

Григорій Бевз, Валентина Бевз,
Дарина Васильєва, Наталія Владімірова

АЛГЕБРА

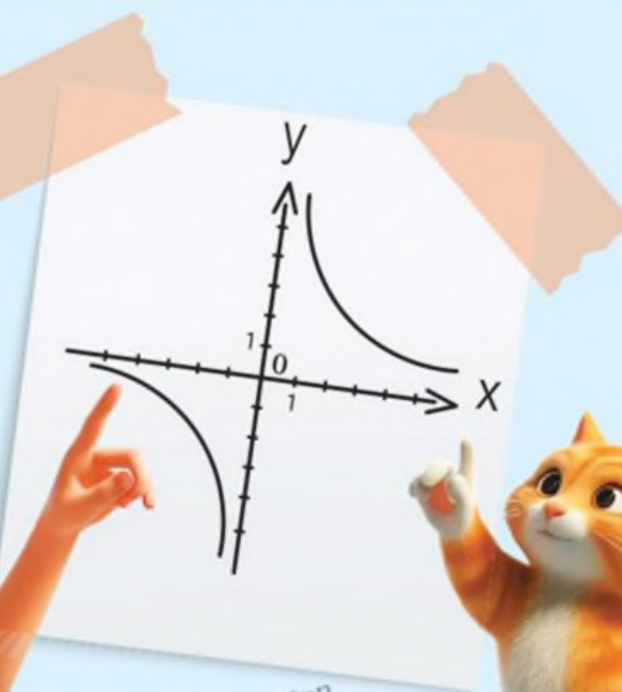
$$-\frac{A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}$$

Якщо $\frac{A}{B} = 0$, то $\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0 \end{cases}$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$



8 Клас

УДК 512*кл8(075.3)
А34

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(наказ Міністерства освіти і науки України від 21.02.2025 № 347)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Підручник розроблено за модельною навчальною програмою
«Алгебра. 7–9 класи» для закладів загальної середньої освіти
(авт. Бурда М. І., Тарасенкова Н. А., Васильєва Д. В.)

Умовні позначення

-  — попрацюйте в парах
-  — попрацюйте в групах
-  — склади розповідь чи задачу
-  — завдання для обговорення в парі
-  — завдання дослідницького характеру
-  — завдання з використанням ІКТ
-  — завдання, рекомендоване для домашньої роботи

До підручника розроблено інтерактивний електронний додаток. Щоб ознайомитись із матеріалами додатка, перейдіть за посиланням

<https://vse.ee/cubd>



А34 **Алгебра** : підруч. для 8 класу закладів загальної середньої освіти / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Д. В. Васильєва, Н. Г. Владімірова. — К. : Видавничий дім «Освіта», 2025. — 272 с. : іл.

ISBN 978-966-983-583-3.

УДК 512*кл8(075.3)

© Бевз Г. П., Бевз В. Г., Васильєва Д. В.,
Владімірова Н. Г., 2024

ISBN 978-966-983-583-3

© Видавничий дім «Освіта», 2025

ДОРОГІ ВОСЬМИКЛАСНИКИ ТА ВОСЬМИКЛАСНИЦІ!

- Цей підручник містить виклад теорії, задачі та вправи, завдання для самостійної роботи, тестові завдання, типові завдання до тематичної роботи тощо.
- Користуючись підручником, ви значно розширите свої математичні знання й уміння. Якщо досі вам були відомі з алгебри тільки раціональні числа, цілі вирази і лінійні рівняння, то у 8 класі ви опануєте дійсні числа, раціональні вирази і квадратні рівняння. Отже, навчитесь розв'язувати багато і таких задач, які досі розв'язувати не вміли.
- Вивчаючи теоретичний матеріал, звертайте увагу на слова, надруковані **жирним курсивом**, — це нові алгебраїчні терміни. Ви повинні усвідомити, що вони означають, і запам'ятати їх.
- Виділені **жирним шрифтом** речення є основними означеннями, правилами та іншими важливими математичними твердженнями. Слід навчитися їх формулювати (можна своїми словами) та застосовувати до розв'язування пропонованих вправ і задач.
- Підручник містить вправи різних рівнів складності: для усного розв'язування та письмові рівні А і Б. У рубриці «Виконаємо разом!» наведено зразки розв'язань важливих видів задач. Корисно ознайомитися з ними перед виконанням домашніх завдань.
- Рубрика «Готуємося до тематичного оцінювання» допоможе якнайкраще підготуватися як до тематичного оцінювання, так і в подальшому до зовнішнього незалежного оцінювання чи національного мультипредметного тесту.

Перш ніж працювати з підручником, перейди за посиланням <https://vse.ee/crwq> та повтори відомості за 7 клас



Розділ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ

ОСТРОГРАДСЬКИЙ Михайло Васильович

(1801–1862) — всесвітньо відомий український математик і механік. Видатний учений, організатор наукової школи прикладної математики і механіки, популяризатор математики, прогресивний реформатор математичної освіти, чудовий лектор і талановитий педагог-новатор.



§ 1

Ділення і дроби

Division and Fractions

§ 2

Основна властивість дробу

Fractions Main Property

§ 3

Раціональні вирази

Rational Expressions

§ 4

Додавання і віднімання дробів

Fractions Addition and Subtraction

§ 5

Множення дробів

Fractions Multiplication

§ 6

Ділення дробів

Fractions Division

§ 7

Перетворення раціональних виразів

Rational Expressions Transformation

§ 8

Раціональні рівняння

Rational Equations

§ 9

Степені з цілими показниками

Degress with Integral Indicators

§ 10

Стандартний вигляд числа

Standard Form Number

§ 11

Функція $y = \frac{k}{x}$

Function $y = \frac{k}{x}$

Досі тобі були відомі тільки цілі алгебраїчні вирази. А вони дають можливість розв'язувати лише прості задачі. Набагато зручнішою і потужнішою є алгебра, у якій використовуються не тільки цілі вирази, а й дробові. Такі вирази разом називають **раціональними**.

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

- алгебраїчні дроби та дії над ними;
- раціональні вирази, тотожності та рівняння;
- стандартний вигляд числа;
- функцію $y = \frac{k}{x}$ та її властивості.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо!

Що таке
звичайний дріб

$\frac{a}{b}$ ← чисельник
← знаменник

Кожний звичайний
дріб — це частка від
ділення його чисель-
ника на знаменник

$$\frac{2}{3} = 2 : 3$$

Властивість дії
ділення:
на нуль ділити
не можна

$$\frac{a}{0}$$

§ 1. Ділення і дроби

КЛЮЧОВІ СЛОВА

дріб — *fraction* чисельник — *numerator*
знаменник — *denominator* змінна — *variables*

Ділення двох цілих виразів не завжди можна виконати без остачі. Наприклад, частки $a^3 : a^5$, $4xy^2 : 2yz$ не можна записати у вигляді цілих виразів.

Якщо частка від ділення одного виразу на інший не є цілим виразом, то її записують у вигляді дробу. Наприклад:

$$2 : 3 = \frac{2}{3}, \quad a^3 : a^5 = \frac{a^3}{a^5}, \quad 2ax : 3bx^2 = \frac{2ax}{3bx^2}, \quad ax : (a + x) = \frac{ax}{a + x}.$$

Дробом називають частку від ділення двох виразів, записану за допомогою дробової риски.

Які б не були вирази A і B , їх частка $\frac{A}{B}$ — дріб.

Вирази A і B — члени цього дробу: A — чисельник, B — знаменник.



Звичайний дріб — окремий вид дробу. Це дріб, члени якого — натуральні числа.

Якщо члени дробу — многочлени, його називають **раціональним дробом**.

Дроби зі змінними мають значення (зміст) не при всіх значеннях змінних. Наприклад, якщо $a = 5$, то $\frac{2a+3}{a-5} = \frac{2 \cdot 5 + 3}{5-5} = \frac{13}{0}$.

Запис $\frac{13}{0}$ — не число, бо на 0 ділити не можна. Отже, дріб $\frac{2a+3}{a-5}$ при $a = 5$ не має змісту. При всіх інших значеннях a він має зміст. Говорять, що для даного дробу **допустимими** є всі значення змінної a , крім $a = 5$.

Для змінних, що входять у знаменник дробу, допустимими є тільки ті значення, які не перетворюють цей знаменник на нуль.

Розглянемо два дроби: $\frac{6}{a}$ і $\frac{6(a-3)}{a(a-3)}$.

Складемо таблицю їх значень для деяких значень a .

a	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$\frac{6}{a}$	-1,5	-2	-3	-6		6	3	2	1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$
$\frac{6(a-3)}{a(a-3)}$	-1,5	-2	-3	-6		6	3		1,5	1,2	1	$\frac{6}{7}$

Як видно з таблиці, обидва дроби мають рівні значення при наведених значеннях змінної a , за винятком 0 і 3. Значення $a = 0$ недопустиме для обох розглядуваних дробів, значення $a = 3$ недопустиме для другого дробу. При всіх допустимих значеннях змінної a всі відповідні значення цих дробів рівні.

Два вирази, відповідні значення яких рівні при всіх допустимих значеннях змінних, називають **тотожно рівними**, або **тотожними**.

Це означення від подібного означення для цілих виразів відрізняється тільки словом «допустимих». Говорячи тільки про цілі вирази, це слово раніше ми вилучали, оскільки для них усі значення змінних допустимі.

Два тотожних вирази, сполучені знаком рівності, утворюють **тотожність**. Заміну одного виразу іншим, тотожним йому, називають **тотожним перетворенням** даного виразу.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Як співвідносяться між собою різні види дробів, можна проілюструвати такою діаграмою (мал. 1.1).

Приклади

звичайних дробів: $\frac{3}{7}, \frac{11}{35}, \frac{1}{149}$;

числових: $\frac{0,5}{2,3}, \frac{-\frac{3}{4}}{0,25}, \frac{3,7 - \frac{1}{2}}{2^2 + 7}$;

раціональних: $\frac{a}{5}, \frac{1}{n}, \frac{x^2 - 2}{2x}, \frac{a^2 - 3ac + 5c^2}{2ac}$.



Мал. 1.1

Загальне поняття дробу досить широке. Крім раціональних, дробу бувають і нерациональні, поки що тобі не відомі, наприклад:

$$\frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{x}}, \frac{\cos x}{\sin x}, \frac{\sqrt{1 - x^2}}{3x^2}, \frac{1 + \ln x}{2 \ln x}.$$

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Сформулюй означення дробу.
2. Як називають члени дробу?
3. Які види дробів ти знаєш?
4. Які дробу називають раціональними? Наведи приклади.
5. Що таке допустимі значення змінних? Наведи приклади.
6. Які вирази називають тотожними?
7. Сформулюй означення тотожності.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Які значення змінних допустимі для дробу:

а) $\frac{1}{x+7}$;

б) $\frac{x-a}{x^2-a^2}$?

Розв'язання. а) $x + 7 = 0$, якщо $x = -7$. Це значення x недопустиме для даного дробу. Всі інші значення допустимі.

б) $x^2 - a^2 = 0$, якщо $(x - a)(x + a) = 0$, звідси або $x = a$, або $x = -a$.

Відповідь. а) Допустимі значення змінної x — всі числа, крім числа -7 ;

б) допустимі значення змінної x — всі значення, крім a і $-a$.

2. Доведи, що дріб $\frac{m}{m^2 + 1}$ має зміст при всіх значеннях m .

Доведення. При кожному раціональному значенні m число m^2 невід'ємне, а $m^2 + 1$ — додатне. Знаменник даного дробу при кожному значенні m не дорівнює 0. Отже, при кожному значенні m даний дріб має зміст. А це й треба було довести.

3. Чи тотожні вирази:

а) $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ і $2a^2b$;

б) $\frac{(-a)^7}{a^6}$ і $\frac{(-a)^6}{a^5}$?

Розв'язання. а) Подамо дріб $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ у вигляді частки двох одночленів і виконаємо ділення:

$$\frac{14a^3b^2}{7ab} = 14a^3b^2 : 7ab = 2a^2b.$$

При всіх допустимих значеннях змінних ($a \neq 0$, $b \neq 0$) перший вираз дорівнює другому, а тому їх відповідні значення рівні.

Отже, вирази $\frac{14a^3b^2}{7ab}$ і $2a^2b$ тотожні.

б) Виконаємо дії в кожному виразі, використовуючи властивості степенів: $\frac{(-a)^7}{a^6} = \frac{-a^7}{a^6} = -a$; $\frac{(-a)^6}{a^5} = \frac{a^6}{a^5} = a$.

Як бачимо, при всіх допустимих значеннях змінної ($a \neq 0$) вирази набувають протилежних значень. Отже, вони нетотожні.

Відповідь. а) Вирази тотожні; б) вирази нетотожні.

ВИКОНАЙ УСНО



1. Провідміняй слова: *дріб, частка, знаменник*.

2. Які з наведених нижче виразів — дробі?

А $x - \frac{1}{x}$

Б $\frac{1}{2} - \frac{3}{x}$

В $\frac{-2}{3}$
0,5

Г $\frac{1-a^2}{2a}$

3. Чому дорівнює значення виразу $\frac{x-5}{x+5}$ при:

а) $x = 0$;

б) $x = -1$;

в) $x = 5$;

г) $x = -5$?

4. Які значення змінних допустимі для дробів?

а) $\frac{2x}{x+3}$;

б) $\frac{1}{x(x-y)}$;

в) $\frac{c-x}{1+c^2x^2}$;

г) $\frac{a}{a^2-1}$.

5. Який із дробів має зміст при будь-яких значеннях змінної a ?

А $\frac{2}{3+a}$

Б $\frac{5-a}{a(a+2)}$

В $\frac{7a}{a^2+7}$

Г $\frac{13}{a^2}$

6. Який із виразів не можна записати у вигляді одночлена?
 А $12x^4y^3 : 0,3x^4y^2$ Б $3ax^3 : 9ax^2$ В $x^5y^4c^2 : y^2c^5$ Г $6a^7xy^5 : 3a^5$

7. Чи тотожні вирази?

а) $\frac{4x^4}{4x^2}$ і x^2 ; б) $\frac{8m^5}{5m^4}$ і $3m$; в) $\frac{7x^2}{7x^4}$ і x^2 ; г) $\frac{ab}{a+b}$ і $\frac{ba}{a+b}$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



8. Запиши дріб, у якого:
 а) чисельник $2c$, знаменник $3p$; б) чисельник 1 , знаменник $x - y$; в) чисельник z^2 , знаменник $2 + z^2$.
9. Утвори дріб, у якого чисельник дорівнює $6m$, а знаменник:
 а) на 5 менший за чисельника;
 б) на 2 більший за чисельник;
 в) удвічі менший від чисельника;
 г) дорівнює квадрату чисельника без одиниці.

Запиши у вигляді одночлена частку (10, 11).

10. а) $-8x^4 : 2x$; б) $-9x^7 : 9x^5$; в) $2,5x^7 : (-0,5x^5)$;
 г) $-6x^4y^3 : 3x^4y^2$; д) $32ax^3 : 8ax^2$; е) $-1,2x^5y^4c^2 : (-0,3y^2c)$.
11. а) $6a^7 : 3a^5$; б) $-4a^4 : (-8a^4)$; в) $1,8a^7c^5 : (-0,6a^5c^4)$.

Знайди значення дробу (12, 13).

12. а) $\frac{36}{3x - x^2}$, якщо $x = -3$; б) $\frac{a+4}{6a}$, якщо $a = 5$;
 в) $\frac{1}{c^2 - 9}$, якщо $c = -4$; г) $\frac{m}{|m|}$, якщо $m = -5$.
13. а) $\frac{x^2}{x^2 - 10}$, якщо $x = 2$; б) $\frac{2x}{x^2 - y^2}$, якщо $x = -12$ і $y = 13$;
 в) $\frac{2(a+b)}{a-b}$, якщо $a = 9$ і $b = -7$; г) $\frac{x}{y(x-2)}$, якщо $x = 5$ і $y = \frac{1}{3}$.

14. Користуючись калькулятором, знайди значення дробу $\frac{2x^2+3}{3x}$,
 якщо: а) $x = 2,75$; б) $x = 21,8$. Відповідь округли до десятих.

15. Гра. Один із гравців / одна із гравчинь називає значення для змінної p , а інший / інша — записує дріб зі змінною p , знаменник якого дорівнюватиме 0 за заданого значення змінної.

