{8}$; $\sqrt{11}$; 2; 34; 0 г) π; 0,34; −9; 1

4 Обчисліть: $\sqrt{6\frac{1}{4}}$.

а) $2\frac{1}{2}$ б) $2\frac{3}{4}$ в) $1\frac{1}{2}$ г) 2

5 Знайдіть корені рівняння $x^2 = 13$.

а) $x = \sqrt{13}$ б) $x_1 = \sqrt{13}$, $x_2 = -\sqrt{13}$ в) 169 г) коренів немає

6 Оберіть правильний запис.

а) $11\sqrt{3} < 12\sqrt{2}$ б) $4\sqrt{3} < 3\sqrt{4}$ в) $12\sqrt{7} > 9\sqrt{13}$ г) $9\sqrt{13} > 6$

7 Знайдіть значення виразу $\sqrt{\frac{64}{25}} + \sqrt{5^4}$.

а) 26,6 б) 27,56 в) 626,6 г) 627,56

8 Обчисліть: $(\sqrt{6} + \sqrt{5})(\sqrt{2} + \sqrt{15})$.

а) $5\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$ б) $7\sqrt{3} + 4\sqrt{10}$ в) $5\sqrt{3} + 7\sqrt{10}$ г) $6\sqrt{3} + 5\sqrt{3}$

9 Знайдіть значення виразу $\sqrt{125} + \sqrt{175} - \sqrt{28} + \sqrt{20}$.

а) $\sqrt{5} - 5\sqrt{7}$ б) $7\sqrt{5} - \sqrt{5}$ в) $\sqrt{5} + 5\sqrt{7}$ г) $7\sqrt{5} + \sqrt{7}$

10 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу $\frac{1+\sqrt{8}}{3-\sqrt{2}}$.

а) $1 + \sqrt{2}$ б) $1 - \sqrt{2}$ в) $2 + \sqrt{3}$ г) $5 + \sqrt{2}$

11 Знайдіть значення виразу $\left(\sqrt{7-\sqrt{13}}\right)^2 + \sqrt{(\sqrt{13}-7)^2}$.

а) 0 б) $14 - 2\sqrt{13}$ в) $-14 + 2\sqrt{13}$ г) $-28\sqrt{13}$

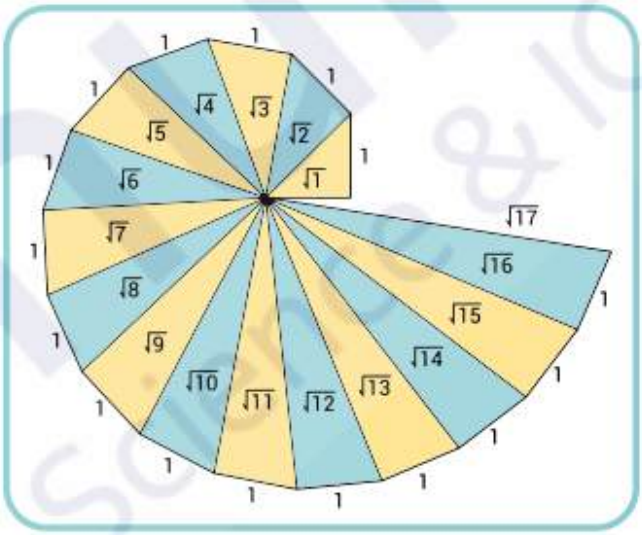
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Проєктна робота «Спіраль квадратних коренів»

Крок ① Об'єднайтеся у 4–5 груп. Розподіліть обов'язки. Підготуйте необхідні матеріали (аркуш паперу А4, олівець, лінійку, косинець або транспортир, кольорові олівці або фарби).

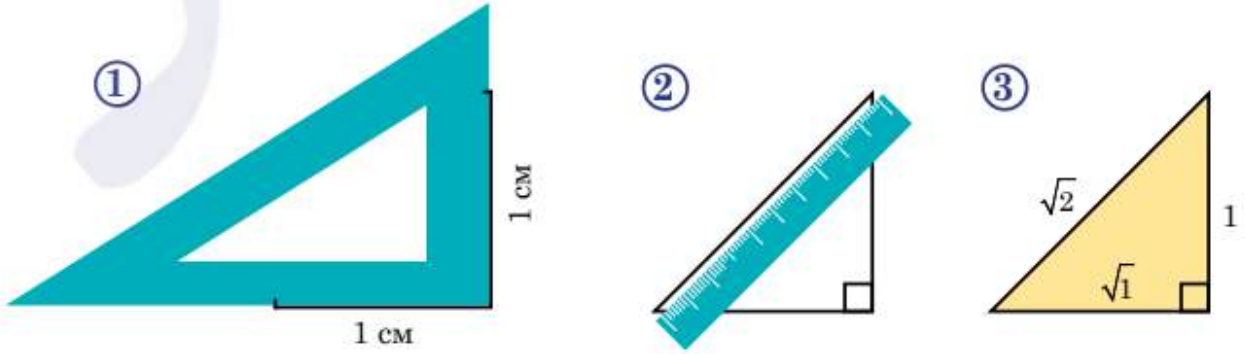
Крок ② Кожній групі необхідно створити спіраль квадратних коренів. А тоді пофантазувати та домалювати спіраль так, щоб спіраль стала основою малюнка. Наприклад, спіраль може стати панцирем равлика, хвостом павича, крабом, драконом, хвостом фламінго, платтям дівчинки, індійцем, крилом метелика тощо.

Спіраль квадратних коренів ще називають спіраллю Піфагора, спіраллю Феодора. Вона складається з прямокутних трикутників, побудованих послідовно один за одним. У кожному трикутнику один із катетів має довжину 1 см. Гіпотенузи трикутників є коренями квадратними з послідовних натуральних чисел: $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}, \sqrt{16}, \sqrt{17}$... Спіраль розпочинається з рівнобедреного прямокутного трикутника зі стороною 1 см. Кожен наступний трикутник будується на гіпотенузі попереднього, відповідно гіпотенуза попереднього є катетом наступного трикутника. Потім процес повторюється знову і знову. Так спіраль можна продовжувати до нескінченної кількості трикутників, ми ж пропонуємо побудувати спіраль, яка міститиме 16 трикутників. Відповідно гіпотенуза останнього трикутника матиме довжину $\sqrt{17}$.



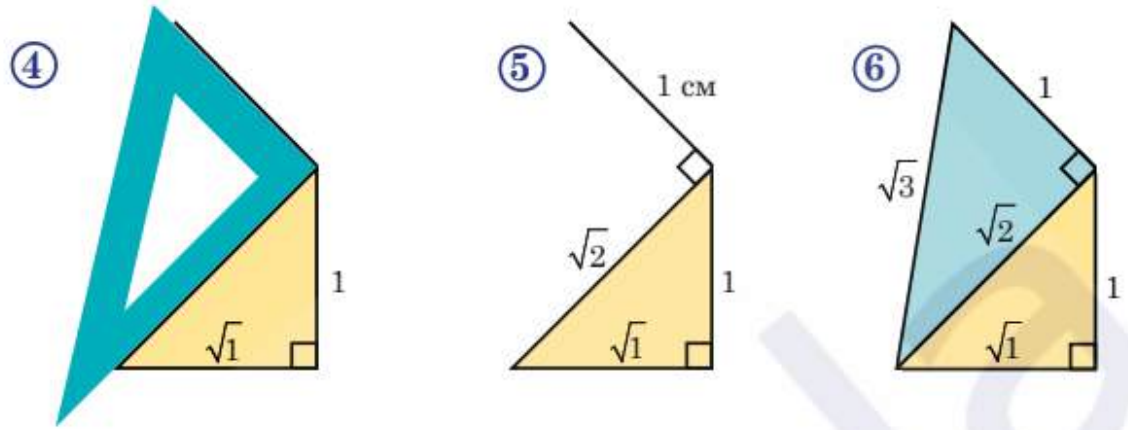
Розпочніть побудову на середині аркуша. Спочатку за допомогою косинця побудуйте катети прямокутного трикутника довжиною 1 см. Тоді сполучіть катети, утворивши гіпотенузу ($\sqrt{2}$ см).

Наведені нижче малюнки виконано схематично.



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Ця гіпотенуза є катетом наступного трикутника. За допомогою косинця відкладіть кут 90°. Тоді відкладіть на перпендикулярі відрізок довжиною 1 см. Сполучіть сторони, утворивши наступну гіпотенузу довжиною $\sqrt{3}$ см.



Повторіть попередні кроки, будуючи наступні трикутники. Усього має вийти 16 прямокутних трикутників. Зверніть увагу на те, що всі катети зі стороною 1 см розміщені зовні спіралі.

А тепер уявіть себе художниками та художницями, пофантазуйте та створіть малюнок зі спіраллю.



Крок ③ Продемонструйте ваші малюнки всьому класу. Поділіться своїми спробами й помилками у процесі побудови спіралі. Подумайте, які закономірності ви помітили, будуючи прямокутні трикутники, обговоріть їх.

Крок ④ Обговоріть підсумки проєкту з усім класом.

Що цікавого дізналися про квадратні корені?

Значення яких квадратних коренів, використаних у процесі побудови, є натуральними числами, а яких — ірраціональними?

Чий малюнок сподобався найбільше? Що найбільше вразило? Що було складним? Над чим ще треба попрацювати?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Додаткові завдання до розділу

403 Прочитайте текст-загадку. Подумайте, про що йде мова. Складіть свій оригінальний текст-загадку про арифметичний квадратний корінь.
Я маю дуже велику родину. Кожна сім'я в моїй родині має свою назву і навіть символ. Навколо мого найбільшого сімейного вогнища об'єднуються всі сім'ї разом. Такою турботливою я стала завдяки своєму батькові. Хто я така?

404 Зіграйте у гру разом із напарником чи напарницею.
Оберіть одне число із запропонованих. Тоді по черзі крутіть спінер і виконуйте дії з числом ланцюжком. Перша дія з вибраним числом, наступна — з результатом виконання першої дії і так далі. Для кожного вибраного числа виконайте 6 дій.

$\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}$ $3\sqrt{2}$ $6\sqrt{2}$



405 Визначте, чи є число раціональним:

а) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}-2\sqrt{30}$;

б) $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{7}}{2\sqrt{2}-\sqrt{7}}-4\sqrt{14}$.

406 EN Complete the table.

$\sqrt{25}$	square root of twenty-five
$\sqrt{49}$	
$\sqrt{169}$	
$\sqrt{625}$	
$\sqrt{10000}$	

407 EN Solve the problem.
Given that $56^2 = 3136$, find the square root of 0,003136.

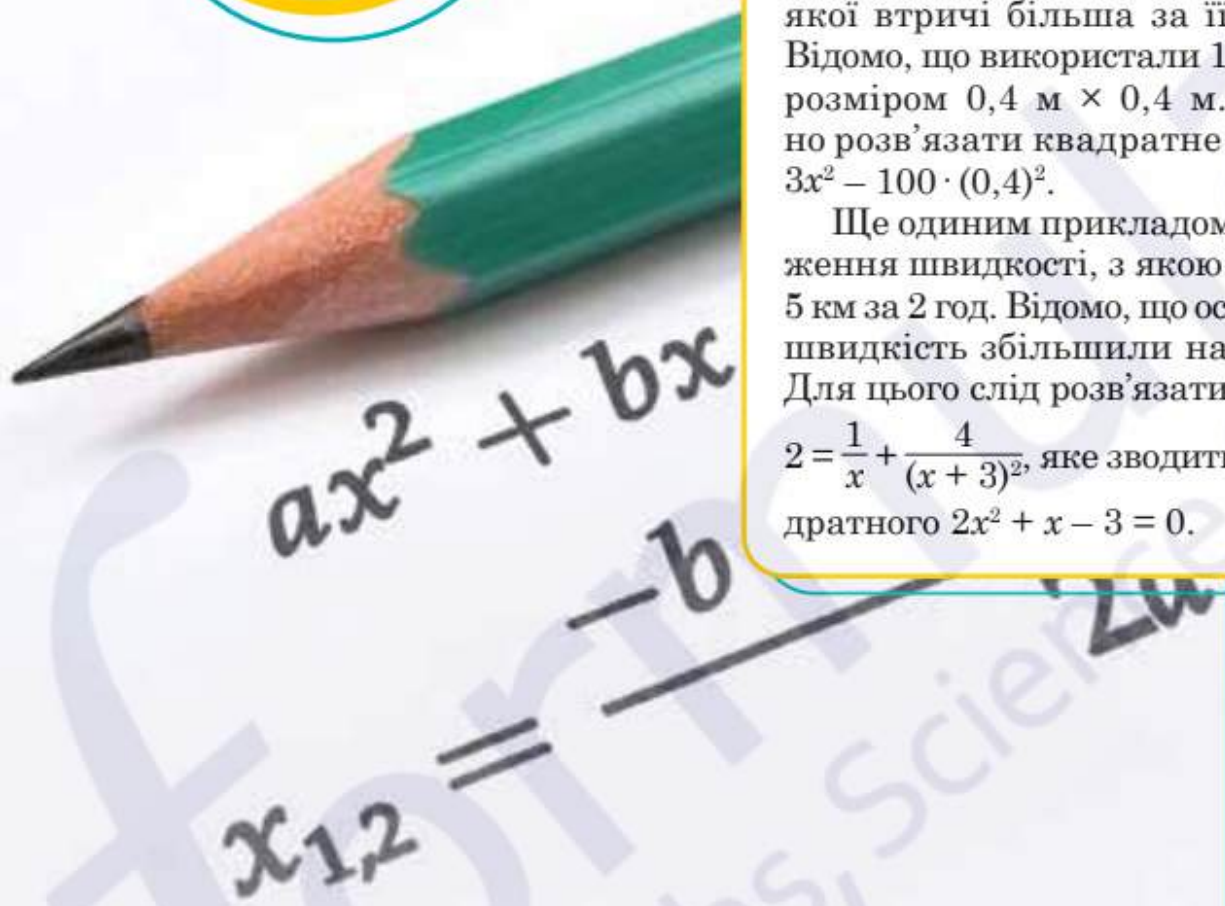
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

5

Квадратні рівняння

Квадратні рівняння зустрічаємо досить часто в повсякденному житті, хоча ми іноді цього не усвідомлюємо. Наприклад, щоб знайти площу поверхні, укладеної плиткою, у кімнаті прямокутної форми, довжина якої втричі більша за її ширину. Відомо, що використали 100 плиток розміром 0,4 м × 0,4 м. Необхідно розв'язати квадратне рівняння $3x^2 - 100 \cdot (0{,}4)^2$.

Ще одним прикладом є знаходження швидкості, з якою подолали 5 км за 2 год. Відомо, що останні 4 км швидкість збільшили на 3 км/год. Для цього слід розв'язати рівняння $2 = \frac{1}{x} + \frac{4}{(x+3)^2}$, яке зводиться до квадратного $2x^2 + x - 3 = 0$.



У цьому розділі ми:

- дізнаємося про види квадратних рівнянь;
- довідаємося, як визначати кількість коренів квадратного рівняння;
- навчимося розв'язувати квадратні рівняння за допомогою формули дискримінанта, теореми Вієта;
- будемо розкладати квадратний тричлен на лінійні множники;
- дізнаємося про рівняння, що зводяться до квадратних;
- будемо розв'язувати задачі за допомогою квадратних рівнянь.

Ключові слова

- Квадратне рівняння (*quadratic equation*)
- Формула дискримінанта (*quadratic formula*)
- Теорема Вієта (*Vieta's theorem*)
- Квадратний тричлен (*quadratic trinomial*)
- Розв'язувати задачі (*to solve problems*)

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

5 Квадратні рівняння

5.1. Лінійні та квадратні рівняння

ax = b — загальний вигляд лінійного рівняння з однією змінною, де a і b — деякі числа, x — змінна.

Ви вже вмієте розв'язувати лінійні рівняння, у яких невідома змінна піднесена до першого степеня ($x^1 = x$). $x + 9 = 4$, $5x = 10$, $4x + 9 = 13$, $y + 5 = 8y - 12$ — **лінійні рівняння**.

А в цьому розділі ви ознайомитеся з квадратними рівняннями, у яких невідома змінна піднесена до другого степеня (x^2). $x^2 + 4x + 5 = 0$, $12x^2 - 4 = 0$, $x^2 - 2x = 8 - 3x - 5x^2$ — **квадратні рівняння**.

Малі латинські літери (a, b, c) для позначення коефіцієнтів квадратного рівняння вперше використав Рене Декарт.

Квадратним рівнянням називається рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, a, b і c – коефіцієнти, причому $a \neq 0$.

перший, або старший коефіцієнт → $ax^2 + bx + c = 0$ ← вільний член; ← другий коефіцієнт

Незведене квадратне рівняння можна перетворити у зведене, рівносильне поданому, розділивши обидві частини рівняння на число ***a***.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Наприклад, квадратне рівняння $3x^2 + 5x - 4 = 0$ має такі коефіцієнти: $a = 3$, $b = 5$, $c = -4$. Квадратне рівняння, у якому перший коефіцієнт дорівнює 1, називають ***зведеним***.

$x^2 - 2x + 5 = 0$ — зведене квадратне рівняння ($a = 1$).

$3x^2 - 2x + 5 = 0$ — **не** є зведеним ($a = 3$).

Якщо у квадратному рівнянні $ax^2 + bx + c = 0$ або $b = 0$, або $c = 0$, то маємо ***неповне квадратне рівняння***. Розглянемо всі випадки неповних квадратних рівнянь та їх корені.

Неповні квадратні рівняння

$ax^2 = 0$, $b = 0, c = 0$	$ax^2 + c = 0$, $b = 0, c \neq 0$		$ax^2 + bx = 0$, $b \neq 0, c = 0$
$7x^2 = 0$ $x^2 = 0$ $x = 0$	$4x^2 - 8 = 0$ $4x^2 = 8$ $x^2 = 2$ $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$	$4x^2 + 8 = 0$ $4x^2 = -8$ $x^2 = -2$ Рівняння не має коренів	$5x^2 + 3x = 0$ $x(5x + 3) = 0$ $x_1 = 0$ або $5x + 3 = 0$ $x_2 = -\frac{3}{5}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

1 Складіть квадратне рівняння за його коефіцієнтами.

а) $a = 3$, $b = 5$, $c = 8$ б) $a = 2$, $b = 0$, $c = -7$ в) $a = -6$, $b = 4$, $c = 0$

Розв'язання

а) $3x^2 + 5x + 8 = 0$ б) $2x^2 - 7 = 0$ в) $-6x^2 + 4x = 0$

Приклад

2 Знайдіть корені рівняння.

а) $2x^2 = 0$ б) $4x^2 + 15 = 0$ в) $9x^2 - 16 = 0$ г) $8x^2 - 7x = 0$

Розв'язання

а) $2x^2 = 0$
$x = 0$
Відповідь. 0.

б) $4x^2 + 15 = 0$
$4x^2 = -15$
$x^2 = -\frac{15}{4}$
Відповідь. Коренів немає.

в) $9x^2 - 16 = 0$
$9x^2 = 16$
$x^2 = \frac{16}{9}$
$x_1 = \sqrt{\frac{16}{9}} = 1\frac{1}{3}$
$x_2 = -\sqrt{\frac{16}{9}} = -1\frac{1}{3}$
Відповідь. $1\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{3}$.

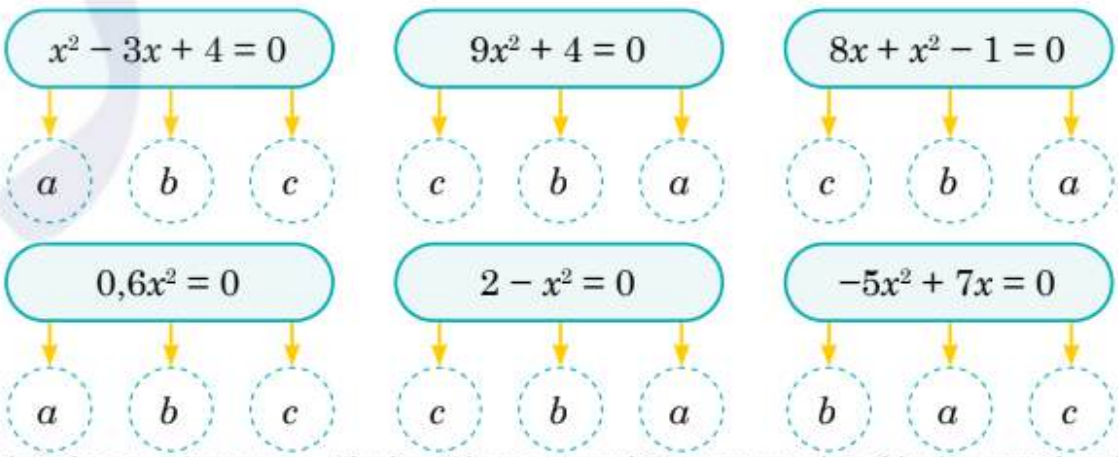
г) $8x^2 - 7x = 0$
$x(8x - 7) = 0$
$x = 0$ або $8x - 7 = 0$
$x = \frac{7}{8}$
Відповідь. 0; $\frac{7}{8}$.

Попрактикуйтеся

408 Які з наведених рівнянь є квадратними? Назвіть неповні рівняння.

а) $x^2 - 4x + 2 = 0$ б) $x^2 + 1 = 0$ в) $2x + 7 = 4x - 5$ г) $x^2 = 0$
д) $x^3 - x + 9 = 0$ е) $7 + x^2 - 3x = 0$ ж) $1 - 5x^2 = 0$ и) $x^3 + 1 = 0$

409 Випишіть коефіцієнти квадратного рівняння.



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

410 Виберіть лише зведені квадратні рівняння.

З букв, що позначають лише зведені квадратні рівняння, складіть назву міжнародної організації, до переліку світової спадщини якої увійшов Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича. Це єдиний в Україні заклад вищої освіти, який став пам'яткою всесвітньої спадщини. Він вважається одним із найстаріших та найкрасивіших не лише в Україні, а й у Європі.



Ю	$x^2 - 3x + 7 = 0$	Н	$x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = 0$	В	$2x^2 + 7x - 4 = 0$
І	$5x^2 = 0$	Е	$x^2 + 10x + 25 = 0$	С	$36 - 12x + x^2 = 0$
К	$1 - 5x - x^2 = 0$	А	$x - 2x^2 = 0$	О	$4x - 1 + x^2 = 0$

411 Складіть квадратне рівняння за його коефіцієнтами.

$a = 2, b = -1, c = 5$	$a = -0{,}5, b = 0{,}3, c = 0{,}6$	$a = -1, b = 3, c = 7$
$a = 4, b = 0, c = -9$	$a = -11, b = -8, c = 0$	$a = 1, b = 0, c = 0$

412 На уроці вчителька записала на дошці квадратне рівняння $5x^2 - 9x + 4 = 0$ і запитала учнів та учениць, яку дію небхідно виконати, щоб це рівняння стало зведеним. Олівія сказала, що потрібно обидві частини рівняння помножити на 0,2. А Матвій вважає, що потрібно обидві частини рівняння поділити на 5. Хто має рацію?

413 Перетворіть подані квадратні рівняння у зведені.

а) $-\frac{1}{7}x^2 - \frac{4}{7}x + 1 = 0$ б) $5x^2 - 10x + 5 = 0$ в) $2x^2 - x - 3 = 0$

414 Розв'яжіть рівняння.

а) $3x^2 = 0$ б) $4x^2 - 16 = 0$ в) $7x^2 + 21x = 0$ г) $-\frac{4}{9}x^2 = 0$

д) $0{,}02x^2 - 8 = 0$ е) $\frac{6}{7}x^2 - 12x = 0$ ж) $13x^2 + 26 = 0$ и) $-5x^2 - 80 = 0$

415 Розв'яжіть рівняння.

а) $4a^2 = 49$ б) $4x = 6x^2$ в) $a(21 - 17a) = 0$

г) $5k(1 - 2k) = 0$ д) $x(2x - 15) = 8x$ е) $16y^2 = 36$

ж) $9x^2 - 36x = 0$ и) $k(23 - 16k) = 7k$ к) $3x(x + 10) = 6x(4x - 9)$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

416 Математичне лото. Розв'яжіть рівняння, позначте правильні відповіді на ігровому полі. Назвіть числа, які залишилися. Що цікавого ви помітили серед цих чисел?

а) $x^2 + 5x = 0$ б) $2x^2 - 9x = 0$ в) $x^2 - 12x = 0$

г) $3x^2 + 5x = 0$ д) $x^2 + 3x = 0$ е) $5x^2 = 3x$

ж) $3x^2 + x = 0$ и) $x^2 - \sqrt{3x} = 0$ к) $3x^2 = 0$

Ігрове поле				
0 та -5	0 та 4,5	0 та 12	0 та $\sqrt{3}$	0 та -3
0 та $\frac{3}{5}$	$\sqrt{2}$ та $\sqrt{3}$	0 та $-\frac{1}{3}$	0 та $-1\frac{2}{3}$	0

417 Зведіть до вигляду $ax^2 + bx + c = 0$ рівняння:

а) $2x(x + 6) - (x - 1)(4x + 3)$; б) $2(3x - 1) = (3x - 1)^2 - 1$;

в) $7x^2 - 3 = x(x - 11) + 1$; г) $(4x + 3)^2 = (x - 7)^2$.

418 Розв'яжіть рівняння.

а) $(x - 4)(x + 3) = -12$ б) $(5x - 3)^2 = (x - 15)^2$

в) $\frac{1}{2}x(x + 8) = \frac{1}{3}(12x + 9)$ г) $(6x - 5)(2x + 3) = -15$

д) $(1 - 3x)^2 + 7(x - 4) = x$ е) $\frac{x^2 - 3x}{5} = x$

ж) $\frac{x^2 - 4}{3} - \frac{x^2 - 6}{2} = 7$ и) $x^2 - 5|x| = 0$

419 Знайдіть корені квадратного рівняння $(2x + 1)^2 = -3$. Поясніть свою думку.

420 Знайдіть значення c квадратного рівняння $x^2 - 10x + c = 0$, якщо $x = 5$.

421 (*) При якому значенні a:

а) число 2 є коренем рівняння $ax^2 + 2x + 7 = 0$;

б) число 3 є коренем рівняння $ax^2 - 11x + 6 = 0$?

422 (*) При якому значенні b:

а) число 2 є коренем рівняння $x^2 + bx + 10 = 0$;

б) число 5 є коренем рівняння $x^2 + bx - 35 = 0$?

423 Брати Андрій і Марат — погодки (різниця у їх віці 1 рік). Знайдіть їх вік зараз, якщо добуток їх років на 49 більший за вік меншого Сашка.

424 Довжина прямокутної земельної ділянки в три рази більша, ніж ширина. Обчисліть довжину та ширину ділянки, якщо її площа дорівнює 1 200 м².

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

5.2. Формула коренів квадратного рівняння

Існують різні методи розв'язання квадратних рівнянь. Інколи використання деяких методів є недоцільним. Формулу коренів квадратного рівняння застосовують для розв'язання будь-яких квадратних рівнянь.

Запишемо повне квадратне рівняння та виведемо формулу для обчислення його коренів методом Ніколо Тартальї:

$ax^2 + bx + c = 0$

Крок 1. Поділимо обидві частини рівняння на число a.

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

Крок 2. Перенесемо вільний член $\frac{c}{a}$ у праву частину рівняння.

$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

Крок 3. Додамо $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ до обох частин рівняння, щоб виділити квадрат двочлена у лівій частині.

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

Крок 4. Застосуємо формулу $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ у лівій частині рівняння.

$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$

Крок 5. Спростимо праву частину рівняння.

$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Крок 6. Добудемо корінь квадратний з обох частин рівняння.

$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ або $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ — **формула коренів квадратного рівняння.**

Вираз $b^2 - 4ac$ називають **дискримінантом** і позначають літерою D. Значення цього виразу визначає кількість коренів квадратного рівняння.

Як уже відомо, добути арифметичний квадратний корінь можна лише за умови, що він невід'ємний. Якщо ця умова не виконується, то рівняння

Стародавні народи розв'язували квадратні рівняння геометрично. Першим, хто словесно описав формулу коренів квадратного рівняння і знайшов один корінь, був індійський математик Брахмагупта. Пізніше перський математик Мухамед аль-Хорезмі розв'язував квадратні рівняння алгебраїчними методами. Рене Декарт у своїй книзі «Геометрія» розглядав окремі випадки формули і надавїй сучасного вигляду.

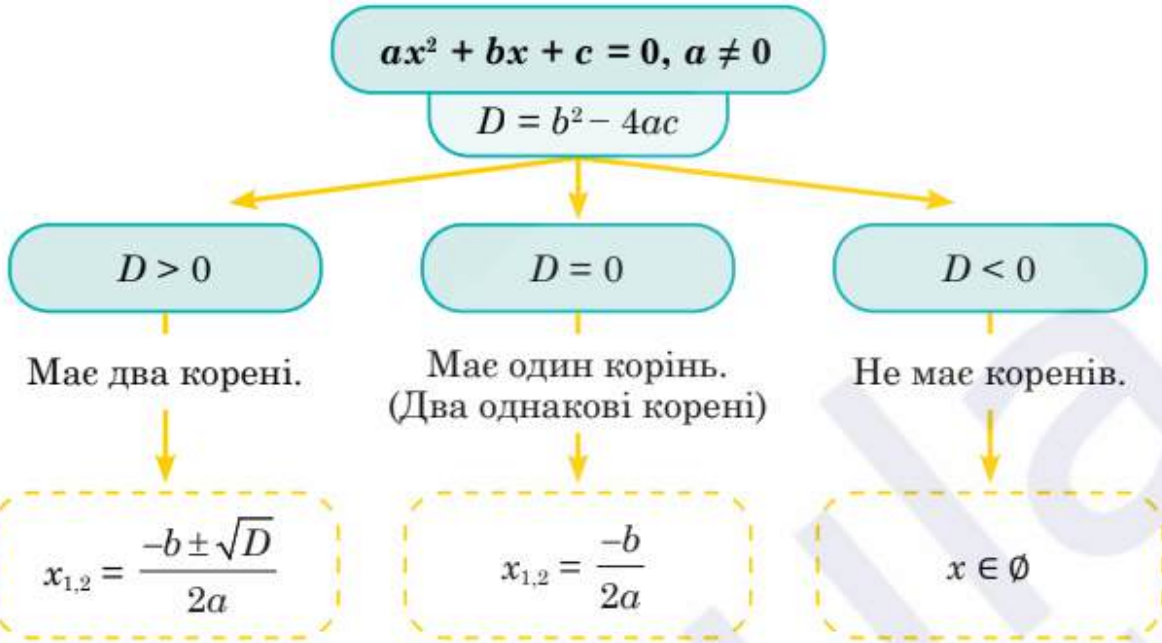


Ніколо Тарталья (1499–1557)

Термін «дискримінант» походить від латинського слова discriminare — той, що визначає.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

не має розв'язків. Отже, квадратне рівняння має розв'язки, якщо дискримінант більший за 0 ($D > 0$) або дорівнює 0 ($D = 0$).



Приклад

1 За допомогою формули дискримінанта визначте кількість коренів рівняння, а потім розв'яжіть їх.

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$ б) $4x^2 + 28x + 49 = 0$ в) $x^2 + 3x + 8 = 0$

Розв'язання

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$

Для цього рівняння маємо: $a = 1$, $b = -5$ і $c = 6$.

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1, D > 0$.

Отже, це рівняння має два корені.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2};$$

$x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

Відповідь. 3; 2.

Ми вже обчислили значення дискримінан та $b^2 - 4ac = 1$, тому лише записуємо результат і не повторюємо тих самих розрахунків.

б) $4x^2 + 28x + 49 = 0$, $a = 4$, $b = 28$ і $c = 49$.

$D = b^2 - 4ac = 28^2 - 4 \cdot 4 \cdot 49 = 784 - 784 = 0$, $D = 0$.

Отже, це рівняння має один корінь.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-28 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{-28 \pm 0}{8} = -3{,}5.$$

Відповідь. $-3{,}5$.

Якщо рівняння немає коренів, то множину його розв'язків можна позначати як порожню ($x \in \emptyset$).

в) $x^2 + 3x + 8 = 0$, $a = 1$, $b = 3$ і $c = 8$.

$D = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 9 - 32 = -23$, $D < 0$.

Отже, це рівняння не має коренів.

Відповідь. Коренів немає.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій інший формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

2 Довжина прямокутника дорівнює $(x + 2)$ см, а його ширина — $(2x - 5)$ см. Знайдіть x, якщо площа даного чотирикутника дорівнює $(x + 2)$ см^2.

Розв'язання

Площа прямокутника дорівнює добутку довжини на ширину. Складемо рівняння:

$x + 2 = (x + 2)(2x - 5)$

$x + 2 = 2x^2 - x - 10$

$2x^2 - 2x - 12 = 0$

$x^2 - x - 6 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 1 + 24 = 25$, $D > 0$.

Отже, це рівняння має два корені.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 5}{2}; \quad x_1 = 3, x_2 = -2.$$

Корінь $x = -2$ слід відкинути, адже довжина та ширина — завжди додатні числа.

Відповідь. 3.

Щоб вставляти квадратні рівняння і легко знаходити їхні корені, можна використовувати надбудову «Розв'язувач» у Microsoft Excel.

Попрактикуйтеся

425 За значенням дискримінанта визначте, скільки коренів має квадратне рівняння.

а) -5 б) 121 в) -81 г) 0 д) 6 е) 101

426 Заповніть таблицю.

Рівняння	a	b	c	D
$x^2 + 4x - 5 = 0$				
$x^2 - 4x + 10 = 0$				
$3x^2 - 5x - 2 = 0$				
$-4x^2 - 11x + 3 = 0$				

427 Розв'яжіть рівняння.

а) $x^2 + 4x + 4 = 0$ б) $x^2 - 7x + 6 = 0$ в) $x^2 + 5x + 9 = 0$

г) $2x^2 - x + 8 = 0$ д) $x^2 + 2x - 15 = 0$ е) $2x^2 - 20x + 50 = 0$

428 Розкрийте дужки та знайдіть корені рівнянь.

а) $(3 - x)(x + 6) = 8$ б) $(2x - 7)(x + 4) = 2x$ в) $(5x - 3)^2 + 11 = 0$

г) $(x - 6)(x + 6) = 12\,(x - 6)$ д) $x^2 = \frac{2}{3}(6x + 15)$ е) $(3x + 2)^2 = (x - 8)^2$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

429 Виберіть лише ті рівняння, які не мають коренів.

З букв, що позначають лише ті рівняння, які не мають коренів, складіть назву села на Київщині, в якому народилась і провела все своє життя талановита українська художниця Марія Примаченко. У своїх картинах мисткиня зображувала справжню українську родину, її традиції та настрій. Її картини транслювали українську культуру: перемальовувала квіточки із сорочки, відтворювала піч, що стояла в хаті. (Примітка: деякі букви можна використовувати двічі.)

Д	$4x^2 + 18x + 10 = 0$	Е	$x^2 + 9x - 7 = 0$	Б	$3x^2 + 11x + 44 = 0$
О	$7x^2 - 25x + 23 = 0$	Г	$x^2 + 7x - 1 = 0$	Л	$4x^2 - 12x + 36 = 0$
Т	$-3x^2 + 10x - 9 = 0$	Н	$-x^2 + x - 5 = 0$	Я	$-2x^2 - 3x - 6 = 0$



430 Розв'яжіть рівняння.

а) $-4x^2 + 2x + 20 = 0$ б) $14x = 6x^2 + 8$ в) $18x - 9 = 3x^2$

г) $3x - 9x^2 = -6$ д) $4x^2 + 6\frac{2}{3}x = -37\frac{1}{3}$ е) $5x^2 - \frac{17}{5}x = 1$

431 Радіус кола дорівнює $(x + 4)$ см. Знайдіть x, якщо площа круга дорівнює $\frac{176}{14}$ см^2. (Вважайте, що $\pi = \frac{22}{7}$.)

432 Периметр прямокутника довжиною $(x^2 + 3x + 10)$ см і шириною $(10x + 2)$ см дорівнює 96 см. Знайдіть значення x.

433 У магазині продали x шоперів на суму $(x^2 + 6x)$ грн. Скільки шоперів продали, якщо ціна одного 160 грн?

434 Розв'яжіть рівняння.

а) $(6x - 1)(x - 9) = 0$
б) $11x(7x + 4) = 2(7x + 4)$
в) $49 - 64b^2 = 0$
г) $x^2 + 4x = 7x - 1$
д) $2x(x + 4) = -2(x + 6)$
е) $(2y - 1)^2 - 3(2y - 1) = 0$
ж) $(3a - 2)^2 = 3a - 2$
и) $(x^2 - 1) - x + 1 = 0$

435 Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{3x^2 - 24}{15} = \frac{6x}{15}$ б) $\frac{2x^2 + 10x}{6} = 8$ в) $\frac{x^2 - 1}{5} + \frac{x + 2}{2} = 1$

г) $\frac{x^2}{5} - \frac{2x}{3} = \frac{5 + x}{6}$ д) $\frac{x^2 - 4}{8} + \frac{2x + 3}{3} = -1$ е) $\frac{2x^2 + x}{3} - \frac{x + 3}{4} = x - 1$

ж) $\frac{x^2 - 4}{8} - \frac{2x + 3}{3} = -1$ и) $\frac{2x^2}{3} - \frac{x^2 + 2}{2} - \frac{x + 2}{4} = 3$ к) $\frac{x - 3}{5} + \frac{(x - 2)^2}{2} = \frac{4 - x}{6}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

436 Розв'яжіть рівняння та дізнайтеся цікаві факти про екологічні проблеми в Україні. Обирайте серед коренів рівняння додатні.

За результатами опитування, в Україні серед екологічних проблем, якими найбільше переймаються громадяни та громадянки, визначено:

1) забруднення водойм — ☐ % ($x^2 - 49x - 102 = 0$);
2) зростання кількості побутових та промислових відходів — ☐ % ($2x^2 - 86x = 276$);
3) забруднення атмосферного повітря — ☐ % ($x^2 = 33x + 190$).

Складний стан земельних ресурсів України зумовлений тим, що ☐ % ($x^2 - 69x - 142 = 0$) всього агроландшафту країни використовується для господарської діяльності.

Україна належить до малолісистих країн — ліс покриває лише шосту частину території. Проте експорт деревини з України в ☐ ($2x^2 + 5x - 25 = 0$) рази перевищує імпорт.

Однією з найбільш серйозних екологічних проблем України можна вважати проблему утилізації та переробки різних відходів. За інформацією Міністерства екології та природних ресурсів, загальна площа всіх полігонів з відходами вже займає ☐ % ($x^2 - 8x + 16 = 0$) площі України.

437 Добуток двох чисел дорівнює 140. Знайдіть ці числа, якщо одне з них на 13 більше за друге.

438 Знайдіть два послідовні натуральні числа, якщо сума їх квадратів дорівнює 265.

439 Складіть рівняння, рівносильне до поданого:

а) $x^2 + 2x + 1 = 0$; б) $x^2 - 4x + 10 = 0$; в) $3x^2 + 7x + 5 = 0$.

440 Розв'яжіть рівняння.

а) $2x^2 + x\sqrt{5} - 15 = 0$ б) $x^2 - x(\sqrt{6} - 1) - \sqrt{6} = 0$

441 Розв'яжіть рівняння. Результати запишіть з точністю до сотих.

а) $\sqrt{7}x^2 - 2x - \sqrt{7} = 0$ б) $2x^2 - 4\sqrt{2}x + 2 = 0$ в) $x^2 - \sqrt{6}x - 6 = 0$

г) $x^2 - 7|x| + 6 = 0$ д) $x|x| - 5x - 6 = 0$ е) $|x^2 - 3x| = 6$

442 * При якому значенні b рівняння має лише один корінь:

а) $x^2 + bx + 16 = 0$; б) $x^2 - bx + 1 = 0$?

443 * Доведіть, що при будь-якому значенні b рівняння має два корені:

а) $5x^2 - bx - 2 = 0$; б) $x^2 + bx - 8 = 0$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

5.3. Теорема Вієта

Ще одним із методів розв'язування квадратних рівнянь є застосування теореми Вієта. Розглянемо зведені квадратні рівняння, подані в таблиці. Проаналізуємо взаємозв'язок між сумою коренів та другим коефіцієнтом, між добутком коренів і вільним членом.

Рівняння	Корені, x_1 і x_2	Сума коренів, $x_1 + x_2$	Другий коефіцієнт, b	Добуток коренів, $x_1 \cdot x_2$	Вільний член, c
$x^2 - 3x + 2 = 0$	1 і 2	3	-3	2	2
$x^2 + 5x - 14 = 0$	-7 і 2	-5	5	-14	-14
$x^2 + 8x + 15 = 0$	-3 і -5	-8	8	15	15

Як бачимо, сума коренів рівнянь дорівнює другому коефіцієнту, узятому з протилежним знаком. А добуток коренів дорівнює вільному члену. Цю властивість відкрив Франсуа Вієт, на честь якого й назвали теорему Вієта.

Теорема Вієта. Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів дорівнює вільному члену.

Якщо x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -b, \quad x_1 \cdot x_2 = c.$$

Теорему Вієта також можна застосувати до незведеного квадратного рівняння: $ax^2 + bx + c = 0$. Для цього поділимо обидві частини рівняння на a ($a \neq 0$). Маємо:

$x^2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} = 0$ — зведене квадратне рівняння. Тоді

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема Вієта

Для **зведеного** квадратного рівняння	Для **незведеного** квадратного рівняння
Якщо x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -b$, $x_1 \cdot x_2 = c$.	Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.



Франсуа Вієт (1540–1603) — відомий французький математик, якого вважають творцем алгебраїчних формул та алгебраїчної символіки і називають «батьком алгебри».

Доведення теореми Вієта

$x^2 + bx + c = 0$ — **зведене** квадратне рівняння

$ax^2 + bx + c = 0$ — **незведене** квадратне рівняння

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

1 Знайдіть суму і добуток коренів рівняння $5x^2 + 3x - 4 = 0$, не розв'язуючи його.

Розв'язання

Перевіримо, чи має це рівняння корені.
$D = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-4) = 89 > 0$. Отже, рівняння має два корені.
За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{3}{5}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{4}{5}$.
Відповідь. $x_1 + x_2 = -\frac{3}{5}$, $x_1 \cdot x_2 = -\frac{4}{5}$.

Приклад

2 Знайдіть корені рівняння $x^2 + 2x - 8 = 0$ за допомогою теореми Вієта.

Розв'язання

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -2$, $x_1 \cdot x_2 = -8$. Якщо x_1 та x_2 — цілі числа, то вони є дільниками числа -8. Тоді потрібно серед цих дільників знайти такі два, сума яких буде дорівнювати -2.
Отже, $x_1 = -4$, $x_2 = 2$
Відповідь. $x_1 = -4$, $x_2 = 2$.

Приклад

3 Число 6 є коренем рівняння $2x^2 + x - q = 0$. Знайдіть другий корінь рівняння та значення q.

Розв'язання

Нехай x_1, x_2 — корені цього рівняння, причому $x_1 = 6$. За теоремою Вієта маємо:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}, \\ x_1 \cdot x_2 = q; \end{cases} \quad \begin{cases} 6 + x_2 = -\frac{1}{2}, \\ 6x_2 = q; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -6\frac{1}{2}, \\ q = 6\left(-6\frac{1}{2}\right); \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -6{,}5, \\ q = -39. \end{cases}$$

Відповідь. $x_2 = -6{,}5$, $q = -39$.

Приклад

4 Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $3x^2 - 4x + 8 = 0$. Знайдіть значення виразу $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, не розв'язуючи рівняння.

Розв'язання

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = \frac{4}{3}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{8}{3}$. Звідси $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{4}{3} : \frac{8}{3} = 0{,}5$.
Відповідь. 0,5.

© Vector, Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Теорема, обернена до теореми Вієта. Якщо сума двох чисел x_1 та x_2 дорівнює $-p$, а їх добуток дорівнює q, то ці числа є коренями рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Приклад

5 Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють $-\frac{3}{7}$ і 2.

Розв'язання

За теоремою Вієта $x_1 + x_2 = -\frac{3}{7} + 2 = \frac{11}{7}$,

$x_1 \cdot x_2 = -\frac{3}{7} \cdot 2 = -\frac{6}{7}$.

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, маємо: $x^2 - \frac{11}{7}x - \frac{6}{7} = 0$.

Помноживши обидві частини рівняння на 7, отримаємо квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами: $7x^2 - 11x - 6 = 0$.

Відповідь. $7x^2 - 11x - 6 = 0$.

Доведення теореми, оберненої до теореми Вієта

Попрактикуйтеся

444 Знайдіть суму і добуток зведених квадратних рівнянь, не розв'язуючи їх.

Рівняння	Сума коренів	Добуток коренів
$x^2 + 2x - 3 = 0$		
$x^2 - 3x + 5 = 0$		
$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0$		
	$-b$	c

445 Знайдіть суму і добуток повних квадратних рівнянь, не розв'язуючи їх.

Рівняння	Сума коренів	Добуток коренів
$4x^2 - 7x + 1 = 0$		
$-3x^2 - 2x - 4 = 0$		
$5x^2 + 8x - 20 = 0$		
	$-\frac{b}{a}$	$\frac{c}{a}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

446 Знайдіть корені рівняння за допомогою теореми Вієта.

Тоді заповніть таблицю літерами, які позначають корені рівнянь, у вказаному порядку. Так ви дізнаєтеся один із шляхів подолання «сміттєвої» проблеми в Україні. За офіційними даними, щороку українці та українки викидають 11 тонн сміття, це приблизно 300 кг сміття на людину. В Україні налічується 6536 полігонів та 35 757 стихійних сміттєзвалищ. Уявити все накопичене сміття в Україні можна так: це 14 000 футбольних полів.

1	$x^2 + 9x - 22 = 0$	Р	$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{1}{3}$
2	$x^2 + 2x - 8 = 0$	Н	$x_1 = -3,\ x_2 = 5$
3	$3x^2 + 4x + 1 = 0$	Я	$x_1 = 9,\ x_2 = 3$
4	$2x^2 - 3x - 5 = 0$	А	$x_1 = 3,\ x_2 = -5$
5	$x^2 + 13x - 14 = 0$	В	$x_1 = 1,\ x_2 = 14$
6	$x^2 - 15x + 14 = 0$	У	$x_1 = 1,\ x_2 = -14$
7	$x^2 + 2x - 15 = 0$	О	$x_1 = -4,\ x_2 = 2$
8	$x^2 - 2x - 15 = 0$	С	$x_1 = 2,\ x_2 = -11$
9	$x^2 - 9x + 20 = 0$	Т	$x_1 = -1,\ x_2 = 2{,}5$
10	$x^2 - 12x + 27 = 0$	Н	$x_1 = 4,\ x_2 = 5$

$$x^2 + bx + c = 0$$
$$x_1 + x_2 = -b,\ x_1 \cdot x_2 = c$$



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

447 Число 3 є коренем рівняння $ax^2 - 2x + 5 = 0$. Знайдіть значення коефіцієнта a.

448 Число -2 є коренем рівняння $x^2 - bx - 20 = 0$, знайдіть значення b і другий корінь рівняння.

449 Число $\frac{1}{4}$ є коренем рівняння $8x^2 + 2x - c = 0$. Знайдіть значення c і другий корінь рівняння.

450 Складіть квадратне рівняння із цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють:

13 і 2 | 3 і 0,5 | 3 і −15

$\frac{1}{3}$ і $\frac{2}{5}$ | $\sqrt{5}$ і $-\sqrt{5}$ | $1-\sqrt{2}$ і 1 | 10 і −0,4

0 і 7 | 6 і −0,3 | 4 і −15

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

451 Перевірте, чи є коренями:

а) числа -5 та 6 рівняння $x^2 + x + 30 = 0$;

б) числа $\frac{1}{3}$ та 3 рівняння $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

452 Різниця коренів рівняння $x^2 - 12x + q = 0$ дорівнює 2. Знайдіть значення q та корені рівняння.

453 Різниця коренів рівняння $x^2 + 6x + q = 0$ дорівнює 8. Знайдіть значення q та корені рівняння.

454 Корені рівняння $x^2 - 14x + 48 = 0$ відносяться як 3 : 4. Знайдіть корені квадратного рівняння.

455 На фабриці виготовляють пластикові вікна і двері. На виготовлення одного вікна витрачається x кг пластику, а одних дверей — на 4 кг більше. Відомо, що на x вікон та 6 дверей витратили 36 кг пластику. Складіть рівняння, за яким можна визначити x. Знайдіть, скільки кілограмів пластику витрачається на одне вікно.

456 За допомогою теореми Вієта знайдіть корені рівняння.

а) $18x^2 - 9x - 5 = 0$ б) $6x^2 + 7x - 5 = 0$

457 Відомо, що a та b — корені рівняння $x^2 - 4x + 9 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

а) $a + b$; б) $a \cdot b$; в) $(a + b)^2$;

г) $2ab$; д) $a^2 + b^2$; е) $-3a - 3b$.

458 Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 + 4x - 5 = 0$. Не розв'язуючи рівняння, знайдіть значення виразу:

а) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $x_1^2x_2 + x_2^2x_1$;

г) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; д) $(x_1 - x_2)^2$; е) $|x_2 - x_1|$.

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2}$$

459 Знайдіть значення $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, якщо x_1, x_2 та x_3 — корені рівняння $3x^3 - 2x^2 + 5x - 7x = 0$.

460 Складіть квадратне рівняння, корені якого вдвічі більші за відповідні корені рівняння $x^2 + 8x - 3 = 0$.

461 Складіть квадратне рівняння, корені якого на 1 більші від відповідних коренів рівняння $x^2 + 5x - 7 = 0$.

462 Знайдіть усі цілі значення p, при яких рівняння має цілі корені:

а) $x^2 + px + 8 = 0$; б) $x^2 + px - 21 = 0$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

5

5.4. Квадратний тричлен. Розкладання квадратного тричлена на лінійні множники

Квадратним тричленом називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

$3x^2y$ — одночлен, $2ab + 4x - 7c^2$ — многочлен

$ax^2 + bx + c$

- a — перший коефіцієнт
- b — другий коефіцієнт
- c — вільний член

$5x^2 - 3x + 1$, $-x^2 + 16x - 10$, $x^2 - 9$, $x^2 + 16x$, $10x^2$ — квадратні тричлени.

Вирази $x^2 - 9$, $x^2 + 16x$, $10x^2$ також є квадратними тричленами, у яких $b = 0$, $c = 0$ відповідно.

Значення змінної, при якому значення тричлена дорівнює нулю, називають ***коренем*** квадратного тричлена.

$x^2 + bx + c = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Як знайти корені квадратного тричлена?

Крок 1. Прирівняти квадратний тричлен до нуля.

Крок 2. Знайти дискримінант квадратного тричлена.

Крок 3. Якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має. Якщо $D = 0$ — квадратний тричлен має один корінь. Якщо $D > 0$ — квадратний тричлен має два корені.

Якщо квадратний тричлен має корені, то його можна розкласти на лінійні множники, тобто на множники, які є многочленами першого степеня.

Доведення теореми про розкладання тричлена на множники

Теорема про розкладання квадратного тричлена на лінійні множники. Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то правильно, що

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Розклад квадратного тричлена на лінійні множники

$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
Два різних корені x_1 та x_2.	Два рівних корені $x_1 = x_2$.	Коренів немає.
$a(x - x_1)(x - x_2)$	$a(x - x_1)^2$	Не можна розкласти на лінійні множники

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад 1

Розкладіть на множники квадратні тричлени.

а) $3x^2 + 5x + 2$ б) $2x^2 - 12x + 18$ в) $-5x^2 - 4x + 1$

Розв'язання

Якщо $x_1 = x_2$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

а) Знайдемо корені тричлена $3x^2 + 5x + 2$.

Маємо: $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{2}{3}$.

Отже, $3x^2 + 5x + 2 = 3(x + 1)(x + \frac{2}{3}) = (x + 1)(3x + 2)$.

б) Розв'яжемо рівняння $2x^2 - 12x + 18 = 0$. Маємо: $x_1 = 3$.

Отже, $2x^2 - 12x + 18 = 2(x - 3)^2$.

в) Розв'яжемо рівняння $-5x^2 - 4x + 1 = 0$. Маємо: $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{1}{5}$.

Отже, $-5x^2 - 4x + 1 = -5(x + 1)(x - \frac{1}{5}) = (x + 1)(1 - 5x)$.

Приклад 2

Скоротіть дріб $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 4x}$.

Розв'язання

Розкладемо на множники квадратний тричлен, який є чисельником цього дробу.

$x^2 + x - 12 = (x - 3)(x + 4)$

Маємо: $\frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 4x} = \frac{(x - 3)(x + 4)}{x(x + 4)} = \frac{x - 3}{x}$.

Відповідь. $\frac{x - 3}{x}$.

Як виділити квадрат двочлена з квадратного тричлена?

$ax^2 + bx + c$ → $a(x \pm z)^2 + w$, де z і w — деякі числа.

$$x^2 + 6x - 1$$
$$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{2}\right)^2 - 1 =$$
$$= x^2 + 6x + 9 - 9 - 1 =$$
$$= (x + 3)^2 - 10$$

Крок 1. Потрібно додати та відняти вираз $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, щоб можна було виділити квадрат двочлена.

Крок 2. «Згорнемо» тричлен $x^2 + 6x + 9$ у квадрат двочлена $(x + 3)^2$.

Крок 3. Знайдемо w.

Попрактикуйтеся

463 Визначте, які з виразів є квадратними тричленами.

а) $x^2 - 7x + 5$ б) $x^3 + 2x^2 - 2$ в) $x^2 + 8x - 3$ г) $x^4 - 4x^3 + 4$

д) $x^2 - 15$ е) $7x - 11 + x^2$ ж) $12x^2$ и) $12x^2 + x^3 - 8$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

464 Чи можна розкласти квадратний тричлен на лінійні множники, якщо його дискримінант дорівнює:

а) -36; б) 64; в) 40; г) -4; д) 0?

465 Запишіть розклад квадратного тричлена на лінійні множники, якщо відомо a, x_1 та x_2.

$a = 1, x_1 = 6, x_2 = 10$	
$a = -1, x_1 = -3, x_2 = 5$	
$a = 4, x_1 = -1, x_2 = -7$	
$a = -5, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -1$	
$a = 2, x_1 = 3, x_2 = -\frac{3}{5}$	

466 Розкладіть квадратний тричлен на множники.

а) $x^2 - 3x + 2$ б) $x^2 + x - 12$ в) $2x^2 - 3x + 1$ г) $x^2 - 5x - 6$
д) $5x^2 - 3x - 2$ е) $2x^2 + 7x + 5$ ж) $4x^2 - 3 - 4x$ и) $-12x + 4 + 9x^2$
к) $6 - 5x + x^2$ л) $2x^2 - 10x - 48$ м) $x^2 + 8x + 9$ н) $x^2 - 3x + 7$

467 Розкладіть квадратний тричлен на лінійні множники.

Тоді заповніть таблицю літерами, які позначають розклади квадратних тричленів на множники, у вказаному порядку. Так ви дізнаєтеся, ким була написана найперша демократична конституція у світі. Прийнята на зборах козацтва біля містечка Тягина на правому березі річки Дністер 5 квітня 1710 року, укладена й затверджена шведським королем Карлом XII, написана латиною і староукраїнською.

а) $x^2 - 13x - 14$ б) $x^2 - 2x - 8$ в) $x^2 - 3x - 10$ г) $x^2 + x - 6$
д) $x^2 + 15x + 14$ е) $x^2 - 4x + 3$ ж) $-4x^2 - 3x + 22$ и) $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x - 1$
к) $0{,}6x^2 - 0{,}5x - 1$ л) $0{,}4x^2 - 1{,}1x - 3$

Р	$(x - 2)(-4x - 11)$	И	$(x + 3)(x - 2)$
И	$(x - 1)(0{,}6x + 0{,}1)$	П	$(x + 1)(x + 14)$
К	$(x - 3)(0{,}4x + 0{,}1)$	И	$(x + 2)(x - 4)$
Л	$\left(\frac{x}{3} - 1\right)(x + 1)$	О	$(x - 1)(x - 3)$
П	$(x + 1)(x - 14)$	Л	$(x + 2)(x - 5)$



а)	б)	в)	г)	д)

е)	ж)	и)	к)	л)

468 Обчисліть значення дробу:

а) $\frac{3x^2 - 16x + 5}{x^2 - 25}$, якщо $x = 3$; б) $\frac{-3x^2 + 8x + 3}{9x^2 + 18x + 5}$, якщо $x = 2$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

469 Скоротіть дроби.

а) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-16}$ б) $\frac{x^2+2x-8}{x^2+4x}$ в) $\frac{6x^2-5x-1}{18x^2+3x}$

г) $\frac{0{,}3x^2-3x+7{,}5}{x^2-10x+25}$ д) $\frac{2a^2+3a-5}{4a^2+25}$ е) $\frac{7b^2-20b-3}{b^2-10b+16}$

ж) $\frac{x^2-5x+24}{x^2-10x+16}$ и) $\frac{-8x^2-19x+27}{4x+27}$ к) $\frac{2x^2+5x+3}{4x^2+4x-3}$

470 Виділіть із квадратного тричлена квадрат двочлена.

а) x^2+2x-6 б) x^2+3x+9 в) $x^2-7x+15$ г) x^2-x-10

471 Виділіть квадрат двочлена та доведіть, що при будь-якому значенні змінної x, тричлен:

а) $2x^2+6x+9$ набуває додатного значення;
б) $-2x^2+6x-3$ набуває від'ємного значення.

472 Спростіть вирази.

а) $\left(\frac{x-1}{-2x^2+3x-1}-\frac{1}{4x^2-1}\right):\frac{3x+3}{2x+1}$ б) $\left(\frac{x+2}{x^2-x-6}-\frac{2x}{x^2-6x+9}\right):\frac{x^2+3x}{(2x-6)^2}$

473 Розв'яжіть рівняння.

а) $(x-5)^2=64$ б) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{16}$ в) $(x-7)^2=20$

474 Розв'яжіть квадратні рівняння, попередньо виділивши квадрат двочлена з тричлена.

а) $x^2+6x-16=0$ б) $x^2-12x+20=0$ в) $x^2+8x+9=0$
г) $x^2+8x+11=0$ д) $x^2+10x-1=0$ е) $x^2-4x+7=0$

475 Скоротіть дріб та обчисліть його значення:

а) $\frac{x^2+5x+6}{4-x^2}$, якщо $x=-3$;

б) $\frac{20+a-a^2}{a^2+3a-40}$, якщо $a=2$.

476 Виконайте ланцюжок обчислень.

$$\frac{x^2-5x-6}{x^2-36}+\frac{5}{x+6}-\frac{2x-3}{2x^2-5x+3}\cdot\frac{x-1}{x-2}=?$$

477* При яких значеннях m квадратний тричлен $x^2+mx+64$ можна розкласти на два однакові лінійні множники?

478* При яких значеннях n квадратний тричлен x^2-6x+n не можна розкласти на лінійні множники?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

5

5.5. Розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних

Ви вже знаєте, які рівняння є квадратними, та вмієте розв'язувати їх кількома способами. Також існують рівняння, які в початковому вигляді не є квадратними, але їх розв'язування зводиться до розв'язування квадратних рівнянь.

Чому невідоме в рівняннях позначається x?

Рене Декарт у 1637 році видав книгу «Геометрія». У ній для позначення невідомих він першим використав літери x, y, z. Сторінки книг набиралися з літер, виходила матриця, на яку наносили фарбу і притискали папір за допомогою преса. Якихось букв завжди було більше, а якихось — менше. Коли у Декарта запитали, чи має значення, якою буквою позначати невідомі змінні, він відповів, що немає значення. І в друкарні зробили просто: вибирали «найнепотрібнішу» літеру. У французькій мові це виявилася літера x. І оскільки сучасні математичні символи узвичаїв саме Рене Декарт, так історично склалося, що невідоме в рівняннях позначається «ікс».

Дробові раціональні рівняння

Під час розв'язування дробових раціональних рівнянь визначають область допустимих значень (ОДЗ), а потім перевіряють знайдені корені на відповідність ОДЗ.

Приклад

1 Розв'яжіть рівняння $\frac{x+1}{2x-1} - 2 = \frac{3-x}{3x+1}$.

Розв'язання

$\frac{x+1}{2x-1} - 2 = \frac{3-x}{3x+1} \Big| \cdot (2x-1)(3x+1)$

ОДЗ: $(2x-1)(3x+1) \neq 0$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x \neq -\frac{1}{3}$

$(x+1)(3x+1) - 2(2x-1)(3x+1) = (3-x)(2x-1)$

Розкриємо дужки і виконаємо перетворення.

$-7x^2 - x + 6 = 0$

$x_1 = \frac{6}{7}$, $x_2 = -1$

Перевіряємо отримані корені на відповідність ОДЗ.

Відповідь. $\frac{6}{7}$; -1.

Біквадратні рівняння

Біквадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де $a \neq 0$.

Як розв'язати біквадратне рівняння?

Крок 1. Введіть нову змінну $x^2 = t$.

Крок 2. Розв'яжіть утворене квадратне рівняння $at^2 + bt + c = 0$.

Крок 3. Поверніться до змінної x.

Крок 4. Розв'яжіть отримане рівняння та знайдіть корені.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад 2

Розв'яжіть рівняння $x^4 - 3x - 18 = 0$.

Розв'язання

$x^4 - 3x - 18 = 0$, $x^2 = t$ ← Вводимо нову змінну.

$(x^2)^2 - 3x^2 - 18 = 0$

$t^2 - 3t - 18 = 0$ ← Розв'язуємо утворене рівняння.

$t_1 = -3$, $t_2 = 6$ ← Повернемося до змінної x.

$x^2 = -3$, $x^2 = 6$ ← Розв'язуємо отримані рівняння.

Розв'язків немає. $x_1 = -\sqrt{6}$, $x_2 = \sqrt{6}$

Відповідь. $-\sqrt{6}; \sqrt{6}$.

Метод заміни змінної використовують не лише під час розв'язування біквадратних рівнянь. Розглянемо приклад, який ілюструє ефективність цього методу.

Приклад 3

Розв'яжіть рівняння $(x^2 + 6x)(x^2 + 6x - 17) = -16$.

Розв'язання

$(x^2 + 6x)(x^2 + 6x - 17) = -16$, $x^2 + 6x = t$ ← Вводимо нову змінну.

$t(t - 17) = -16$ ← Розв'язуємо утворене рівняння.

$t^2 - 17t + 16 = 0$

$t_1 = 16$, $t_2 = 1$ ← Повернемося до змінної x.

$x^2 + 6x = 16$, $x^2 + 6x = 1$ ← Розв'язуємо отримані рівняння.

$x_1 = -8$, $x_2 = 2$ $x_3 = -3 - \sqrt{10}$, $x_4 = -3 + \sqrt{10}$

Відповідь. $-8; 2; -3 - \sqrt{10}; -3 + \sqrt{10}$.

Попрактикуйтеся

479 Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{x^2 - 7x + 10}{x + 3} = 0$ б) $\frac{4x^2 - 3x - 1}{x - 1} = 0$ в) $\frac{-x^2 - 8x + 12}{36 - x^2} = 0$

г) $\frac{-x^2 + 6x}{x - 11} = \frac{-55}{x - 11}$ д) $\frac{3x^2 + 3}{3x - 1} = \frac{10x}{3x - 1}$ е) $\frac{x^2 + 6x}{x - 1} = \frac{13 - 6x}{x - 1}$

ж) $\frac{x^2 - 3x}{x + 4} = \frac{20 + 5x}{x + 4}$ и) $\frac{6x^2 + 2x}{1 - x} = 5$ к) $\frac{3 - x}{x} = \frac{6 - 2x}{x + 3}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

480 Знайдіть корені рівняння.

Заповнивши таблицю літерами, які позначають числа, у вказаному порядку, дізнаєтеся назву твору Івана Котляревського, після видання якого українська мова була прирівняна до літературної мови. Івана Котляревського вважають основоположником нової української мови.