Визнач, при яких значеннях змінних не має змісту дріб (16, 17).

16. а) $\frac{m}{n}$; б) $\frac{2}{a-3}$; в) $\frac{x+p}{x+4}$; г) $\frac{3c-8}{3c+8}$.

17. а) $\frac{3}{x-5}$; б) $\frac{a-6}{a+9}$; в) $\frac{3m}{2-m}$; г) $\frac{12z}{3z-15}$.

18. Для кожної задачі запиши відповідь у вигляді виразу. Визнач, при яких значеннях змінних не має змісту вираз.

а) Протягом x днів учень отримав 200 грн кишенькових грошей від батьків. Яку кількість грошей в середньому учень отримував щодня?

б) Подоланий шлях складався з трьох ділянок довжинами a , b , c км. Знайди витрачений час на цей шлях, якщо середня швидкість руху становила d км/год.

в) Брусok має масу m г та об'єм V см³. Знайди густину бруска, що має масу на 200 г більшу, а об'єм — на 20 см³ менший.

Знайди допустимі значення змінної, що входить до виразу (19–22).

19. а) $\frac{3a}{a^2-16}$; б) $\frac{1}{x(x^2-9)}$; в) $\frac{m}{(m-1)(m+4)}$; г) $\frac{a^0}{a^2+1}$.

20. а) $\frac{2}{x(1+x)}$; б) $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; в) $\frac{3}{4x-x^3}$; г) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$.

21. а) $12x^3a^2 : 2xa^2$; б) $9,5m^7 : 0,5m^2x^5$; в) $5x^7c : (-0,5x^5)$.

22. а) $16x^4y^3 : 8x^4y$; б) $3,2ax^7 : 2ax^2$; в) $-7,2x^3y^5c^3 : (-0,8y^3c)$.

Запиши дробу, які не мають змісту, якщо (23, 24):

23. а) $x = 3$; б) $y = -1$; в) $y = -4$ і $y = 0$;
г) $a = 0$ і $a = 0,5$; г) $m = 1$ і $m = -5$.

24. а) $x = 5$; б) $z = -3$; в) $t = 0$;
г) $x = 0$ і $x = -3$; г) $x = -2$ і $x = 2$.

25. Установи відповідність між дробами, заданими умовами (1–4), та значеннями змінної a , за яких ці дробу не мають змісту (А–Д).

1 $\frac{6a}{a-8}$	А 5; -5
2 $\frac{a-3}{a(a+3)}$	Б -2
3 $\frac{a-1}{a^2-25}$	В 8
4 $\frac{a}{ a +2}$	Г -3; 0
	Д таких значень не існує

Доведи тотожність (26, 27).

26. а) $\frac{2a \cdot 3b}{a+b} = \frac{6ab}{a+b}$; б) $\frac{15a^3b^2}{5a^2b} = 3ab$;

$$\text{в)} \frac{2a+5a}{3a+4a} = \frac{3a+4a}{2a+5a};$$

$$\text{г)} \left(\frac{2ab^2}{6a} \right)^3 = 3 \cdot \left(\frac{b^3}{9} \right)^2.$$

$$27. \text{ а)} \frac{a^6}{a^3} = a^2 \cdot a;$$

$$\text{б)} \frac{(m-1)^7}{(m-1)^5} = \frac{(m-1)^5}{(m-1)^3};$$

$$\text{в)} \frac{3a^5+2a^5}{a^5} = \frac{15a^5}{2a^5+a^5};$$

$$\text{г)} x+y = \frac{(x+y)^2}{x+y}.$$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



28. Заповни таблицю.

Ділене	Дільник				
	a^2	ac	$2a^3c$	$-2ac^3$	$-12c^2$
$6a^5c^4$					
$12a^3c^5$					
$-6a^4c^3x$					
$1,2a^3c^2$					

29. Заповніть таблицю.



a	-2	-1	0	1	2	3	4	10
$\frac{2}{a-3}$								
$\frac{2a}{a^2-3a}$								

Які значення a недопустимі для дробу $\frac{2}{a-3}$? А для дробу $\frac{2a}{a^2-3a}$?

Чи рівні значення цих дробів, коли $a = 100$?

30. Склади і заповни таблицю значень дробів $\frac{2a}{2+a}$, $\frac{a}{1+0,5a}$ і $\frac{2a^2}{2a+a^2}$ для цілих значень a , $|a| \leq 5$. Який висновок можна зробити?

31. При яких значеннях c значення дробу $\frac{c+2}{5}$ дорівнює:

а) 1; б) 0; в) -1; г) 2; г) -100?

32. При яких значеннях x значення дробу $\frac{3x-12}{4}$ дорівнює:

а) -3; б) 0; в) 1; г) 3?

33. Які значення x допустимі для дробу?

а) $\frac{1}{x(x-1)(x+2)}$;

б) $\frac{3-x}{(2x-1)(x^2-16)}$;

в) $\frac{(x-3)^2}{(2x+1)^2(x-7)^2}$;

г) $\frac{x+13}{(x^2+1)(2x^2+3)}$.

34. What values of x are acceptable for a fraction?

а) $\frac{x^2-5x+100}{(x^2-4)(x^4-1)}$;

б) $\frac{1}{x^2-4x+4}$.

35. Укажи допустимі значення змінної для дробу.

а) $\frac{2x}{x(x+7)(x-2)}$; б) $\frac{4}{(1+2x)(x^2-9)}$; в) $\frac{5a}{(a^2+3)(3a^2+2)}$; г) $\frac{m+12}{m^2-8m+16}$.

36. Чи при будь-якому значенні змінної x значення дробу:

а) $\frac{9}{x^2+1}$ додатне;

б) $\frac{3x^2}{4x^2-4x+1}$ додатне;

в) $\frac{-x^2}{x^2+15}$ від'ємне;

г) $\frac{x^2+6}{2x-x^2-1}$ від'ємне?

37. Доведи, що при будь-якому значенні змінної x значення дробу $\frac{5}{x^2+3}$ додатне, а значення дробу $\frac{(-3)^2}{-3-x^2}$ від'ємне.

38. Доведи, що для даного дробу допустимими є будь-які значення змінних.

а) $\frac{3x}{x^2+1}$;

б) $\frac{5}{(x-1)^2+3}$;

в) $\frac{2}{4x^2-4x+3}$.

Розв'яжи рівняння відносно змінної x і вкажи, при яких значеннях a рівняння має корені (39, 40).

39. а) $ax - 2 = 2x + 3a$; б) $a^2x - 3 = ax + a$; в) $4(a^2x - 3) = a + x$.

40. а) $3ax - 2a = a^2x + 6$; б) $ax - a = 7x - 4$; в) $9x - 5 = a(ax - 2)$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

41. Знайди допустимі значення змінних, що входять до виразу.

а) $\frac{3x+5}{2-|3x-1|}$;

б) $\frac{-3b}{a^2-5ab+6b^2}$;

в) $\frac{x}{x-\frac{9}{x}}$.



42. Який із дробів: а) найменший; б) найбільший, якщо кожне із чисел a і c більше за 1?

$$\frac{a}{c-1}; \quad \frac{a}{c+1}; \quad \frac{2a}{2c+1}; \quad \frac{2a}{2c-1}; \quad \frac{3a}{3c+1}; \quad \frac{3a}{3c-1}.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



43. Скороти дріб.

а) $\frac{35}{56}$; б) $\frac{144}{441}$; в) $\frac{5120}{2520}$; г) $\frac{693}{825}$; ґ) $\frac{3366}{4488}$.

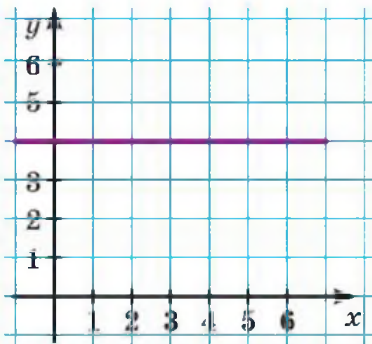
44. Подай у вигляді многочлена вираз.

а) $(x-y)(x+y) - x(x-3)$; б) $(b+1)^2 + 3b(2b-1)$;
в) $y(y+2x) - (x+y)^2$; г) $(b+4)^2 - (b-3)(b+3)$.

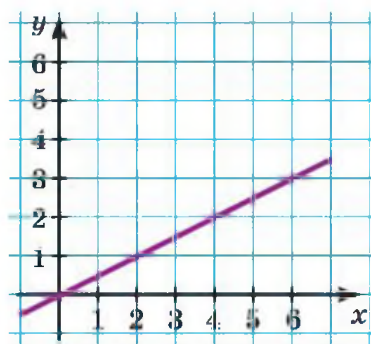
45. Розклади на множники вираз.

а) $x^2 - 16$; б) $x^2 - 9y^4$; в) $x^2 - 6x + 9$;
г) $a^3 - 4a$; ґ) $3a^2 - 6ab + 3b^2$; д) $2x + 2y - ax - ay$.

46. Задай формулами функції, графіки яких зображено на малюнках 1.2 і 1.3.



Мал. 1.2



Мал. 1.3

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що таке раціональний дріб:

$$\frac{A}{B} = \frac{\text{многочлен}}{\text{многочлен}}$$

A — чисельник
 B — знаменник

- ✓ Знаю, які значення змінних є допустимими для дробу:

$$\frac{A}{B} \text{ існує, якщо } B \neq 0$$

- ✓ Умію наводити приклади різних дробів.
✓ Умію визначати допустимі значення дробів:

$$\frac{2x}{x+5}, \quad x \neq -5$$

$$\frac{a+1}{2a-a^2}, \quad \begin{matrix} a \neq 0 \\ a \neq 2 \end{matrix}$$

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— основну властивість і правило скорочення звичайних дробів

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}, c \neq 0.$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10}$$

$$\frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}, c \neq 0.$$

$$\frac{24}{40} = \frac{8 \cdot 3}{8 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

— формули скороченого множення (форзац 1);

— розклад многочленів на множники, а саме:

- винесення спільного множника за дужку

$$2a^5 - 6a^3 = 2a^3(a^2 - 3);$$

- групування

$$ax - 2a + cx - 2c = a(x - 2) + c(x - 2) = (x - 2)(a + c);$$

- використання формул скороченого множення

$$4x^2 - 9 = (2x - 3)(2x + 3).$$

§ 2. Основна властивість дробу

КЛЮЧОВІ СЛОВА

♦ основна властивість дробу — *main property of the fraction*

♦ тотожність — *identity*

Згадаймо основну властивість звичайного дробу. Якщо чисельник і знаменник звичайного дробу помножити на одне й те саме натуральне число, то дістанемо дріб, який дорівнює даному дробу. Іншими словами: при будь-яких натуральних a , b і m :

$$\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}.$$

Ця рівність — тотожність. Доведемо її для будь-яких раціональних a , b і m , таких, що $b \neq 0$ і $m \neq 0$.

Нехай $\frac{a}{b} = r$, де r — деяке раціональне число. За означенням дії ділення $a = br$. Помноживши обидві частини цієї рівності на відмінне від нуля число m , одержимо рівність $am = bm \cdot r$, звідси $\frac{am}{bm} = r$.

Отже, якщо $b \neq 0$ і $m \neq 0$, то $\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}$.

Доведена тотожність справедлива для будь-яких дробів. Її називають **основною властивістю дробу**.

Якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на один і той самий, відмінний від нуля вираз, то дістанемо дріб, який тотожно дорівнює даному:

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M}; \quad \frac{A \cdot M}{B \cdot M} = \frac{A}{B}.$$

Тут під «виразом» розуміють вираз зі змінними, який тотожно не дорівнює нулю, або число, відмінне від нуля.

Основна властивість дробу дає можливість замінити дріб виду $\frac{A \cdot M}{B \cdot M}$

тотожно рівним йому дробом $\frac{A}{B}$. Таке перетворення називають **скороченням дробу**. Наприклад,

$$\frac{cx^3}{ax^3} = \frac{c}{a}, \quad \frac{5a^2m^3x}{10m^4} = \frac{a^2x}{2m}.$$

Перший із цих дробів скорочено на x^3 , другий — на $5m^3$.

З основної властивості дробу випливають такі наслідки.

1. Значення дробу не зміниться, якщо знаки чисельника і знаменника змінити на протилежні.

2. Значення дробу не зміниться, якщо змінити знак в одного із членів дробу і перед самим дробом:

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B}; \quad \frac{A}{B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}; \quad \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}.$$

Якщо члени дробу — многочлени, то перед скороченням дробу їх часто доводиться розкласти на множники. Іноді перед скороченням дробу змінюють знак чисельника або знаменника, змінивши відповідно і знак перед дробом.

Приклади.
$$\frac{2ax - 4a}{x^2 - 4} = \frac{2a(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{2a}{x + 2};$$

$$\frac{m^2 - 1}{1 - m} = -\frac{(m - 1)(m + 1)}{m - 1} = -\frac{m + 1}{1} = -m - 1.$$

Зауваження. Рівність $\frac{m^2-1}{1-m} = -m-1$ є правильною тільки для $m \neq 1$.

Щоб не ускладнювати розв'язування вправ, подібні умови можна не вказувати. Домовимось кожний дріб розглядати тільки при допустимих значеннях його змінних.

Використовуючи основну властивість дробу, можна зводити дробу до нового знаменника. Наприклад, зведемо дріб $\frac{5y}{2x}$ до знаменника $8x^2y^3$.

Оскільки $8x^2y^3 = 2x \cdot 4xy^3$, то чисельник і знаменник даного дробу потрібно помножити на $4xy^3$. Отримаємо: $\frac{5y}{2x} = \frac{5y \cdot 4xy^3}{2x \cdot 4xy^3} = \frac{20xy^4}{8x^2y^3}$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Скоротити дріб можна діленням чисельника й знаменника на їх спільний дільник, виражений не тільки цілим виразом, а й дробовим. Наприклад, можна писати

$$\frac{\left(\frac{m}{a}-5\right)x}{\left(\frac{m}{a}-5\right)a} = \frac{x}{a}.$$

Ця рівність — тотожність, правильна за умови, що $a \neq 0$ і $m \neq 5a$.

Іноді доводиться мати справу з дробами, члени яких містять вирази з модулями, наприклад: $\frac{|a| \cdot c^2}{c}, \frac{a^2}{|a|}$. Перший дріб можна скоротити на c .

Рівність $\frac{|a| \cdot c^2}{c} = |a| \cdot c$ правильна при будь-яких значеннях a і $c \neq 0$.

Рівність $\frac{a^2}{|a|} = a$ правильна, якщо $a > 0$. Якщо $a < 0$, то $\frac{a^2}{|a|} = -a$.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Сформулюй основну властивість дробу.
2. Що означає «скоротити дріб»?
3. При яких a, b і m значення дробу $\frac{am}{bm}$ існує? А значення дробу $\frac{a}{b}$?
4. Чи можна множити чисельник і знаменник дробу на 0?
5. Сформулюй наслідки з основної властивості дробу.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Скороти дріб $\frac{a^2 - 4}{a^2 + 2a}$.

Розв'язання. Розкладемо спочатку чисельник і знаменник даного дробу на множники, а потім скоротимо: $\frac{a^2 - 4}{a^2 + 2a} = \frac{(a - 2)(a + 2)}{a(a + 2)} = \frac{a - 2}{a}$.

2. Подай дріб $\frac{3}{2x}$ зі знаменником: а) $4x^3$; б) $6x(x - 1)$.

Розв'язання. а) Щоб одержати знаменник $4x^3$, треба $2x$ помножити на $2x^2$. Отже, $\frac{3}{2x} = \frac{3 \cdot 2x^2}{2x \cdot 2x^2} = \frac{6x^2}{4x^3}$. б) Щоб одержати знаменник $6x(x - 1)$,

треба $2x$ помножити на $3(x - 1)$. Отже, $\frac{3}{2x} = \frac{3 \cdot 3(x - 1)}{2x \cdot 3(x - 1)} = \frac{9(x - 1)}{6x(x - 1)}$.

Відповідь. а) $\frac{6x^2}{4x^3}$; б) $\frac{9(x - 1)}{6x(x - 1)}$.

3. Зведи до спільного знаменника дробі $\frac{3}{ax^2}$ і $\frac{2a}{cx^3}$.