а) $18-\frac{5}{x^2}=\frac{9}{x}$ б) $\frac{9}{x}-\frac{1}{x-3}=1$ в) $\frac{8x^2-10x+3}{4x^2-1}=0$

г) $\frac{3x^2+8x-3}{9x^2-6x+1}=0$ д) $\frac{x^2+7x+12}{2x^2+6x}=0$ е) $\frac{x^2+14x-32}{x^2+13x-48}=0$

Ї -3 Е $-\frac{1}{3};\frac{5}{6}$ А 2 Д -4

Е $0{,}75$ Н коренів немає

а)	б)	в)	г)	д)	е)

481 Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{-2x-4}{x^2-4}=\frac{x+5}{x-2}$ б) $\frac{(x^2-x-56)(x-3)}{x^2+4x-21}=0$

в) $\frac{x-2}{x+4}+\frac{x+2}{x-4}=\frac{14x-8}{x^2-16}$ г) $\frac{4}{(x-7)^2}-\frac{1}{x+7}=\frac{3}{x^2-49}$

д) $\frac{6}{x^2-8x+15}+\frac{x}{x-3}=\frac{x}{x-5}$ е) $\frac{4}{x+1}=\frac{6}{x^2-x+1}=\frac{2(x-5)}{x^3+1}$

482 Випишіть лише біквадратні рівняння і розв'яжіть їх.

а) $x^4+x^2-2=0$ б) $6x^2+19x-7=0$ в) $x^4-3x^2+2=0$

г) $x^2+12x-13=0$ д) $x-2x^2-4=0$ е) $-7x^2+10x^4-3=0$

483 Розв'яжіть біквадратні рівняння.

Установіть відповідність між рівнянням та його коренями. Так ви дізнаєтеся назву одного з найдавніших міст України, у якому билися українські козаки, зароджувалася народна творчість, створювалися знамениті твори української літератури.

а) $x^4-3x^2-4=0$ б) $x^4-10x^2+9=0$ в) $2x^4-x^2-3=0$

г) $3x^4-14x^2-5=0$ д) $4x^4-9x^2+2=0$ е) $9x^4-6x^2+1=0$

ж) $x^4-17x^2+16=0$

А $\pm 0{,}5;\pm\sqrt{2}$ А $\pm 4;\pm 1$ Л $\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

О $\pm 1;\pm 3$ В $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ Т $\pm\sqrt{5}$ П ± 2

а)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

484 Розв'яжіть рівняння.

а) $10x = 5\sqrt{x} + 0{,}6$ б) $x - 8\sqrt{x} - 9 = 0$ в) $81x - 18\sqrt{x} = -1$

г) $2x - 3 = -5\sqrt{x}$ д) $2x = 5\sqrt{x} - 2$ е) $6\sqrt{x} - 27 + x = 0$

$x = (\sqrt{x})^2$, $x \geq 0$

485 Знайдіть корені рівняння.

а) $(x^2 - 2)^2 - 8(x^2 - 2) + 7 = 0$ б) $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) - 12 = 0$

в) $(2x - 19)^2 - 5(2x - 19) + 4 = 0$ г) $(x^2 - 8x)^2 + 20(x^2 - 8x) + 64 = 0$

д) $(5x + 1)^2 + 4(5x + 1) + 3 = 0$ е) $(x - 4)^4 + 2(x - 4)^2 - 8 = 0$

486 Розв'яжіть рівняння.

а) $(x^2 + 3x - 5)^2 - 4(x^2 + 3x - 5) - 5 = 0$ б) $(x^2 + 2x)(x^2 + 2x + 2) = 15$

в) $(x^2 - 3x)(x^2 - 3x - 3) = -4$ г) $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x - 1) = 12$

д) $(x^2 - x - 1)(x^2 - x) = 30$ е) $6 + x^2 - 5x^3 - 30x = 0$

487 Знайдіть усі значення змінної x, при яких значення виразів $\frac{x^2 - 18}{x - 2}$ і $\frac{7x}{2 - x}$ дорівнюють одне одному.

488 Знайдіть усі значення змінної x, при яких значення виразів $\frac{x^2 + 10}{x - 8}$ і $\frac{12x + 48}{x - 8}$ дорівнюють одне одному.

489 При якому значенні x сума дробів $\frac{4}{x - 3}$ і $\frac{x}{x + 7}$ дорівнює їх добутку?

490 При якому значенні змінної:

а) різниця дробів $\frac{60}{x}$ і $\frac{60}{x + 10}$ дорівнює $\frac{1}{5}$;

б) значення дробу $\frac{48}{14 - x}$ на 1 більше за значення дробу $\frac{48}{14 + x}$?

491 Придумайте, запишіть та розв'яжіть рівняння:

а) права частина якого дорівнює 3, а ліва — різниця виразів $\left(\frac{x - 1}{x + 2}\right)^2$ і $\left(\frac{x - 1}{x + 2}\right)$;

б) ліва частина дорівнює сумі виразів $\left(\frac{x^2 + 6}{x}\right)^2$ і $12\left(\frac{x^2 + 6}{x}\right)$, а права — (-35);

в) права частина дорівнює -2, а ліва — різниця виразів $\left(\frac{2x + 1}{x - 3}\right)^2$ і $3\left(\frac{2x + 1}{x - 3}\right)$;

г) ліва частина дорівнює сумі виразів $\frac{2}{x^2 + 2x + 4}$ і $\frac{3}{x^2 + 2x + 2}$, а права — виразу $\frac{6}{x^2 + 2x + 3}$.

492 (*) Розв'яжіть рівняння методом заміни змінної.

а) $\left(\frac{3x - 2}{x}\right)^2 + \left(\frac{x}{3x - 2}\right)^2 = 2$ б) $\frac{x^2 + 3x + 8}{x} + \frac{9x}{x^2 + 3x + 8} = 10$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

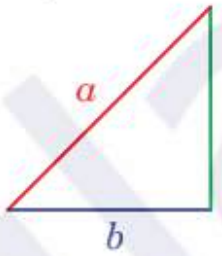
5

5.6. Формули. Вираження однієї змінної через іншу

Термін «формула» походить від латинського слова formula — зменшене від forma — правило.

Формули пов'язують дві або більше змінних. Часто виникає потреба виразити одну змінну через іншу. Наприклад, маємо формулу теореми Піфагора $a^2 = b^2 + c^2$, де a — гіпотенуза, b, c — катети, і потрібно знайти невідомий катет c. Отже,

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$-c^2 = b^2 - a^2$$
$$c^2 = a^2 - b^2$$
$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$



$P = 2(a + b)$ — периметр прямокутника;
$P = 4a$ — периметр квадрата

Формули площі
- круга: $S = \pi r^2$
- квадрата: $S = a^2$
- прямокутника: $S = a \cdot b$
- трикутника: $S = \frac{1}{2} a \cdot h$

$s = v \cdot t$ — формула шляху

Приклад 1

За формулою об'єму конуса $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$:

а) знайдіть h; б) знайдіть r;

в) обчисліть значення r, якщо $h = 9$ і $V = 21$. Результат округліть до сотих.

Розв'язання

а) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$3V = \pi r^2 h$

$\frac{3V}{\pi r^2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r^2}$

$h = \frac{3V}{\pi r^2}$

б) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

$3V = \pi r^2 h$

$\frac{3V}{\pi r^2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi r^2}$

$r^2 = \frac{3V}{\pi h}$

$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}}$

в) $r = \sqrt{\frac{3V}{\pi h}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 21}{3{,}14 \cdot 9}} = \sqrt{\frac{63}{28{,}26}} = 1{,}49$

Попрактикуйтеся

493 За формулою шляху $s = v \cdot t$ знайдіть:
а) швидкість v; б) час t.

494 За формулою продуктивності праці $P = \frac{A}{t}$ знайдіть:
а) час t; б) роботу A.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

495 Виразіть a з формули площі квадрата $S = a^2$. Тоді обчисліть значення a, якщо:

а) $S = 25$; б) $S = 0{,}09$; в) $S = 324$; г) $S = 160\,000$.

496 Виразіть h з формули індексу маси людини $I = \frac{m}{h^2}$. Обчисліть значення h, якщо:

а) $I = 18$, $m = 46{,}08$; б) $I = 19$, $m = 42{,}75$; в) $I = 20$, $m = 57{,}8$.

497 Виразіть m з формули $p = \frac{1}{2}q\sqrt{m}$. Тоді обчисліть значення m, якщо $p = 56$ і $q = 8$.

498 Виразіть x з формули $c = 4k\sqrt{\frac{2}{x}} - 6d$. Тоді обчисліть значення x, якщо $k = 9$, $d = 5$ і $c = 2$. Результат округліть до сотих.

499 Із формули виразіть змінну:

а) c, якщо $k = \frac{a-b}{c-d}$; б) x, якщо $y = \sqrt{x+6}$; в) r, якщо $t = r^2v - 2u$.

500 Якщо тіло падає вниз і початкова швидкість падіння дорівнює v м/с, то відстань, яку воно пролетить за t с, обчислюють наближено за формулою $h = vt + 5t^2$.

а) Виразіть із цієї формули початкову швидкість та обчисліть її, якщо $h = 200$ м, $t = 2$ с.

б) Виразіть із цієї формули t, якщо $v = 0$, та обчисліть значення, якщо $h = 1125$ м.

501 Виразіть з формули $R = k \cdot l + 2$ довжину l. Тоді обчисліть значення l та розташуйте в порядку зростання. Так ви дізнаєтеся назву найглибшого озера в Україні, яке розташоване у Волинській області.

В	$R = 10$, $k = 11$	Ь	$R = -12$, $k = -0{,}5$	Т	$R = 12$, $k = 3$
С	$R = 20{,}5$, $k = -2{,}5$	І	$R = 11$, $k = 12$	Я	$R = 18$, $k = 4{,}5$
З	$R = -25$, $k = -1{,}5$				

502 Виразіть x з формули $A = \frac{12x}{bc}$. Тоді обчисліть значення x за відомими A, b та c і дізнайтеся, скільки цукру міститься в напоях.

а) $A = 192$, $b = 5$, $c = 0{,}2$ — стільки чайних ложок цукру у 600 мл газованих напоїв;

б) $A = 30$, $b = 8$, $c = 0{,}5$ — стільки чайних ложок цукру у 350 мл фруктових соків;

в) $A = 900$, $b = 2$, $c = 0{,}1$ — стільки чайних ложок цукру у 750 мл спортивних напоїв;

г) $A = 540$, $b = 0{,}4$, $c = 0{,}8$ — стільки чайних ложок цукру у 350 мл енергетику.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

5

5.7. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь

Квадратні рівняння можна використовувати як модель для розв'язування сюжетних і прикладних задач.

Як розв'язати задачу за допомогою квадратного рівняння?

Крок 1. Прочитайте умову та визначте невідому величину.

Крок 2. Позначте невідому величину буквою, наприклад x.

Крок 3. Виразіть інші величини через x, складіть вираз за умовою задачі.

Крок 4. Складіть рівняння на основі виразу й умов задачі, розв'яжіть його.

Крок 5. Перевірте отриманий результат на відповідність ОДЗ та умові задачі.

Крок 6. Запишіть відповідь щодо шуканих величин.

$P = 2(a + b)$ — периметр прямокутника;

$a = \frac{P}{2} - b$ — сторона прямокутника

Задачі геометричного змісту

Приклад 1

Периметр прямокутника дорівнює 34 см, а площа — 60 см^2. Знайдіть сторони прямокутника.

Розв'язання

Нехай x см — ширина прямокутника, тоді $(17 - x)$ см — довжина прямокутника.

Складемо рівняння, використовуючи формулу площі прямокутника:

$x(17 - x) = 60$

$17x - x^2 - 60 = 0$

Знайдемо корені: $x_1 = 5$ (см), $x_2 = 12$ (см).

Підставимо отримані значення x, щоб знайти довжину: $17 - 5 = 12$ (см), $17 - 12 = 5$ (см).

Відповідь. 5 см і 12 см; 12 см і 5 см.

$S = a \cdot b$ — площа прямокутника

$s = v \cdot t$

Задачі на рух

Приклад 2

Дві вантажівки здійснювали перевезення сої та кукурудзи з Рівного в Одесу. Вони виїхали одночасно та мали подолати відстань 720 км. Швидкість вантажівки із соєю була на 10 км/год більшою за швидкість вантажівки з кукурудзою, тому вона прибула в Одесу на 1 годину раніше. Знайдіть швидкості обох вантажівок.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Розв'язання

Нехай x км/год — швидкість вантажівки з кукурудзою, тоді $(x + 10)$ км/год — швидкість вантажівки із соєю. Запишемо умову задачі у вигляді таблиці:

	s, км	v, км/год	t, год
Вантажівка з кукурудзою	720	x	$\frac{720}{x}$
Вантажівка із соєю	720	$x + 10$	$\frac{720}{x + 10}$



Складемо рівняння: $\frac{720}{x} - \frac{720}{x + 10} = 1$.

Знайдемо його корені: $x_1 = -90$, $x_2 = 80$.
Перший корінь не відповідає змісту задачі, тому швидкість вантажівки з кукурудзою — 80 км/год, а швидкість вантажівки із соєю: $80 + 10 = 90$ (км/год).
Відповідь. 80 км/год, 90 км/год.

Задачі на спільну роботу

Приклад

3 Дві фірми, працюючи одночасно, поставили в школи Черкас певну кількість інтерактивних дошок за 4 дні. Перша фірма, що постачає дошки, може зробити це на 6 днів швидше, ніж друга. За скільки днів може виконати цей самий обсяг товаропостачання кожна фірма окремо?

Розв'язання

Швидкість виконання роботи називають продуктивністю праці. Якщо не вказано, який саме обсяг роботи виконується, то цю роботу прийнято позначати одиницею ($A = 1$).

	Робота, A	Час, t	Продуктивність, P
Перша фірма	1	x	$\frac{1}{x}$
Друга фірма	1	$x + 6$	$\frac{1}{x + 6}$
Разом	1	4	$\frac{1}{4}$

$$P = \frac{A}{t}$$
P — продуктивність, A — робота, t — час

Нехай x днів — час виконання замовлення першою фірмою, тоді $(x + 6)$ днів — час виконання замовлення другою фірмою.

Складемо рівняння: $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 6} = \frac{1}{4}$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Знайдемо його корені: $x_1 = -4$, $x_2 = 6$.
Корінь -4 не відповідає змісту задачі, тому перша фірма може виконати замовлення за 6 днів, а друга — за 12 днів.
Відповідь. 6 днів, 12 днів.

Попрактикуйтеся

503 Площа прямокутника дорівнює 675 см^2. Знайдіть ширину прямокутника, якщо одна зі сторін на 12 см менша від іншої.

504 Дитячий майданчик має форму прямокутника, площа якого дорівнює 98 м^2. Одна його сторона на 7 м більша, ніж інша. Яка довжина бордюра навколо дитячого майданчика? Скільки упаковок бордюрної плитки потрібно придбати, якщо в одній упаковці міститься 20 м?

505 Гіпотенуза прямокутного трикутника на 2 см більша за один катет і на 4 см більша за інший катет. Знайдіть гіпотенузу трикутника.

506 Наталя вирішила доповнити інтер'єр вітальні дзеркалом, але єдине місце, де вона могла його повісити, має розміри 1,75 м × 2,4 м. Продавчиня антикварної лавки повідомила, що довжина рамки дзеркала дорівнює 8 м, а площа — 3,75 м^2. Чи підійде це дзеркало для вітальні Наталі?

507 З Рівного до Запоріжжя, відстань між якими 900 км, виїхала родина двома машинами. У першому автомобілі їхали діти й за кермом дідусь, тому вони їхали на 10 км/год повільніше, ніж друга машина. До Запоріжжя машина з дітьми приїхала на 1 год пізніше за другу машину. Знайдіть швидкості обох автомобілів.

508 Устим проїхав до бабусі на велосипеді 15 км з Кропивницького до села Високі Байраки з певною швидкістю. Повертаючись додому, у Кропивницький, він збільшив швидкість на 3 км/год, і тому на шлях витратив на 15 хв менше. З'ясуйте швидкість, з якою Устим їхав до бабусі.

1 год = 60 хв,
1 хв = $\frac{1}{60}$ год

509 Для завершення будівництва житлового комплексу двом бригадам залишилося виконати певну частину роботи. Якщо вони будуть працювати разом, то виконають це завдання за 16 годин. Скільки годин потрібно на виконання кожній бригаді окремо, якщо першій потрібно на 24 години менше, ніж другій?

510 Емма і Валерія вирішили прикрасити подвір'я школи квітами. Емма вирішила висадити 120 цибулин тюльпанів, а Валерія — 144 цибулини крокусів. Валерія щогодини висаджувала на 4 цибулини більше, ніж Емма, і працювала на 3 години менше. Скільки кожна дівчина висаджувала квітів за одну годину?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

511 Швидкісний теплохід «Ракета», що курсував з Києва до Канева, проходив за течією річки Дніпро 186 км і 116 км проти течії, витрачаючи на це 5 год. Знайдіть власну швидкість теплохода, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год.



512 В аквапарку потрібно було наповнити водою два басейни об'ємом 360 м^3 і 480 м^3. Насос, що наповнював перший басейн, перекачував щогодини на 10 м^3 води менше, ніж той, що наповнював другий басейн, і працював на 2 год довше. Менеджеру потрібно з'ясувати продуктивність насосів. Дізнайтеся, який об'єм води перекачує кожен насос за годину.

513 Басейн туристичного комплексу наповнюється двома насосами за 12 годин. Перший насос більш потужний і може наповнити басейн, працюючи сам, на 10 год швидше, ніж другий. За скільки годин другий насос наповнить басейн, працюючи самостійно?

514 Під час жнив одному комбайну для завершення роботи потрібно на 5 днів більше, ніж другому. Якщо вони разом розпочнуть працювати, то за 4 дні виконають $\frac{2}{3}$ усієї роботи. Визначте, за який час кожен з них виконає такий самий обсяг роботи, працюючи самостійно.



515 Для наповнення водою басейну спортивної школи потрібно на 1 год менше, ніж для зливу води. Якщо ж відкрити трубу для наповнення і не закривати злив, то басейн наповниться за 42 год. За скільки годин можна наповнити порожній басейн при закритому спуску?

516 Автобус мав проїхати з Вінниці до Чернігова, відстань між якими 400 км, із запланованою швидкістю. Проїхавши 2 год, він був змушений зробити технічну зупинку на 20 хв. Щоб прибути до Чернігова вчасно, він збільшив швидкість руху на 10 км/год. З якою швидкістю автобус мав проїхати відстань між містами?

517 Карпатський трамвай проходить єдиним в Україні екскурсійним маршрутом по вузькоколійній залізниці. Довжина маршруту — 65 км, запланована тривалість подорожі — 2 год. Перші 25 км трамвай рухався із запланованою швидкістю, але через те, що туристи і туристки затрималися на зупинці, машиніст збільшив швидкість на 15 км/год і з такою швидкістю проїхав весь шлях, що залишився. З якою швидкістю мав їхати трамвай?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

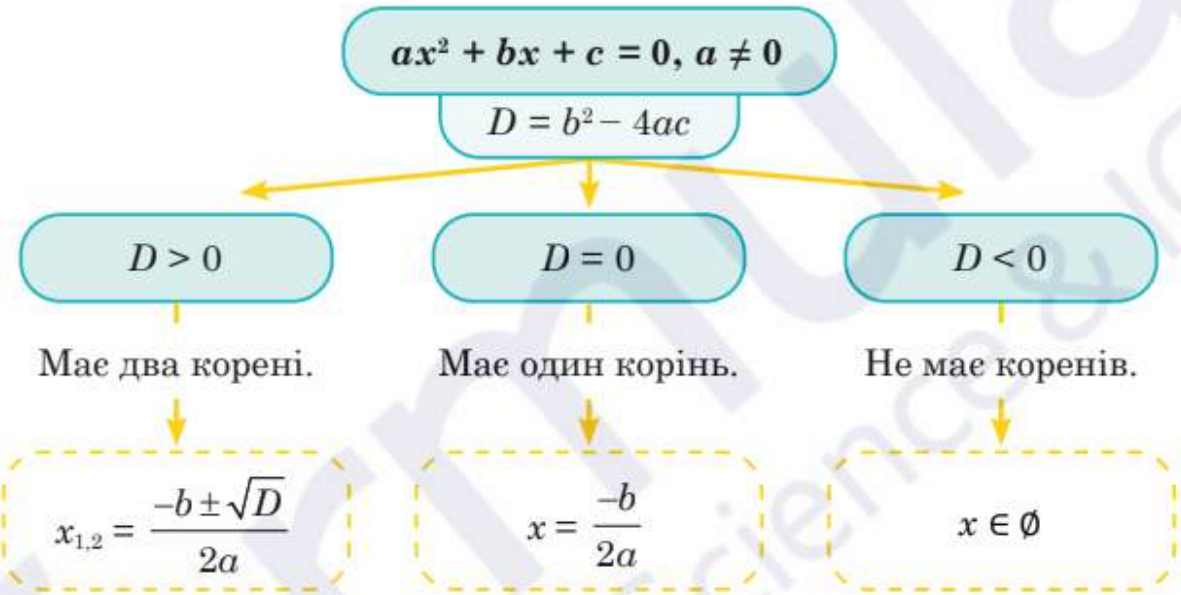
Короткий огляд розділу

1 **Квадратним рівнянням** називається рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна, a, b і c — коефіцієнти, причому $a \neq 0$.



2 Методи розв'язування квадратних рівнянь:

- **Формула дискримінанта**



- **Теорема Вієта**

Теорема Вієта	
Для **зведеного** квадратного рівняння	Для **незведеного** квадратного рівняння
Якщо x_1 і x_2 — корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -b,\quad x_1 \cdot x_2 = c$.	Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

3 **Квадратним тричленом** називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

4 **Теорема про розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.** Якщо x_1 і x_2 — корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$, то правильно, що $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

5 **Біквадратним рівнянням** називають рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де $a \neq 0$. Такі рівняння розв'язуються методом введення нової змінної.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Перевірте свої досягнення

1 Яке з рівнянь не є квадратним?

а) $8x^2 + 7x + 12 = 0$ б) $6x^2 = 0$ в) $3x^3 - 2x^2 + 5 = 0$ г) $2x - 10x^2 = 0$

2 Розв'яжіть рівняння $8x^2 + 13 = 0$.

а) $-\frac{13}{8}$ б) $\frac{13}{8}$ в) $-\sqrt{\frac{13}{8}}; \sqrt{\frac{13}{8}}$ г) коренів немає

3 Знайдіть суму коренів рівняння $x^2 + 4x - 5 = 0$.

а) 4 б) -4 в) -5 г) 5

4 Яке з чисел є коренем квадратного рівняння $x^2 + 4x + 4 = 0$?

а) $x = -2$ б) $x = 2$ в) $x = 3$ г) $x = 4$

5 Скільки коренів має рівняння $9x^2 - 12x + 4 = 0$?

а) два корені б) коренів немає в) один корінь г) три корені

6 Розкладіть на лінійні множники квадратний тричлен $-2x^2 + 3x + 5$.

а) $-2(x - 1)(x + 2{,}5)$ б) $-2(x + 1)(x - 2{,}5)$
в) $2(x + 1)(x - 2{,}5)$ г) $-2(x + 1)(x + 2{,}5)$

7 Скоротіть дріб $\frac{x^2 - 2x - 3}{x + x - 12}$.

а) $\frac{x - 1}{x - 4}$ б) $\frac{x - 1}{x + 4}$ в) $\frac{x + 1}{x - 4}$ г) $\frac{x + 1}{x + 4}$

8 Знайдіть усі значення змінної x, при яких значення виразів $\frac{2x - 3}{x + 2}$ та $\frac{x}{x + 6}$ дорівнюють одне одному.

а) $-2; -9$ б) $-2; 9$ в) $-9; 2$ г) $-2; -6$

9 Розв'яжіть рівняння $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$.

а) $-2; 2$ б) $-2; 2; -3; 3$ в) $-3; 3$ г) коренів немає

10 Виразіть a з формули $x = vt + \frac{1}{2}at^2$.

а) $a = \frac{2x - 2vt}{t^2}$ б) $a = \frac{2x - 2v}{t}$ в) $a = \frac{x - vt}{2t^2}$ г) $a = \frac{x - v}{2t}$

11 Для виготовлення яблучного соку планувалося перевезти 216 т яблук за кілька рейсів. Але через несправність вантажівки довелося використати іншу машину, вантажопідйомність якої була на 6 т меншою. Унаслідок цього для перевезення всіх яблук знадобилося на 3 рейси більше, ніж планувалося. Знайдіть вантажопідйомність нової машини.

а) 24 т б) 18 т в) 12 т г) 9 т

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Проєктна робота «Методи розв'язування квадратних рівнянь»

Крок ① Об'єднайтеся у 3 групи шляхом жеребкування. Розподіліть обов'язки.

Крок ② Кожній групі необхідно ознайомитися з одним із методів розв'язання квадратних рівнянь та виконати завдання.

Група 1. Застосування властивостей коефіцієнтів

Властивості коефіцієнтів квадратного рівняння застосовують за умови, що рівняння має два розв'язки, тобто дискримінант є додатним.

Якщо сума коефіцієнтів квадратного рівняння дорівнює 0, то перший корінь дорівнює 1, а другий є часткою вільного члена і першого коефіцієнта	Якщо сума першого коефіцієнта і вільного члена дорівнює другому коефіцієнту, то перший корінь дорівнює –1, а другий є протилежним числом до частки вільного члена і першого коефіцієнта
Якщо $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$	Якщо $a + c = b$, то $x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$
$x^2 - 8x + 7 = 0$ $1 + (-8) + 7 = 0$, то $x_1 = 1, x_2 = 7$	$x^2 - 8x - 9 = 0$ $1 + (-9) = -8$, то $x_1 = -1, x_2 = 9$

1 З натуральних чисел першого десятка та протилежних до них чисел оберіть коефіцієнти для квадратного рівняння, у якого:
а) $a + b + c = 0$; б) $a + c = b$.

Зразок

$3x^2 + 5x - 8 = 0$,
$3 + 5 + (-8) = 0$, то
$x_1 = 1, x_2 = -\frac{8}{3}$

$5x^2 - 3x - 8 = 0$,
$5 + (-8) = -3$, то
$x_1 = -1, x_2 = \frac{8}{5}$

2 Для природного освітлення на горищах будинків у фасадах роблять вікна у формі прямокутного трикутника, один із катетів якого на 41 см більший за інший, а гіпотенуза дорівнює 85 см. Обчисліть площу склопакета для такого вікна.

Група 2. Метод «перекидання»

Метод передбачає «перекидання» коефіцієнта a до коефіцієнта c та утворення зведеного квадратного рівняння.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Загальний вигляд	Приклад
Розглянемо квадратне рівняння:	
$ax^2 + bx + c = 0$	$2x^2 - 3x - 5 = 0$
Помножимо a на коефіцієнт c:	
$y^2 + by + ac = 0$	$y^2 - 3y - 10 = 0$, $D > 0$
Для подальшого розв'язання використаємо теорему, обернену до теореми Вієта:	
$y_1 + y_2 = -b,\ y_1 \cdot y_2 = ac$	$y_1 + y_2 = -3,\ y_1 \cdot y_2 = 10$ $y_1 = 5,\ y_2 = -2$
Тоді знайдені корені рівняння слід поділити на коефіцієнт a:	
$x_1 = \frac{y_1}{a},\ x_2 = \frac{y_2}{a}$	$x_1 = 2{,}5,\ x_2 = -1$

1 Розв'яжіть квадратні рівняння способом «перекидання» коефіцієнта.

а) $5x^2 - 4x - 9 = 0$ б) $2x^2 - x - 2 = 0$ в) $3x^2 - 5x + 9 = 0$

2 Добуток дат народження батьків Адама дорівнює 552. Знайдіть дати народження батьків Адама, якщо вони святкують свої дні народження два дні поспіль, але тато на один день молодший за маму.

Група 3. Метод розкладання на множники

Метод розкладання на множники передбачає зведення квадратного рівняння загального вигляду до рівняння $A(x) \cdot B(x) = 0$, де $A(x)$, $B(x)$ — многочлени відносно x. Тоді кожен із множників прирівнюють до 0. Маємо рівняння: $x^2 + 10x - 24 = 0$. Розкладемо ліву частину на множники:

$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2)$.

$(x + 12)(x - 2) = 0$

$x + 12 = 0$ або $x - 2 = 0$

$x = -12$ $x = 2$

Відповідь. -12 і 2.

1 Розв'яжіть квадратні рівняння, розклавши ліву частину на множники.

а) $x^2 - 10x + 9 = 0$ б) $x^2 - 5x + 4 = 0$ в) $x^2 - 9x + 8 = 0$

2 Знайдіть площу складського приміщення прямокутної форми, у якому діагональ підлоги дорівнює 29 м, а одна із сторін на 1 м більша за іншу.

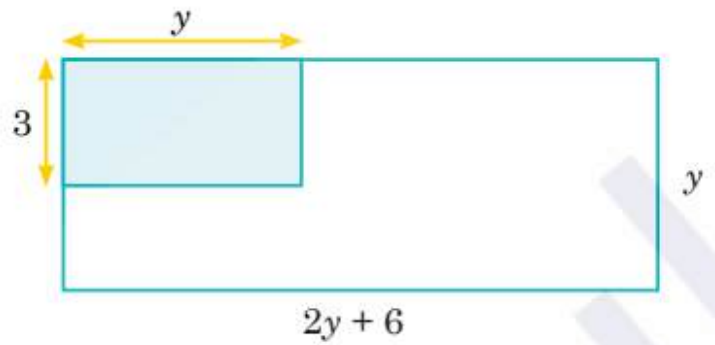
Крок ③ Продемонструйте класу свої сторінки підручника та розкажіть про метод розв'язування квадратних рівнянь, який опрацьовувала ваша група.

Крок ④ Обговоріть у групах підсумки проєкту. Чи корисною була отримана інформація? Що найбільше сподобалося? Які труднощі викликали ? Над чим варто попрацювати?

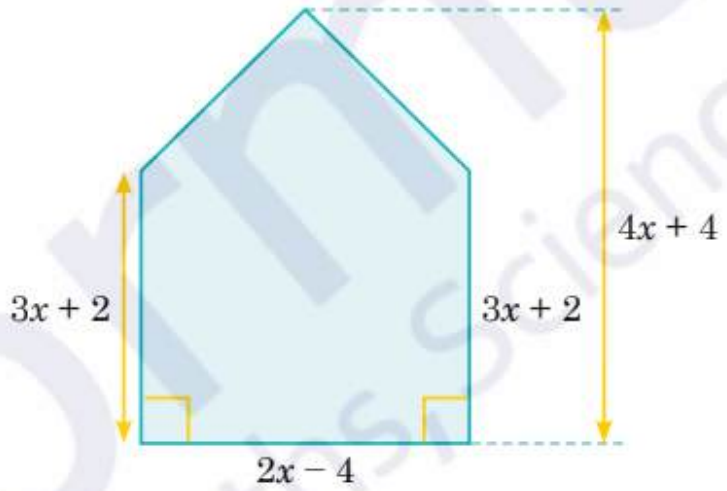
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Додаткові завдання до розділу

518 Доведіть, що площа незафарбованої фігури дорівнює $(2y^2 + 3y)$ см^2. Знайдіть значення y, якщо площа незафарбованої фігури дорівнює 104 см^2. Наведений нижче рисунок виконано схематично.



519 Доведіть, що площа шестикутника дорівнює $(7x^2 - 8x - 12)$ см^2. Знайдіть значення x, якщо площа шестикутника дорівнює 3 см^2. Наведений нижче рисунок виконано схематично.



520 EN Write an equation whose roots are $x = 2$ or $x = -9$.

521 EN Solve the problem.
The length of a rectangle is $(x + 2)$ cm and its width is $(2x - 5)$ cm. Find x if its area is $(x + 2)$ cm^2.

522 EN Is the solution of the quadratic equation correct? Explain your thinking.

$(7x - 6)^2 = (4x + 1)^2$
$7x - 6 = 4x + 1$
$7x - 4x = 1 + 6$
$3x = 7$
$x = \frac{7}{3}$

root — корінь рівняння
length — довжина
width — ширина
area — площа
solution — розв'язання

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

6

Функції

Функції відіграють важливу роль у нашому житті, адже показують залежність між змінними.Функції використовуються в різних галузях, як-от інформатика, біологія, економіка, фізика, і навіть у повсякденному житті. Наприклад, заробітна плата залежить від кількості відпрацьованих годин, розпад радіоактивних елементів залежить від часу і швидкості розпаду, кількість насіння для вирощування врожаю пшениці залежить від площі землі. Також функцією є залежність маси малюків від віку, залежність температури повітря від часу, залежність між вартістю купленого товару та його кількістю тощо.