Розв'язання. Спільний знаменник acx^3 . Тому домножимо чисельник і знаменник першого дробу на cx , а другого дробу — на a .

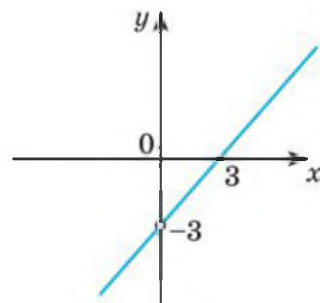
$$\frac{3}{ax^2} = \frac{3 \cdot cx}{ax^2 \cdot cx} = \frac{3cx}{acx^3}, \quad \frac{2a}{cx^3} = \frac{2a \cdot a}{cx^3 \cdot a} = \frac{2a^2}{acx^3}.$$

Відповідь. $\frac{3cx}{acx^3}$; $\frac{2a^2}{acx^3}$.

4. Побудуй графік функції $y = \frac{x^2 - 3x}{x}$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є всі числа, крім $x = 0$. Запишемо дану функцію у вигляді $y = \frac{x^2 - 3x}{x} = \frac{x(x - 3)}{x} = x - 3$.

Отже, графіком функції є пряма $y = x - 3$ за умови, що $x \neq 0$ (мал. 2.1).



Мал. 2.1

5. Для кожного значення параметра a розв'яжи рівняння $(a^2 - 2a)x = a^2 - 4$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $a(a - 2)x = a^2 - 4$. Щоб знайти x , потрібно виконати ділення на вираз $a(a - 2)$. Оскільки ділити на нуль не можна, то розглянемо випадки:

- $a = 0$. Підставивши це значення у рівняння, отримаємо $0x = -4$. Отже, якщо $a = 0$, то рівняння коренів не має;
- $a = 2$. Отримаємо рівняння $0x = 0$, коренем якого є будь-яке число;
- $a \neq 0, a \neq 2$. Тоді $x = \frac{a^2 - 4}{a(a - 2)} = \frac{(a - 2)(a + 2)}{a(a - 2)} = \frac{a + 2}{a}$.

Відповідь. Якщо $a = 0$, то рівняння коренів не має; якщо $a = 2$, то коренем є будь-яке число; якщо $a \neq 0$ і $a \neq 2$, то $x = \frac{a + 2}{a}$.

ВИКОНАЙ УСНО

Скороти дріб (47–49).

47. а) $\frac{8}{12}$; б) $\frac{21}{105}$; в) $\frac{160}{20}$; г) $\frac{-21}{21}$; ґ) $\frac{-6}{54}$; д) $\frac{14}{-56}$; е) $\frac{0,9}{0,15}$.

48. а) $\frac{a^3}{a^5}$ на a, a^2, a^3 ; б) $\frac{8x^5}{12x^4}$ на $x, x^2, x^3, x^4, 4x, 2x^2, 4x^4$.

49. а) $\frac{3x}{9xy}$; б) $\frac{12a^2b}{18ab^2}$.

50. Проаналізуй і оціни роботу учнів / учениць 8 класу (мал. 2.2).

Варіант I Скоротіть дріб:	Варіант II Скоротіть дріб:
а) $\frac{2c^2}{4c} = 2c$;	а) $\frac{3m^3}{9m^2} = \frac{m}{3}$;
б) $\frac{x^2 - x}{x^2} = -x$.	б) $\frac{y^2 - y}{y^2} = \frac{y - 1}{y}$.

Мал. 2.2

51. На які вирази можна скоротити дріб $\frac{a^2c^4}{a^4c^2}$?

52. Якому з виразів тотожно дорівнює дріб $\frac{7a^2c^4}{42a^4c^5}$?

А $\frac{c}{8a^2}$

Б $\frac{c}{6a^2}$

В $\frac{1}{6a^2c}$

Г $\frac{1}{6ac}$

53. Зведи до спільного знаменника вирази.

а) $\frac{1}{a}$ і $\frac{2}{c}$;

б) $\frac{1}{x^2}$ і $\frac{3}{2x}$;

в) $\frac{a}{xy}$ і $\frac{b}{yz}$.

54. Знайди спільний знаменник дробів.

а) $\frac{1}{2x}$ і $\frac{3a}{xy}$;

б) $\frac{2+a}{3a^2b}$ і $\frac{5}{4ab^2}$;

в) $\frac{1}{a}$, $\frac{a}{2(a-2)}$ і $\frac{2a+3}{a+2}$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Скороти дріб (55–59).

55. а) $\frac{2a}{4b}$; б) $\frac{a^5}{a^7}$; в) $-\frac{x}{x^4}$; г) $\frac{6a^2}{12a^3}$; ґ) $\frac{3c}{15c^4}$; д) $\frac{4a}{a}$.

56. а) $\frac{a^3}{-a^5}$; б) $\frac{-6c^3}{2c^5}$; в) $\frac{-x}{-xa}$; г) $\frac{7b^3}{14b^3}$; ґ) $\frac{18}{9a^2x}$; д) $\frac{-2a^2}{-a}$.

57. а) $\frac{x(a-2)}{x(b+2)}$; б) $\frac{mp(m-p)}{m^2p(m+p)}$; в) $\frac{27x^2(x+1)}{9x(x+1)}$.

58. а) $\frac{x(a+b)^2}{y(a+b)}$; б) $\frac{(a-x)^2c}{(a-x)^2m}$; в) $\frac{4x(x-y)}{7y(x-y)^2}$.

59. а) $\frac{2a(x+3)}{a^2(x+3)}$; б) $\frac{m^2(m-n)^2}{n^2(m-n)^2}$; в) $\frac{6a(2-x)}{3a^2(2-x)}$.

60. Гра. Один з учасників / одна з учасниць записує скоротний дріб зі змінними, а інший / інша скорочує його. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

Скороти дріб, розклавши, якщо потрібно, чисельник і знаменник дробу на множники (61–64).

61. а) $\frac{a(b-x)}{xb-x^2}$; б) $\frac{a(4a-3)}{4a^2-3a}$; в) $\frac{x^2(5x-1)}{5xy^2-y^2}$;

г) $\frac{xc-mc}{ax-am}$; ґ) $\frac{ax^2-x^3}{ax-x^2}$; д) $\frac{2x-x^4}{2y-x^3y}$.

62. а) $\frac{8a-8b}{16b}$; б) $\frac{xy}{x+xy}$; в) $\frac{m-n}{3m-3n}$;

г) $\frac{a+1}{a^2+a}$; ґ) $\frac{ax-ay}{bx-by}$; д) $\frac{6a-3b}{6b-12a}$.

63. а) $\frac{5-x}{(x-5)^2}$; б) $\frac{7a^3+a^4}{a^3+7a^2}$; в) $\frac{a^5-ma^2}{a^3b^2-mb^2}$.

64. а) $\frac{2c^2 - 4c}{2a - ac}$; б) $\frac{b - a}{(a - b)^2}$; в) $\frac{m^4 - m}{1 - m^3}$.

65. **НМТ** Скороти дріб.

а) $\frac{a^2 - 25b^2}{10b + 2a}$; б) $\frac{27a^3b - 12ab}{9a^3b^2 - 6a^2b^2}$; в) $\frac{a^2 - 4b^2}{3a + 6b}$.

Запиши вираз у вигляді дробу і скороти його (66, 67).

66. а) $24p^2x : 48px^2$; б) $-3ax : 12a^2x^3$;
в) $(a^2c + bc) : (xa^2 + xb)$; г) $16x^5y^4 : 4xy^6$;
г) $(a^2 - 3ac) : (5a - 15c)$; д) $(c^2 - n^2) : (n - c)$.

67. а) $8a^2c^3 : 4a^3c^2$; б) $5a^3x^5 : (25a^2x^4)$;
в) $(nx^2 + mx^2) : (m + n)$; г) $(a^2 - 36) : (36 - a^2)$;
г) $(xa^2 - x) : (a - 1)$; д) $(nx^3 + n^4) : (nx + n^2)$.

68. Подайте дріб $\frac{2}{a}$ зі знаменником: а) $3a^4$; б) $12a^2x$; в) $5a^2(a - 3)$.

69. Подай дріб $\frac{5a}{3x}$ зі знаменником: а) $6x^3$; б) $18x^2y^2c^5$; в) $6x(x + 2)$.

Зведи до спільного знаменника дробу (70, 71).

70. а) $\frac{2}{x}$ і $\frac{1}{a}$; б) $\frac{a}{2m}$ і $\frac{b}{3m^2}$; в) $\frac{2}{c}$ і $\frac{1}{a - b}$;
г) $\frac{8}{x}$ і $\frac{7}{x(x - a)}$; г) $\frac{1}{x - a}$ і $\frac{1}{x + a}$; д) $\frac{1}{(a + b)^2}$ і $\frac{2a}{a + b}$.

71. а) $\frac{1}{m}$ і $\frac{3}{2n}$; б) $\frac{3}{2x}$ і $\frac{5}{7x^2}$; в) $\frac{3}{x}$ і $\frac{2}{x + y}$;
г) $\frac{17}{m}$ і $\frac{6}{m(m + n)}$; г) $\frac{2}{x - 3}$ і $\frac{2}{x + 3}$; д) $\frac{5}{x + a}$ і $\frac{5}{(x + a)^2}$.

Доведи тотожність (72–74).

72. а) $\frac{5x^2y}{xy} = \frac{10xy}{2y}$; б) $\frac{4b(a + b)}{12b} = \frac{5a(a + b)}{15a}$; в) $\frac{a^2 - 1}{a - 1} = a + 1$;

г) $\frac{4a^2 - x^2}{2a - x} = 2a + x$; г) $\frac{(a + c)^2}{a + c} = a + c$; д) $\frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} = x + 1$.

73. а) $\frac{6ab}{2b^2c} = \frac{3ac}{bc^2}$; б) $\frac{a^2 - 1}{a + 1} = a - 1$; в) $\frac{2(x - y)}{xy - y^2} = \frac{4(x - y)}{2y(x - y)}$;

г) $\frac{4a^2 - x^2}{2a + x} = 2a - x$; г) $\frac{(a + c)^3}{a + c} = (a + c)^2$; д) $\frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = x - 1$.

74. а) $\frac{x^3 - c^3}{x^2 + xc + c^2} = x - c;$

б) $\frac{x^3 + c^3}{x + c} = x^2 - xc + c^2.$

Заміни «зірочку» одночленом так, щоб рівність стала тотожністю (75, 76).

75. а) $\frac{5x^3}{*} = \frac{x}{2};$

б) $\frac{3}{7y^2} = \frac{3xy}{*};$

в) $\frac{*}{16m^7} = \frac{3n}{4m}.$

76. а) $\frac{3}{xy} = \frac{*}{2x^2y};$

б) $\frac{*}{10a^4x} = \frac{4x^3}{5a^3};$

в) $\frac{4x^3}{5a^3} = \frac{8ax^4}{*}.$

77. Скоротивши дріб, учениця витерла на класній дошці частину записів (мал. 2.3). Віднови ці записи.

а) $\frac{120(a-b)x}{4(a-b)x} = \frac{30}{-b)x}$

б) $\frac{-4}{x^2 - 2x} = \frac{x+2}{x}$

Мал. 2.3

Знайди значення дробу (78, 79).

78. а) $\frac{6a^3c^2}{3a^2c^3}$, якщо $a = 8$, $c = 16$;

б) $\frac{x^2 - 9}{x + 3}$, якщо $x = 3,25$.

79. а) $\frac{5x^2y}{20xy^6}$, якщо $x = 16$, $y = 2$; б) $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$, якщо $x = -2,7$.

80. **НМТ** Спрости вираз.

а) $\frac{9 - x^2}{x^2 + 6x + 9};$

б) $\frac{25 + 10b + b^2}{5b^2 + 25b};$

в) $\frac{(2x - 3)^2 - 9}{x}.$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Скороти дріб (81, 82).

81. а) $\frac{7a^2b}{21ab^3};$

б) $\frac{35xz^5}{7xz^5};$

в) $\frac{x^2 - a^2}{3x^3 - 3a^2x};$

г) $\frac{5x^2 - 5xy}{5(x - y)^2};$

г) $\frac{a^2 - 2ac + c^2}{(a - c)^3};$

д) $\frac{(x + z)^4}{x^2 + 2xz + z^2};$

е) $\frac{x^2 - xz + z^2}{x^3 + z^3}.$

82. а) $\frac{25ax^2}{75a^8x};$

б) $\frac{125cm}{50c^2m};$

в) $\frac{3x^2c - 6xc^2}{x^2c - 2xc^2};$

г) $\frac{a^2 - n^2}{a^2 - 2an + n^2};$

г) $\frac{ax + ay - az}{cx + cy - cz};$

д) $\frac{a^3 - 1}{a^2 + a + 1}.$



83. Доведи тотожність.

а) $\frac{4ab}{(a+b)^2 - (a-b)^2} = 1;$

б) $\frac{x+y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{x^2-2xy+y^2};$

в) $\frac{3a^2+2a}{6+9a} = \frac{2(a^3+a)}{6+6a^2};$

г) $\frac{a^4-2a^2+1}{a^3-a^2-a+1} = a+1.$

84. Prove the identity.

а) $\frac{a^2+b^2}{(a+b)^2 + (a-b)^2} = \frac{1}{2};$

б) $\frac{a^2+ab}{a+b} = \frac{a^3-a}{(a-1)(a+1)};$

в) $\frac{x^3-1}{(x+1)^2-x} = \frac{x-2x^2+x^3}{x^2-x};$

д) $\frac{a^6-2a^3+1}{(a^2+a+1)^2} = (a-1)^2.$

Спрости вираз (85, 86).

85. а) $\frac{3x+2+3xy+2y}{2y-2+3xy-3x};$ б) $\frac{(x+2)(x-1)}{x^3+2x^2-x-2};$ в) $\frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}.$

86. а) $\frac{6a^2+15ab-8ac-20bc}{12a^2-9ab-16ac+12bc};$ б) $\frac{2a^2-18}{a^2+2a-15};$ в) $\frac{x(y+1)^2-y(x+1)^2}{x(y+1)-y(x+1)}.$

Скороти дріб і знайди його значення (87, 88).

87. а) $\frac{4a^2+12ab+9b^2-1}{2a+3b+1},$ якщо $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{2}{3};$

б) $\frac{(a^4+b^4)(a^3-a^2b+ab^2-b^3)}{a^8-b^8},$ якщо $a = 12,25, b = -2\frac{1}{4}.$

88. а) $\frac{a^2-4ab+4b^2-9}{a-2b-3},$ якщо $a = 2, b = \frac{1}{2};$

б) $\frac{(a^8-b^8)}{(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a^4+b^4)},$ якщо $a = -5,25, b = -\frac{1}{4}.$

89. Чи зміниться значення дробу, якщо x і y одночасно помножити на 10?

а) $\frac{x}{y};$ б) $\frac{5x}{y};$ в) $\frac{x-y}{3x};$ г) $\frac{x-y}{x+y};$ ґ) $\frac{x+y}{y^2};$ д) $\frac{10x}{x^2+y^2};$ е) $\frac{x-5}{y+5};$ є) $\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$

90. Подай дріб, тотожний дробу $\frac{x+y}{3x},$ за умови, що його знаменникдорівнює: а) $9x^2y;$ б) $12xy^2;$ в) $3x(x-y);$ г) $6x^2-6xy.$

Зведи до спільного знаменника дробу (91, 92).

91. а) $\frac{3}{a-2}$ і $\frac{2}{(2-a)^2};$ б) $\frac{5}{3x-4}$ і $\frac{7}{4-3x};$ в) $\frac{a+2}{a^3-8}$ і $\frac{1}{a^2-2a}.$

92. а) $\frac{4z}{3-z} \cdot \frac{1}{(z-3)^3}$; б) $\frac{x+3}{x(x-5)} \cdot \frac{x}{x^2-25}$; в) $\frac{a+b}{a^2(a-b)} \cdot \frac{a+2}{a^3-ab^2}$.

93. *Відкрита задача.* Скоротіть дріб.



а) $\frac{m^2 - 2m}{m^3 - \square}$;

б) $\frac{8y - x^3y}{x^2y^2 + \square}$.

Побудуй графік функції (94, 95).

94. а) $y = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$; б) $y = \frac{3x^2 - 6x}{x - 2}$; в) $y = \frac{x^2 + 6x + 9}{x + 3} - \frac{2x^2 - 8}{x - 2}$.

95. а) $y = \frac{x^2 + 5x}{x}$; б) $y = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 1} + \frac{2x^2 - x}{2x - 1}$.

Для кожного значення a розв'яжи рівняння (96, 97).

96. а) $(a-3)x = a^2 - 3a$; б) $(a^2 - 1)x = 2(a - 1)$.

97. а) $(a+5)x = 2a^2 + 10a$; б) $(a^2 + 6a)x = a^2 - 36$.

Спрости вираз (98, 99).

98. а) $\frac{ac + bx + ax + bc}{ay + 2bx + 2ax + by}$; б) $\frac{x^2 - (a-b)x - ab}{x^3 + bx^2 + ax + ab}$; в) $\frac{(x+a)^2 - (z+c)^2}{(x+z)^2 - (a+c)^2}$.

99. а) $\frac{x - xy + z - zy}{1 - 3y + 3y^2 - y^3}$; б) $\frac{x^4 + (2c^2 - a^2)x^2 + c^4}{x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 - c^4}$; в) $\frac{a^3c - 2a^2c^2 + ac^3 - ab^2c}{(a^2 + c^2 - b^2)^2 - 4a^2c^2}$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

100. Віднови втрачені у знаменниках записи.

а) $\frac{15(x-y)^2 x^2}{21(x-\dots) \dots - y)} = \frac{5x}{\dots - y)}$;

б) $\frac{4(x^2 - y^2)}{24\dots} = \frac{x+y}{\dots x}$.

101. Знайди значення виразу.

а) $\frac{9a^2 - 3ab}{a^2 - b^2}$, якщо $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$;

б) $\frac{a^2 - 5ab + 2b^2}{a^2 - b^2}$, якщо $\frac{a+2b}{2a-b} = 1$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

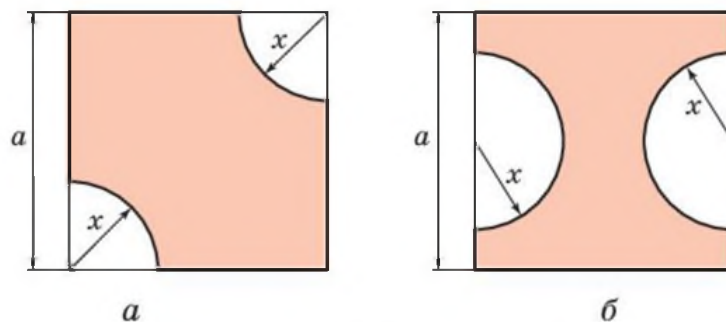
102. Добова норма споживання солі не має перевищувати 5–6 г (чайна ложка). Цього цілком достатньо для збалансованого харчування. Скільки грамів оселедця можна вжити за один день,



якщо вміст солі в ньому складає 10 %. Врахуй, що інші готові продукти харчування також містять сіль. Запам'ятай це!

103. Розв'яжи рівняння $5 - 2x(3x - 2) = x(x + 4) - 7x(x - 5)$.

104. Склади вираз для обчислення площі фігур, зображених на малюнку 2.4 (а, б).



Мал. 2.4

105. Побудуй графік функції: а) $y = 2x + 3$; б) $y = 2x - 1$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Знаю основну властивість дробу і вмію її формулювати

$$\frac{A}{B} = \frac{A \cdot M}{B \cdot M};$$

$$\frac{A \cdot M}{B \cdot M} = \frac{A}{B}$$

✓ Умію скорочувати дроби і можу пояснити, як це робити

$$\frac{(y-3)^2}{(y-3)(y+3)} = \frac{y-3}{y+3}$$

✓ Знаю і вмію використовувати тотожності

$$\frac{-A}{B} = \frac{A}{-B} = -\frac{A}{B};$$

$$\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B};$$

$$\frac{A}{B} = -\frac{-A}{B} = -\frac{A}{-B}$$

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке вираз, цілий вираз, раціональний вираз;
- які бувають вирази;



- види цілих виразів;
- що таке рівняння, корінь рівняння, рівносильні рівняння.

§ 3. Раціональні вирази

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- раціональні вирази — *rational expressions*
- цілі вирази — *integer expressions*
- дробові вирази — *fractional expressions*

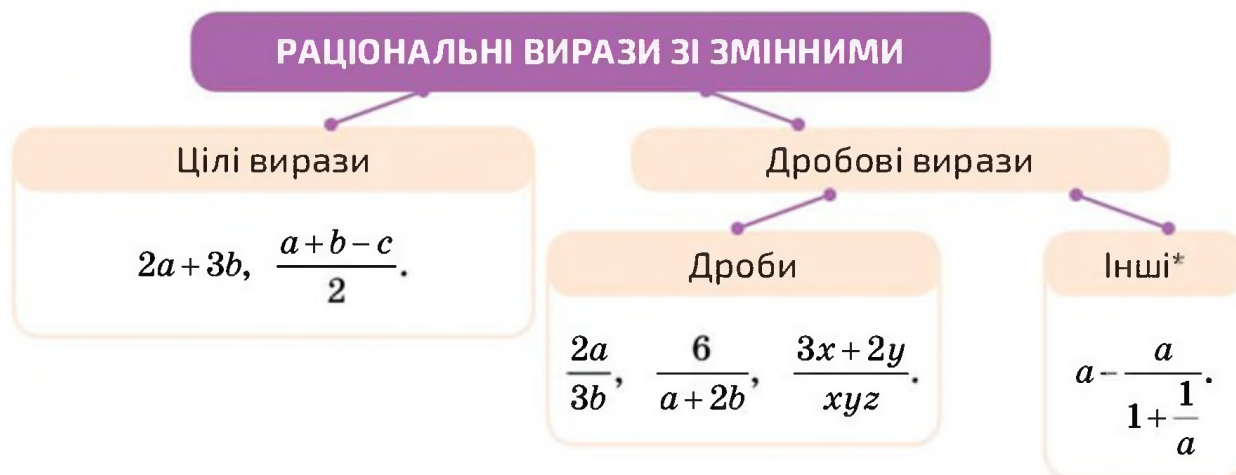
Вираз, складений із чисел і змінних за допомогою дій додавання, віднімання, множення, ділення або піднесення до степеня, називають **раціональним**.

Приклади раціональних виразів:

$$3, \quad x, \quad a - x^2, \quad m + \frac{x-1}{x^2+1}, \quad \left(\frac{a}{x}+1\right) : \left(\frac{a+x}{2x}-1\right)^2.$$

Цілі вирази — це раціональні вирази, які не містять ділення на змінну.

Дробові вирази — це раціональні вирази, які містять ділення на змінну.



*Словом «інші» тут позначено дробові раціональні вирази, які не є дробами.

Мал. 3.1

Рівняння називають раціональним, якщо його ліва і права частини — раціональні вирази.

Раціональне рівняння називають дробовим, якщо його права або ліва, або обидві частини — дробові вирази.

Приклади дробових рівнянь:

$$\frac{2x(x-2)}{x} = 0; \quad \frac{1}{5+x} - \frac{2}{x} = 3; \quad \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = 2x; \quad \frac{x+1}{x} = \frac{x+1}{x+2}.$$

Щоб розв'язувати такі рівняння, потрібно перш за все знати, як виконують дії з дробовими виразами. Тому в наступних параграфах будемо розглядати додавання, віднімання, множення, ділення і піднесення дробів до степеня.

Найпростіші дробові рівняння, а саме рівняння, у яких ліва частина — це дріб, а права — нуль, розв'язують на основі умови рівності дробу нулю.

Дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.

Приклад. Розв'яжи рівняння $\frac{5x-3}{10x} = 0$.

Скористаємося умовою рівності дробу нулю і отримаємо систему $\begin{cases} 5x-3=0, \\ 10x \neq 0. \end{cases}$ Розв'яжемо дану систему: $\begin{cases} 5x=3, \\ x \neq 0; \end{cases} \begin{cases} x=0,6, \\ x \neq 0. \end{cases}$

Отже, $x = 0,6$ — корінь даного рівняння.

Зверни увагу! Умова рівності дробу нулю складається з двох частин:

- 1) чисельник дорівнює нулю;
- 2) знаменник відмінний від нуля.

Кожна з цих частин умови однаково важлива.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

У наведеній схемі (с. 25, мал. 3.1) словом «дربي» названо тільки раціональні дربي (частину раціональних виразів). А бувають дربي не лише раціональні, наприклад,

$$\frac{2-x}{2-|x|}, \quad \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Це також дربي, але не раціональні. Тому, забігаючи трохи наперед, співвідношення між різними видами виразів можна зобразити такою діаграмою (мал. 3.2).

Якщо вираз містить змінні під знаком модуля, його не вважають раціональним. Хоча багато таких виразів можна замінити двома, трьома чи більшою кількістю раціональних виразів. Наприклад, розглянемо дріб $\frac{x-|x|}{2x^2}$.

$$\text{Якщо } x \geq 0, \text{ то } |x| = x; \text{ якщо } x < 0, \text{ то } |x| = -x. \text{ Тому } \frac{x-|x|}{2x^2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x > 0, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x < 0, \\ \text{не існує,} & \text{якщо } x = 0. \end{cases}$$



Мал. 3.2



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфу (Тема. Рациональні вирази та рівняння. Урок 4).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які вирази називають: а) раціональними; б) цілими; в) дробовими?
2. Чим відрізняються поняття «дріб» і «дробовий вираз»?
3. Які рівняння називають: а) раціональними; б) дробовими?
4. Сформулюй умови рівності дробу нулю.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. При яких значеннях змінної x значення дробу $\frac{5x-1}{4-3x}$

дорівнює нулю?

Розв'язання. Значення дробу дорівнює нулю тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля. Прирівнюємо чисельник до нуля: $5x - 1 = 0$, $5x = 1$, $x = 0,2$.

Якщо $x = 0,2$, знаменник $4 - 3x$ не дорівнює нулю.

Отже, якщо $x = 0,2$, то дріб $\frac{5x-1}{4-3x}$ дорівнює нулю.

Відповідь. $x = 0,2$.

2. Чи має корені рівняння $\frac{x-3}{x^2-9} = 0$?

Розв'язання. Скористаємося умовою рівності дробу нулю. Отримаємо систему:

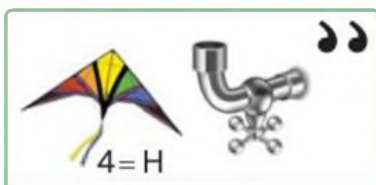
$$\begin{cases} x-3=0, \\ x^2-9 \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ (x-3)(x+3) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3, \\ x \neq 3, \\ x \neq -3. \end{cases}$$

Відповідь. Рівняння коренів не має.

ВИКОНАЙ УСНО



106. Розгадай ребуси.



107. Який із виразів цілий?

А $\frac{7x+3}{x}$

Б $\frac{3x-7}{3+x}$

В $\frac{x+7}{3}$

Г $\frac{1}{3}:(x-7)$

108. При яких значеннях змінної не має змісту вираз?

а) $\frac{x+1}{4} + \frac{4}{x+1}$;

б) $x + \frac{1}{x+1}$;

в) $\frac{1}{x(x+1)}$.

109. При яких значеннях змінної дріб дорівнює нулю?

а) $\frac{x+5}{x-5}$;

б) $\frac{5}{x-5}$;

в) $\frac{x-5}{5}$;

г) $\frac{x^2-25}{x-5}$.

110. Яке з рівнянь має коренем число $x = 3$?

А $\frac{x^2-3x}{x^2-9} = 0$

Б $\frac{3x-9}{x+3} = 0$

В $\frac{3x}{x+3} = 0$

Г $\frac{x-3}{2x^2-6x} = 0$

111. Чи є значення $x = 15$ коренем рівняння?

а) $\frac{30}{x} = 2$;

б) $\frac{1}{x-8} = \frac{1}{7}$;

в) $\frac{x+15}{x-15} = 0$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

112. Знайди значення виразу $\frac{10}{x} + \frac{x}{10}$, якщо:

а) $x = 1$;

б) $x = 2$;

в) $x = 5$;

г) $x = 10$.

Укажи, при яких значеннях x не має змісту вираз (113, 114).

113. а) $\frac{9}{x}$;

б) $\frac{3}{x^2-4}$;

в) $-\frac{5}{x+8}$;

г) $\frac{8}{5-x}$.

114. а) $\frac{5}{x+3}$;

б) $\frac{7}{x-2}$;

в) $\frac{x}{x^2-1}$;

г) $\frac{x+1}{x-3}$.

115. Гра. Один із учасників / одна із учасниць записує дробовий вираз, другий / друга називає, при яких значеннях змінної вираз не має змісту, третій / третя задає значення змінної, а четвертий / четверта знаходить відповідне значення виразу. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

При яких значеннях x значення дробу дорівнює нулю (116, 117)?

116. а) $\frac{x-3}{8}$;

б) $\frac{x+5}{14}$;

в) $\frac{x^2-16}{3x}$;

г) $\frac{x(x-3)}{x^2+2x}$.

117. а) $\frac{x+5}{12}$;

б) $\frac{x-2}{4}$;

в) $\frac{x^2-36}{6x}$;

г) $\frac{x(x-1)}{x^2+3x}$.

118. Чи може дорівнювати нулю значення дробу?

а) $\frac{5}{x+3}$; б) $\frac{(-1)^2}{(x-1)^2}$; в) $\frac{x-1}{x}$; г) $\frac{x+1}{x^2-1}$.

119. Наведи приклади дробів, які дорівнюють нулю, якщо:

а) $x = 3$; б) $y = -1$; в) $x = 2$ і $x = 5$; г) $y = 0$ і $y = -1$.

120. Наведи приклади дробів, які дорівнюють нулю, якщо:

а) $x = 0$; б) $m = -4$; в) $z = 3$ і $z = -4$; г) $y = 0$ і $y = -2$.

121. Яке із чисел -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 є коренем рівняння $\frac{2x-x^2}{4-x^2} = 0$?

122. Розв'яжи рівняння.

а) $\frac{x+3}{3-x} = 0$; б) $\frac{2x-10}{x+5} = 0$; в) $\frac{x(x+1)}{x^2-1} = 0$; г) $\frac{x-1}{x^2+1} = 0$.

123. Solve the equation.

а) $\frac{x^2}{x+2} = 0$; б) $\frac{x-2}{x^2+4} = 0$; в) $\frac{x^2-25}{(x+5)^2} = 0$; г) $\frac{2x^2-10x}{x(x+5)} = 0$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

124. Намалюй у зошиті таблицю. Розмісти вирази у відповідних колонках таблиці.

$$4a^2b; \frac{a^2}{4b}; 4+a^2b; 4:a^2b; (4+a^2b); (4+a)^2:b; \frac{a^2b}{4}; \left(\frac{a}{4}\right)^2+b.$$

Рациональні вирази	
цілі	дробові

125. Швидкість човна становить v км/год, а швидкість течії річки — 2 км/год. За який час човен пройшов 100 км: а) за течією; б) проти течії?

126. Швидкість катера — 50 км/год, а швидкість течії річки — v км/год. За який час човен пройшов 50 км: а) за течією річки; б) проти течії річки?

127. Катруся виготовила 96 вареників за n хв, а її мама — 105 вареників за m хв. Скільки вареників виготовили вони разом за 1 год?



128. Змішали m г 10 % та n г 15 % розчину солі. Якою буде концентрація утвореного розчину?

129. Чи може значення даного дробу бути від'ємним? А дорівнювати нулю?

а) $\frac{8}{2+c^2}$;

б) $\frac{n^2+2}{(n-1)^2+2}$;

в) $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^4+2}$.

Визнач, при яких x значення дробу дорівнює нулю (130, 131).

130. а) $\frac{2x+3}{x^2+5}$; б) $\frac{x^2-4x}{x+3}$; в) $\frac{x^2-9}{x-3}$; г) $\frac{x}{x^2-3x}$.

131. а) $\frac{x+3}{6-2x}$; б) $\frac{2y-1}{y^2-1}$; в) $\frac{x(x-4)}{x^2-16}$; г) $\frac{12m}{m+m^2}$.

132. Покажи, що дане рівняння не має розв'язків.