У цьому розділі ми:

- повторимо означення функції, її властивості та способи задання;
- повторимо загальний вигляд лінійної функції та побудуємо її графік;
- ознайомимося із функцією $y = \frac{k}{x}$, розглянемо її основні властивості та побудуємо графік;
- ознайомимося із функцією $y = x^2$, розглянемо її основні властивості та побудуємо графік;
- ознайомимося із функцією $y = \sqrt{x}$, розглянемо її основні властивості та побудуємо графік.

Ключові слова

- Функція (*function*)
- Незалежна змінна (*independent variable*)
- Залежна змінна (*dependent variable*)
- Область визначення (*domain*)
- Область значень (*codomain*)
- Лінійна функція (*linear function*)
- Парабола (*parabola*)
- Точка перетину (*turning point*)

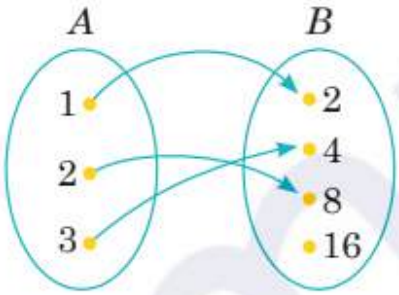
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій інший формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

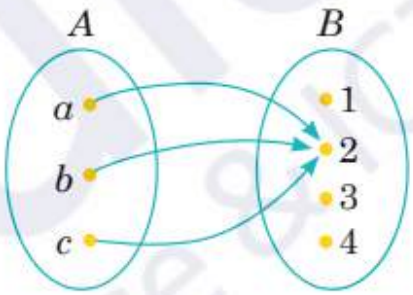
6 Функції

6.1. Повторення функцій

Слово «функція» походить від латинського слова functio — виконання, здійснення.

Функція — це правило, що показує залежність між множинами A і B, де кожному елементу з множини A відповідає ***єдиний*** елемент з множини B. Але не кожному елементу множини B обов'язково потрібна відповідність елементу в множині A. На діаграмах нижче наводимо приклади таких залежностей.





Не кожна залежність однієї множини від другої є функціональною.

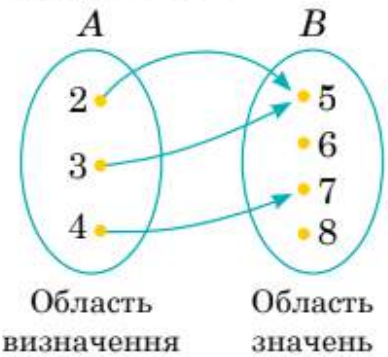
Позначення функції та її властивості

Для позначень функцій (правила) найчастіше використовують літери f, g, h. Якщо змінна y функціонально залежить від змінної x, то це позначають так:

$$y = f(x)$$

залежна змінна (функція) — незалежна змінна (аргумент)

Поміркуйте!
Чи є залежність між людиною та датою її народження функцією?



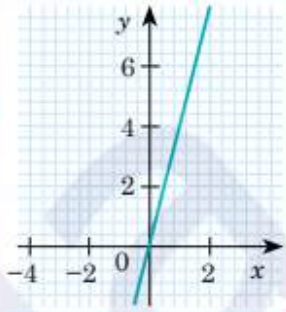
Функцію $y = 2x + 3$ можна записати як $f(x) = 2x + 3$.

Елементи множини A називаються ***незалежною змінною***. Елементи множини B називаються ***залежною змінною***.

Множину A називають ***областю визначення***, $A = \{2; 3; 4\}$. Це всі значення, яких може набувати незалежна змінна (аргумент). Область визначення позначають $D(y)$.

Множину B називають ***областю значень***, $B = \{5; 6; 7; 8\}$. Це всі значення, яких може набувати залежна змінна (функція). Область значень позначають $E(y)$.

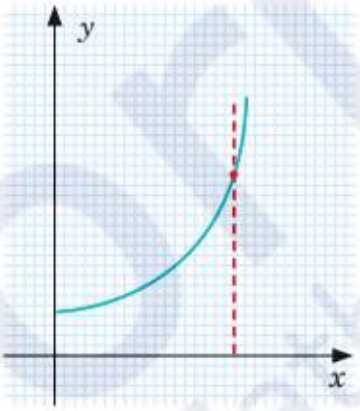
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

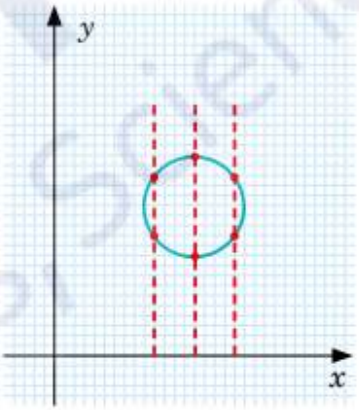
Способи задання функції			
Описовий	Аналітичний	Табличний	Графічний
За допомогою словесного опису	За допомогою формули	За допомогою таблиці	За допомогою графіка
Кожне значення незалежної змінної помножити на 4	$f(x) = 4x$	x | 1 | 2 | 3 $f(x)$ | 4 | 8 | 12	

Як визначити, чи зображена фігура на координатній площині є графіком функції?

Проведемо вертикальні прямі, перепендикулярні до осі x. Якщо кожна вертикальна лінія проходить лише через одну точку фігури, то можна говорити, що ця фігура задає певну функцію. Якщо є принаймні одна лінія, яка перетинає фігуру в декількох точках, тоді ця фігура не може слугувати графіком функції, оскільки існує принаймні одна координата x, яка відповідає більш ніж одній координаті y.

Функція ✓





Не є функцією ✗

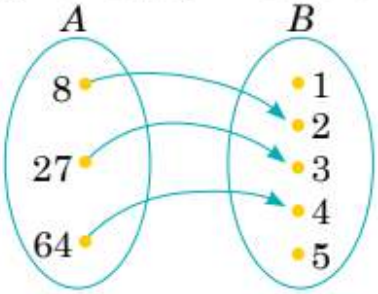
Приклад

1 На діаграмі показано функціональну залежність множин A і B. Укажіть:

а) область визначення; б) область значень;
в) значення аргумента, при якому значення функції дорівнює 2;
г) значення функції, при якому значення аргумента дорівнює 64.

Розв'язання

а) область визначення: {8; 27; 64};
б) область значень: {1; 2; 3; 4; 5};
в) 8;
г) 4.



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

2 Дано функцію $f(x) = 2x + 4$. Знайдіть:

а) значення функції, якщо $x = 0; -3$;

б) значення аргумента, при яких функція дорівнює $-16; 7$.

Розв'язання

а) $f(x) = 2x + 4$

$f(0) = 2 \cdot 0 + 4$

$f(0) = 4$

$f(x) = 2x + 4$

$f(-3) = 2 \cdot (-3) + 4$

$f(-3) = -2$

б) $f(x) = -16$

$2x + 4 = -16$

$2x = -20$

$x = -10$

$f(x) = 7$

$2x + 4 = 7$

$2x = 3$

$x = \frac{3}{2}$

Приклад

3 Знайдіть область визначення функції $y = \frac{4x - 3}{6x + 1}$.

Розв'язання

Область визначення $D(y)$ — це множина всіх значень, яких набуває аргумент функції.

Оскільки вираз $6x + 1$ міститься у знаменнику дробу, то:

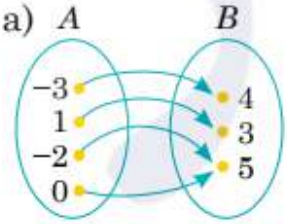
$6x + 1 \neq 0$, $6x \neq -1$, $x \neq -\frac{1}{6}$.

Отже, областю визначення функції будуть усі числа, крім $x = -\frac{1}{6}$.

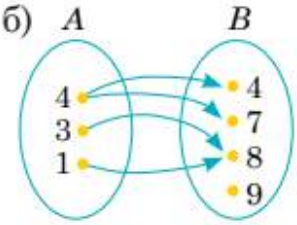
Попрактикуйтеся

523 Визначте, на яких діаграмах зображено функції.

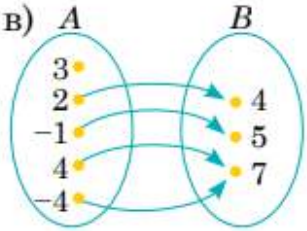
а)



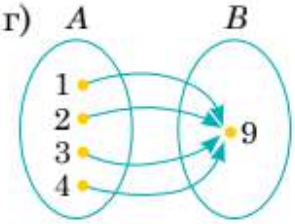
б)



в)



г)



524 Визначте, чи подана відповідність є функцією. Кожному натуральному числу поставлено у відповідність остачу при діленні його на 5.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

525 Для кожної функції заповніть таблицю значень.

а) $f(x) = 3x + 7$

x	-2	-1	0	1
$f(x)$				

б) $g(x) = -\frac{x}{2} + 3$

x	-4	-2	0	2
$f(x)$				

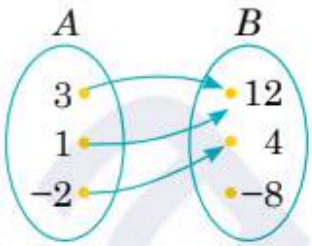
в) $h(x) = 1{,}5x - 4$

x	-7	-3	8	10
$f(x)$				

г) $f(x) = x^2 - 5$

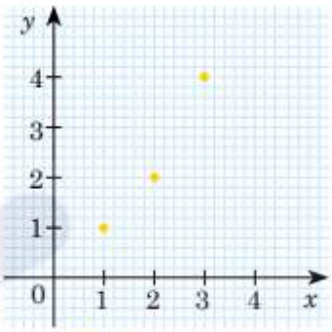
x	-4	-1	0	2
$f(x)$				

526 На малюнку зображено залежність між множинами A і B. Визначте, чи ця залежність є функцією. Якщо так, то знайдіть область визначення та область значень.

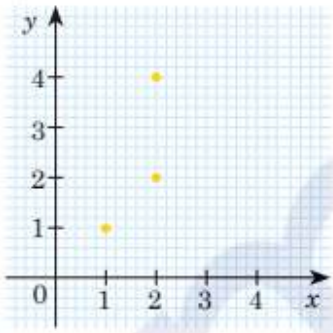


527 Визначте, на якому з графіків зображено функцію.

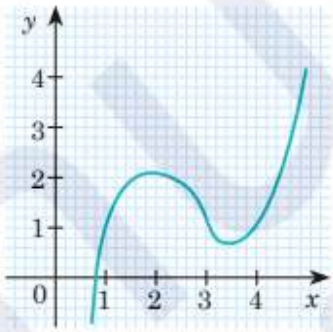
а)



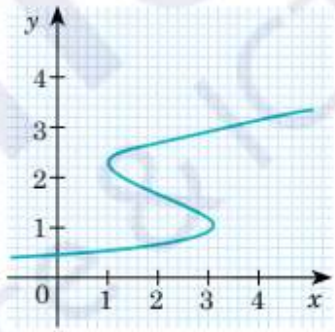
б)



в)



г)



528 Миколаївський морський порт — одне з провідних державних підприємств транспортної галузі України. У 2008 році порт досяг найвищого за роки його існування рівня вантажообігу — 9,2 млн тонн, за що отримав почесний знак «Золота тонна». З порту відбувається експорт зерна з України, яке перевозиться баржею.

У таблиці наведено дані щодо витрат баржею пального протягом плавання.

Час плавання баржі, x (год)	1	2	3	4
Витрати пального, y (л)	45	90	135	180



За даними таблиці:

а) визначте, скільки літрів пального витрачає баржа за 3 год плавання;

б) знайдіть, за скільки годин плавання баржа витрачає 90 л пального;

в) виразіть y через x (вважайте, що витрати пального щогодини не змінюються);

г) визначте за формулою, скільки літрів пального витратить баржа за 7 год плавання;

д) визначте за формулою, за який час баржею буде витрачено 405 л пального.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

529 Знайдіть значення функції $f(x) = x^2 - 1$, якщо $x = 1; -2; \frac{2}{3}; -\frac{7}{5}$.

530 Знайдіть значення аргумента, при яких значення функції $f(x) = -7x$ дорівнює 0; −7; 2; 14.

531 Складіть таблицю значень функції $f(x) = 3x - 6$ для всіх цілих значень $-3 \le x \le 18$ з кроком 3. За таблицею знайдіть:

а) значення функції, якщо аргумент дорівнює −3; 3; 9; 12;
б) значення аргумента, при яких значення функції дорівнює −15; 3; 12; 39.

532 Складіть таблицю значень функції $-\frac{x}{5}$ для всіх цілих значень $-15 \le x \le 20$ з кроком 5. За таблицею знайдіть:

а) значення функції, якщо аргумент дорівнює −10; 0; 5; 15;
б) значення аргумента, при яких значення функції дорівнює −2; −1; 1; 4.

533 Знайдіть область визначення функцій.

а) $y = \dfrac{5}{3 - \frac{3}{x}}$ б) $y = \dfrac{13}{\frac{1}{x} - x}$ в) $y = \dfrac{6}{2 + \frac{8}{x}}$ г) $y = \dfrac{x}{\frac{16}{x} - x}$

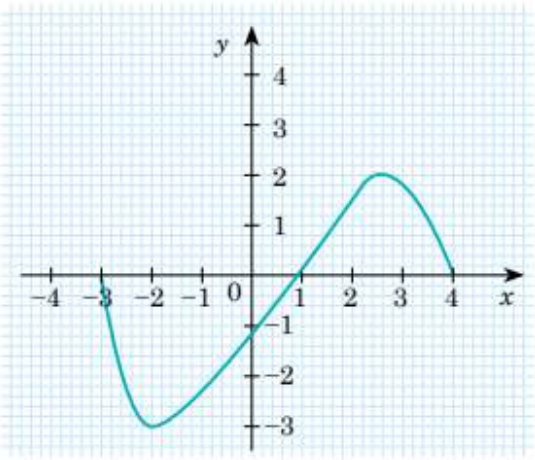
534 Площа квадрата зі стороною a см дорівнює S см^2. Виразіть формулою залежність S від a. Чи задає ця формула функцію? Назвіть залежну та незалежну змінні. Знайдіть за цією формулою S, якщо $a = 4; 13; 2{,}5; \frac{1}{7}$.

535 Лук'ян їде зі школи додому на велосипеді. Він рухається зі швидкістю 12 км/год та долає за t год відстань s км. Задайте формулою залежність s від t. Обчисліть значення функції, якщо значення аргумента дорівнює 1; 3; 6; 7.

536 Юстина друкує на ноутбуці 5 сторінок тексту за 40 хв. Скільки сторінок вона надрукує за 24 хв? Запишіть фомулу, що виражає залежність кількості n надрукованих сторінок від часу t (у хвилинах). Знайдіть значення t, при якому $n = 32$.

537 На рисунку зображено графік функції, визначеної на проміжку $-3 \le x \le 4$. За графіком знайдіть:

а) значення y, якщо $x = -3; -2; 1; 4$;
б) значення x, якщо $y = -3; -1; 2$;
в) нулі функції;
г) значення аргумента, при яких функція набуває додатних значень;
д) значення аргумента, при яких функція набуває від'ємних значень.



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

6.2. Лінійна функція

Функція виду $y = kx + b$, де k і b — дійсні числа, а x — незалежна змінна, називається **лінійною функцією**.

Властивості лінійної функції				
Область визначення	Область значень	Графік лінійної функції	Зростає	Спадає
Множина всіх дійсних чисел	Множина всіх дійсних чисел	Пряма	Якщо $k > 0$	Якщо $k < 0$

Графік лінійної функції

Для побудови графіка лінійної функції достатньо вибрати два довільні значення аргумента і скласти таблицю значень.

Побудуємо графік функції $y = 2x + 4$.

Крок 1. Складемо таблицю значень функції:

x	-2	0
y	0	4

$A(-2; 0)$ — точка перетину з віссю x.

Нуль функції $x = -2$.

Крок 2. Позначимо точки $A(-2; 0)$ і $B(0; 4)$ на координатній площині.

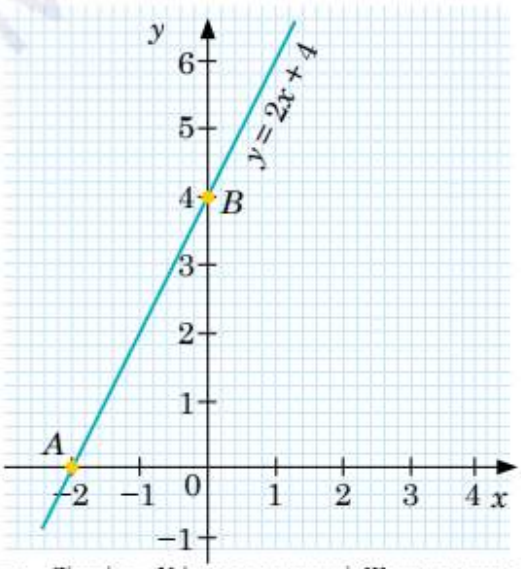
Крок 3. Сполучимо точки прямою лінією та отримаємо графік заданої функції.

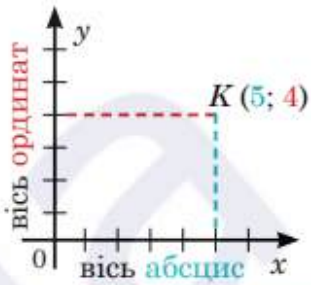
ордината

$y = kx + b$

$y = 2x + 4$

$B(0; 4)$ — точка перетину з віссю y.





Побудова графіка функції у графічному онлайн-калькуляторі GeoGebra

Нулі функції — це значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю, $y = 0$.

Щоб знайти нулі функції, потрібно розв'язати рівняння $f(x) = 0$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій інший формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

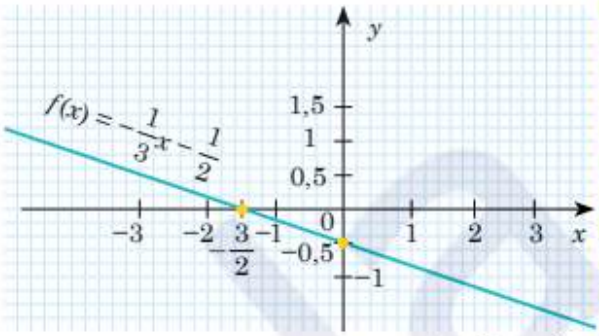
1 Знайдіть точки перетину графіка функції $f(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ з віссю абсцис та віссю ординат. Побудуйте графік цієї функції.

Розв'язання

Спочатку знайдемо нулі функції. Для цього розв'яжемо рівняння $f(x) = 0$.

$$-\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} = 0$$

$$x = -\frac{3}{2}$$



Отже, графік лінійної функції перетинає вісь x в точці $A\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$.

Щоб знайти точку перетину з віссю y, знайдемо значення функції при $x = 0$:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$$

$$f(0) = -\frac{1}{2}$$

Отже, графік лінійної функції перетинає вісь y в точці $B\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$.

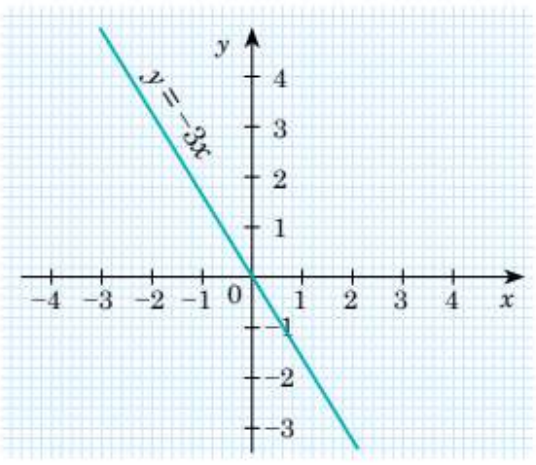
Відповідь. $\left(-\frac{3}{2};\ 0\right)$, $\left(0;\ -\frac{1}{2}\right)$.

Пряма пропорційність

Лінійна функція може набувати вигляду $y = kx$, якщо $b = 0$, $k \neq 0$. Таку функцію називають **прямою пропорційністю**. Це така функціональна залежність між двома величинами, коли зі збільшенням (зменшенням) однієї величини в кілька разів, інша величина збільшується (зменшується) у стільки ж разів.

Функція виду $y = kx$, де x — незалежна змінна та $k \neq 0$, називається **прямою пропорційністю**.

Графіком цієї функції є пряма, яка проходить через початок координат (0; 0).

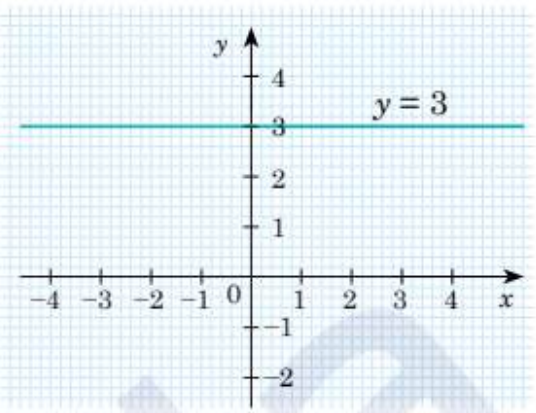


© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Функція виду $y = b$

Якщо $k = 0$, то лінійна функція $y = kx + b$ набуває вигляду $y = b$. Графік такої функції — пряма, паралельна осі абсцис, яка проходить через точку з координатами $(0; b)$.

Наприклад, функція $y = 3$ для всіх значень x набуває значення 3. Тому графік цієї функції — пряма, яка паралельна осі x і проходить через точки $(x; 3)$, де x — будь-яке число.



Попрактикуйтеся

538 Які з наведених функцій є лінійними? Назвіть їхні коефіцієнти k та b.

а) $y = 8x$ б) $y = 12x^2 - 17$ в) $y = 5x + 11$

г) $y = \frac{1}{5}x - 9$ д) $y = -14x$ е) $y = \frac{1}{x} + 12$

539 Виберіть лише ті функції, які є прямою пропорційністю.

З букв, що позначають прямопропорційну функціональну залежність, дізнайтеся назву найкасовішого українського анімаційного фільму. (Примітка: деякі букви можуть використовуватися двічі.)

О	$y = 5$	М	$y = -5x$	Т	$y = -5x + 5$	Е	$y = \frac{5}{x}$	А	$y = \frac{x}{5}$
В	$y = -\frac{x}{5}$	Л	$x = 4$	С	$y = x + 7$	К	$y = \frac{1}{3}x$	Н	$y = 7x + 1$

540 Побудуйте графіки функцій.

а) $y = 6$ б) $y = -3$ в) $y = 2 + x$ г) $y = 2x + 1$ д) $y = -x + 3$

541 Побудуйте в одній координатній площині графіки функцій $y = x - 2$ та $y = 4$. За малюнком знайдіть координати точки перетину графіків.

542 Побудуйте графіки функцій $y = -1$ та $y = 2$ за допомогою графічного онлайн-калькулятора GeoGebra. Чи перетинаються графіки цих функцій?

543 Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{2}x - 2$. За допомогою графіка знайдіть:

а) координати точок перетину графіка з осями координат;

б) значення функції, якщо $x = 2; -2; 4; -4$;

в) значення аргумента, при яких функція дорівнює $0; -5; -1; -2$;

г) значення x, при яких функція набуває додатних значень.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

544 Не виконуючи побудови графіка функції, визначте точки перетину цього графіка з осями координат.

а) $y = x + 12$ б) $y = 15 - x$ в) $y = 3x - 60$ г) $y = -4 - \frac{x}{8}$

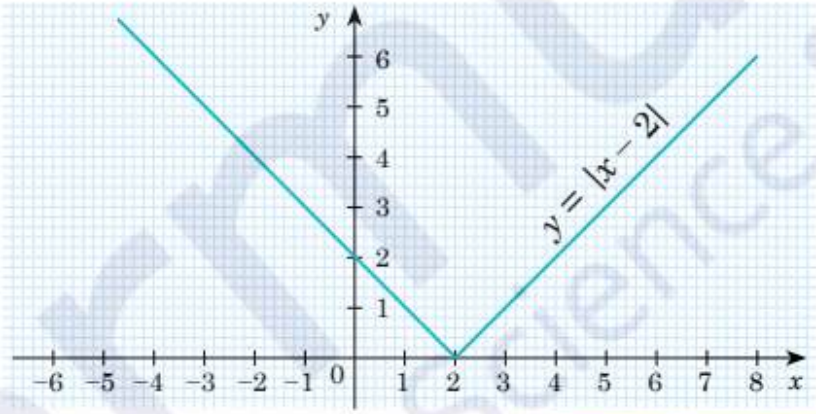
545 Знайдіть нулі функції, не будуючи графік функції:

а) $y = -16x$; б) $y = 4x - 12$; в) $y = \frac{x}{3}$; г) $y = \frac{x-3}{7}$.

546 При якому значенні a графік функції $f(x) = ax + 2$ проходить через точку $A(1; 0)$?

547 На рисунку зображено графік функції $y = |x - 2|$. За допомогою графіка знайдіть:

а) координати точок перетину графіка з осями;
б) область визначення;
в) область значень;
г) значення функції якщо значення аргумента: 2; −1; 3; 5; −4;
д) значення аргумента, при яких значення функції дорівнює: −1; 2; 0; 4.



548 Зелена гречка — багате джерело білка, вітамінів та амінокислот. Ціна кілограма зеленої гречки — 50 грн. Задайте формулою залежність вартості покупки зеленої гречки від маси купленої гречки. Побудуйте графік, якщо в покупця / покупчині є 250 грн.



549 Складіть рівняння лінійної функції, якщо:

а) функціональна залежність змінної y від змінної x є прямою пропорційністю, а її графік проходить через точку $A(-2; 8)$;
б) її графік проходить через точку $B(-1; 0)$ паралельно осі абсцис.

550 Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 6x, \text{ якщо } x \le 1, \\ 6 - x, \text{ якщо } x \ge -2. \end{cases}$

551 За якої умови графіки функцій $y = kx + 1$ і $y = mx - 3$ перетинаються в точці $K(-2; 5)$? Знайдіть значення k та m. Побудуйте в одній системі координат графіки цих функцій.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

6.3. Функція $y = \frac{k}{x}$, її графік та властивості

Розглянемо проблемну ситуацію. Уляна збирає 3000 грн на мрію. Щомісяця вона планує відкладати однакову суму. Нехай x — це сума (у гривнях), яку дівчина планує відкладати щомісяця, а y — час (у місяцях), який необхідний, щоб назбирати всю суму.

Залежність часу, за який Уляна назбирає гроші, від суми, яку вона щомісяця відкладатиме, можна задати формулою $y = \frac{3000}{x}$.

x, грн	500	1000
y, міс.	6	3



Як бачимо, що більшу суму дівчина відкладатиме щомісяця, то менше часу їй потрібно, щоб назбирати всю суму. Таку функціональну залежність між двома величинами називають **обернено пропорційною**. Якщо одна величина збільшується (зменшується) у кілька разів, то й інша величина зменшується (збільшується) у стільки саме разів. Обернену пропорційність задають функцією $y = \frac{k}{x}$.

Обернено пропорційністю називають функцію виду $y = \frac{k}{x}$, де x — незалежна змінна, $k \neq 0$.

Функція виду $y = kx$ — пряма пропорційність.

Поміркуйте!
Яких значень НЕ може набувати незалежна змінна x у функції $y = \frac{k}{x}$?

Побудуємо графік функції $y = \frac{9}{x}$.

Для більш точної побудови графіка функції $y = \frac{k}{x}$ потрібно знайти якомога більше точок.

Крок 1. Складемо таблицю значень функції:

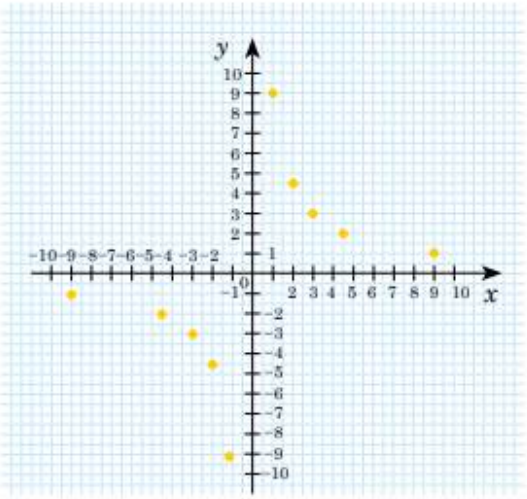
x	-9	$-4{,}5$	-3	-2	-1	1	2	3	$4{,}5$	9
y	-1	-2	-3	$-4{,}5$	-9	9	$4{,}5$	3	2	1

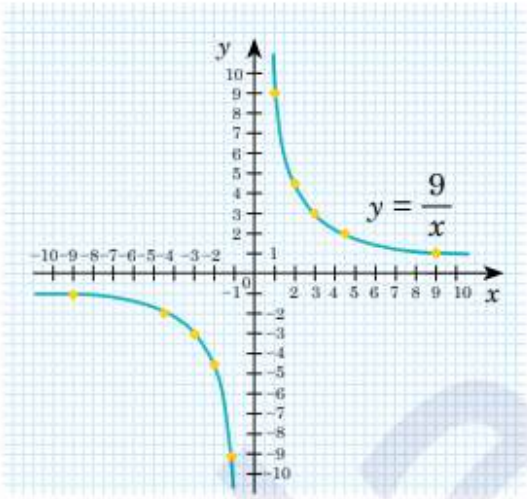
Крок 2. Позначимо точки на координатній площині.

Крок 3. З'єднаємо їх плавною кривою лінією (окремо в I та III чвертях) та отримаємо графік функції $y = \frac{9}{x}$.

Побудова графіка функції $y = \frac{9}{x}$ у графічному онлайн-калькуляторі GeoGebra

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

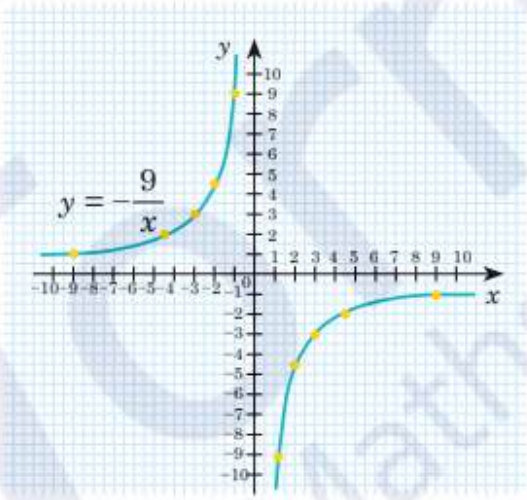




Графіком оберненої пропорційності є **гіпербола**, яка складається з двох частин — віток гіперболи.

Як бачимо, вітки гіперболи все ближче і ближче (необмежено) наближаються до осей координат та не мають точок перетину з осями координат.

Розглянемо графік функції $y = -\frac{9}{x}$.



Побудова графіка функції $y = -\frac{9}{x}$ у графічному онлайн-калькуляторі GeoGebra

Зміна знака коефіцієнта k вплинула на зміну розташування графіка. Тепер вітки гіперболи розташовані у II та IV чвертях.