а) $\frac{5}{x-3} = 0$;

б) $\frac{z^2+10}{z-5} = 0$;

в) $\frac{x-7}{x^2-7x} = 0$.

Розв'яжи рівняння (133, 134).

133. а) $\frac{2x-3}{5x} = 0$; б) $\frac{15-3x}{x+4} = 0$; в) $\frac{x^2-2x+1}{1-x^2} = 0$; г) $\frac{2x+2}{x^2-1} = 0$.

134. а) $\frac{3x}{x^2-1} = 0$; б) $\frac{x^2-1}{x+7} = 0$; в) $\frac{x^2-3x}{x^2-6x+9} = 0$; г) $\frac{4-4x+x^2}{4-x^2} = 0$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

135. Знайди значення виразу, розглянувши всі можливі випадки.

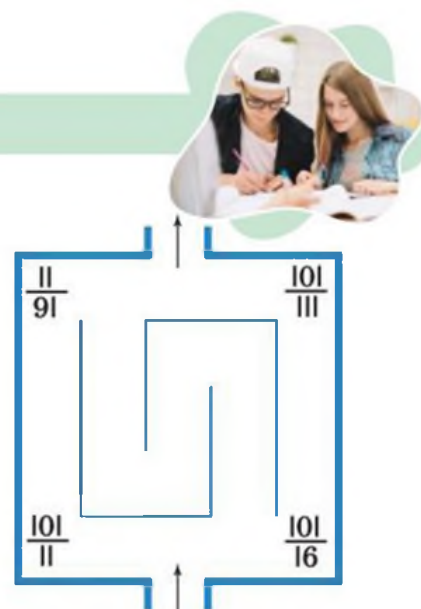
а) $1 + \frac{|a|}{a}$;

б) $\frac{a}{|a|} + \frac{|b|}{b}$;

в) $\frac{a|b|}{ab}$;

г) $\frac{ab}{|ab|}$.

136. Пройди через лабіринт так, щоб перетнути дробу, сума яких дорівнює 2. Не можна проходити двічі один і той самий відрізок шляху або перетинати пройдену лінію (мал. 3.3).



Мал. 3.3

«Недостатньо лише зрозуміти задачу, необхідно мати бажання розв'язати її. Без сильного бажання розв'язати складну задачу не можна, але за його наявності таке можливо. Де є бажання, знайдеться шлях!»

Д. Пойя

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



137. Виконай дії.

а) $1\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$;

б) $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$;

в) $7 - \frac{9}{11}$;

г) $\frac{5}{21} - 1\frac{1}{35}$.

138. Зведи дроби до спільного знаменника.

а) $\frac{a}{4(a-b)}$ і $\frac{b}{20(a-b)}$;

б) $\frac{x+y}{xyz}$ і $\frac{6y}{xz^2}$;

в) $\frac{1}{x^2+x}$ і $\frac{1}{x^2+2x+1}$.

139. Розклади на множники.

а) $6x^2 - 6y^2$;

б) $5 - 5m^2$;

в) $ax^2 - a^3$;

г) $3x^4 - 12x^2$.

140. Катер за 7 год проходить за течією річки такий самий шлях, як за 9 год проти течії. Знайди власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки — 2,5 км/год.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклади раціонального виразу і раціонального дробу.
- ✓ Розрізняю вирази зі змінними:

• цілі раціональні $2x + 3xy^5$; $1 - 0,5a$; $2c - 1,1c^2$; $-x$; $\frac{a+b}{2}$;

• дробові раціональні $\frac{2x}{x+5}$; $\frac{2c-cx}{7c}$; $\frac{1}{5x-y}$; $\frac{2x-y}{3xy}$.

- ✓ Формуюлю і використовую для розв'язування задач умову рівності

дробу нулю. Якщо $\frac{A}{B} = 0$, то $\begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0 \end{cases}$

- ✓ Можу складати дроби і дробові вирази за вказаними умовами.
- ✓ Хочу навчитися виконувати дії з раціональними дробами.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- кожне ціле число можна записати у вигляді дробу
зі знаменником 1 або іншим знаменником

$$5 = \frac{5}{1}$$

$$8 = \frac{24}{3} = \frac{40}{5}$$

- як виконувати дії додавання і віднімання зі звичайними дробами:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

$$\frac{2}{13} + \frac{5}{13} = \frac{7}{13}$$

$$\frac{a^{\frac{1}{d}}}{b} \pm \frac{c^{\frac{1}{d}}}{d} = \frac{a \cdot d \pm c \cdot b}{b \cdot d}$$

$$\frac{5^{\frac{1}{3}}}{7} - \frac{2^{\frac{1}{7}}}{3} = \frac{5 \cdot 3 - 2 \cdot 7}{7 \cdot 3} = \frac{15 - 14}{21} = \frac{1}{21}$$

§ 4. Додавання і віднімання дробів

КЛЮЧОВІ СЛОВА

сума дробів — *sum of fractions*
різниця дробів — *difference of fractions*

Для натуральних чисел a, b, c справджується рівність

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}.$$

Справджується вона і для довільних раціональних значень a, b, c , крім $c = 0$. Доведемо це.

Нехай a, b і $c \neq 0$ — довільні раціональні числа. Тоді $\frac{a}{c}$ і $\frac{b}{c}$ — також раціональні числа. Якщо $\frac{a}{c} = r$ і $\frac{b}{c} = p$, то, за означенням дії ділення, $a = cr$ і $b = cp$. Додавши ліві й праві частини цих рівностей, одержимо: $a + b = c(r + p)$.

За означенням дії ділення, з утвореної рівності випливає, що $r + p = \frac{a+b}{c}$, тобто $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Подібним способом можна довести і тотожність $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$.

Із цих двох тотожностей випливають правила додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники, а знаменник залишити той самий.

Щоб знайти різницю дробів з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий.

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}.$$

Приклади. $\frac{5ax}{3t} + \frac{2c}{3t} = \frac{5ax+2c}{3t}; \quad \frac{a}{m+x} - \frac{m}{m+x} = \frac{a-m}{m+x}.$

Якщо треба знайти суму або різницю дробів з різними знаменниками, то спочатку їх зводять до спільного знаменника, як це роблять при додаванні та відніманні звичайних дробів.

Щоб звести дробу до спільного знаменника, попередньо знаменник кожного дробу розкладають на множники (якщо це можливо). Потім знаходять спільний знаменник і додаткові множники до кожного дробу.

Приклади. $\frac{1}{2a} + \frac{3a}{5x} = \frac{5x}{10ax} + \frac{6a^2}{10ax} = \frac{5x+6a^2}{10ax};$

$$\frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{3x+6} = \frac{x}{(x-2)(x+2)} - \frac{2}{3(x+2)} =$$

$$= \frac{3x-2(x-2)}{3(x-2)(x+2)} = \frac{3x-2x+4}{3(x-2)(x+2)} = \frac{x+4}{3(x^2-4)}.$$

Іноді виникає потреба знайти суму або різницю дробу і цілого виразу. Їх можна додавати або віднімати, як дробу, записавши цілий вираз у вигляді дробу зі знаменником 1.

Приклад. $\frac{2xy}{3c} + 5c = \frac{2xy}{3c} + \frac{5c}{1} = \frac{2xy+15c^2}{3c}.$

Подібним способом спрощують вирази, які складаються з трьох або більше дробів, сполучених знаками «плюс» або «мінус». Наприклад,

$$\frac{2c}{3x} + \frac{1}{a} - \frac{3a}{2x} = \frac{4ac}{6ax} + \frac{6x}{6ax} - \frac{9a^2}{6ax} = \frac{4ac+6x-9a^2}{6ax}.$$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Домовившись розглядати кожну тотожність тільки при її допустимих значеннях змінних, тобто за умови, коли її ліва і права частини мають зміст, ми свідомо спрощуємо задачу. Довівши тотожність, стверджуємо тільки, що вона правильна на всій області допустимих значень, не зазначаючи, яка це область.

Щоб дати вичерпне розв'язання такої вправи, варто не лише переконатися, що тотожність правильна на всій області допустимих значень, а й указати, якою є ця область. Або чітко зазначити, які з дійсних чисел не належать цій області.

Наприклад, показавши, що $\frac{1}{x-y} - \frac{1}{x} = \frac{y}{(x-y)x}$, бажано вказати, що доведена рівність правильна, якщо $x \neq y$ і $x \neq 0$.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Сформулюй правило додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками.
2. Як дробу з різними знаменниками: а) додати; б) відняти?
3. Як знайти суму чи різницю дробу і цілого виразу?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Знайди різницю дробів $\frac{3-a^2}{a^2}$ і $\frac{3}{a^2}$.

Розв'язання. $\frac{3-a^2}{a^2} - \frac{3}{a^2} = \frac{3-a^2-3}{a^2} = \frac{-a^2}{a^2} = -1.$

Відповідь. $-1.$

2. Знайди: а) суму $\frac{6}{a}$ і $\frac{3a}{a^2-c}$; б) різницю $\frac{2a-b}{a^2-ab}$ і $\frac{2b-a}{ab-b^2}$.

Розв'язання. а) Спільний знаменник даних дробів $a(a^2-c)$. Домножимо перший дріб на a^2-c , а другий — на a :

$$\frac{6}{a} + \frac{3a}{a^2-c} = \frac{6(a^2-c) + 3a^2}{a(a^2-c)} = \frac{6a^2 - 6c + 3a^2}{a(a^2-c)} = \frac{9a^2 - 6c}{a(a^2-c)} = \frac{3(3a^2 - 2c)}{a(a^2-c)}.$$

б) Розкладемо знаменник кожного з дробів на множники і знайдемо спільний знаменник:

$$\begin{aligned} \frac{2a-b}{a^2-ab} - \frac{2b-a}{ab-b^2} &= \frac{2a-b}{a(a-b)} - \frac{2b-a}{b(a-b)} = \frac{b(2a-b) - a(2b-a)}{ab(a-b)} = \\ &= \frac{2ab - b^2 - 2ab + a^2}{ab(a-b)} = \frac{a^2 - b^2}{ab(a-b)} = \frac{(a-b)(a+b)}{ab(a-b)} = \frac{a+b}{ab}. \end{aligned}$$

Відповідь. а) $\frac{3(3a^2-2c)}{a(a^2-c)}$; б) $\frac{a+b}{ab}$.

3. Виконай дії. $\frac{3a^2}{2a-b} - \frac{a^2-b^2}{b-2a}$.

Розв'язання. Оскільки $b-2a = -(2a-b)$, то за формулою $\frac{A}{-B} = -\frac{A}{B}$

$$\begin{aligned} \text{отримаємо: } \frac{3a^2}{2a-b} - \frac{a^2-b^2}{b-2a} &= \frac{3a^2}{2a-b} + \frac{a^2-b^2}{2a-b} = \frac{3a^2 + a^2 - b^2}{2a-b} = \\ &= \frac{4a^2 - b^2}{2a-b} = \frac{(2a-b)(2a+b)}{2a-b} = 2a+b. \end{aligned}$$

Відповідь. $2a+b.$

ВИКОНАЙ УСНО



141. Додай дроби. а) $\frac{2}{5}$ і $\frac{4}{5}$; б) $\frac{7}{13}$ і $\frac{6}{13}$; в) $\frac{3}{14}$, $\frac{1}{14}$ і $\frac{5}{14}$.

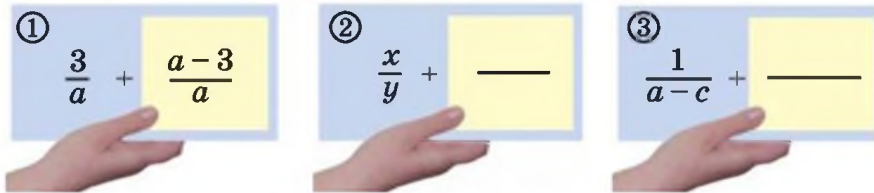
142. Значення якого з виразів дорівнює $a + b$?

А $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$ Б $\frac{a^2}{a-b} - \frac{b^2}{a-b}$ В $\frac{2a}{a+b} - \frac{a-b}{a+b}$ Г $\frac{2a+b}{a+b} - \frac{a}{a+b}$

143. Подай у вигляді дробу вираз.

а) $\frac{x}{3a} + \frac{y}{3a}$; б) $\frac{1}{-5x} + \frac{a}{-5x}$; в) $\frac{1}{9a} - \frac{c}{9a}$; г) $\frac{x+m}{2m} - \frac{x}{2m}$.

144. Який дріб слід записати у рамку на картці, щоб у сумі з написаним дробом одержати номер картки (мал. 4.1)?



Мал. 4.1

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



145. Додай дроби.

а) $\frac{a}{2x}$ і $\frac{3}{2x}$; б) $\frac{2c^2}{3ab}$ і $\frac{1-c^2}{3ab}$; в) $\frac{2x}{x+2}$, $\frac{6}{x+2}$ і $\frac{x}{x+2}$.

146. Знайди різницю дробів.

а) $\frac{2c}{3ax}$ і $\frac{c}{3ax}$; б) $\frac{7x}{6ab}$ і $\frac{x}{6ab}$; в) $\frac{2a}{a-3}$ і $\frac{6}{a-3}$;
г) $\frac{4x+1}{3x-2}$ і $\frac{x+3}{3x-2}$; д) $\frac{a^2}{a-c}$ і $\frac{c^2}{a-c}$; е) $\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$ і $\frac{2x}{(x-1)^2}$.

Спрости вираз (147, 148).

147. а) $\frac{1}{2x} + \frac{3}{2x} - \frac{2}{2x}$;

б) $\frac{a}{7m} + \frac{2a}{7m} + \frac{4a}{7m}$;

в) $\frac{m+c}{2x} + \frac{m-c}{2x}$;

г) $\frac{2x}{0,5a} - \frac{x-c}{0,5a} - \frac{c}{0,5a}$.

148. а) $\frac{3}{5ac} - \frac{2}{5ac} + \frac{4}{5ac}$;

б) $\frac{5n}{3am} - \frac{2,5n}{3am} + \frac{0,5n}{3am}$;

в) $\frac{2a}{a+x} + \frac{2x-a}{a+x} - \frac{x}{a+x}$;

г) $\frac{2c}{c-x} - \frac{c}{c-x} - \frac{x}{c-x}$.

Подай у вигляді дробу або одночлена вираз (149–153).

149. а) $\frac{2a}{a-c} - \frac{a}{a-c} - \frac{c}{a-c}$;

б) $\frac{3a}{a^2-1} - \frac{2a}{a^2-1} + \frac{1}{a^2-1}$;

в) $\frac{3x+y}{x+y+z} + \frac{z-2x}{x+y+z}$;

г) $\frac{2a-b}{a+b-c} - \frac{a-2b+c}{a+b-c}$.

$$150. \text{ а) } \frac{1-a}{1-c^2} + \frac{a-3}{1-c^2} - \frac{c-3}{1-c^2};$$

$$\text{б) } \frac{a^2-c^3}{a-c} + \frac{c^3-a^3}{a-c} + \frac{a^3-c^2}{a-c}.$$

$$151. \text{ а) } \frac{a+b-c}{3abc} + \frac{a-b+c}{3abc} + \frac{b-a+c}{3abc};$$

$$\text{б) } \frac{x+y-z}{x+y+z} + \frac{x-y+z}{x+y+z} + \frac{y+z-x}{x+y+z}.$$

$$152. \text{ а) } \frac{2}{3a} + \frac{4}{3a} - \frac{6-a^2}{3a};$$

$$\text{б) } \frac{2a+3}{5b} + \frac{2a-9}{5b} + \frac{a+1}{5b};$$

$$\text{в) } \frac{x^2}{x+1} + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{1-x}{x+1};$$

$$\text{г) } \frac{2(m-n)}{m-n} - \frac{m}{m-n} + \frac{n}{m-n}.$$

$$153. \text{ а) } \frac{5x}{2y} - \frac{x+y}{2y} + \frac{2x+y}{2y};$$

$$\text{б) } \frac{2a^2}{a+b} + \frac{ab}{a+b} - \frac{a^2}{a+b};$$

$$\text{в) } \frac{2a-5}{2a-3} + \frac{a-2}{2a-3} - \frac{a-4}{2a-3};$$

$$\text{г) } \frac{x^3}{x^2-4} - \frac{x^3-x}{x^2-4} - \frac{2}{x^2-4}.$$

Доведи тотожність (154, 155).

$$154. \text{ а) } \frac{a}{a+c} + \frac{c}{a+c} = 1;$$

$$\text{б) } \frac{2a}{a-c} - \frac{c+a}{a-c} = 1;$$

$$\text{в) } \frac{x(1+y)}{x-y} - \frac{y(1+x)}{x-y} = 1;$$

$$\text{г) } \frac{a(b-1)}{a-b} - \frac{b(a-1)}{a-b} = -1.$$

$$155. \text{ а) } \frac{m}{m-n} - \frac{n}{m-n} = 1;$$

$$\text{б) } \frac{2a-c}{a+c} - \frac{a-2c}{a+c} = 1;$$

$$\text{в) } \frac{a(1+b)}{a+b} + \frac{b(1-a)}{a+b} = 1;$$

$$\text{г) } \frac{x(1-y)}{x-y} - \frac{y(1-x)}{x-y} = 1.$$

Спрости вираз (156, 157).

$$156. \text{ а) } \frac{2}{m^2-4} + \frac{m}{m^2-4};$$

$$\text{б) } \frac{5a-1}{a^2-b^2} - \frac{5b-1}{a^2-b^2};$$

$$\text{в) } \frac{a^2-30}{a-5} + \frac{5}{a-5}.$$

$$157. \text{ а) } \frac{a^2}{a-4} - \frac{16}{a-4};$$

$$\text{б) } \frac{3}{9-a^2} - \frac{a}{9-a^2};$$

$$\text{в) } \frac{a^2-2a}{a-9} + \frac{2a-81}{a-9}.$$

158. Гра. Один учасник / одна учасниця пише дробовий вираз, інший / інша — дробовий вираз з таким самим знаменником, третій / третя — ставить між ними знак + чи -, а четвертий / четверта — виконує дію. Потім учасники / учасниці по колу міняються ролями.

Розв'яжи рівняння (159, 160).

$$159. \text{ а) } \frac{x}{x+5} - \frac{3}{x+5} = 0;$$

$$\text{б) } \frac{2x}{x+3} + \frac{6}{x+3} = 0;$$

$$\text{в) } \frac{1}{x^2-x} - \frac{x+1}{x^2-x} = 0.$$

$$160. \text{ а) } \frac{8}{3+x} + \frac{2x}{3+x} = 0;$$

$$\text{б) } \frac{2x}{x-2} - \frac{4}{x-2} = 0;$$

$$\text{в) } \frac{5x-1}{2x+5} + \frac{2x+15}{2x+5} = 0.$$

161. Додай дроби.

а) $\frac{1}{x} + \frac{3}{2x}$;

б) $\frac{a}{c} + \frac{3-a}{4c}$;

в) $\frac{2a+x}{2x} + \frac{x-3a}{3x}$;

г) $\frac{1}{a+b} + \frac{3}{x(a+b)}$;

г) $\frac{a-c}{c} + \frac{ac-a^2}{c(a-c)}$;

д) $\frac{1}{2a^2bx^3} + \frac{5}{3abx^4}$.

162. Знайди суму дробів.

а) $\frac{2}{a} + \frac{5}{3a}$;

б) $\frac{a+3c}{c} + \frac{c-3a}{a}$;

в) $\frac{3x-1}{3x} + \frac{3-4x}{4x}$.

163. Знайди різницю дробів.

а) $\frac{4}{ax^2} - \frac{5}{ax}$;

б) $\frac{1}{c} - \frac{1}{a+c}$;

в) $\frac{x^2-m}{m(x+m)} - \frac{x}{m}$.

164. Find the difference of the fractions.

а) $\frac{3}{a-b}$ and $\frac{2}{a+b}$;

б) $\frac{x^2}{(a+x)^2}$ and $\frac{x}{a+x}$;

в) $\frac{x}{3a^2b^3c}$ and $\frac{2}{5abc^3}$.

165. Виконай віднімання дробів.

а) $\frac{a+3}{a} - \frac{7}{4a}$;

б) $\frac{x+5y}{y} - \frac{y+5x}{x}$;

в) $\frac{a}{a+b} - \frac{b^2}{a(a+b)}$.

Знайди суму і різницю дробів (166, 167).

166. а) $\frac{1}{3cx} + \frac{c-x}{3c^2x}$;

б) $\frac{a^2}{(a-b)^2} + \frac{a}{a-b}$;

в) $\frac{3}{x-y} + \frac{3y}{x(x-y)}$.

167. а) $\frac{a}{b} - \frac{b}{a}$;

б) $\frac{5+x}{x} - \frac{5-y}{y}$;

в) $\frac{a}{a+b} - \frac{b^2}{a(a+b)}$.

Поддай у вигляді дробу вираз (168, 169).

168. а) $\frac{a+b}{b} - 1$;

б) $m + \frac{3cm-m^2}{m-c}$;

в) $5 - \frac{3x^2+5a}{a-x^2}$;

г) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$;

г) $\frac{1}{a} + 4a - 4$;

д) $1 + \frac{x^2+x+2}{x-1}$.

169. а) $a + \frac{1-a^2}{a}$;

б) $2c - \frac{2c^2-c}{c-1}$;

в) $\frac{9}{a} + a - 6$.

Спрости вираз (170, 171).

170. а) $\frac{6}{a^2+2a} - \frac{3}{a}$;

б) $\frac{3a-1}{a^2-a} - \frac{2}{a-1}$;

в) $\frac{2c-1}{3c-3} - \frac{3c-1}{6c-6}$;

г) $\frac{2a-b}{a^2-ab} + \frac{a-2b}{ab-b^2}$;

г) $\frac{a}{ab-b^2} + \frac{b}{ab-a^2}$;

д) $\frac{c+9}{9c-81} - \frac{9-3c}{9c-c^2}$.

$$171. \text{ а) } \frac{3}{a} - \frac{15}{a^2 + 5a};$$

$$\text{б) } \frac{3a-8}{4a-8} - \frac{a-3}{2a-4};$$

$$\text{в) } \frac{16x}{4xy+3y^2} - \frac{9y}{4x^2+3xy};$$

$$\text{г) } \frac{x^2-8xy}{xy-4y^2} - \frac{16y}{4y-x}.$$

$$172. \text{ ЗНО } \text{ Спрости вираз } \frac{a^2+16}{a-4} - \frac{8a}{a-4}.$$

Розв'яжи рівняння (173, 174).

$$173. \text{ а) } \frac{5}{2x+1} - \frac{5}{3x-2} = 0;$$

$$\text{б) } \frac{3}{1+2x} + \frac{2}{1-x} = 0;$$

$$\text{в) } \frac{3x-7}{x-5} + \frac{x+3}{5-x} = 0;$$

$$\text{г) } \frac{1}{1+x} - \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

$$174. \text{ а) } \frac{3x-6}{3x} - \frac{2-x}{2x} = 0;$$

$$\text{б) } \frac{x}{3x-3} - \frac{5}{2-2x} = 0;$$

$$\text{в) } \frac{x}{(x+3)^2} + \frac{2}{x+3} = 0;$$

$$\text{г) } \frac{10+x^2}{x-x^2} + \frac{x+5}{x-1} = 0.$$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Виконай дії (175, 176).

$$175. \text{ а) } \frac{a^2+4}{a^2-4} - \frac{4a}{a^2-4};$$

$$\text{б) } \frac{a^2}{(a-1)^2} - \frac{2a-1}{(a-1)^2};$$

$$\text{в) } \frac{b^2+b-1}{2b-3} - \frac{8+b-3b^2}{2b-3};$$

$$\text{г) } \frac{2a^2-3}{a^2-9} - \frac{a+1}{a^2-9} + \frac{4+7a}{a^2-9};$$

$$176. \text{ а) } \frac{c^2+1}{c-1} - \frac{2c}{c-1};$$

$$\text{б) } \frac{b^2}{(b-3)^2} - \frac{6b-9}{(b-3)^2};$$

$$\text{в) } \frac{3a^2-2b+b^2}{2a-b} - \frac{2b^2-2b-a^2}{2a-b};$$

$$\text{г) } \frac{4a^2+5}{a^2-4} - \frac{a^2-2a+8}{a^2-4} + \frac{4a+3}{a^2-4};$$

Спрости вираз (177–180).

$$177. \text{ а) } \frac{2a+c}{a-c} + \frac{3c}{c-a};$$

$$\text{б) } \frac{2x}{x-2} + \frac{x+2}{2-x};$$

$$\text{в) } \frac{x^2+1}{x-1} + \frac{2x}{1-x};$$

$$\text{г) } \frac{a}{4a^2-9} - \frac{a+3}{9-4a^2};$$

$$178. \text{ а) } \frac{3x+y}{x-y} + \frac{4y}{y-x};$$

$$\text{б) } \frac{3a}{a-5} - \frac{a-20}{5-a};$$

$$\text{в) } \frac{m^2}{m-4} + \frac{8m-16}{4-m};$$

$$\text{г) } \frac{2a-1}{9a^2-1} - \frac{a+2}{1-9a^2};$$



179. а) $\frac{a^2+2a}{(a-2)^2} - \frac{6a-4}{(2-a)^2};$

б) $\frac{m^2}{(m-5)^2} - \frac{10m-25}{(5-m)^2};$

в) $\frac{a^2-a}{(a-1)^3} + \frac{a-1}{(1-a)^3};$

г) $\frac{a+2b}{(a-b)^3} - \frac{2a-5b}{(b-a)^3}.$

180. а) $\frac{a^2}{(a-3)^2} - \frac{9}{(3-a)^2};$

б) $\frac{a^2}{(a-b)^3} + \frac{2ab-b^2}{(b-a)^3}.$

181. **ЗНО** Спрости вираз $\frac{a}{b(a-b)} - \frac{b}{a(a-b)}.$

Знайди значення виразу (182, 183).

182. а) $\frac{2a^2-25}{a-6} - \frac{a^2+11}{a-6},$
якщо $a = -5;$

б) $\frac{a^2+2a+40}{a^2-49} + \frac{16a-9}{49-a^2},$
якщо $a = -5.$

«Математику і властивий їй стиль мислення треба, безумовно, розглядати як істотний елемент культури сучасної людини».

Ю. О. Митропольський

183. а) $\frac{3b^2-30}{b-5} - \frac{2b^2-5}{b-5},$ якщо $b = -5;$

б) $\frac{5b^2+b}{4b^2-1} + \frac{b^2-3b-1}{1-4b^2},$ якщо $b = -1,5.$

Доведи тотожність (184, 185).

184. а) $\frac{(a+b)^2}{a^2+b^2} + \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2} = 2;$

б) $\frac{(a+b)^2}{ab} - \frac{(a-b)^2}{ab} = 4;$

в) $\frac{2a^2+18}{(a-3)^2} - \frac{(a+3)^2}{(3-a)^2} = 1;$

г) $\frac{5a-3}{2a-6} + \frac{a+9}{6-2a} = 2;$

г) $\frac{m}{m+n} + \frac{2mn}{m^2-n^2} - \frac{n}{m-n} = 1;$

д) $\frac{8}{x^2-4} - \frac{x}{x-2} + \frac{2}{x+2} = -1.$

185. а) $\frac{(m+2)^2}{8m} - \frac{(m-2)^2}{8m} = 1;$

б) $\frac{5m-10}{3m-9} - \frac{m-8}{9-3m} = 2;$

в) $\frac{a^2-3ab+9b^2}{a-3b} + \frac{a^2+3ab+9b^2}{a+3b} - \frac{18ab^2}{a^2-9b^2} = 2a.$

Спрости вираз (186, 187).

186. а) $\frac{a^2-39}{a^2-9} - \frac{a-8}{a-3};$

б) $\frac{a-2}{a+2} - \frac{a^2+12}{a^2-4};$

в) $\frac{2}{a^2-1} - \frac{1}{a^2+a};$

г) $\frac{b-3}{b^2+3b} + \frac{12}{b^2-9};$

г) $\frac{a+2b}{3a-2b} + \frac{6ab+4b^2}{4b^2-9a^2};$

д) $\frac{a}{a+b} - \frac{ab+b^2}{a^2+2ab+b^2}.$

187. а) $\frac{a^2-8}{a^2-16} - \frac{a-3}{a-4}$;

б) $\frac{2}{a^2-9} - \frac{1}{a^2+3a}$;

в) $\frac{a+2b}{2a-b} - \frac{6ab+2b^2}{4a^2-b^2}$;

г) $\frac{c}{c-2} + \frac{2c-4}{c^2-4c+4}$.

188. **НМТ** Спрости вираз $\frac{a^2+ab}{(a+b)^2} - \frac{2a+b}{a+b}$.

Виконай дії (189, 190).

189. а) $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{4b^2}{a^2-b^2}$; б) $\frac{a+b}{(b-c)(c-a)} + \frac{b+c}{(c-a)(a-b)} + \frac{c+a}{(a-b)(b-c)}$;

в) $\frac{2x-3}{3x-3} - \frac{3x-1}{4x+4} - \frac{6x-14}{12x^2-12}$; г) $\frac{1}{2a-3x} - \frac{2a+3x}{4a^2+6ax+9x^2} - \frac{6ax}{8a^3-27x^3}$.

190. а) $\frac{2}{x+2a} + \frac{3}{x-2a} - \frac{2a-3x}{4a^2-x^2}$;

б) $\frac{2}{x+4} - \frac{x-3}{x^2-4x+16} - \frac{x^2-9x}{x^3+64}$;

в) $\frac{1}{a-2} - \frac{3}{a+2} + \frac{3a-10}{a^2-4}$; г) $\frac{3}{(x-a)(x-c)} + \frac{2}{(x-a)(c-a)} - \frac{2}{(c-x)(a-c)}$.

191. Установіть відповідність між виразами, заданими умовами (1-3), та тотожно рівними їм виразами (А-Д).



1 $\frac{a+1}{a+2} + \frac{5a+6}{a^2-4}$

А 1

Б $\frac{1}{a+2}$

2 $\frac{a}{a+2} - \frac{4}{a^2+2a}$

В $\frac{a-2}{a+2}$

3 $\frac{a+2}{a-2} + \frac{a-2}{a+2} - \frac{a^2+12}{a^2-4}$

Г $\frac{a+2}{a-2}$

Д $\frac{a-2}{a}$

Знайди значення виразу (192, 193).

192. а) $\frac{2a}{1-a^2} + \frac{a+1}{2a-2} - \frac{a-1}{3a+3}$, якщо $a = 3$;

б) $\frac{x+2}{x} - \frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x^2-2x}$, якщо $x = \frac{1}{5}$;

в) $\frac{1}{x} + \frac{x+2y}{x^2-2xy} - \frac{4x}{x^2-4y^2}$, якщо $x = 2$, $y = 3$.

193. а) $\frac{x-3}{x^2+3x} - \frac{x+3}{x^2-3x} - \frac{4x}{x^2-9}$, якщо $x = 7$;

б) $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} - \frac{4}{x^2-1}$, якщо $x = -2$.

194. **ЗНО** Обчисли значення виразу $\frac{10a+b}{b^2-4a^2} + \frac{4a+2b}{b^2+4ab+4a^2}$ при $a = 0,25$, $b = 4,5$.

195. **ЗНО** Обчисли значення виразу $\frac{a^2-b^2}{a-b} - \frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$, якщо $a = 10,2$; $b = -0,2$.

Доведи, що значення виразу не залежить від значення змінної (196, 197).

196. а) $\frac{5x-3}{4x+4} - \frac{4x-2}{3x+3}$;

б) $\frac{1}{a+2} + \frac{a}{2a-4} - \frac{2a}{a^2-4}$.

197. а) $\frac{3m-2}{8+4m} - \frac{2m-2}{6+3m}$;

б) $\frac{a+2}{a-2} + \frac{a-2}{a+2} - \frac{16}{a^2-4}$.

Доведи, що значення виразу не може бути від'ємним числом (198, 199).

198. а) $\frac{2b^2}{a^2+2} - \frac{4b}{a^2+2} + \frac{2}{a^2+2}$;

б) $\frac{1}{(1-m)^2} + \frac{3m}{(m-1)^2} + \frac{m}{m-1}$.