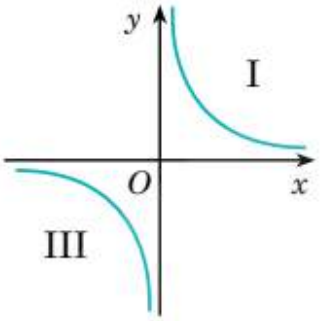
Властивості функції $y = \frac{k}{x}$			
Область визначення	Область значень	Графік	Точки перетину з осями координат
$D(y)$: $x \neq 0$	$E(y)$: $y \neq 0$	Гіпербола	немає
Множина всіх чисел, крім 0	Множина всіх чисел, крім 0	Вітки гіперболи симетричні відносно початку координат	

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Графік функції $y = \frac{k}{x}$

Розташований у I і III чверті

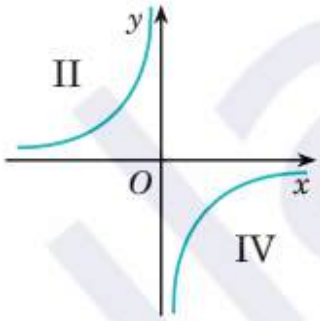
Якщо $k > 0$



Якщо $x > 0 \to y > 0$,
якщо $x < 0 \to y < 0$

Розташований у II і IV чверті

Якщо $k < 0$



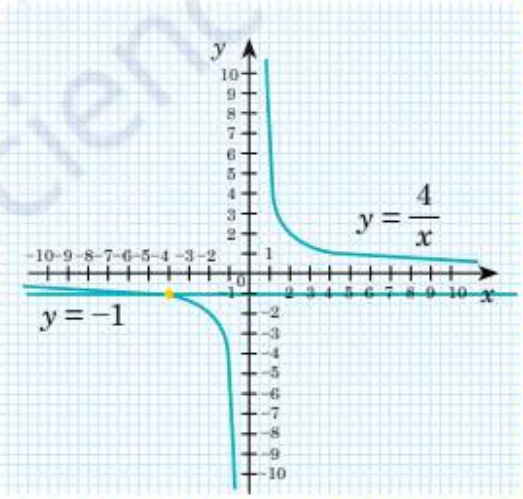
Якщо $x > 0 \to y < 0$,
якщо $x < 0 \to y > 0$

Приклад

1 Розв'яжіть рівняння $\frac{4}{x} = -1$ графічно.

Розв'язання

Побудуємо графіки функцій $y = \frac{4}{x}$ і $y = -1$ в одній системі координат.
Графіки перетинаються в точці $x = -4$.
Отже, розв'язок рівняння: $x = -4$.
Відповідь. –4.



Попрактикуйтеся

552 Виберіть лише ті функції, які є оберненою пропорційністю. Тоді визначте, у яких координатних чвертях розміщені графіки вибраних функцій.

а) $y = \frac{10}{x}$ б) $y = -\frac{x}{10}$ в) $y = -\frac{15}{x}$ г) $y = 15x$ д) $y = \frac{2}{x}$

553 Визначте, чи є функцією залежність швидкості руху від часу. Запишіть формулу для залежності: за t секунд велосипедист подолав 450 м. Якою була його швидкість руху?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

554 Функцію задано формулою $y = -\frac{42}{x}$. Знайдіть:

а) значення функції, якщо значення аргумента дорівнює −2; 0,5; −7; 14;
б) значення аргумента, при якому значення функції дорівнює −21; 0,3; 7; 10,5.

555 Обернену пропорційність задано формулою $y = \frac{120}{x}$.

Заповніть таблицю значень функції та дізнайтеся назву найбільшої картини у світі, площею понад 2000 м². Картина була презентована 2024 року в Луцьку, автор картини — Петро Антип.

x	2		8		5	−15		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{4}$
y		−30		−40			−8		1,2	
Букви										

К	60	С	15	О	−4	О	24	М	−3
О	−15	Г	−8	Н	240	Я	480	І	100

556 Для кожної функції заповніть таблицю значень. Побудуйте графіки цих функцій.

а) $y = -\frac{18}{x}$

x	−6			2	4,5	
y		4	9			−3

б) $y = \frac{16}{x}$

x	−4	−2	1		10	
y				8		1

557 Знайдіть значення c, при якому точка A належить графіку функції:

а) $y = \frac{45}{x}$, якщо $A(c; -45)$; б) $y = \frac{12}{x}$, якщо $A(4; c)$; в) $y = \frac{119}{x}$, якщо $A(7; c)$;
г) $y = \frac{32}{x}$, якщо $A(c; 4)$; д) $y = \frac{10}{x}$, якщо $A(c; -2)$; е) $y = \frac{27}{x}$, якщо $A(c; 3)$.

З метою збереження культурної спадщини півострова створено ілюстровану виставку «Абетка Криму». Кожна літера абетки записана двома мовами — українською та кримськотатарською, символізує важливе для регіону місце, подію або постать.



Додайте всі значення c та дізнайтеся кількість букв в алфавіті кримськотатарської мови з латинською графікою.

558 Побудуйте графіки функцій $y = \frac{10}{x}$ та $y = -\frac{10}{x}$ в одній системі координат.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

559 Не виконуючи побудови графіка функції $y = -\frac{36}{x}$, визначте, чи проходить графік через точку:

а) $A(2; -18)$; б) $B(18; 2)$; в) $C(-9; 4)$; г) $D(12; -3)$;
д) $E(12; 3)$; е) $F(36; 1)$; ж) $G(-36; 1)$; и) $K(-3; 12)$.

560 Знайдіть значення k, якщо відомо, що гіпербола $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:

а) $A(3; 7)$; б) $B(6; 5)$; в) $C(-2; 8)$; г) $D(9; 11)$;
д) $E\left(-\frac{1}{2}; \frac{4}{5}\right)$; е) $F\left(\frac{3}{7}; \frac{7}{3}\right)$; ж) $L(-5{,}2; 3)$; и) $M(10; -0{,}7)$.

561 Побудуйте графік функції $y = \frac{12}{x}$. За допомогою графіка знайдіть:
а) значення функції, якщо аргумент дорівнює 2; −3; 4; −6; 12;
б) значення аргумента, при яких функція дорівнює −6; −3; 1; 4; 12;
в) значення аргумента, при яких функція набуває додатних значень; від'ємних значень.

562 Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{8}{x}$ і $y = x$ та визначте координати точок їхнього перетину.

563 Розв'яжіть рівняння графічно.

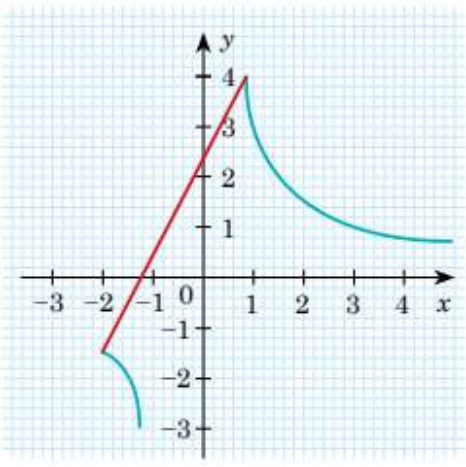
а) $\frac{8}{x} = x + 2$ б) $3x = \frac{12}{x}$ в) $\frac{4}{x} = x - 3$ г) $\frac{10}{x} = 2$

564 Розв'яжіть рівняння графічно за допомогою графічного онлайн-калькулятора GeoGebra.

а) $x - 4 = -\frac{3}{x}$ б) $2x - 5 = \frac{3}{x}$ в) $4x - 9 = -\frac{2}{x}$

565 Задано функцію $y = f(x)$, де

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x}, \text{ якщо } x \le -1, \\ 2x + 4{,}5, \text{ якщо } -2 < x \le 0{,}75, \\ \frac{3}{x}, \text{ якщо } x > 0{,}75. \end{cases}$$



Знайдіть:

а) $f(-3)$; б) $f(1)$; в) $f(-1)$;
г) $f(6)$; д) $f(0)$; е) $f(12)$.

566 Побудуйте графіки функцій.

а) $y = \frac{7x - 14}{x^2 - 2x}$ б) $y = \frac{4x^2 - 4}{x - x^3}$ в) $y = \frac{3x^2 - 27}{x^3 - 9x}$

567 Побудуйте графіки функцій.

а) $y = \frac{64}{(x - 4)^2 - (x + 4)^2}$ б) $y = \frac{80}{(x + 5)^2 - (x - 5)^2}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

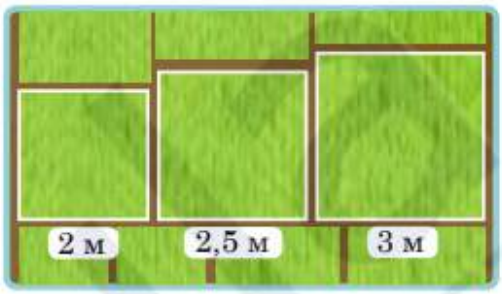
6.4. Функція $y = x^2$, її графік та властивості

Поміркуйте!
Чи всіх значень може набувати незалежна змінна x у функції $y = x^2$?

Залежність площі квадратної ділянки від її довжини можна задати формулою $S = a^2$, якщо a м — сторона ділянки, а S м^2 — площа. Зі зміною довжини ділянки відповідно змінюється і її площа. Ця залежність також є функцією, адже для кожного значення a існує єдине значення S.

a, м	2	2,5	3
S, м^2	4	6,25	9

$S = a^2$ → $y = x^2$



Графік функції $y = x^2$ легко будувати за кількома точками, що легко запам'ятовуються: (0; 0), (1; 1), (2; 4), (3; 9)…

Позначимо незалежну змінну через x, а залежну — через y та отримаємо формулу $y = x^2$, якою задається функція.

Побудуємо графік функції $y = x^2$.

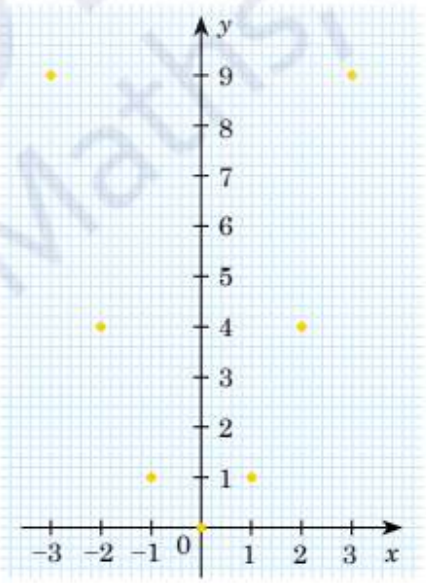
Крок 1. Складемо таблицю значень функції:

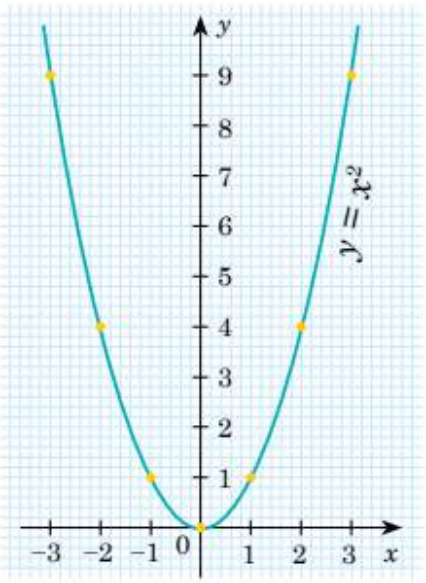
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Крок 2. Позначимо точки на координатній площині.

Крок 3. З'єднаємо їх плавною кривою лінією та отримаємо графік функції $y = x^2$.

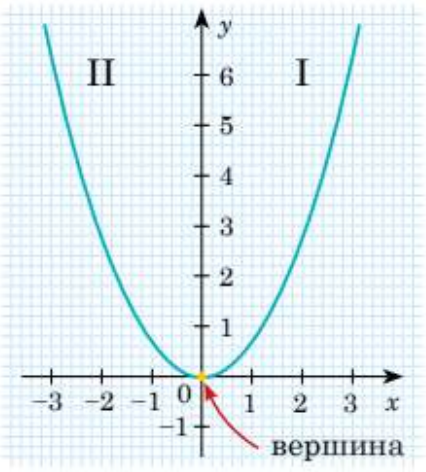
Побудова графіка функції $y = x^2$ у графічному онлайн-калькуляторі GeoGebra

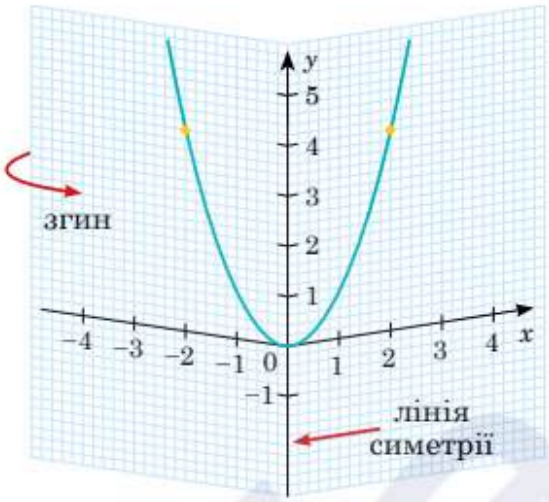




Графіком функції $y = x^2$ є **парабола** з вершиною в точці (0; 0).

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.





Функція набуває невід'ємних значень ($y \geq 0$) при будь-якому x

Протилежним значенням аргумента відповідає одне й те саме значення функції.
$(-x)^2 = x^2$

Властивості функції $y = x^2$

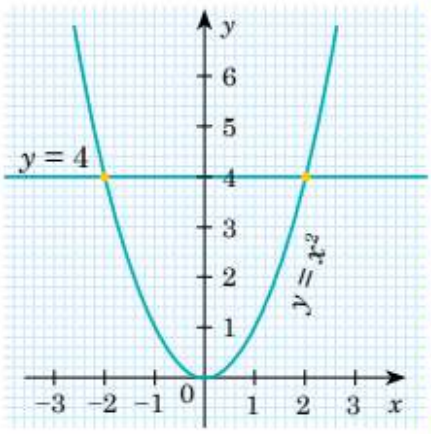
Область визначення	Область значень	Графік	Точки перетину з осями координат
$D(y)$: $x \in R$	$E(y)$: $y \geq 0$	Парабола	$x = 0$, $y = 0$
Усі числа	Усі невід'ємні числа	Вітки параболи симетричні відносно осі ординат	Ця точка є вершиною параболи

Приклад 1

Розв'яжіть рівняння $x^2 = 4$ графічно.

Розв'язання

Побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 4$ в одній системі координат.
Графіки перетинаються в точках (2; 4) і (−2; 4). Отже, маємо два розв'язки рівняння: $x = -2$ і $x = 2$.
Відповідь. −2; 2.



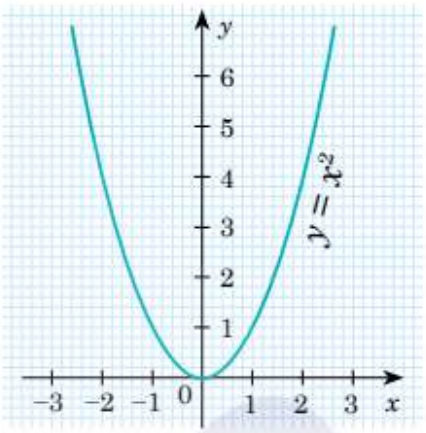
Попрактикуйтеся

568 Функцію задано формулою $y = x^2$. Знайдіть значення функції, якщо значення аргумента дорівнює −2,5; −1,5; 3,5.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

569 Функцію задано формулою $y = x^2$. За графіком функції знайдіть:

а) значення функції, якщо значення аргумента дорівнює -1; 0; 2; 2,5;
б) значення аргумента, при якому значення функції дорівнює 2; 4; 7.



570 Визначте, чи проходить графік функції $y = x^2$ через подані точки, не виконуючи побудови графіка функції.

З букв, що відповідають точкам, які належать графіку функції, складіть назву традиційної української плетеної бісерної прикраси.

А $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{9}\right)$	К (0,01; 0,0001)		
П (10; −100)	Д (−0,7; −0,49)		
Н (−6; −36)	И (−11; 121)		
Л (10; 100)	Н (0,7; 0,49)	С (−6; 36)	Я (−8; 64)



571 Функцію задано формулою $f(x) = x^2$. Знайдіть та порівняйте:

а) $f(1)$ і $f(-1)$; б) $f(-2)$ і $f(1)$; в) $f(1{,}5)$ і $f(-2{,}5)$; г) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ і $f\left(-\frac{1}{2}\right)$.

572 Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину графіків функцій.

а) $y = x^2$ і $y = 4x - 4$ б) $y = x^2$ і $y = -6x - 9$

573 Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x^2$ і $y = x - \frac{1}{4}$ та визначте координати точок їхнього перетину.

574 Розв'яжіть графічно рівняння.

а) $x^2 = 2x$ б) $x^2 = 5x - 6$ в) $x^2 = \frac{8}{x}$ г) $x^2 - x - 2 = 0$

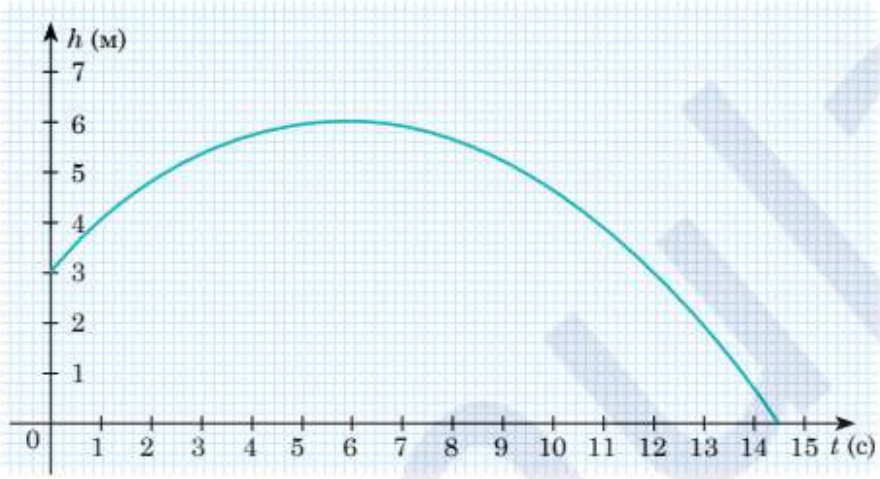
575 Визначте кількість розв'язків систем рівнянь, побудувавши графіки кожного з рівнянь.

а) $\begin{cases} y = 3, \\ y = x^2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} y = -2, \\ y = x^2 \end{cases}$ в) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x + 3 \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 0 \end{cases}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

576 На графіку зображено залежність траєкторії польоту кинутого під кутом до горизонту м'яча h (у метрах) від часу t (у секундах). За графіком визначте:

а) початкову висоту, з якої кинули м'яч;
б) максимальну висоту польоту м'яча;
в) висоту, на якій був м'яч у момент часу 0; 6; 12;
г) коли м'яч був у своїй найвищій точці;
д) скільки часу летів м'яч до моменту приземлення.



577 Побудуйте графік функції $f(x) = -x^2$. За графіком знайдіть $f(-1)$, $f(3)$, $f(-2)$, $f(0)$. Які з точок A(1; −1), B(−1; 1), C(−2; −4) належать графіку функції?

578 Визначте графічно координати точок перетину графіків функцій:

а) $y = -x^2$ та $y = -x - 5$; б) $y = -x^2$ та $y = -x + 2$.

579 Побудуйте графік функції $y = x^2$:

а) визначений на проміжку $0 \le x \le 4$;
б) визначений на проміжку $-3 \le x \le 3$.

580 Побудуйте графіки функцій.

а) $y = \dfrac{x^3 + 2x^2}{x + 2}$ б) $y = \dfrac{x^4 - 3x^2}{x^2 - 3}$

581 Побудуйте графік функції за допомогою графічного онлайн-калькулятора GeoGebra:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x \le 0, \\ 2x, \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$$

582 Задано функцію

$$f(x) = \begin{cases} 9, \text{ якщо } x \le -3, \\ x^2, \text{ якщо } -3 < x < 2, \\ 4, \text{ якщо } x \ge 2. \end{cases}$$

а) Знайдіть $f(-6)$, $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(3{,}5)$, $f(10)$.
б) Побудуйте графік цієї функції.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

6.5. Функція $y = \sqrt{x}$, її графік та властивості

Площа квадрата
$S = a^2$
Виразимо a
з формули:
$a = \sqrt{S}$

Розглянемо іншу проблемну ситуацію: за відомою площею квадратної ділянки потрібно знайти її довжину. Залежність довжини квадратної ділянки від її площі можна задати формулою $a = \sqrt{S}$, якщо S м² — площа ділянки, а a м — її довжина. Зі зміною площі ділянки відповідно змінюється і її довжина. Ця залежність також є функцією, адже для кожного допустимого значення S існує єдине значення a.

S, м²	4	6,25	9
a, м	2	2,5	3



$a = \sqrt{S}$ → $y = \sqrt{x}$

Поміркуйте!
Яких значень НЕ може набувати незалежна змінна x у функції $y = \sqrt{x}$?

Позначимо незалежну змінну через x, а залежну — через y та отримаємо формулу $y = \sqrt{x}$, якою задається функція.

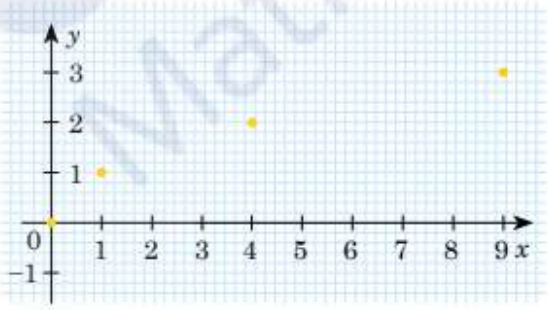
Побудуємо графік функції $y = \sqrt{x}$.

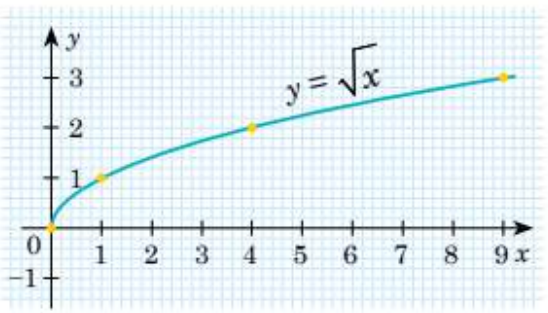
Крок 1. Складемо таблицю значень функції:

x	0	1	4	9
y	0	1	2	3

Крок 2. Позначимо точки на координатній площині.

Крок 3. З'єднаємо їх плавною кривою лінією та отримаємо графік функції $y = \sqrt{x}$.





Побудова графіка функції $y = \sqrt{x}$ на графічному онлайн-калькуляторі GeoGebra

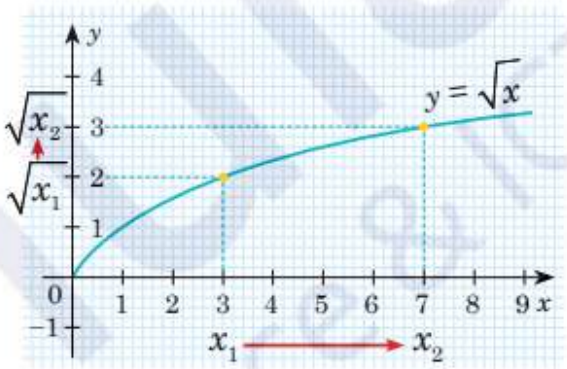
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Графіком функції $y = \sqrt{x}$ є **вітка параболи**, що виходить з точки (0; 0).

Властивості функції $y = \sqrt{x}$			
Область визначення	Область значень	Графік	Точки перетину з осями координат
$D(y)$: $x \geq 0$	$E(y)$: $y \geq 0$	Вітка параболи	$x = 0$, $y = 0$
Усі невід'ємні числа	Усі невід'ємні числа	Розташована у I чверті.	

Як порівнювати вирази, що містять корені?

Розглянувши графік функції $y = \sqrt{x}$, можна помітити, що зі збільшенням значення x збільшується значення y. Тобто якщо $x_2 > x_1$, то й $\sqrt{x_2} > \sqrt{x_1}$.



$\sqrt{3} \square \sqrt{7}$

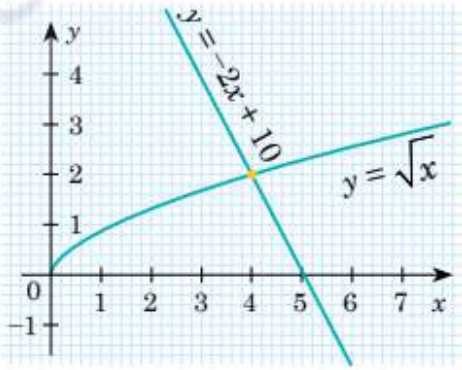
$3 < 7 \rightarrow \sqrt{3} < \sqrt{7}$

Приклад

1 Розв'яжіть графічно рівняння $\sqrt{x} = -2x + 10$.

Розв'язання

Побудуємо графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = -2x + 10$ в одній системі координат. Графіки перетинаються в точці (4; 2). Отже, маємо розв'язок рівняння: $x = 4$.
Відповідь. 4.



Попрактикуйтеся

583 Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. Заповніть таблицю значень.

x	0,04	16			$\frac{1}{49}$		2,25	9
y			0,3	5	0	12		$\frac{1}{6}$

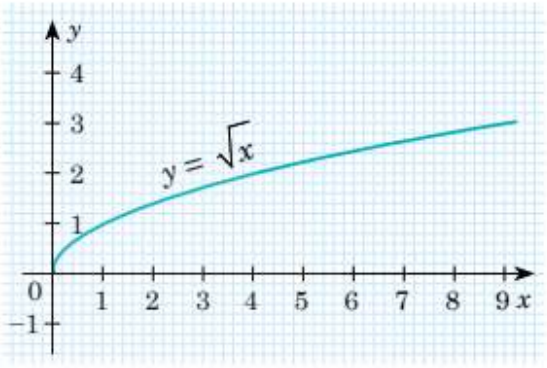
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

584 Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. За допомогою графіка функції знайдіть:

а) значення функції, якщо значення аргумента дорівнює 0,5; 2; 3,5; 4; 6; 7,5; 9;

б) значення аргумента, при яких значення функції дорівнює 1; 1,5; 2; 2,5; 3.

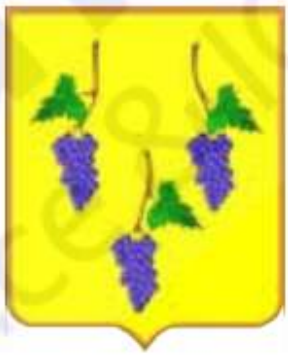
Результати округліть до десятих.



585 Визначте, чи проходить графік функції $y = \sqrt{x}$ через подані точки, не виконуючи побудови графіка.

З букв, що відповідають точкам, які належать графіку функції, складіть назву одного з найстаріших міст Слобожанщини. Місто розташоване на березі річки Сіверський Донець біля підніжжя найвищої гори Харківської області.

М (4; 2)	В (5; 3)	Е (49; 0,7)	І (0,36; 0,6)
З (16; 4)	Д (9; −3,5)	К (0,6; 0,36)	Ю $\left(\frac{1}{121}; \frac{1}{11}\right)$



586 Знайдіть значення a, при яких графіку функції $y = \sqrt{x}$ належать точки:

а) В (a; 6); б)С (100; a); в) Д (0,64; a); г) Ж (1,69; a); д)З (400; a).

587 Порівняйте значення виразів.

а) $\sqrt{37}$ і $\sqrt{27}$ б) $\sqrt{1,7}$ і $\sqrt{1,8}$ в) 6 і $\sqrt{38}$ г) $3\sqrt{5}$ і $5\sqrt{3}$

д) $\sqrt{\frac{3}{5}}$ і $\sqrt{1}$ е) $\sqrt{50}$ і $5\sqrt{2}$ ж) $\frac{2}{3}\sqrt{63}$ і $\frac{3}{5}\sqrt{50}$ и) $0,4\sqrt{6\frac{1}{4}}$ і $0,3\sqrt{16\frac{2}{3}}$

588 Запишіть числа в порядку зростання і дізнайтеся назву першого у світі підводного човна. Українські козаки стали першими, хто створив та почав використовувати підводний човен.

А	$\sqrt{0}$	Й	2,1	К	$2\sqrt{3}$
А	$\sqrt{47}$	Ч	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$		



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

589 Оберіть усі цілі числа, які розташовані на координатній прямій між числами:

а) $\sqrt{5}$ і $\sqrt{25}$; б) 7 і $\sqrt{121}$;

в) $-\sqrt{100}$ і $-\sqrt{58}$; г) $-\sqrt{43}$ і $-3{,}7$.

$-9; -8; -7; -6;$
$-5; -4; -3; 0;$
$3; 4; 6; 8; 9; 10$

590 Розташуйте числа в порядку спадання

а) $\sqrt{15}; 3; \sqrt{16{,}5}; 4; \sqrt{19}$ б) $0{,}25; \frac{1}{3}; \sqrt{0{,}5}; \sqrt{0{,}3}; \sqrt{\frac{2}{3}}$

591 Визначте, чи перетинається графік функції $y = \sqrt{x}$ та наведена пряма. Якщо так, то знайдіть координати точок перетину.

а) $x = 16$ б) $x = 10$ в) $x = -4$ г) $x = a$ $(a < 0)$

д) $y = -6$ е) $y = \sqrt{5}$ ж) $y = c$ $(c < 0)$ и) $y = c$ $(c > 0)$

592 Розв'яжіть рівняння графічно.

а) $x = \sqrt{x}$ б) $\sqrt{x} = x^2$ в) $-x - 2 = \sqrt{x}$ г) $\sqrt{x} = -7$

593 Побудуйте графік функції $f(x) = -\sqrt{x}$. За графіком знайдіть $f(1)$, $f(4)$, $f(2)$, $f(0)$. Які з точок $A(1; -1)$, $B(4; -2)$, $C(2; -4)$ належать графіку функції?

594 Розв'яжіть рівняння графічно за допомогою графічного онлайн-калькулятора GeoGebra.

а) $\sqrt{x} = 4 - 3x$ б) $-3(x - 10) = \sqrt{x}$ в) $\sqrt{x} = \frac{1}{x}$ г) $\sqrt{x} = \frac{27}{x}$

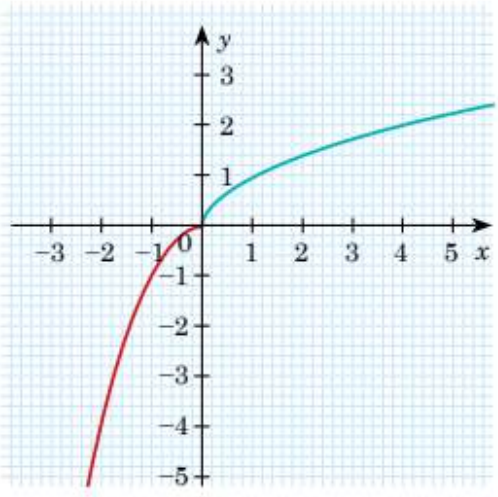
595 Задано функцію

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, \text{ якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Знайдіть:

а) $f(-2)$; б) $f(1)$; в) $f(-4)$;

г) $f(9)$; д) $f(0)$; е) $f(25)$.



596 Побудуйте графіки функцій.