199. а) $\frac{4y^2}{x^2+1} + \frac{12y}{1+x^2} + \frac{9}{x^2+1}$;

б) $\frac{10x}{(x-2)^2} + \frac{6x+4}{(2-x)^2} + \frac{4x}{x-2}$.

200. Доведи, що при кожному допустимому a значення виразу $\frac{a^3+3a}{a+2} - \frac{3a^2-14a+16}{a^2-4} + 2a$ є додатним числом.

Виконай дії (201, 202).

201. а) $\frac{1}{x^2+3xy} + \frac{2}{9y^2-x^2} + \frac{1}{2x-6y}$;

б) $\frac{7-x^2}{x^3-1} + \frac{3x+5}{x^2+x+1} + \frac{2}{1-x}$.

202. а) $\frac{3-b}{b-2} - \frac{8}{2b^3-8b} + \frac{b+3}{b+2} - \frac{b}{b^2-4}$;

б) $\frac{3a+2}{9a^2-6a+4} - \frac{18a}{27a^3+8} - \frac{1}{3a+2}$.

Розв'яжи рівняння (203–206).

203. а) $\frac{x-25}{5x-25} - \frac{3x+5}{5x-x^2} = 0$;

б) $\frac{x^2-6x}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = 0$;

в) $\frac{x^2}{(x-2)^2} - \frac{x+2}{2x-4} = 0$;

г) $\frac{1}{2x-1} + \frac{6x}{1-8x^3} = 0$.

204. а) $\frac{6}{x^2-6x} + \frac{12+x}{6x-36} = 0$;

б) $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2+x} = 0$;

в) $\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{x+1}{1-x} = 0$;

г) $\frac{x^2-8}{x^3+8} - \frac{1}{x+2} = 0$.

$$205. \text{ а) } \frac{12x}{4x^2-9} + \frac{2x-3}{4x+6} + \frac{2x+3}{6x-9} = 0; \quad \text{ б) } \frac{1}{x-2} - \frac{x-2}{x^2+2x+4} - \frac{5x}{x^3-8} = 0.$$

$$206. \text{ а) } \frac{1}{x^2+3x} + \frac{3}{9-x^2} + \frac{1}{2x^2-6x} = 0; \quad \text{ б) } \frac{3x^2+7x+3}{x^3-1} - \frac{2x-1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x-1} = 0.$$

Подай дріб у вигляді суми дробів (207, 208).

$$207. \text{ а) } \frac{2x+9}{x^2}; \quad \text{ б) } \frac{4a^2+5b^2}{ab}; \quad \text{ в) } \frac{6a^2+3b^2+ab}{a^3}.$$

$$208. \text{ а) } \frac{3a+5}{a^2}; \quad \text{ б) } \frac{6a+2b}{ab}; \quad \text{ в) } \frac{3a^3+4a^2+2}{2a^4}.$$

Подай дріб у вигляді суми цілого і дробового виразів (209, 210).

$$209. \text{ а) } \frac{a+2b}{a}; \quad \text{ б) } \frac{a+b+3c}{a+b}; \quad \text{ в) } \frac{3a-3b+b^2}{a-b}.$$

$$210. \text{ а) } \frac{3a+2b}{a}; \quad \text{ б) } \frac{2a-2b+3a^2}{a-b}; \quad \text{ в) } \frac{a^2+3a+2}{a+3}.$$

211. Доведи тотожність.

$$\text{ а) } \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} = \frac{8}{1-x^8};$$

$$\text{ б) } \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1+2x} + \frac{2}{1+4x^2} + \frac{4}{1+16x^4} = \frac{8}{1-256x^8}.$$

212. Знайди всі цілі значення n , при яких є цілим числом значення виразу:

$$\text{ а) } \frac{5n+3}{n}; \quad \text{ б) } \frac{2n^2+3n+5}{n}; \quad \text{ в) } \frac{2n^2+2n+6}{n+1}.$$

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

213. *Відкрита задача.* Доведи, що значення виразу

$$\frac{7x^2+4}{3x^2+3} - \frac{5x^2+3}{2x^2+2}$$

не залежить від значення x . Запиши суму дробів з двома змінними, яка не залежить від значення цих змінних.

214. Доведи тотожність.

$$\text{ а) } \frac{x^2-(y-z)^2}{(x+z)^2-y^2} + \frac{y^2-(x-z)^2}{(x+y)^2-z^2} + \frac{z^2-(x-y)^2}{(y+z)^2-x^2} = 1;$$



$$б) \frac{x^2 - yz}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2 + xz}{(y+z)(y-x)} + \frac{z^2 + xy}{(z-x)(z+y)} = 0;$$

$$в) \frac{(y-b)(z-b)}{b(b-c)} + \frac{(y-c)(z-c)}{c(c-b)} + \frac{yz}{bc} = 1.$$



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

215. Запиши замість букв числа, назви яких починаються на вказані букви, і такі, щоб їх суми в кожному рядку і кожному стовпчику дорівнювали одна одній (мал. 4.2).

В	В	Д
Ч	Д	Д
Ч	Ш	Ш

Мал. 4.2

216. Обчисли.

а) $5^{30} \cdot 3^{30} - (15^{15} - 1)(15^{15} + 1);$

б) $7^{24} \cdot 8^{24} + (1 - 56^{12})(1 + 56^{12}).$

217. Виконай дії. а) $2 + \frac{8}{15} \cdot 1 \frac{9}{16};$

б) $1 \frac{5}{12} \cdot 2 + 4 \cdot 1 \frac{1}{18} + 1 \frac{1}{9} \cdot 1 \frac{1}{4};$

в) $2 \frac{2}{11} \cdot \frac{7}{8} - 6 \cdot \frac{1}{5};$

г) $2 \frac{1}{10} \cdot 4 \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{3}{8} - \frac{9}{20} \cdot 6.$

218. **ЗНО** У кінотеатрі квиток на вечірній сеанс коштує на 15 грн дорожче, ніж на ранковий сеанс. Вартість 4 квитків на ранковий сеанс на 220 грн менша від вартості шести квитків на вечірній сеанс. Скільки гривень коштує один квиток на ранковий сеанс? (На кожному із сеансів квитки на всі місця коштують однаково.)

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу пояснити, як звести дробі до спільного знаменника.
- ✓ Формуюю і використовую правило додавання і віднімання дробів, у яких

знаменники: однакові $\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}$ різні $\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{AD \pm CB}{BD}$

- ✓ Використовую для перетворення дробів і виконання дій з ними

формули $\frac{M}{A-B} = -\frac{M}{B-A}$ і $(A-B)^2 = (B-A)^2$

- ✓ Можу подати дріб у вигляді суми

$$\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

$$\frac{MA+NB}{A} = \frac{MA}{A} + \frac{NB}{A} = M + \frac{NB}{A}$$



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. Які значення x допустимі для дробу? а) $\frac{2x+3}{3x-12}$; б) $\frac{7x}{x^2-4}$.
2. Скороти дріб. а) $\frac{8x^2c}{12axc^3}$; б) $\frac{5a^2-20}{10a+20}$; в) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$.
3. Знайди суму та різницю дробів $\frac{3a+b}{c}$ і $\frac{3a-b}{c}$.
4. Спрости вираз. а) $\frac{a}{a+3} - \frac{9}{a^2+3a}$; б) $\frac{a+2}{a-2} - \frac{8a}{a^2-4} + \frac{4}{a+2}$.

ВАРІАНТ II

1. Які значення x допустимі для дробу? а) $\frac{3x+6}{5x-10}$; б) $\frac{2x-1}{x^2-16}$.
2. Скороти дріб. а) $\frac{6a^2x^3}{18ax^2y^3}$; б) $\frac{3b^2-12}{9b+18}$; в) $\frac{x^2-6x}{x^2-12x+36}$.
3. Знайди суму та різницю дробів $\frac{2x-9y}{2z}$ і $\frac{2x+9y}{2z}$.
4. Спрости вираз. а) $\frac{b^2}{9b+27} - \frac{1}{b+3}$; б) $\frac{2}{m+1} - \frac{4m}{m^2-1} + \frac{m+1}{m-1}$.

ВАРІАНТ III

1. Які значення x допустимі для дробу? а) $\frac{2x+5}{6x-18}$; б) $\frac{7+x}{x^2-25}$.
2. Скороти дріб. а) $\frac{3xa^2}{15ax^3c^2}$; б) $\frac{4a^2-36}{6a-18}$; в) $\frac{x^2+10x+25}{x^2+5x}$.
3. Знайди суму та різницю дробів $\frac{2a+5b}{2c}$ і $\frac{2a-5b}{2c}$.
4. Спрости вираз. а) $\frac{m}{m-5} - \frac{25}{m^2-5m}$; б) $\frac{a+3}{a-3} + \frac{6}{a+3} - \frac{12a}{a^2-9}$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 1



1. При якому значенні x не має змісту дріб $\frac{5-x}{3x-6}$?
 А $x = 0$ Б $x = 5$ В $x = 2$ Г $x = 3$
2. Укажи спільний знаменник дробів $\frac{2}{3x^2}$ і $\frac{3}{2xy}$.
 А $3x^2y$ Б $2xy$ В $6x^2y$ Г $6xy$
3. Укажи пропущений член тотожності $\frac{5}{xy} = \frac{*}{3x^2y}$.
 А $15x$ Б $15x^3$ В $5x^2$ Г $5y^2$
4. Сумою дробів $\frac{2}{x}$ і $\frac{x}{2}$ є дріб:
 А $\frac{2+x}{x+2}$ Б $\frac{2+x}{2x}$ В $\frac{2x}{x+2}$ Г $\frac{4+x^2}{2x}$
5. Скороти дріб $\frac{x^2-x}{x-1}$.
 А x Б $x-1$ В 1 Г $x+1$
6. Різниця дробів $\frac{2x}{x-2}$ і $\frac{4}{x-2}$ дорівнює:
 А $\frac{2(x+4)}{x-2}$ Б $\frac{2x+4}{2x-4}$ В 2 Г 1
7. Знайди значення виразу $\frac{a-3}{a+3}$, якщо $a = -1$.
 А $-0,5$ Б -2 В $0,5$ Г 2
8. Скільки коренів має рівняння $\frac{7}{x^2-1} = 0$?
 А один Б два В безліч Г жодного
9. Розв'яжи рівняння $\frac{x^2+2x}{x^2-4} = 0$.
 А -2 Б 0 В 0 і -2 Г 2 і -2
10. При якому натуральному значенні n значення дробу $\frac{n+2}{n}$ є цілим числом?
 А $-2, -1, 1, 2$ Б -1 і 1 В 1 і 2 Г -1 і 2

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ № 1



1. Який із виразів цілий?

А $\frac{2x+y}{3x}$

Б $\frac{2x+y}{3y}$

В $\frac{2x+y}{3}$

Г $\frac{2x+y}{3xy}$

2. Скороти дріб $\frac{12a^2b^2}{18a^3b}$.

А $\frac{3b}{2a}$

Б $\frac{3a}{2b}$

В $\frac{2a}{3b}$

Г $\frac{2b}{3a}$

3. При яких значеннях змінних не має змісту дріб $\frac{2c}{c^2-2c}$?

А 2

Б 0

В 0 і 2

Г -2 і 2

4. Установи відповідність між виразами, заданими умовами (1–3), та їх числовими значеннями (А–Д) за умови, що $a = 0,3$, $b = -0,7$.

1 $\frac{a^2-b^2}{a+b}$

А -1,7

Б -0,4

2 $\frac{a^2b-ab^2}{a^2-2ab+b^2}$

В -0,21

Г 1

3 $\frac{a^3-8}{a^2+2a+4}$

Д 2,3

5. Виконай дії.

а) $\frac{5x+2}{3-x} - \frac{4-7x}{x-3}$;

б) $\frac{a+4}{a-4} + \frac{a-4}{a+4} - \frac{16a}{a^2-16}$.

6. Розв'яжи рівняння.

а) $\frac{x^2-9}{x^2+3x} = 0$;

б) $\frac{5}{x+5} + \frac{5}{x-5} + \frac{2x^2}{x^2-25} = 0$.

7. Доведи тотожність $\frac{a+5}{3a+9} - \frac{a-10}{3a-9} - \frac{3a+5}{a^2-9} = 0$.8. Для кожного значення параметра a розв'яжи рівняння $(a^2-25)x = a+5$.

Додаткове завдання

3. Обчисли значення виразу $\frac{4m^2+2mn-n^2}{8m^2+3n^2}$, якщо $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо, як зі звичайними дробами виконувати:

множення

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{2}{15} \cdot \frac{9}{10} = \frac{2 \cdot 9}{15 \cdot 10} = \frac{3}{25}$$

піднесення до степеня

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

Згадай, у якій послідовності виконують дії з числами

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{10}\right) + 7 : 5$$

2 1 4 3

$$1 - \frac{2}{3} \cdot 5 + 7 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)$$

4 2 5 3 1

§ 5. Множення дробів

КЛЮЧОВІ СЛОВА

• добуток дробів — *product of fractions*

Правило множення звичайних дробів тобі вже відоме. Для будь-яких натуральних чисел a , b , c і d справджується рівність

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Доведемо, що ця рівність — тотожність, тобто що вона справджується для всіх допустимих значень a , b , c , d ($b \neq 0$ і $d \neq 0$).

Нехай $\frac{a}{b} = r$ і $\frac{c}{d} = p$. За означенням дії ділення, $a = br$ і $c = dp$, звід-

си $ac = br \cdot dp = bd \cdot rp$. Оскільки $bd \neq 0$, то з рівності $ac = bd \cdot rp$, за означенням дії ділення, маємо: $rp = \frac{ac}{bd}$, або

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

З доведеної тотожності випливає правило множення дробів.

Щоб помножити дріб на дріб, треба окремо перемножити їх чисельники й окремо знаменники і перший добуток записати чисельником, а другий — знаменником дробу:

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}.$$

Приклади. $\frac{2x}{3n} \cdot \frac{m}{5n} = \frac{2x \cdot m}{3n \cdot 5n} = \frac{2xm}{15n^2};$

$$\frac{a}{a-b} \cdot \frac{2x}{a+b} = \frac{a \cdot 2x}{(a-b)(a+b)} = \frac{2ax}{a^2 - b^2}.$$

Оскільки цілий вираз можна вважати дробом зі знаменником 1, то, за сформульованим правилом, можна множити дробу і цілі вирази.

Приклади. $\frac{2a}{mx} \cdot 3m^2 = \frac{2a}{mx} \cdot \frac{3m^2}{1} = \frac{2a \cdot 3m^2}{mx} = \frac{6am}{x};$

$$(c^2 - 1) \cdot \frac{c}{(c+1)^2} = \frac{(c^2 - 1)c}{(c+1)^2} = \frac{(c-1)(c+1)c}{(c+1)^2} = \frac{(c-1)c}{c+1}.$$

Правило множення дробів поширюється на добуток трьох і більше множників, наприклад:

$$\frac{1}{a-b} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a^2 - b^2}{4a^2} = \frac{a(a-b)(a+b)}{(a-b)(a+b)4a^2} = \frac{1}{4a}.$$

Піднести дріб до n -го степеня означає перемножити n таких дробів:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b} = \frac{aa \cdot \dots \cdot a}{bb \cdot \dots \cdot b} = \frac{a^n}{b^n}.$$

Щоб піднести дріб до степеня, треба піднести до цього степеня чисельник та знаменник і перший результат записати у чисельнику, а другий — у знаменнику дробу:

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}.$$

Приклад. Піднесемо дріб $\frac{ax^2}{2c}$ до п'ятого степеня:

$$\left(\frac{ax^2}{2c}\right)^5 = \frac{(ax^2)^5}{(2c)^5} = \frac{a^5 x^{10}}{32c^5}.$$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Ти знаєш, що для множення многочленів існує обернене перетворення: розкладання многочленів на множники. Чи існує обернене до множення дробів перетворення?

Кожний дріб можна подати у вигляді добутку двох, трьох чи довільної кількості інших дробів. Наприклад, $\frac{a}{t} = \frac{a}{c} \cdot \frac{c}{t}$, $\frac{a}{t} = \frac{a}{n} \cdot \frac{n}{c} \cdot \frac{c}{t}$.