а) $y = \frac{x - 3\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$ б) $y = \frac{\sqrt{x} + x}{\sqrt{x} + 1}$

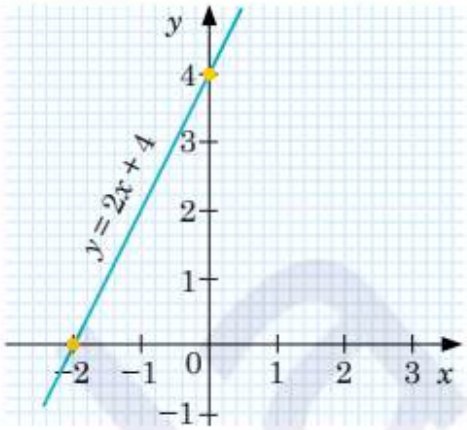
597 Побудуйте графік функції $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ якщо } x > 0, \\ -\sqrt{x}, \text{ якщо } x \geq 0. \end{cases}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Короткий огляд розділу

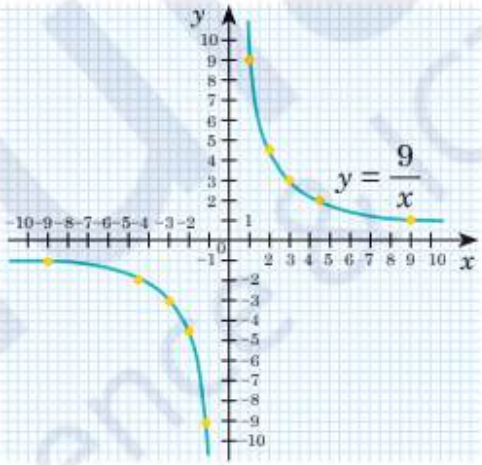
Властивості функції $y = kx + b$

Область визначення	Область значень	Графік лінійної функції	Зростає	Спадає
Множина всіх дійсних чисел	Множина всіх дійсних чисел	Пряма	Якщо $k > 0$	Якщо $k < 0$



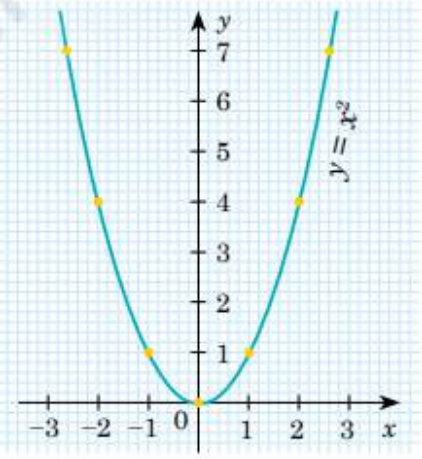
Властивості функції $y = \frac{k}{x}$

Область визначення	Область значень	Графік	Точки перетину з осями координат
$D(y)$: $x \neq 0$	$E(y)$: $y \neq 0$	Гіпербола	немає
Множина всіх чисел, крім 0	Множина всіх чисел, крім 0	Вітки гіперболи симетричні відносно початку координат	



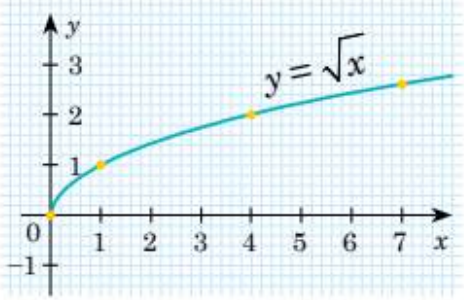
Властивості функції $y = x^2$

Область визначення	Область значень	Графік	Точки перетину з осями координат
$D(y)$: $x \in R$	$E(y)$: $y \geq 0$	Парабола	$x = 0$, $y = 0$
Усі числа	Усі невід'ємні числа	Вітки параболи симетричні відносно осі ординат	Ця точка є вершиною параболи



Властивості функції $y = \sqrt{x}$

Область визначення	Область значень	Графік	Точки перетину з осями координат
$D(y)$: $x \geq 0$	$E(y)$: $y \geq 0$	Вітка параболи	$x = 0$, $y = 0$
Усі невід'ємні числа	Усі невід'ємні числа	Розташована у I чверті.	



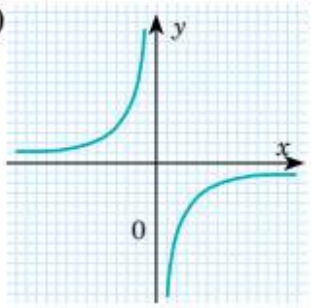
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

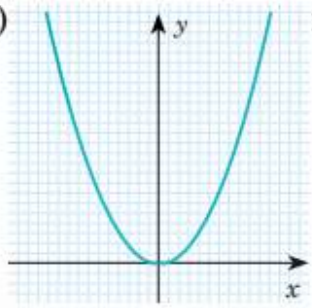
Перевірте свої досягнення

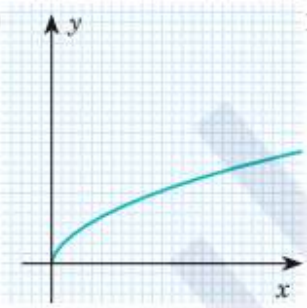
1 Серед поданих функцій оберіть ту, графіком якої є парабола.

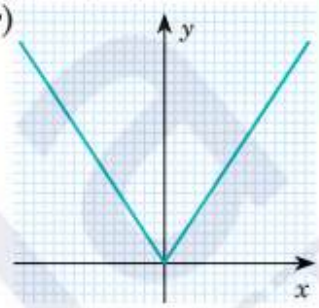
а) $y = -1 - 8x$ б) $y = \frac{8}{x}$ в) $y = x^2$ г) $y = \frac{x}{8}$

2 На якому з рисунків зображено графік оберненої пропорційності?

а) 

б) 

в) 

г) 

3 Укажіть область визначення функції $y = \sqrt{x}$.

а) усі числа б) усі від'ємні числа в) усі додатні числа г) усі невід'ємні числа

4 Знайдіть значення функції $y = x^2$, якщо $x = 4$.

а) -16 б) 16 в) -8 г) -4

5 Знайдіть значення аргумента, при якому функція $y = 4x - 5$ набуває значення 11.

а) 4 б) 6 в) 8 г) 10

6 Яка з точок належить графіку функції $y = \sqrt{x}$?

а) $A\,(6; 36)$ б) $B\,(36; 6)$ в) $C\,(36; -6)$ г) $D\,(36; 0{,}6)$

7 Визначте, у яких чвертях розташований графік функції $y = -\frac{16}{x}$.

а) I та III б) II та III в) I та IV г) II та IV

8 Скільки спільних точок мають графіки функцій $y = x^2$ та $y = \sqrt{x}$?

а) одну б) дві в) жодної г) безліч

9 За якого значення m точка $M\,(m; -14)$ належить графіку функції $y = \frac{56}{x}$?

а) $-0{,}25$ б) 0,25 в) -4 г) 4

10 Оберіть правильний запис.

а) $3\sqrt{5} < \sqrt{43}$ б) $2\sqrt{7} > \sqrt{30}$ в) $7\sqrt{\frac{1}{7}} > \frac{1}{2}\sqrt{20}$ г) $3\sqrt{\frac{1}{3}} < \frac{1}{3}\sqrt{3}$

11 Не виконуючи побудови, знайдіть усі точки перетину графіків функцій $y = x^2$ та $y = -2x$.

а) $A\,(0; 0), B\,(-2; 4)$ б) $A\,(0; 0), B\,(2; 4)$ в) $A\,(0;0), B\,(2; -4)$ г) $A\,(0; 0), B\,(-2; -4)$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Проєктна робота «Побудова графіків функцій у графічному калькуляторі GeoGebra»

Крок ① Об'єднайтесь у 3 групи. Розподіліть обов'язки. Підготуйте необхідні для роботи пристрої (ноутбук або комп'ютер).

Крок ② За допомогою графічного онлайн-калькулятора GeoGebra побудуйте графіки наведених функцій. Створіть інструкцію на тему: «Побудова графіків функцій у графічному калькуляторі GeoGebra».

Група 1

Побудуйте за допомогою графічного калькулятора GeoGbra графіки функцій $y = \frac{k}{x}$, $y = \sqrt{x}$ та $y = -4x + 8$. Змінюючи значення коефіцієнта k для оберненої пророрційності, знайдіть точки перетину графіків, якщо такі існують. За графіком $y = -4x + 8$ знайдіть нулі функції. За графіком функції $y = \sqrt{x}$ порівняйте $y(0)$ та $y(9)$.

Група 2

Побудуйте за допомогою графічного калькулятора GeoGebra графіки функцій $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$ та $y = 5$. Змінюючи значення коефіцієнта k для оберненої пророрційності, знайдіть точки перетину графіків, якщо такі існують. Знайдіть точки перетину графіка функції $y = 5$ з віссю абсцис та ординат. За графіком функції $y = x^2$ порівняйте $y(-1)$ та $y(2)$.

Група 3

Побудуйте за допомогою графічного калькулятора GeoGebra графіки функцій $y = \frac{k}{x}$, $y = |x|$ та $y = 3x$. Змінюючи значення коефіцієнта k для оберненої пророрційності, знайдіть точки перетину графіків, якщо такі існують. Визначте, чи проходить графік функції $y = 3x$ через точку (6; 2). За графіком функції $y = |x|$ порівняйте $y(-4)$ та $y(4)$.

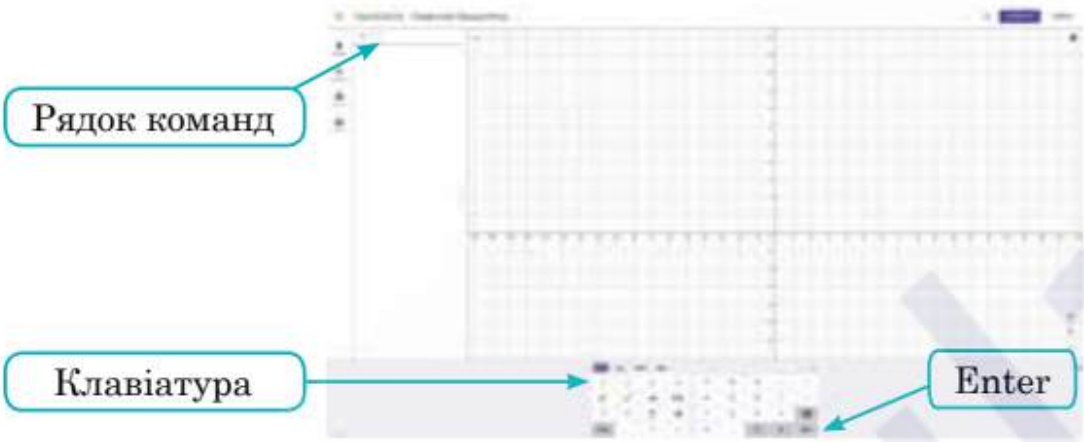
Зразок

Побудуйте за допомогою графічного калькулятора GeoGebra графіки функцій $y = \frac{k}{x}$, $y = |x|$ та $y = 2x - 1$. Змінюючи значення k для оберненої пропорційності, знайдіть точки перетину графіків, якщо такі існують.

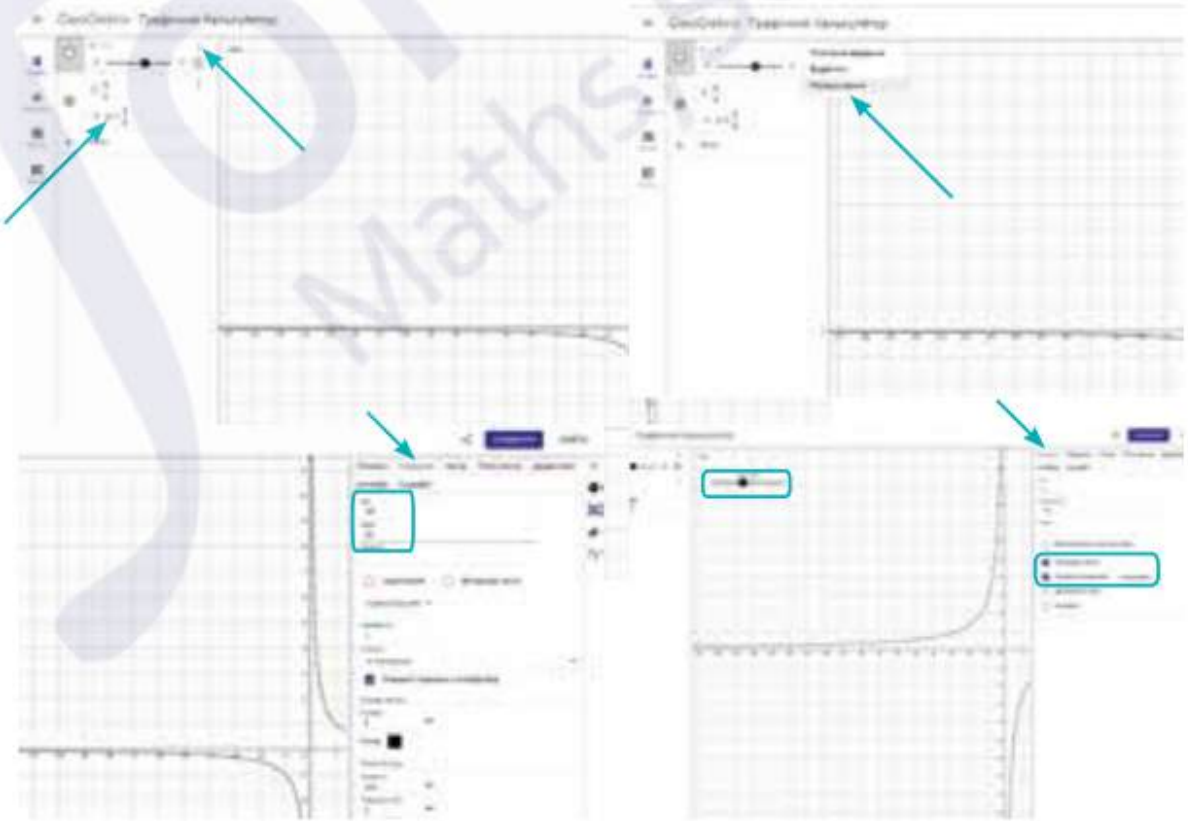
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Інструкція для виконання завдання

1. Зайдіть за посиланням: https://www.geogebra.org/graphing.
2. У *Рядку команд* за допомогою *Клавіатури* введіть потрібну функцію.
3. Натисніть на стрілочку *Enter*, щоб побудувати функцію.

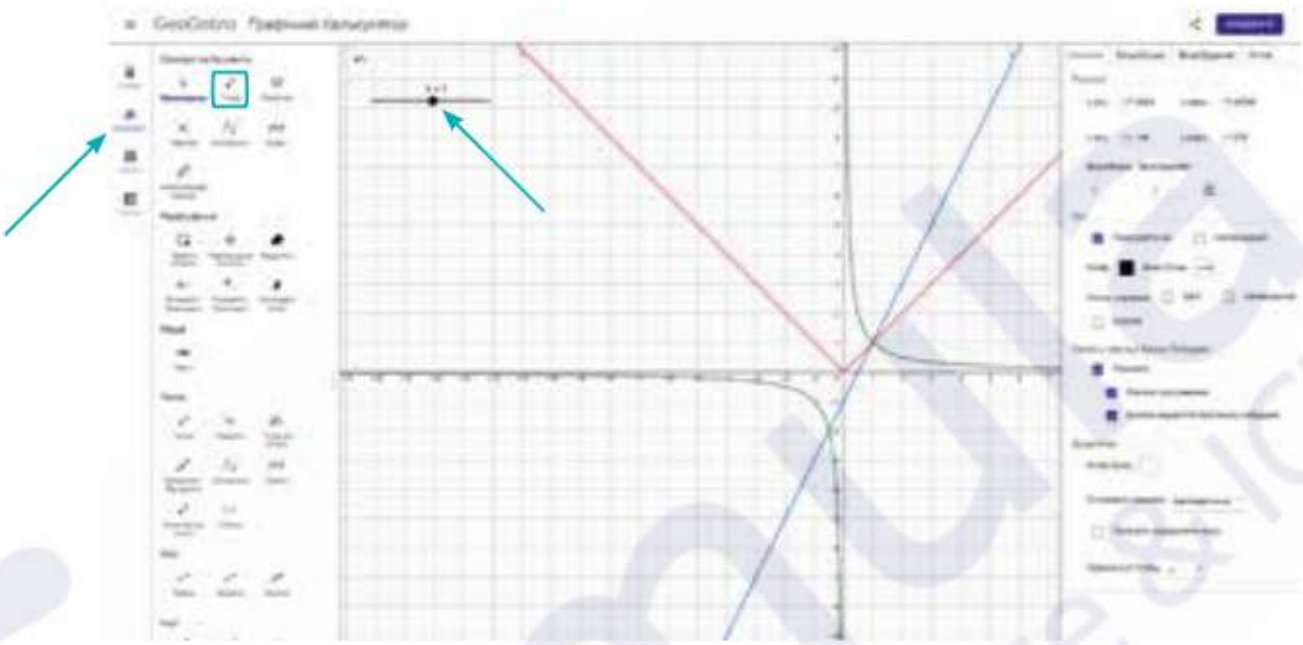


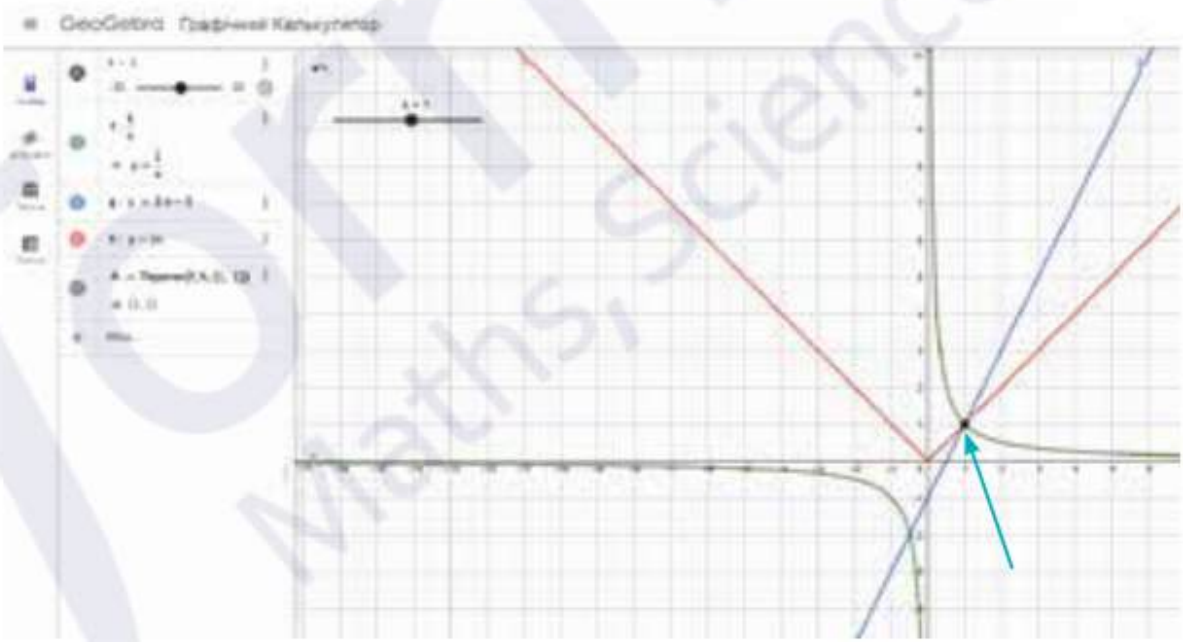
4. Будуємо графік першої функції $y = \frac{k}{x}$. Регулюючи повзунком за допомогою мишки, можна змінювати значення коефіцієнта k. Змінюємо максимальне та мінімальне значення для коефіцієнта k. Для цього натискаємо на *Три крапки* та обираємо пункт *Налаштування*. У вікні, що відкрилося, обираємо пункт *Повзунок* і вказуємо мінімальне та максимальне значення –20 та 20 відповідно. А для того, щоб повзунок відображався у вікні графіка функцій, потрібно поставити галочку біля *Показувати об'єкт* у пункті *Основні*.



© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

5. Будуємо графіки другої ($y = 2x - 1$) та третьої ($y = |x|$) функцій. Знаходимо точки перетину, якщо такі існують, керуючи повзунком та змінюючи значення коефіцієнта k. Для того, щоб позначити точку перетину, переходимо в меню *Інструменти* та обираємо інструмент *Точка*. Ставимо точку в потрібному місці.





Крок ③ Продемонструйте свої інструкції у довільній формі (презентація, відео, плакат, документ, роздруківка). Поділіться своїми враженнями щодо роботи в графічному калькуляторі GeoGebra.

Крок ④ Обговоріть підсумки проєкту з усім класом.

Що цікавого дізналися? Що вразило найбільше? Що було складного? Над чим треба попрацювати? Яка група найшвидше створила інструкцію?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

7

Елементи статистики та аналіз даних

Статистика є частиною нашого повсякденного життя. Ми зустрічаємо таблиці, гістограми, кругові та лінійні діаграми в газетах, журналах, на вебсайтах тощо. Уряд, соціальні мережі, підприємства використовують статистику для прогнозування звичок, потреб чи поведінки людей.

Статистичні дані потрібні для вимірювання та визначення переваг методу навчання чи дієвості ліків, або навіть впливу нового закону. Представлення даних за допомогою графіків, діаграм і таблиць допомагає краще зрозуміти зміст та легше інтерпретувати дані. Аналіз даних застосовують, щоб отримати різну інформацію про дані.

У цьому розділі ми:

- будуватимемо точкові та кругові діаграми, гістограми, а також діаграми «стовбур — листя»;
- розглянемо переваги та недоліки різних способів представлення даних у статистиці;
- дізнаємося, що таке середнє арифметичне, мода та медіана вибірки;
- навчимося обчислювати середнє арифметичне, моду та медіану.

Ключові слова

- Точкова діаграма (*dot plot*)
- Гістограма (*histogram*)
- Кругова діаграма (*pie chart)*
- Діаграма «стовбур — листя» (*stem and leaf diagram*)
- Середнє арифметичне (*mean*)
- Медіана (*median*)
- Мода (*mode*)

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

7 Елементи статистики та аналіз даних

7.1. Способи представлення даних

Статистика — це наука, що займається збором, упорядкуванням, представленням та аналізом даних.

Дані людина отримує впродовж всього життя. До них можна віднести зображення, звуки, запахи, числа, літери тощо. У математиці найчастіше мають справу з числовими даними. На основі даних кожна окрема людина формує інформацію про об'єкти, явища і процеси навколишнього світу.

До способів збору даних належать: спостереження, опитування, звітність, експеримент. Потім зібрані дані оформлюють за допомогою таблиць, діаграм, графіків.

Поміркуйте!
У чому полягає відмінність між даними та інформацією?



Флоренс Найтінгейл (1820–1910) — британська реформаторка медсестринської справи, яка винайшла діаграму сонячного випромінювання, щоб аналізувати причини смертності у шпиталі.

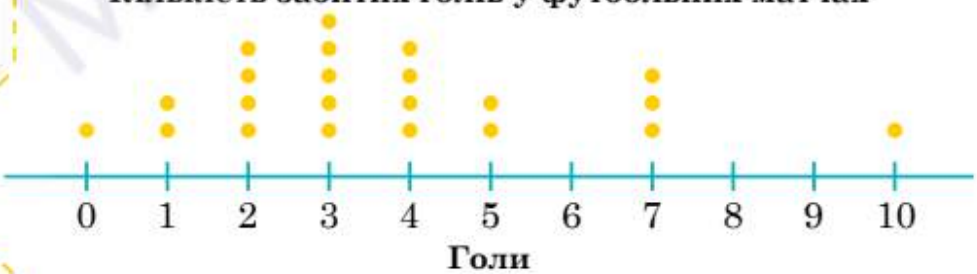


Точкова діаграма

Точкова діаграма — це спосіб представлення невеликих множин даних. Щоб побудувати точкову діаграму, використовують числову пряму і ставлять стільки точок над числами, скільки значень даних.

Наведена точкова діаграма показує, скільки голів забила футбольна команда під час різних ігор.

Кількість забитих голів у футбольних матчах



Діапазон — це інтервал значень будь-якої величини.

Діапазон значень даних цієї діаграми від 0 до 10. Адже футбольні команди забили від 0 до 10 голів. Знайдемо, скільки всього ігор зіграла команда: $1 + 2 + 4 + 5 + 4 + 2 + 3 + 1 = 22$ (гр.). Під час різних ігор команда найчастіше забивала 3 голи, адже над числом 3 розміщено 5 точок. Найменша кількість забитих голів — це 0, найбільша кількість — 10 голів.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

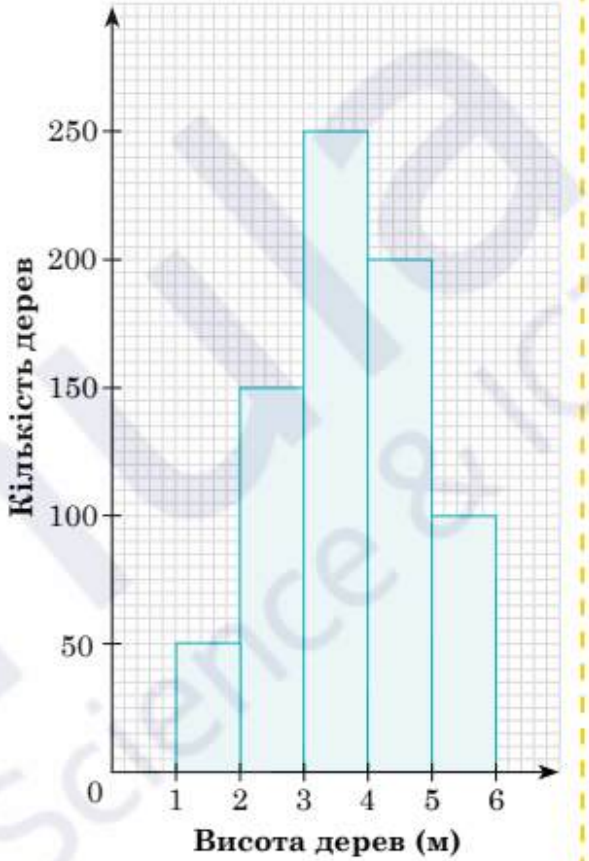
Гістограма

Гістограму використовують для представлення великих множин числових даних. За виглядом гістограма подібна до стовпчастої діаграми, але в ній немає проміжків між стовпчиками. Прямокутні стовпчики гістограми мають однакову ширину в основі.

Приклад

1 Наведена гістограма показує, яку висоту мають 750 дерев. Розгляньте гістограму та дайте відповіді на запитання.

а) Знайдіть кількість дерев, висота яких від 1 до 2 метрів.
б) Яка висота більшості дерев?
в) Скільки дерев мають висоту від 4 до 6 метрів?
г) Яку частину становлять дерева, що мають висоту більше ніж 3 м?



Розв'язання

а) 50 дерев.
б) Від 3 м до 4 м.
в) 200 + 100 = 300 (дерев).
г) 250 + 200 + 100 = 550 (дерев).

Знайдемо частину дерев: $\frac{550}{750} = \frac{11}{15}$.

Діаграма «стовбур — листя»

Діаграма «стовбур — листя» підходять для маленьких множин даних із невеликими діапазонами. Ця діаграма є досить точною, оскільки відображає точні значення даних.

Для того, щоб представити множину двоцифрових чисел за допомогою діаграми «стовбур — листя», потрібно десятки записати в стовпчик стовбура, а одиниці — у стовпчик листя. Якщо потрібно представити трицифрові числа, то сотні та десятки записують у стовпчик стовбура, а одиниці — у стовпчик листя.

Зібрані дані про вік (у роках) людей, які живуть в одній багатоповерхівці:

24	56	37	24	6	9	10	34	49	12	16	72	83	99	62
42	33	69	39	88	32	11	68	51	62	40	19	63	44	92
14	30	22	37	55	12	38	29	76	50	8	65	71	2	7
5	84	97	25	58	47	95	3	28	15	96	4	45	20	77

Використаємо діаграму «стовбур — листя», щоб представити ці дані.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Стовбур	Листя
0	6 9 8 2 7 5 3 4
1	0 2 6 1 9 4 2 5
2	4 4 2 9 5 8 0
3	7 4 3 9 2 0 7 8
4	9 2 0 4 7 5
5	6 1 5 0 8
6	2 9 8 2 3 5
7	2 6 1 7
8	3 8 4
9	9 2 7 5 6

Крок 1. Запишемо десятки (0–9) значень даних у стовпці стовбура за порядком їх появи.

Крок 2. Запишемо одиниці значень даних у стовпці листя.

Крок 3. Запишемо одиниці в кожному рядку стовпця листя в порядку зростання.

Крок 4. Запишемо ключ, щоб пояснити, які розрядні значення містяться в стовпці стовбура та стовпці листя.

Стовбур	Листя
0	2 3 4 5 6 7 8 9
1	0 1 2 2 4 5 6 9
2	0 2 4 4 5 8 9
3	0 2 3 4 7 7 8 9
4	0 2 4 5 7 9
5	0 1 5 6 8
6	2 2 3 5 8 9
7	1 2 6 7
8	3 4 8
9	2 5 6 7 9

Ключ: 0 | 2 означає 2 роки

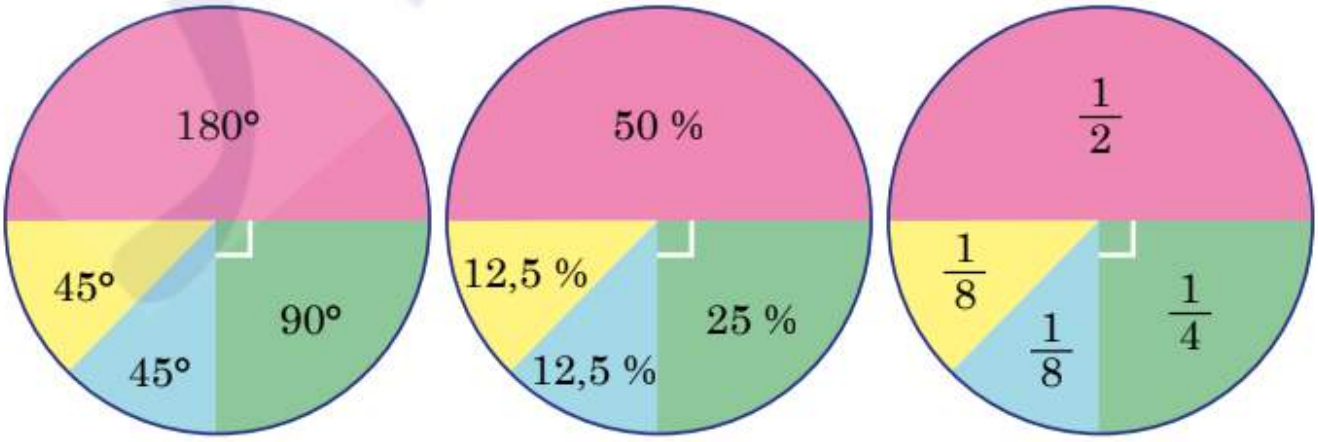
Кругова діаграма

Кругова діаграма наочно показує співвідношення величин. Діаграма складається з круга, поділеного радіусами на частини — сектори. Кожен сектор представляє елемент, об'єкт або дані про кількість.

Сума кутів усіх секторів дорівнює 360° або 100 % або 1 ціла.

Щоб знайти кут кожного сектора, використовують формулу:

$$\text{Кут сектора} \rightarrow \frac{\text{Величина}}{\text{Загальна кількість}} \cdot 360°$$



360° 100 % 1 ціла

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

2 Побудуйте кругову діаграму, що відображає улюблений вид спорту учнів і учениць паралелі 8-х класів. Виразіть у дробах кількість хлопців і дівчат, які обрали кожен вид спорту.

Улюблений вид спорту	Кількість хлопців і дівчат
Бойовий гопак	36
Футбол	52
Теніс	26
Баскетбол	30

Розв'язання

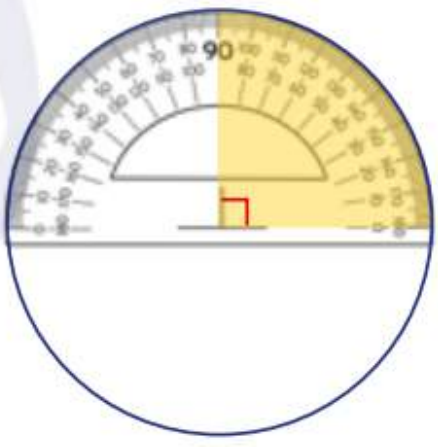
Крок 1. Обчисліть кут кожного сектора за формулою.

Улюблений вид спорту	Кількість хлопців і дівчат	Центральний кут сектора	Перетворення градусної міри в дріб
Бойовий гопак	36	$\frac{36}{144} \cdot 360° = 90°$	$\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$
Футбол	52	$\frac{52}{144} \cdot 360° = 130°$	$\frac{130°}{360°} = \frac{13}{36}$
Теніс	26	$\frac{26}{144} \cdot 360° = 65°$	$\frac{65°}{360°} = \frac{13}{72}$
Баскетбол	30	$\frac{30}{144} \cdot 360° = 75°$	$\frac{75°}{360°} = \frac{5}{24}$
Усього	144		

Крок 2. Намалюйте круг. За допомогою транспортира побудуйте кути відповідно до обчислень.

Крок 3. Запишіть назву кругової діаграми, підпишіть кожен сектор.

Улюблений вид спорту учнів і учениць 8 класів



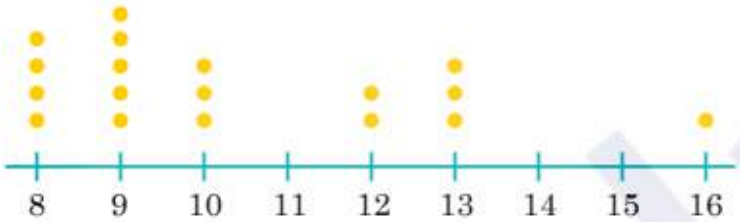


© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Попрактикуйтеся

598 Наведена точкова діаграма показує тривалість затримки (у хвилинах) різних авіарейсів минулого тижня. Розгляньте точкову діаграму та дайте відповіді на запитання.

Час затримки авіарейсів



Хвилини

а) Скільки всього було авіарейсів?
б) Яка тривалість найдовшої затримки авіарейсу?
в) Яка тривалість найпоширенішої затримки авіарейсів?

599 Наведена точкова діаграма показує оцінки (у балах), які отримали студенти та студентки за тест з математики. Розгляньте точкову діаграму та дайте відповіді на запитання.

Оцінки за тест з математики

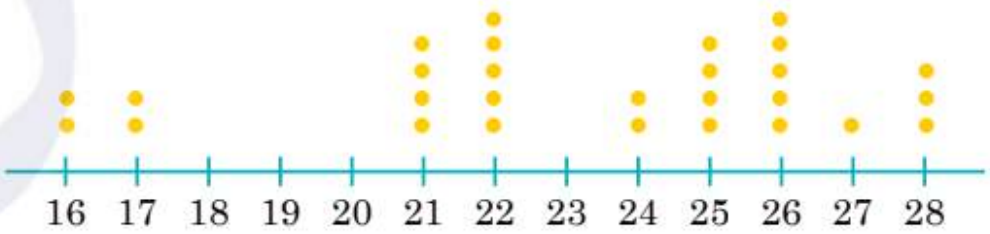


Бали

а) Яка оцінка найпоширеніша?
б) Скільки студентів та студенток отримали більше ніж 94 бали?
в) Визначте діапазон отриманих оцінок.

600 На точковій діаграмі показано час приготування (у хвилинах) 28 різних страв. Розгляньте точкові діаграми та дайте відповіді на запитання.

Час приготування страв



Хвилини

а) Знайдіть найменший і найбільший час приготування страв.
б) Який найпоширеніший час приготування страв?

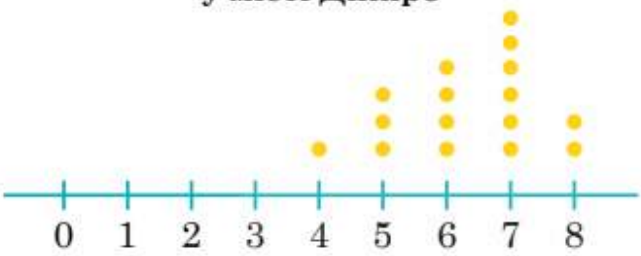
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

в) Шеф-кухар у ресторані може готувати лише страви, час приготування яких менше за 25 хв. Знайдіть частину страв, які не готуватимуть у ресторані.

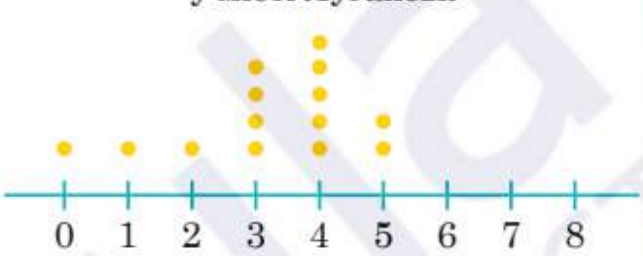
г) Знайдіть, скільки страв мають час приготування від 25 до 28 хв. Скільки це відсотків від усієї кількості страв? Результат округліть до сотих.

601 Точкові діаграми показують спостереження за мінімальними денними температурами в містах Дніпро та Луганськ протягом березня. Розгляньте точкові діаграми та дайте відповіді на запитання.

Мінімальна денна температура у місті Дніпро



Мінімальна денна температура у місті Луганськ



а) На скільки більше днів спостерігали за мінімальною денною температурою в Дніпрі, ніж у Луганську?

б) Знайдіть відсоток днів, мінімальна денна температура яких перевищує 3 °C у Дніпрі та в Луганську.

в) Порівняйте спостереження за мінімальними денними температурами у Дніпрі та Луганську. Що ви помітили?

602 У таблиці показано, скільки електронних листів отримали працівники і працівниці одного дня. Використовуючи дані, подані в таблиці, побудуйте точкову діаграму. Потім дайте відповіді на запитання.

4	6	9	5	10	8	6	5	14	6	9	6
11	8	5	6	11	5	14	4	6	11	6	8

а) Скільки всього людей отримало електронні листи того дня?

б) Яку кількість листів отримували працівники і працівниці найчастіше?

в) Скільки людей отримали більше ніж 7, але менше ніж 11 електронних листів?

603 Зберіть дані про кількість навчальних застосунків на телефоні у своїх друзів та подруг. Використовуючи зібрані дані, побудуйте точкову діаграму.



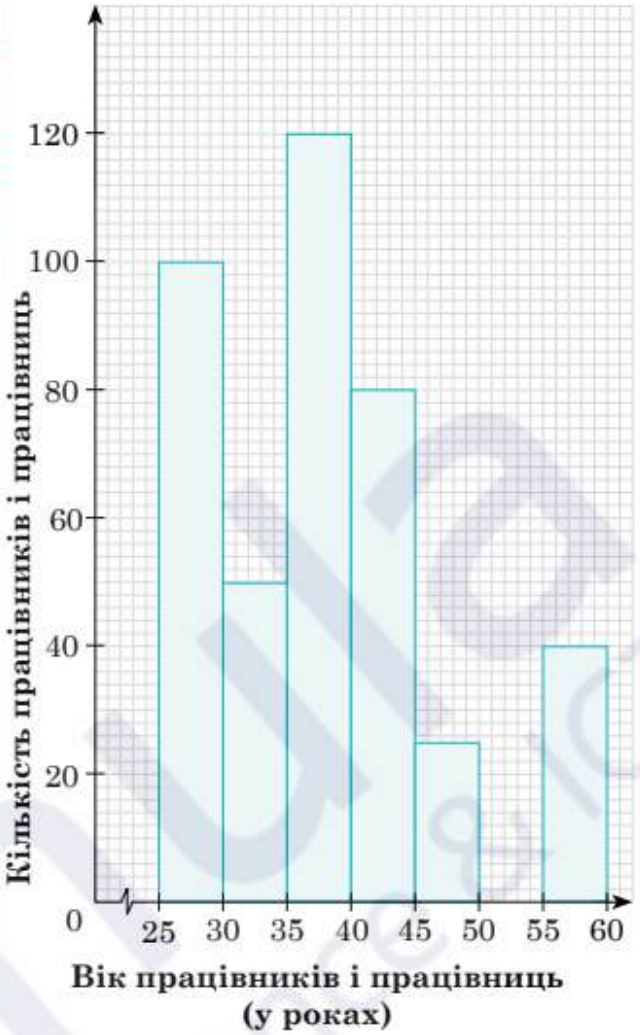
604 За допомогою інтернет-джерел знайдіть дані про кількість медалей та роки їх отримання параплавця Максима Крипака. Використовуючи зібрані дані, побудуйте точкову діаграму.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

605 Наведена гістограма показує вік працівників та працівниць компанії. Розгляньте гістограму та дайте відповіді на запитання.

а) Скільки працівників та працівниць є в компанії?
б) Який вік більшості працівників та працівниць?
в) Знайдіть кількість працівників та працівниць віком від 25 до 45 років.
г) Знайдіть відсоток працівників та працівниць, вік яких перевищує 40 років. Результат округліть до сотих.

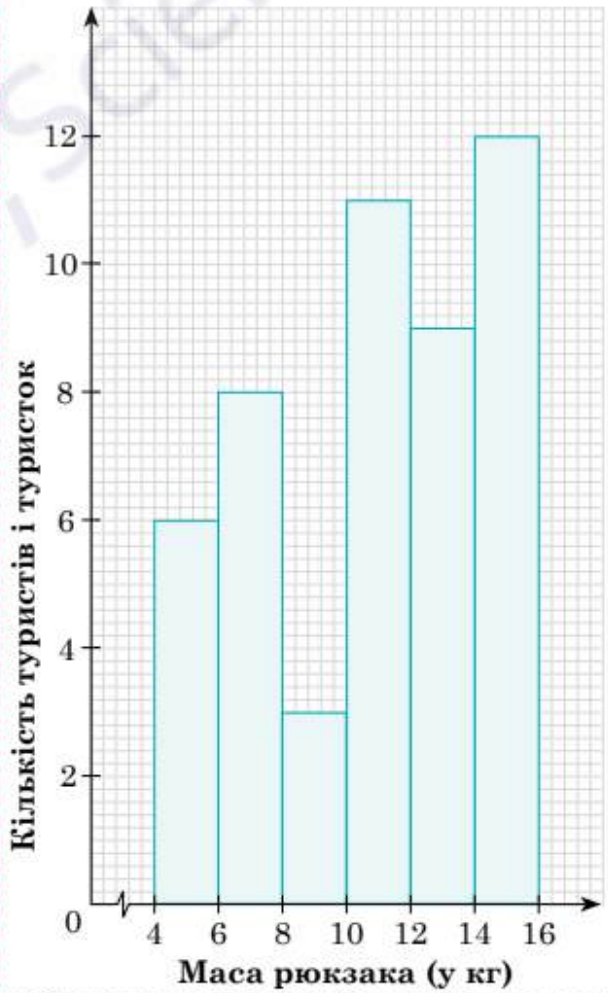




606 Гістограма показує масу туристичних рюкзаків учасників та учасниць туристичного походу в Карпати. Розгляньте гістограму та дайте відповіді на запитання.

а) Яка найменша маса рюкзака?
б) Скільки туристів і туристок мають рюкзак масою від 4 до 6 кг?
в) Знайдіть кількість туристів і туристок, маса рюкзаків яких перевищує 10 кг.
г) Знайдіть частину туристів і туристок, маса рюкзаків яких перевищує 8 кг.
д) Скільки всього туристів і туристок?

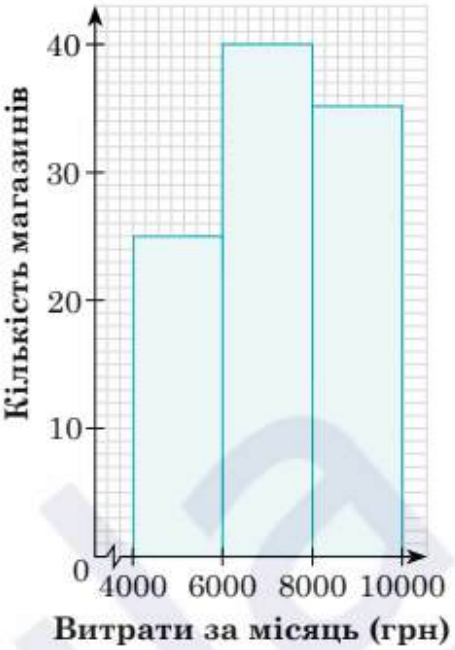




© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

607 Гістограма показує витрати різних магазинів за місяць. Розгляньте гістограму та дайте відповіді на запитання.

а) Яка сума витрат магазинів за місяць найпоширеніша?
б) Чи правильно, що магазинів, витрати яких за місяць становлять від 4000 до 6000 грн, утричі більше, ніж магазинів, витрати яких за місяць становлять від 8000 до 10 000 грн? Поясніть свою думку.



608 У таблиці вказано час, за який учні та учениці 8-го класу виконали завдання. Використовуючи дані, подані в таблиці, побудуйте гістограму. Потім дайте відповіді на запитання.

а) Скільки дітей виконували завдання?
б) Скільки часу витратила більшість учнів та учениць для виконання завдання?

Час (t в хв)	Кількість дітей
$0 < t \leq 2$	8
$2 < t \leq 4$	12
$4 < t \leq 6$	7
$6 < t \leq 8$	8
$8 < t \leq 10$	0
$10 < t \leq 12$	2

609 У таблиці вказано масу деяких фруктів та овочів. Використовуючи дані, подані в таблиці, побудуйте гістограму. Потім дайте відповіді на запитання.

а) Яка маса найпоширеніша?
б) Знайдіть кількість фруктів і овочів, маса яких більша ніж 20 г, але менша ніж 60 г.
в) Знайдіть відсоток фруктів і овочів, маса яких більша ніж 30 г.

Маса (m в г)	Кількість фруктів і овочів
$10 < m \leq 20$	8
$20 < m \leq 30$	13
$30 < m \leq 40$	15
$40 < m \leq 50$	6
$50 < m \leq 60$	4
$60 < m \leq 70$	10

610 На діаграмі «стовбур — листя» показано довжини (у метрах) різних кораблів. Розгляньте діаграму та дайте відповіді на запитання.

а) Знайдіть кількість кораблів.
б) Яка довжина найдовшого корабля?
в) Скільки кораблів довші за 365 м, але коротші за 376 м?
г) Знайдіть частину кораблів, які менші за 380 м.

Стовбур	Листя
35	1 2 3 4 9
36	4 5 5 8 8 8 9
37	2 6 6 7
38	0 3 3 5 7

Ключ: 35 | 1 означає 351 м

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

611 Діаграма «стовбур — листя» показує вагу (у грамах) різних видів харчових продуктів на ринку. Розгляньте діаграму та дайте відповіді на запитання.

Стовбур	Листя
42	2 2 3 4 5
43	0 1 5 7
44	6 6 6 6 6 9
45	1 3 4 5 5
46	3 4 6
47	
48	2 3 3 7

Ключ: 42 | 1 означає 42,1 г

а) Яка маса продуктів трапляється найчастіше?
б) Скільки видів продуктів важать принаймні 45,4 г?
в) Знайдіть відсоток продуктів, які важать менше ніж 43,7 г. Результат округліть до сотих.

612 Діаграма «стовбур — листя» показує швидкості (в км/год), з якими різні транспортні засоби долали певну відстань. Розгляньте діаграму та дайте відповіді на запитання.

Стовбур	Листя
5	1 3 3 4 5 7
6	0 2 5 7 9
7	0 0 1 4 5 6 6 7 7 9
8	1 2 3 4 7 8
9	1 6

Ключ: 5 | 1 означає 51 км/год

а) Як назвати цю діаграму?
б) Яка кількість транспортних засобів?
в) Використовуючи дані, подані в діаграмі, побудуйте гістограму з інтервалами 10 км/год.
г) Яка діаграма краще підходить для представлення найменшої швидкості, з якою рухалися деякі транспортні засоби?

613 На діаграмі «стовбур — листя» показано кількість батарейок для утилізації, які принесли учні та учениці двох класів. Розгляньте діаграму та дайте відповіді на запитання.

Лист для дітей 8-А	Стовбур	Лист для дітей 8-Б
7 4	1	5 8 9
4 3 3 1 0	2	9
9 8 3 2 1 1	3	0 1 2 2 3 5
6 1	4	0 2 3

Ключ: 1 | 4 означає 14 батарейок

а) Знайдіть відсоток учнів і учениць у кожній групі, які принесли щонайменше 30 батарейок.
б) Знайдіть відношення учнів і учениць 8-А класу, які принесли більше ніж 24 батарейки, до відповідних учнів і учениць 8-Б класу.

614 У таблиці наведено ціни (у доларах) на різні товари в магазині. Використовуючи дані, подані в таблиці, побудуйте діаграму «стовбур — листя». Використовуйте ключ: 5 | 2 означає 5,2 $.

7,4	5,6	8,9	10,5	6,2	10,9	7,7	8,1	10,1	9,3	6,7
6,7	9,5	10,6	7	5,3	7,4	8,2	6	9,2	7,7	5,2
5	7,5	5,7	8,6	9,6	7,7	6,5	5,3	10,2	8,4	9,4

а) Яка найвища ціна товару?
б) Товари, які коштують менше ніж 7 доларів, знаходяться на першому поверсі. Знайдіть частину товарів, які знаходяться на першому поверсі.

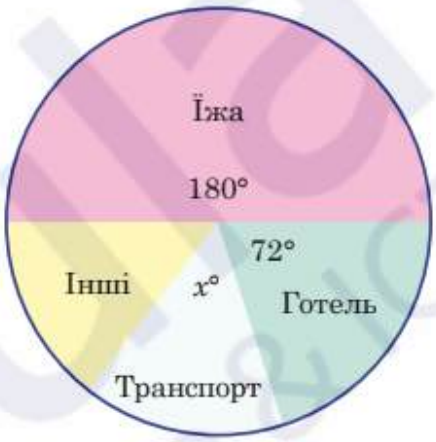
© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

615 Кругова діаграма показує улюблений жанр фільму 30 дітей. Розгляньте кругову діаграму та дайте відповіді на запитання.



а) Відомо, що 7 дітей віддає перевагу анімаційним фільмам. Обчисліть значення x.
б) Знайдіть кількість дітей, яким до вподоби детективи.
в) Скільки відсотків дітей полюбляє дивитися комедії?

616 Кругова діаграма показує витрати коштів сім'ї під час відпустки. Розгляньте кругову діаграму та дайте відповіді на запитання.



а) Знайдіть відсоток коштів, витрачених на їжу.
б) Знайдіть відсоток коштів, витрачених на готель.
в) Знайдіть x, якщо 15 % коштів було витрачено на транспорт.

617 У маленькому селі більшість родин має свійських тварин. Усього налічують 80 тварин, з яких 20 корів, 14 кіз, 36 курей, 4 кролики і 6 овечок. Знайдіть відповідні кути секторів та побудуйте кругову діаграму для представлення даних.

618 У таблиці наведено дані про улюблені страви українців та українок. Доповніть таблицю. Використовуючи дані, подані в таблиці, побудуйте кругову діаграму.

Улюблена страва	Кількість людей	Кут сектора
Борщ	96	
Пампушки	52	
Галушки	68	
Вареники	72	

619 У таблиці наведено дані про кількість зібраних філателістом марок з різних країн світу. Доповніть таблицю. Використовуючи дані, подані в таблиці, побудуйте кругову діаграму.

Назва країни	Кількість марок	Кут сектора	Частина
Україна	46		
Таїланд	42		
США	48		
Німеччина	44		

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

7.2. Аналіз даних

Аналіз даних дає змогу обробити, представити та інтерпретувати зібрані дані. На основі цих даних формують звіти, які допомагають приймати стратегічні маркетингові чи керівницькі рішення. До методів аналізу даних належать середнє арифметичне, медіана та мода. Кожен із цих методів дає різну інформацію про **вибірку**.

Вибірка — це множина даних, на основі яких проводять дослідження.

Середнє арифметичне

Часто в повсякденному житті ми стикаємось із ситуаціями, коли потрібно знайти середнє значення величини: середню заробітну плату, середню швидкість, середню врожайність, середню температуру повітря. Щоб знайти середнє значення величини, використовують середнє арифметичне.

Середнє арифметичне кількох чисел дорівнює сумі цих чисел, поділеній на їх кількість.

Поміркуйте!
Що означає вислів: «Ти — це середнє арифметичне п'яти людей, які тебе оточують»?

$$\text{Середнє арифметичне} \to \frac{\text{Сума всіх чисел}}{\text{Кількість}} \to \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

x_1 відповідає першому числу вибірки, x_2 — другому, x_n — останньому.

Приклад 1

Знайдіть середнє арифметичне чисел 7, 8, 3, 4, 6 і 11.

Розв'язання

$$\frac{7 + 8 + 3 + 4 + 6 + 11}{6} = 6{,}5$$

Приклад 2

Середня заробітна плата 4 працівників та працівниць компанії дорівнює 18 500 грн. Відомо, що вони мають таку зарплату: 16 000 грн, 18 000 грн, 21 000 грн та x грн. Знайдіть значення x.

Розв'язання

$$18500 = \frac{16000 + 18000 + 21000 + x}{4}$$

$74000 = 55000 + x$

$x = 19000$

Відповідь. 19000.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Приклад

3 Використовуючи дані, подані в таблиці, знайдіть середню врожайність пшениці у фермерському господарстві.

Площа ділянки, га	Урожайність, ц
10	323
12	330
25	617,6
5	110

Розв'язання

Знайдемо площу всіх ділянок фермерського господарства.
$10 + 12 + 25 + 5 = 52$ (га)
Знайдемо увесь зібраний урожай.
$323 + 330 + 617{,}6 + 110 = 1380{,}6$ (ц)
Знайдемо середню врожайність пшениці, поділивши весь зібраний урожай на загальну площу господарства.
$1380{,}6 : 52 = 26{,}55$ (ц/га)
Відповідь. 26,55 ц/га.

Медіана

Медіана вибірки — це число, яке міститься в середині ряду, впорядкованого за зростанням чи спаданням.

$$\overbrace{9, 9, 10}^{3}, \underbrace{11}_{\text{медіана}}, \overbrace{11, 11, 12}^{3}$$

Якщо кількість чисел у ряду парна, то медіана є середнім арифметичним двох чисел, що стоять посередині.

$$\overbrace{8, 9, 9, 10}^{3}, \overbrace{11, 11, 11, 12}^{3} \quad \text{медіана} \longrightarrow \frac{10 + 11}{2} = 10{,}5$$

Приклад

4 Знайдіть медіану вибірки:

а) 195, 213, 232, 225 і 189; б) 249, 216, 237 і 221.

Розв'язання

а) У порядку зростання: 189, 195, 213, 225, 232. Медіана дорівнює 213.
б) У порядку зростання: 216, 221, 237, 249. Посередині ряду два числа — 221 і 237. Отже, знайдемо їх середнє арифметичне:
$\frac{221 + 237}{2} = 229$. Медіана дорівнює 229.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Мода

Мода вибірки — це те значення, яке зустрічається у вибірці найчастіше. Вибірка може мати більше ніж одну моду, якщо є декілька значень, які трапляються найчастіше. Якщо жодне число не зустрічається частіше, ніж інші числа, вибірка не має моди.

Приклад

5 Знайдіть моду вибірки:

а) 5, 1, 5, 2, 5, 8, 8 і 9; б) 3, 3, 5, 4, 2, 1 і 2.

Розв'язання

а) Оскільки число 5 зустрічається найчастіше, то мода вибірки — 5.
б) Оскільки числа 2 і 3 з'являються найчастіше, то вибірка має дві моди — 2 і 3.

Попрактикуйтеся

620 Знайдіть середнє арифметичне, медіану та моду вибірки.

а) 1, 6, 7, 7, 6 б) 8, 18, 19, 10, 8 в) 13, 5, 4, 3, 11, 6

621 Середнє арифметичне чисел 13, 8, 9, y і 10 дорівнює 9,8. Знайдіть значення y.

622 У таблиці наведено дані про ціни квитків на 5 різних вистав. Знайдіть середню ціну одного квитка.

Назва вистави	Ціна квитка
Калинова сопілка	250 грн
Конотопська відьма	125 грн
Лісова пісня	190 грн
Украдене щастя	170 грн
Кайдашева сім'я	135 грн

623 На одному із сайтів Поліна переглядала оцінки відвідувачів та відвідувачок за різні помешкання. Вони мали такі оцінки: 8,2; 9,8; 8,1; 9,8; 9,8; 9,9; 9,8; 8,3; 7,5 та 8,3. Знайдіть середнє значення та моду оцінок за переглянуті помешкання.

624 У таблиці наведено дані про кошти, передані десяти благодійним організаціям протягом останнього місяця. Визначте середнє значення, медіану та моду переданих коштів.

33 000 грн	44 000 грн	68 000 грн	105 000 грн	69 000 грн
33 000 грн	31 000 грн	44 000 грн	68 000 грн	68 000 грн

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

625 У таблиці наведено дані про деякі температурні показники (у °C) на планеті Земля. Якими є середнє арифметичне, медіана та мода температурних показників?

22,37	9	–45,94	3,16	24,03	10,16	–46,5	–40,96	10,16	–49,04
–45,56	22,37	22,37	21,86	22,37	19,99	–45,94	10,16	–41,54	–41,86

626 У таблиці представлено вік (у роках) гравців та гравчинь шкільної волейбольної команди. Використовуючи дані, подані в таблиці, знайдіть середній вік гравців та гравчинь. Результат округліть до сотих.

Вік	13	14	15	16	17	18
Кількість гравців та гравчинь	4	6	3	12	5	8

627 Середнє арифметичне чисел x, y і z дорівнює 14. Знайдіть середнє арифметичне чисел $(x - 4)$, $(y + 6)$ і $(z - 11)$.

628 Виконайте завдання.

а) Знайдіть медіану вибірки чисел 45, 54, 50, 47, 38 і 51.
б) Середнє арифметичне вибірки чисел 42, 53, 39, 55 і x дорівнює 46. Знайдіть значення x.
в) Знайдіть медіану вибірки чисел, що включає числа з пунктів а) і б) разом. Чи дорівнює вона середньому арифметичному медіан чисел з пункту а) і пункту б) окремо?

629 Точкова діаграма показує масу упаковок з бісером. Розгляньте діаграму та виконайте завдання.



а) Знайдіть, скільки упаковок бісеру аналізувалося.
б) Знайдіть середню масу упаковки з бісером.
в) Знайдіть медіану вибірки.
г) Якщо на упаковках з бісером зазначено «Маса 100 г. Допустиме відхилення маси ± 5 %», чи маса всіх упаковок відповідає зазначеній інформації?

630 У магазин привезли чотири ящики з яблуками, кожен з яких в середньому важить 22,5 кг, а їх маси відносяться як 2 : 3 : 5 : 8. Знайдіть масу третього ящика. Коли в магазин привезли ще два ящики із яблуками, то їх середня маса стала 30 кг. Знайдіть середню масу цих двох ящиків яблук.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

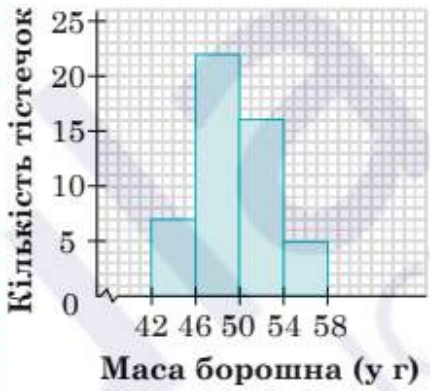
631 Діаграма «стовбур–листя» показує, скільки книг продали у книгарні за останні два тижні. Розгляньте діаграму та виконайте завдання.

Стовбур	Листя
1	1 2 3 4 9
2	4 5 5 8 8 9
3	2 6 6

Ключ: 1 | 1 означає 11

а) Знайдіть середню кількість проданих книг. Результат округліть до сотих.
б) Знайдіть моду та медіану кількості проданих книг.
в) Знайдіть частину днів, у які було продано більше ніж 25 книг.

632 Гістограма показує, скільки борошна міститься в 50 тістечках. Розгляньте гістограму та дайте відповіді на запитання.



а) Якому ваговому проміжку відповідає медіана?
б) Знайдіть відсоток тістечок, які містять понад 50 г борошна.
в) Використовуючи дані, подані на гістограмі, складіть таблицю.

633 У таблиці представлено вік (у роках) дітей, які відвідують гурток розпису глиняних тарілок. Відомо, що середній вік учасників та учасниць гуртка становить 12,5 років. Знайдіть кількість учасників та учасниць гуртка, яким 13 років.

Вік	10	11	12	13	14	15
Кількість учасників та учасниць	3	5	1	x	2	4

634 Хлопці та дівчата грали в настільну гру декілька разів. У таблиці показано результати гри. Розгляньте таблицю та виконайте завдання.

Бали	1	2	3	4	5	6
Кількість разів	5	7	5	3	4	x

а) Знайдіть найменше можливе значення x, якщо мода дорівнює 6.
б) Знайдіть найменше можливе значення x, якщо медіана дорівнює 4.
в) Знайдіть найменше можливе значення x, якщо середнє арифметичне дорівнює 4.

635 Середня довжина 10 чокерів на шию з підвіскою горлиці становить 36,5 см. Якщо додати ще 3 чокери довжиною 40 см, то якою стане середня довжина 13 чокерів? Результат округліть до сотих.

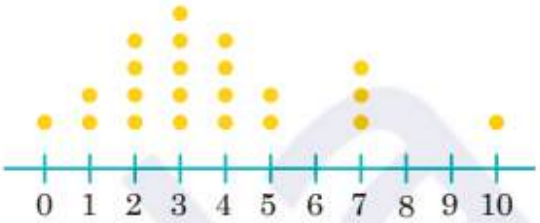
636 Середня температура впродовж 4 різних днів становить 27°C. Якою має бути температура на п'ятий день, щоб середня температура впродовж 5 днів становила 28 °C?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

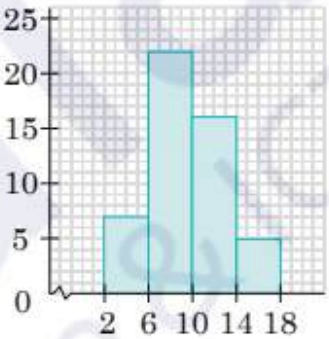
Короткий огляд розділу

1 У статистиці існують різні способи представлення та аналізу даних. Спосіб, який обирають для подання певної множини даних, залежить від типу даних, але всі діаграми мають свої переваги та недоліки.

2 **Точкова діаграма** — ефективний спосіб представлення невеликих множин даних, адже можна оцінити мінімальні та максимальні значення даних.



3 **Гістограма** — ефективний спосіб подання великих множин даних, адже так можна легко побачити кількість кожної категорії, яка представлена стовпчиками.

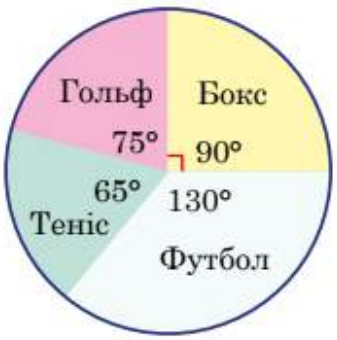


4 **Діаграма «стовбур — листя»** підходить для маленьких множин даних із невеликими діапазонами, оскільки можна побачити порядок, мінімальне та максимальне значення множини даних або порівняти дві різні множини даних.

Стовбур	Листя
35	1 2 3 4 9
36	4 5 5 8 8 8 9
37	2 6 6 7

Ключ: 35 | 1 означає 351 м

5 **Кругова діаграма** наочно показує співвідношення величин. Діаграма складається з круга, поділеного радіусами на частини — сектори. Кожен сектор представляє елемент, об'єкт або дані про кількість.



6 **Середнє арифметичне** кількох чисел дорівнює сумі цих чисел, поділеній на їх кількість.

7 **Медіана** вибірки — це число, яке міститься в середині ряду, впорядкованого за зростанням чи спаданням. Якщо кількість чисел у ряду парна, то медіана є середнім арифметичним двох чисел, що стоять посередині.

8 **Мода** вибірки — це те значення, яке зустрічається у вибірці найчастіше. Вибірка може мати більше ніж одну моду, якщо є декілька значень, які трапляються найчастіше. Якщо жодне число не зустрічається частіше, ніж інші числа, вибірка не має моди.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Перевірте свої досягнення

1 Точкова діаграма показує термін служби (у роках) деяких електричних приладів. Скільки років працює більшість приладів?



а) 6 б) 9 в) 13 г) 8

2 Курс для людей старшого віку з опанування комп'ютерної грамотності складається з 11 занять. Кількість слухачів та слухачок, що відвідували кожне із занять така: 7, 2, 4, 8, 3, 4, 8, 9, 5, 10 і 4. Знайдіть медіану.

а) 2 б) 4 в) 3 г) 5

3 Кількість волонтерів та волонтерок, що працювали у штабі гуманітарної допомоги протягом 11 днів, така: 5, 7, 8, 9, 9, 13, 9, 10, 7, 4 і 6. Знайдіть моду.

а) 7 б) 9 в) 8 г) 10

4 Середнє арифметичне 6 чисел дорівнює 48. Знайдіть суму цих чисел.

а) 324 б) 132 в) 240 г) 288

5 Кругова діаграма показує розподіл коштів на закупівлю ліфта. Для забезпечення доступності та безбар'єрності для маломобільних груп населення в торговельно-розважальному комплексі (ТРК) вирішили встановити ліфт вартістю 288 000 грн. Знайдіть частину грошей, яку надано завдяки державній програмі підтримки.



а) $\frac{3}{4}$ б) $\frac{3}{20}$ в) $\frac{1}{2}$ г) $\frac{7}{20}$

6 Скільки грошей надійшло від комерційної оренди для закупівлі ліфта? Дайте відповідь, використовуючи кругову діаграму із завдання 5.

а) 100 800 грн б) 35 000 в) 8228 грн г) 10 800 грн

7 На діаграмі «стовбур — листя» показано довжини (у см) різних стрічок. Щоб запакувати подарунок, потрібна стрічка, довша ніж 65 см. Знайдіть частину стрічок, які підійдуть для упаковки подарунка.

Стовбур	Листя
5	4 5 7 9
6	1 2 3 5 5 6 7 9
7	0 0 1 2 4 5 6 8
8	0 2 3 3

Ключ: 5 | 4 означає 54 см

а) $\frac{2}{3}$ б) $\frac{12}{23}$ в) $\frac{5}{8}$ г) $\frac{9}{13}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Проєктна робота «Досліджуємо рідний край»

Крок ① Об'єднайтеся у 3 групи шляхом жеребкування. Розподіліть обов'язки.

Крок ② Виконайте завдання, подані в таблиці. Для пошуку необхідних даних та зображень використовуйте літературу, інтернет-джерела.

Група 1	Група 2	Група 3

1 Знайдіть інформацію про важливу для вашого краю подію, постать або місце. Доберіть фото та підготуйте коротку розповідь.

Подія



Білгород-Дністровський — одне з найстаріших міст України, яке виникло на початку XIII ст. на місці античної Тіри.

Постать



Леся Українка двічі відвідувала Білгород-Дністровський. Свої враження від місця описала в поезіях збірки «Подорож до моря».

Місце



Аккерманська фортеця — історико-архітектурна пам'ятка та найбільша фортеця України, стоїть на скелястому березі Дністровського лиману.

2 Побудуйте діаграми на запропоновані теми або на власну. Для цього зберіть необхідні дані.

Точкова діаграма «Кухня рідного краю»

Дізнайтеся, яка страва поширена у вашому регіоні. Побудуйте точкову діаграму, що відображає, скільки разів на рік у родинах ваших друзів та подруг готують цю страву.

Гістограма «Населення рідного краю»

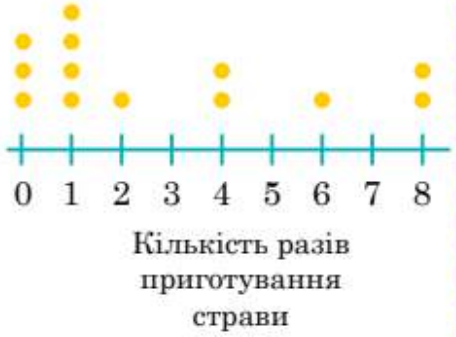
Дізнайтеся кількість населення рідного села чи міста. Побудуйте гістограму, що відображає населення вашого села чи міста та декількох сусідніх сіл чи міст.

Кругова діаграма «Водойми рідного краю»

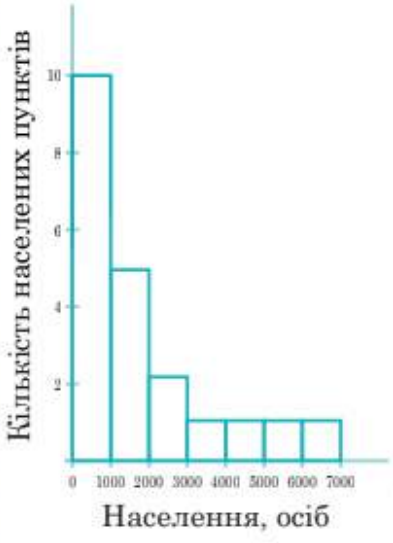
Дізнайтеся, які водойми є на території вашого населеного пункту. Побудуйте кругову діаграму, що відображає, які водойми є на території вашого села чи міста.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Група 1



Група 2



Група 3



3 Поспостерігайте за погодою рідного краю впродовж тижня. Щодня о тій самій годині фіксуйте температурний показник, стан неба, пориви вітру. За зібраними даними знайдіть середню температуру, моду стану неба та медіану поривів вітру.

Понеділок 5 травня	Вівторок 6 травня	Середа 7 травня	Четвер 8 травня
+18 °C, 4,9 м/с	+17 °C, 4,5 м/с	+15 °C, 4,7 м/с	+20 °C, 4,3 м/с

П'ятниця 9 травня	Субота 10 травня	Неділя 11 травня
+16 °C, 4,5 м/с	+19 °C, 4,6 м/с	+18 °C, 5,2 м/с

Середня температура становить ≈ 17,6 °C.
Медіана поривів вітру — 4,6 м/с. Мода стану неба —

Крок ③ Систематизуйте зібрані дані про подію, постать або місце. Побудуйте відповідні діаграми. Поспостерігайте за погодою та проаналізуйте отримані дані (середнє значення, моду, медіану). Продемонструйте іншим групам результати виконаних завдань у довільній формі (презентація, відео, плакат, доповідь).

Крок ④ Обговоріть підсумки проєкту з усім класом.
Що цікавого дізналися про рідний край? Що вразило найбільше?
Що вдалося? Що було складним?Над чим ще треба попрацювати?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

8

Узагальнення і систематизація вивченого матеріалу

Упродовж року ви розширили знання з теми «Раціональні вирази» та навчилися виконувати дії над ними. Дізналися про множину чисел, яка об'єднує всі наявні числа. Навчилися добувати корінь і розв'язувати квадратні рівняння. Повторили, що таке функція, і вивчили нові види функцій. Вчились аналізувати та представляти дані, створювати математичні моделі до задач та розв'язувати їх. Настав час усе повторити, закріпити й узагальнити!

У цьому розділі ми:

- пригадаємо властивості степеня із цілим показником;
- узагальнимо, як додавати, віднімати, множити та ділити раціональні вирази;
- повторимо властивості арифметичних квадратних коренів;
- систематизуємо знання з теми «Квадратні рівняння»;
- пригадаємо властивості та графіки функцій $y = \frac{k}{x}$, $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$;
- будемо створювати математичні моделі до задач та розв'язувати їх.

Ключові слова

- Вирази зі степенями (*indices*)
- Раціональні вирази (*rational expressions*)
- Квадратні корені (*square roots*)
- Квадратні рівняння (*quadratic equations*)
- Функції (*functions*)

© Vector, Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

8 Узагальнення і систематизація вивченого матеріалу

Вирази зі степенями

637 Запишіть дріб у вигляді степеня із цілим від'ємним показником.

а) $\frac{1}{5^2}$ б) $\frac{1}{c^4}$ в) $\frac{m}{n}$ г) $\frac{a}{b^6}$ д) $\frac{(x-y)^2}{x+y}$ е) $\frac{(a+2b)^3}{(m-n)^4}$

638 Обчисліть.

а) 7^{-2} б) 3^{-4} в) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ г) $\left(\frac{2}{7}\right)^{-2}$ д) $(-6)^{-4}$

е) $(0{,}5)^{-5}$ ж) 1^{-10} и) $0{,}1^{-4}$ к) $\left(-\frac{5}{6}\right)^{-2}$ л) $\left(2\frac{1}{2}\right)^{-3}$

639 Знайдіть значення виразів.

а) $81\cdot 3^{-3}$ б) $16^{-2} : 4^{-5}$ в) $25^{-2} : (0{,}2^{-1})^{-5}$

г) $\left(1\frac{7}{9}\right)^{-3} \cdot \left(\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}\right)^4$ д) $\frac{6^{-2}\cdot 12^{-4}}{24^{-6}}$ е) $\frac{33^{-2}\cdot 5^{-7}}{25^{-4}\cdot 11^{-3}}$

640 Подайте у вигляді виразу, що не містить степінь з від'ємним показником.

а) $\left(\frac{a^{-7}\cdot b^2}{c^4\cdot d^{-5}}\right)^{-4}$ б) $\left(\frac{9x^{-3}\cdot y^{-4}}{3^{-2}x^{-9}\cdot y^{-6}}\right)^{-1}$ в) $\left(\frac{6a^{-3}}{5b^{-4}}\right)^{-2} \cdot 36a^{-3}b^9$

г) $1\frac{11}{25}\cdot a^{-4}b^{-7}\cdot\left(1\frac{1}{5}b^{-5}a^{-6}\right)^{-3}$ д) $-4{,}8a^{-4}b^2\,(-2a^{-2}c^{-4})^{-2}$

641 Спростіть вирази.

а) $\frac{2^{x+4}+2^x}{17}$ б) $\frac{3^{3x}+3^{2x}}{3^x+1}$ в) $\frac{a^4+a^5}{a^{-2}+a^{-1}}$

г) $\frac{a^{-10}+6a^{-5}b^{-6}+9b^{-12}}{a^{-5}+3b^{-6}}$ д) $\frac{(m^{-2})^3-64}{m^{-4}+4m^{-2}+16}$

$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{m\cdot n} = a^{mn}$

642 Спростіть вирази. Результат запишіть у вигляді виразу, що не містить степінь з від'ємним показником.

а) $5(y-x)^{-2}\cdot\left(\frac{5}{x^{-2}}-\frac{5}{y^{-2}}\right)$ б) $\frac{m^{-4}+n^{-4}}{m^{-8}+n^{-8}}\cdot\left(\frac{5}{x^{-2}}-\frac{5}{y^{-2}}\right)$

643 Спростіть вирази й запишіть результат так, щоб він не містив степінь з від'ємним показником.

а) $\left(\frac{a^{-2}-b^{-2}}{a^{-2}}-\frac{a^{-2}}{b^{-2}+a^{-2}}\right)\cdot(b^{-2}+a^{-2})$ б) $\frac{a^{-7}+b^{-7}}{a^{-8}}-\frac{a^{-5}b^{-7}+a^{-10}}{a^{-6}}$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Раціональні вирази

644 Знайдіть допустимі значення змінної у виразах.

а) $\frac{x+5}{x^2-25}$ б) $\frac{x-6}{(x+4)(x-3)}$ в) $\frac{7}{|y|-8}$ г) $\frac{n}{|n|+11}$

д) $\frac{|a|-1}{a-1}$ е) $\frac{4x+9}{|2x-1|-5}$ ж) $\frac{|b|}{b(b-2)}$ и) $\frac{x^2-17x+2}{(5x-10)(5x+10)}$

645 Скоротіть дроби.

а) $\frac{42x^{10}y^5}{7x^8y^4}$ б) $\frac{4(a-b)(a+b)}{84(a+b)^2}$ в) $\frac{81c(y-x)^2}{9c^3(x-y)^2}$

г) $\frac{3x^3+3xy^2}{15xy^2+15x^3}$ д) $\frac{a^3-64}{a-4}$ е) $\frac{x^2-8xy+16y^2}{2x-8y}$

646 Доведіть тотожності.

а) $\frac{6a^2-37{,}5b^2}{9ab-22{,}5b}=\frac{2a+5b}{3b}$ б) $\frac{9xy^2-y^2}{xy}-\frac{y}{y-x}\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right)=8$

647 Спростіть вирази.

а) $\frac{2a+3b}{a-2k}-\frac{6a-3b}{2k-a}$ б) $\frac{a^2}{a+6}+\frac{12a+36}{6+a}$ в) $\frac{y^2+y+1}{y^3-125}-\frac{4y+24}{125-y^3}$

г) $\frac{100x^2}{100x^2-25}+\frac{100x}{(10x-5)(10x+5)}-\frac{25}{25-100x^2}$

648 Заповніть пропуски так, щоб утворилася правильна рівність.

а) $\frac{15x-6}{3-15x}-\frac{\square}{15x-3}=1$ б) $\frac{\square}{y^2-9}+\frac{1}{y+3}-\frac{5}{y-3}=0$

649 Виконайте додавання та віднімання дробів.

а) $\frac{96-14m}{(m-7)^2}+\frac{m+7}{m-7}$ б) $\frac{a+3}{3-a^2}-\frac{3}{3a-a^2}$

в) $\frac{3xy}{x^3+y^3}+\frac{1}{x+y}$ г) $\frac{1}{(c-7)^2}+\frac{1}{(c+7)^2}-\frac{2}{c^2-49}$

650 Піднесіть до степеня.

а) $\left(\frac{5y}{2}\right)^4$ б) $\left(-\frac{3a^3b^2}{2c^2}\right)^3$ в) $\left(\frac{2y}{3}\right)^4\left(-\frac{x^2}{4y^4}\right)^3$

г) $343m^9n^9\cdot\left(\frac{7^{-1}}{m^2n^3}\right)^3$ д) $\left(\frac{a^6(a-b)^3}{c^9(b-c)}\right)^4:\left(\frac{a^4(a-b)^2}{c^6(b-c)}\right)^6$

651 Виконайте дії з дробами і знайдіть значення виразу:

а) $\frac{(y+4)^2}{y+5}\cdot\frac{2y+4}{y^2-16}$, якщо $y=5$; б) $\frac{1}{y^2+7y}\cdot\frac{y^2-49}{y+2}-\frac{y+7}{y^2-2y}$, якщо $y=4$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

652 Доведіть тотожність.

$$\frac{20x+9}{7-21x}-\left(\frac{3x^2+x}{x^3+27}\cdot\frac{x^2-3x+9}{9x^2-1}-\frac{x+3}{3x^2-x}\right):\frac{7}{x^2+3x}=\frac{2x}{1-3x}$$

Вирази з коренями

653 Обчисліть.

а) $\sqrt{81}$ б) $\sqrt{9{,}61}$ в) $\sqrt{1936}$ г) $\sqrt{26{,}01}-\sqrt{1{,}21}+\frac{1}{2}\sqrt{144}$

д) $\sqrt{11\frac{1}{9}}-\frac{1}{3}\sqrt{324}+2\frac{2}{3}$ е) $\left(\sqrt{529}+\sqrt{2{,}89}\right)\cdot\left(0{,}5\sqrt{10000}-\frac{1}{2}\sqrt{2304}\right)$

ж) $\left(0{,}3\sqrt{225}+\frac{1}{7}\sqrt{1{,}96}\right)\cdot\sqrt{100}$ и) $\dfrac{\sqrt{2809}-\sqrt{529}}{\frac{1}{2}\sqrt{2025}}$

654 Із поданих чисел оберіть:

а) раціональні числа; б) ірраціональні числа.

$\sqrt{99}$	$-\sqrt{2500}$	$-\sqrt{169}$	$-\frac{1}{2}$	3,7
$\sqrt{7}$	$\sqrt{13}$	$\sqrt{5}$	$\sqrt{121}$	10

655 Спростіть вирази.

а) $\left(-2\sqrt{13}\right)^2$ б) $\left(\frac{1}{4}\sqrt{256}\right)^2$ в) $\left(-0{,}3\dfrac{\sqrt{289}}{17}\right)^2$ г) $\left(\dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}}\right)^2$

д) $\left(-\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}\right)^2$ е) $\left(-\dfrac{\sqrt{26}}{13}\right)^2$ ж) $\left(-\dfrac{11\sqrt{33}}{121}\right)^2$ и) $\left(\dfrac{\sqrt{500}}{0{,}5}\right)^2$

656 Знайдіть значення виразів.

а) $\left(\sqrt{\sqrt{5}}\right)^2$ б) $\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{2}(\sqrt{2})^2}{8}$ в) $\left(\sqrt{7\sqrt{3}}\right)^2$

г) $\sqrt{\sqrt{6{,}25^2}}$ д) $\sqrt{(4-\sqrt{7})^2}$ е) $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$

$(\sqrt{a})^2=a$, при $a\geq 0$

$(\sqrt{a})=|a|$, при a — будь-яке дійсне число

657 Спростіть вирази.

а) $\left(\sqrt{6+\sqrt{5}}+\sqrt{6-\sqrt{5}}\right)^2$ б) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{17}\right)$

в) $\left(\sqrt{13}+\sqrt{26}\right)^2-2\sqrt{78}$ г) $5\sqrt{2}\left(3-4\sqrt{10}\right)+40\sqrt{5}$

д) $\left(12\sqrt{2}-2\sqrt{50}+3\sqrt{72}\right)\sqrt{2}$ е) $\left(2\sqrt{3}-6\sqrt{2}\right)\left(6\sqrt{2}+2\sqrt{3}\right)$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

658 Звільніться від ірраціональності в знаменнику дробу.

а) $\frac{a}{\sqrt{17}}$ б) $\frac{14b}{\sqrt{28}}$ в) $\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ г) $-\frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2}+4}$

д) $-\frac{12}{\sqrt{21}-\sqrt{33}}$ е) $\frac{6}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ ж) $\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ и) $\frac{16}{2\sqrt{30}-11}$

659 Спростіть вирази.

а) $(\sqrt{7}+2)(\sqrt{7}-8)+6\sqrt{7}$ б) $\sqrt{40,96a^4b^8c^{16}}$

в) $\sqrt{\frac{x^2+6x+9}{(x-3)^2}}\cdot\frac{x^2-6x+9}{(x+3)^2}$ г) $\sqrt{784\frac{b^{21}}{b^{25}}}$ д) $\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}^2}$

е) $2\sqrt{10}\cdot3\sqrt{5}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{2}$ ж) $\sqrt{-12m^9n^5}$, $m\le0$

660 Спростіть вираз, виконавши тотожні перетворення.

а) $\frac{\sqrt{x}}{y-23\sqrt{y}}:\frac{6\sqrt{x}}{23\sqrt{y}-y}$ б) $\frac{a^2-7}{a-\sqrt{7}}+\frac{a^2-7}{a+\sqrt{7}}$

в) $\frac{14\sqrt{x}-5\sqrt{y}}{11\sqrt{x}}+\frac{3\sqrt{x}-7\sqrt{y}}{11\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ г) $\frac{9a+18\sqrt{ab}+9b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}:3(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

Квадратні рівняння

661 Розв'яжіть неповні квадратні рівняння.

а) $8x^2-32x=0$ б) $32x^2-108=0$ в) $x^2-37=0$

г) $17x^2=0$ д) $\frac{1}{3}x^2+9x=0$ е) $-x^2-100=0$

662 Розв'яжіть рівняння.

а) $4x^2-22x+10=0$ б) $2x^2-8x+6=0$ в) $8x^2-10x+3=0$

г) $3x^2+6x+10=0$ д) $-2x^2=-x+4$ е) $16x^2+1=8x$

663 Розв'яжіть рівняння.

а) $\frac{16x+8}{x}=x+4$ б) $x=\sqrt{8-8x}$ в) $(x-13)(x+27)=0$

г) $\sqrt{5x^2+4x-6}=1$ д) $x+2=\frac{16x+5}{x}$ е) $|x^2-4x|=5$

664 Знайдіть корені рівняння.

а) $(3x-17)^2-2(3x-17)+1=0$ б) $(x^2+3)^2+7=8(x^2+3)$

в) $(x^2-2)^2+4(x^2-2)=-3$ г) $(3x-5)(x+3)=(x-3)(20+4x)$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

665 При яких значеннях a рівняння є неповним квадратним?

а) $(a-5)x^2-(a-3)x-(a^2-25)=0$ б) $x^2-(2a-8)+(a^2-49)=0$

666 У порту резервуар для зберігання соняшникової олії наповнюється двома трубами за 3 години. Якщо наповнювати резервуар через першу трубу, то він заповниться на 8 год швидше, ніж якщо наповнювати через другу. За скільки годин можна наповнити резервуар, якщо використовувати лише першу трубу?

667 Скоротіть дроби.

а) $\dfrac{x^2+21x+90}{x^2+24x+135}$ б) $\dfrac{x^2+22x+57}{x^2+23x+76}$ в) $\dfrac{2x+36}{x^2+21x+54}$ г) $\dfrac{x^2+19x+78}{0{,}5x+6{,}5}$

668 Знайдіть значення b і другий корінь рівняння, якщо один із коренів рівняння:

а) $4x^2+bx-15=0$ дорівнює 5; б) $5x^2+bx-18=0$ дорівнює 9.

Функції

669 Побудуйте графіки функцій.

а) $y=\dfrac{4}{x}$ б) $y=x^2$ в) $y=\sqrt{x}$ г) $y=\dfrac{16x-32x^2}{4x^3-2x^2}$ д) $y=\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}$

670 Перевірте, чи належать точки $A(2;4)$, $B(1;8)$, $C(4;2)$, $D(16;4)$, $E(3;9)$, $F(-5;25)$, $S(144;12)$ графіку функції:

а) $y=\dfrac{8}{x}$; б) $y=x^2$; в) $y=\sqrt{x}$.

671 Знайдіть значення аргумента x для функцій:

а) $y=\dfrac{16}{x}-2$, якщо значення функції дорівнює 6;

б) $y=\dfrac{x^2}{6}+1$, якщо значення функції дорівнює 7;

в) $y=\dfrac{1}{3}\sqrt{x}-1$, якщо значення функції дорівнює 3.

672 Задано функцію $y=f(x)$, де

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5}{x}, \text{ якщо } x<0,\\ x^2, \text{ якщо } 0\le x\le 5,\\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x>5.\end{cases}$$

Знайдіть:

а) $f(-2)$; б) $f(-1)$; в) $f(0)$; г) $f(1)$; д) $f(25)$;

е) $f(400)$; ж) $f(3)$; и) $f\left(\dfrac{2}{3}\right)$; к) $f(-0{,}5)$; л) $f(4)$.

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

673 Розв'яжіть рівняння графічно.

а) $\frac{9}{x} = x^2$ б) $\sqrt{x} = x^2$ в) $\sqrt{x} = \frac{12}{x}$ г) $-\frac{8}{x} = x^2$

674 Функцію задано формулою $f(x) = \frac{5}{x}$. Обчисліть:

а) $f(7) + f(-10)$; б) $f(-6) + 5f(30)$.

675 Функцію задано формулою $f(x) = \frac{1}{x}$. Обчисліть значення аргумента, при якому виконується рівність:

а) $f(x + 3) = -f(x + 8)$; б) $f(x + 6) = -9f(x + 9)$.

676 (*) Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, \text{ якщо } x \le -5, \\ x^2, \text{ якщо } -5 < x \le 0, \\ \sqrt{x}, \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$$

Елементи статистики та аналіз даних

677 У таблиці наведено швидкість деяких автомобілів під час руху. Використовуючи дані, подані в таблиці, побудуйте гістограму. Потім дайте відповіді на запитання.

Швидкість (v в км/год)	Кількість автомобілів
$60 < v \le 70$	5
$70 < v \le 80$	17
$80 < v \le 90$	23
$90 < v \le 100$	0
$100 < v \le 110$	10

а) Скільки всього автомобілів аналізувалось?
б) Яка швидкість більшості автомобілів?

678 Діаграма «стовбур — листя» показує висоту будівель (у метрах) у великому місті. Розгляньте діаграму та дайте відповіді на запитання.

Стовбур	Листя
11	4 8
12	
13	0 1 5 5 6
14	2 5 7 8
15	0 1 1 4 9
16	2 3 8 9
17	0 0 5 6 7
18	1 2 2 3 9

Ключ: 11 | 4 означає 11,4 м

а) Знайдіть кількість будівель у місті.
б) Яка висота найнижчої та найвищої будівлі в місті?
в) Скільки будівель вищі за 13 м, але нижчі за 17,5 м?
г) Скільки відсотків займають будівлі, висота яких перевищує 15 м?

679 Середній вік 18 працівниць компанії становить 45 років, а середній вік 22 працівників тієї самої компанії становить 54 роки. Який середній вік усіх працівників і працівниць разом?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Перевірте свої досягнення

1 Скоротіть дріб $\frac{12n^4}{42n^8}$.

а) $\frac{2n^4}{7}$ б) $\frac{2}{7n^4}$ в) $\frac{2}{7n^2}$ г) $\frac{2n^2}{7}$

2 Спростіть вираз $\frac{5a-5b}{9a-9b}$.

а) $\frac{5a}{9b}$ б) $\frac{5}{9(a-b)}$ в) $\frac{5(a-b)}{7}$ г) $\frac{5}{9}$

3 Оберіть число, яке записано у стандартному вигляді.

а) $3{,}2 \cdot 10^{-6}$ б) $3{,}2 \cdot 100^{-3}$ в) $0{,}32 \cdot 10^{-3}$ г) $32 \cdot 10^{-9}$

4 Оберіть ірраціональне число.

а) $\frac{1}{8}$ б) $\sqrt{8}$ в) $-18{,}8$ г) $\sqrt{81}$

5 Розв'яжіть рівняння $4x^2 - 8x = 0$.

а) 0; 2 б) −2; 0 в) 0 г) 2

6 Графіком якої функції є парабола?

а) $y = 3x$ б) $y = \sqrt{x}$ в) $y = x^2$ г) $y = \frac{3}{x}$

7 Яка з точок належить графіку функції $y = -\frac{4}{x}$?

а) (−2; −2) б) (−2; 2) в) (−1; −4) г) (1; 4)

8 Обчисліть: $\frac{(\sqrt{15})^2}{\sqrt{10}} : \frac{5}{\sqrt{10}}$.

а) $\sqrt{5}$ б) 7,5 в) 5 г) 3

9 Розв'яжіть рівняння $4x^2 + 3x - 1 = 0$.

а) −1; 0,25 б) 1; −025 в) 3; −1 г) 4; −3

10 Спростіть вираз $\frac{a+1}{4a} \cdot \left(\frac{a}{a+1} - \frac{a^2}{1+2a+a^2}\right)$.

а) $\frac{a}{a+1}$ б) $\frac{a}{(a+1)^2}$ в) $\frac{a}{4(a+1)}$ г) $\frac{a}{4(a+1)^2}$

11 Знайдіть допустимі значення змінної у виразі $\frac{3x}{5|x|-20}$.

а) $x \neq -4$ б) $x \neq 4$ в) $x \neq \pm 4$ г) $x \neq 0$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Проєктна робота «Абетка алгебри за курс 8 класу»

Крок ① Об'єднайтеся у 3 групи шляхом жеребкування. Розподіліть ролі. Підготуйте необхідні матеріали (11 аркушів паперу для кожної групи, фломастери, кольорові олівці).

Крок ② Кожній групі треба підготувати частину абетки алгебри за курс 8 класу, де кожна літера «розповідає» про різні терміни, поняття, історичні постаті, важливі дії чи операції, які вивчалися впродовж року та починаються на цю букву. Дібране слово чи словосполучення потрібно проілюструвати зображенням чи прикладом застосування. Дозволяється до 3 букв дібрати слово, всередині якого є відповідна буква, та до 1 букви дібрати слово, яке починається на цю букву, але стосується всієї математики.

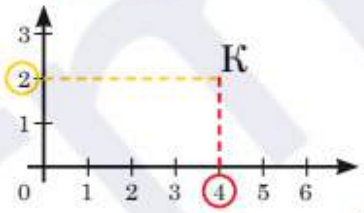
Група 1

Слова до букв:
а, б, в, г, ґ, д, е, є, ж, з, и

Абсциса точки

А,а

К (4; 2)



Елемент множини

Е,е

A

н
д і о
р п

$д \in A$

Група 2

Слова до букв:
і, ї, й, к, л, м, н, о, п, р, с

Ірраціональні числа

І,і

Це числа, які не можна записати у формі звичайного дробу $\frac{a}{b}$, де a і $b \in \boldsymbol{Z}$ і $b \neq 0$.

Арифметичні дії

Ї,ї

\+ додавання
– віднімання
· множення
: ділення

Група 3

Слова до букв:
т, у, ф, х, ц, ч, ш, щ, ь, ю, я

Умова задачі

У,у

Марія загадала дріб $\frac{13}{17}$. Кирило відняв від чисельника і знаменника дробу одне й те саме число та отримав дріб, який дорівнює $\frac{1}{2}$.

Прирівнювати до 0

Ю,ю

$(y + 1)(y - 4) = 0$
$y + 1 = 0$ або $y - 4 = 0$
$y = -1$ або $y = 4$

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

А, а Абсциса точки	**Б, б**	**В, в** Теорема Вієта	**Г, г**	**Ґ, ґ** Обґрунтовувати	**Д, д**
Е, е Елемент множини	**Є, є**	**Ж, ж**	**З, з** Змінна x	**и**	**І, і** Ірраціональні числа
Ї, ї Арифметичні дії	**Й, й**	**К, к** Квадратне рівняння	**Л, л**	**М, м** Множина	**Н, н**
О, о	**П, п** Парабола	**Р, р**	**С, с**	**Т, т**	**У, у** Умова задачі
Ф, ф Функція	**Х, х**	**Ц, ц**	**Ч, ч** Чверть	**Ш, ш**	**Щ, щ**
ь	**Ю, ю** Прирівнювати до 0	**Я, я**			

Крок ③ Кожна група має продемонструвати свою частину абетки. Тоді всі прикріплюють букви на дошку чи плакат, щоб утворити абетку з 33 слів алгебри за курс 8 класу. Якщо у вас виникли труднощі щодо пошуку слів, які починаються на певну букву, обговоріть це з вашими однокласниками та однокласницями, поділіться ідеями.

Крок ④ Обговоріть підсумки проєкту з усім класом.

До яких букв було найважче дібрати слово, що починається на цю букву? До яких найлегше?

Чи були такі букви, до яких ви не змогли дібрати слів, навіть якщо пропонована буква містилася всередині слова?

Слова якої групи найвдаліше підкреслили вивчений матеріал у 8 класі?

Що цікавого ви пригадали? Над чим ще треба попрацювати?

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Відповіді

1 Перевірте свої досягнення

1 а **2** г **3** б **4** г **5** а **6** а **7** а **8** в **9** в

2 Перевірте свої досягнення

1 б **2** а **3** б **4** в **5** а **6** в **7** в **8** б **9** г **10** а

1 г **2** б **3** б **4** г **5** в **6** б **7** в **8** г **9** а **10** г

3 Перевірте свої досягнення

1 б **2** а **3** г **4** в **5** б **6** в **7** а **8** г **9** в **10** б

4 Перевірте свої досягнення

1 б **2** в **3** б **4** а **5** б **6** г **7** а **8** б **9** г **10** а **11** б

5 Перевірте свої досягнення

1 в **2** г **3** б **4** а **5** в **6** б **7** г **8** в **9** а **10** а **11** б

6 Перевірте свої досягнення

1 в **2** а **3** г **4** б **5** а **6** б **7** г **8** б **9** в **10** в **11** а

7 Перевірте свої досягнення

1 б **2** г **3** б **4** г **5** б **6** а **7** в

8 Перевірте свої досягнення

1 б **2** г **3** а **4** б **5** а **6** а **7** в **8** б **9** г **10** в **11** в

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.

Навчальне видання

Джон Ендрю Біос

Алгебра

Підручник для 8 класу закладів загальної середньої освіти

Головна редакторка ***Діана Головань***

Редакторка ***Емілія Вітряк***

Дизайнерка ***Анастасія Дяченко***

Коректорка ***Ольга Пластун***

Перекладачки: ***Тетяна Калініченко, Ірина Краєвська***

Рецензенти/тки:

Тетяна Ігнатьєва, *вчителька математики КЗ «"Ліцей" Муніципальний колегіум» Кропивницької міської ради*

Святослав Рябий, *вчитель математики ОЗ «Шебутинецький ліцей Сокирянської міської ради»*

Раїса Короновська, *вчителька математики ліцею №13 Хмельницької міської ради*

Список використаних джерел та ілюстрацій

Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. 19,44. Обл.-вид. арк. 17,496.
Наклад 0000 прим. Зам. 00000.

ТОВ «Видавництво «Лінгвіст»
04208, м. Київ, просп. Василя Порика, 9-Г, к. 58.
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції серія ДК № 6168 від 03.05.2018 р.
Адреса редакції: 04071, м. Київ, вул. Нижній Вал, 17/8.
Email: publishing@linguist.ua
Тел. (044) 599-32-28

Віддруковано у ТОВ «КОНВІ ПРІНТ».
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції серія ДК № 6115 від 29.03.2018 р.
03680, м. Київ, вул. Антона Цедіка, 12.
Тел. (044) 332-84-73

© Vector. Maths&Science та © Видавництво «Лінгвіст». Усі права захищені. Жодна частина цієї публікації не може бути відтворена, збережена в пошуковій системі або передана в будь-якій іншій формі будь-якими способами без письмового дозволу видавця. За жодних обставин ніяка частина цього матеріалу не може бути скопійована для перепродажу або для іншого використання.