Перетворення, обернене до множення дробів, неоднозначне, невизначене. Простішою є така задача. Подай дріб $\frac{a}{n}$ у вигляді добутку двох дробів, один із яких дорівнює $\frac{n}{ca}$. У даному випадку відповідь неважко підібрати: $\frac{a}{n} = \frac{n}{ca} \cdot \frac{ca^2}{n^2}$.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Сформулюй правило множення двох дробів.
2. Як помножити дріб на цілий вираз? А цілий вираз — на дріб?
3. Як піднести дріб до степеня?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Знайди добуток дробів $\frac{x^2 - c^2}{2xc}$ і $\frac{16}{(x - c)^2}$.

Розв'язання. $\frac{x^2 - c^2}{2xc} \cdot \frac{16}{(x - c)^2} = \frac{(x - c)(x + c) \cdot 16}{2xc(x - c)^2} = \frac{8(x + c)}{xc(x - c)}$.

Відповідь. $\frac{8(x + c)}{xc(x - c)}$.

2. Знайди значення виразу $\left(\frac{x - 5}{5 - x}\right)^4$.

Розв'язання. $\left(\frac{x - 5}{5 - x}\right)^4 = \left(-\frac{x - 5}{x - 5}\right)^4 = (-1)^4 = 1$.

Відповідь. При кожному значенні x , крім $x = 5$, значення даного виразу дорівнює 1.

3. Подай у вигляді степеня дробу вираз $\frac{a^7 x^{14}}{(a - x)^{21}}$.

Розв'язання. $\frac{a^7 \cdot x^{14}}{(a - x)^{21}} = \frac{a^7 \cdot (x^2)^7}{((a - x)^3)^7} = \left(\frac{ax^2}{(a - x)^3}\right)^7$. Відповідь. $\left(\frac{ax^2}{(a - x)^3}\right)^7$.

ВИКОНАЙ УСНО



219. Помнож дроби.

а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7}$;

б) $\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5a}$;

в) $\frac{3}{-5} \cdot \frac{-3}{4}$;

г) $\frac{x}{a} \cdot \frac{m}{2c}$;

г) $\frac{3}{ab} \cdot \frac{5}{ax^2}$;

д) $\frac{-1}{ab} \cdot \frac{-1}{ac}$.

220. Виконай множення.

а) $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{t}$;

б) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{m}{n}$;

в) $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x}$;

г) $\frac{4a}{c} \cdot \frac{x}{3}$;

г) $\frac{3}{2b} \cdot \frac{6b}{c}$;

д) $\frac{x^3}{3} \cdot \frac{9}{x^4}$;

е) $\frac{m^2}{10} \cdot \frac{5}{m}$;

є) $\frac{8a^2}{5} \cdot \frac{25}{4a}$.

221. Піднеси до квадрата і куба дріб.

а) $\frac{2}{3}$;

б) $\frac{x}{ac}$;

в) $\frac{1}{2x^2}$;

г) $\frac{-2a}{x^3}$.

222. Знайди добуток $\frac{x^2-9}{2x} \cdot \frac{2}{x-3}$.

А $\frac{x+3}{2}$

Б $\frac{x-3}{2}$

В $\frac{x+3}{x}$

Г $\frac{x-3}{x}$

223. Чи правильно Віктор виконав множення?

а) $\frac{a+b}{x} \cdot \frac{c}{x} = \frac{(a+b)c}{x}$;

б) $\frac{-b}{(a+d)} \cdot \frac{c}{(a+d)} = \frac{bc}{(a+d)}$.

224. Спрости вираз $\frac{a(a+b)^2}{2b} \cdot \frac{2b}{a+b}$ і знайди його значення, якщо

$a = 2,5, b = -1,5.$

А 1

Б 10

В 2,5

Г -1,5

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Виконай множення (225–230).

225. а) $\frac{2,7}{2x^2} \cdot \frac{20}{9x^3}$;

б) $\frac{1}{4a^3} \cdot \frac{-2a}{7c}$;

в) $\frac{2ab}{-5a^2} \cdot \frac{5c^2}{4a^2b^3}$;

г) $2m^2 \cdot \frac{n}{8m}$;

г) $\frac{-b}{12ac} \cdot 4ac^2$;

д) $\frac{5a^2}{3bc^2} \cdot (-6ac^3)$.

226. а) $\frac{15n^6}{-8m^2} \cdot \frac{4m^2}{5n}$;

б) $\frac{3a^3}{-x^4} \cdot \frac{5x}{4a}$;

в) $\frac{1}{2cx} \cdot \frac{-4c^2}{3x^2}$;

г) $2ax^2 \cdot \frac{3a}{x^3}$;

г) $-\frac{7a^2m}{8xn} \cdot 4x^2n$;

д) $\frac{-1}{2a^2c} \cdot (-3a^4)$.

227. а) $\frac{a+b}{x} \cdot \frac{3x^2}{2(a+b)}$;

б) $\frac{1}{x^2-y^2} \cdot \frac{x-y}{4xy}$;

в) $\frac{3}{x^2-y^2} \cdot \frac{(x+y)^2}{3}$;

г) $\frac{a^2-ab}{m^3} \cdot \frac{m^2}{a-b}$;

г) $\frac{3ax}{ax+ac} \cdot \frac{cx+c^2}{9x}$;

д) $\frac{6m}{a^2-a} \cdot \frac{2a-2}{9m^2}$.

228. а) $\frac{a-b}{3} \cdot \frac{15}{a^2-b^2}$;

б) $\frac{a-x}{4m^2} \cdot \frac{16am}{(a-x)^2}$;

в) $\frac{a^2-c^2}{2ac} \cdot \frac{8}{(a+c)^2}$;

г) $\frac{3a-3b}{4a+4c} \cdot \frac{(a+c)^2}{a^2-b^2}$;

г) $\frac{3a+9}{a^2-4} \cdot \frac{2a-4}{(a+3)^2}$;

д) $\frac{x^2-y^2}{12} \cdot \frac{6}{(x-y)^2}$.

229. а) $\frac{(x-y)^2}{(x+y)y} \cdot \frac{y^2}{x^2-y^2}$;

б) $\frac{a^2-4}{a^2+4} \cdot \frac{a+2}{a-2}$;

в) $\frac{x^2-1}{x^3-1} \cdot \frac{x^2+x+1}{x+1}$.

230. а) $\frac{x^2-c^2}{x^2-a^2} \cdot \frac{a+x}{c+x}$;

б) $\frac{(a+b)^2}{(a-b)b} \cdot \frac{b}{a^2-b^2}$;

в) $\frac{x^2-xy}{y(x+y)} \cdot \frac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$.

231. Заповніть таблицю.



x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\frac{x+1}{x} \cdot \frac{2x}{x^2-1}$							
$\frac{x^2-4}{x} \cdot \frac{x^2-2x}{x+2}$							

232. Піднеси до квадрата дріб.

а) $\frac{5a}{4x}$;

б) $\frac{x}{a+x}$;

в) $\frac{-m}{2ac^3}$;

г) $\frac{3xz}{2a+z}$.

 233. Піднеси до квадрата, куба і четвертого степеня дріб $\frac{2a}{3cx^2}$.

Піднеси до степеня (234, 235).

234. а) $\left(\frac{m}{3n}\right)^2$;

б) $\left(\frac{a}{2dx}\right)^3$;

в) $\left(-\frac{3c}{1-a^2}\right)^2$;

г) $\left(\frac{-2x}{3abc}\right)^4$.

235. а) $\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^2$;

б) $\left(\frac{2a}{c-3}\right)^5$;

в) $\left(\frac{2ab}{3c}\right)^2$;

г) $\left(\frac{x^2z}{2a^3}\right)^3$.

236. Гра. Один з учасників / одна з учасниць записує дріб, другий / друга — степінь, до якого потрібно піднести дріб, а третій / третя виконує піднесення до степеня. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

237. Віднови записи.

$$\text{а) } \frac{(x+2)^2}{a^2 \dots} \cdot \frac{ax^2}{\dots} = \frac{x(x+2)}{\dots(x-2)};$$

$$\text{б) } \frac{x-y}{\dots} \cdot \frac{2x^2y^2}{\dots} = \frac{xy}{x+y}.$$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



238. Знайди добуток дробів.

$$\text{а) } \frac{4a^2-9}{3+2a} \cdot \frac{6a}{3-2a};$$

$$\text{б) } \frac{1-9x^4}{3x^2-1} \cdot \frac{x-1}{3x^2+1}.$$

239. Find the product of fractions.

$$\text{а) } \frac{a^3+x^3}{a-x} \cdot \frac{a^2-2ax+x^2}{a^2-ax+x^2};$$

$$\text{б) } \frac{a^6-1}{a^2+1} \cdot \frac{1+a^2}{a^4+1+a^2}.$$

240. Виконай множення дробів.

$$\text{а) } \frac{a}{5a-2} \cdot \frac{4-25a^2}{5a+2};$$

$$\text{б) } \frac{a^3-x^3}{a^2-x^2} \cdot \frac{ax+x^2}{a^2+ax+x^2}.$$

Спрости вираз (241–244).

$$\text{241. а) } \frac{x^2-9y^2}{x^2+6xy+9y^2} \cdot \frac{x^2+3xy}{xy-3y^2};$$

$$\text{б) } \frac{x^2+6x+9}{2x-4} \cdot \frac{x^2-4}{3x+9};$$

$$\text{в) } \frac{2x^2-6x}{x^2+2xy+y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{x^2-3x};$$

$$\text{г) } \frac{x^2-10x+25}{6x+3y} \cdot \frac{2xy+y^2}{25-x^2}.$$

$$\text{242. а) } \frac{xy-2y^2}{x^2+2xy} \cdot \frac{x^2+4xy+4y^2}{x^2-4y^2};$$

$$\text{б) } \frac{x^2-12x+36}{2x-8} \cdot \frac{2x^2-32}{x^2-6x};$$

$$\text{в) } \frac{3x^2y+3xy}{x^2-2xy+y^2} \cdot \frac{x^2-y^2}{3x^2+3x};$$

$$\text{г) } \frac{x^3-81x}{x^2+14x+49} \cdot \frac{2x^2+14x}{x^3-9x^2}.$$

$$\text{243. а) } \left(-\frac{3c^2}{2a^2b^3}\right)^2 \cdot 12a^4b^6;$$

$$\text{б) } \left(\frac{x^2}{-2y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{-2y^2}{x^3}\right)^3;$$

$$\text{в) } \frac{ax^3}{5-5a} \cdot \frac{a^2-2a+1}{0,2ax^3};$$

$$\text{г) } \left(\frac{2a-1}{a-1}\right)^2 \cdot \frac{a^3-1}{4a^2-4a+1}.$$

244. а) $(-8x^6y^3) \cdot \left(\frac{3z^4}{2x^2y}\right)^3$;

б) $\left(\frac{a^2}{3b^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{9b^4}{a^3}\right)^2$;

в) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \cdot \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^2$;

г) $\frac{a-c}{a^2-ac+c^2} \cdot \frac{a^3+c^3}{a^2-c^2}$.

Перемнож дроби (245, 246).

245. а) $\frac{a+3}{10a^2} \cdot \frac{6-2a}{a} \cdot \frac{5a^3}{3-a}$;

б) $\frac{0,2}{x} \cdot \frac{x^2-1}{2x} \cdot \frac{5x}{x+1}$;

в) $\frac{-6x^4}{35y^6z^3} \cdot \frac{5y^4z^7}{42x^6} \cdot \left(-\frac{49x^3y^2}{z^4}\right)$;

г) $\frac{a^3b^2}{-20c^4} \cdot \frac{-5a^4c}{24b^5} \cdot \frac{16b^3c^3}{-30a^6}$.

246. а) $\frac{2x}{y^2} \cdot \frac{y^4}{6x^3} \cdot \frac{9x}{y} \cdot \left(-\frac{5y^3}{3x^2}\right)$;

б) $\frac{3}{a} \cdot \frac{b^2}{4a} \cdot \frac{a^3}{9b^3} \cdot \frac{8a}{b}$.

Спрости вираз (247, 248).

247. а) $\frac{x+3}{24x^2} \cdot \frac{9+x^2}{9-x^2} \cdot (-4x(x-3))$;

б) $\frac{4a^2b}{4a^2-b^2} \cdot \frac{6a^2-3ab}{12a^3b^3} \cdot \frac{2ab^2}{2a+b}$.

248. а) $(-8a^2(a+b)) \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \cdot \frac{b-a}{(8a)^2}$;

б) $\frac{x^2-x}{2x+2} \cdot \frac{x^2+2x+1}{x^2+4x} \cdot \frac{x^2-16}{3x-3}$.

Знайди значення виразу (249, 250).

249. а) $\frac{ax^2-a}{x^2+ax+a^2} \cdot \frac{a^3-x^3}{4+4x}$, якщо $a=4$, $x=3$;

б) $\frac{ab-2b}{(b-3)^2-4a^2} \cdot \frac{4a^2+2ab+3b-9}{a^2-2a}$, якщо $a=\frac{1}{2}$, $b=3$.

250. а) $\frac{y^2-16x^2}{4x^2+10x+25} \cdot \frac{8x^3-125}{4x-y}$, якщо $x=\frac{1}{2}$, $y=3$;

б) $\frac{x^2-xy+2y-4}{xy+2y} \cdot \frac{x^2+2x}{(x-y)^2-4}$, якщо $x=3$, $y=2$.

Піднеси до степеня дріб (251, 252).

251. а) $\left(-\frac{x^2z}{a^3n}\right)^2$;

б) $\left(\frac{-3m^2n}{2ac^3}\right)^3$;

в) $\left(\frac{xy^2z}{-2an^4}\right)^4$.

252. а) $\left(\frac{2a^2}{3x^2y^3}\right)^3$;

б) $\left(\frac{a-c}{-2x^2z}\right)^3$;

в) $\left(\frac{3ax^5}{2x-1}\right)^2$.

253. Подай дріб у вигляді степеня. а) $\frac{a^{15} \cdot x^{30}}{(a+x)^{15}}$; б) $\frac{(x-y)^{10} \cdot (x+y)^{20}}{(2x+y)^{20}}$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

254. Виконавши перетворення дробових виразів, учень витер частину дошки (мал. 5.1). Віднови витерті записи.

255. Розв'яжи рівняння.

а) $\frac{2x^2}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{x} = 0;$

б) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x} = 0.$

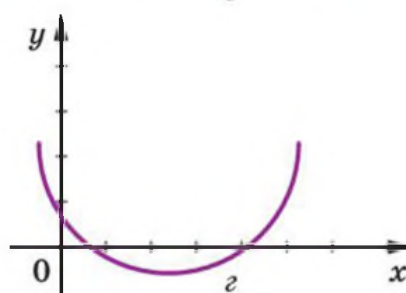
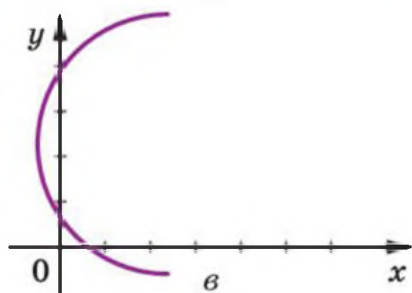
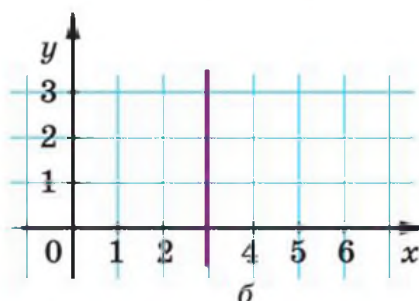
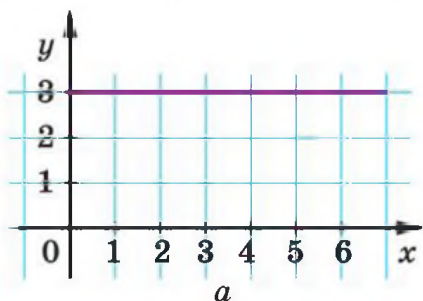
$$\frac{(a-b)^2 c^3}{(a^2 - \dots)} = \frac{a-b}{(a+b)c}$$

$$\frac{2x + \dots}{2x-1} \cdot \frac{2x+1}{\dots} = \frac{6x+9}{4x^2-1}$$

Мал. 5.1

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

256. На яких з малюнків а-г зображено графік функції? Графік якого рівняння зображено на малюнках а, б?



Мал. 5.2

257. Задача Р. Декарта (1596–1650). Знайди y .
 $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0.$

258. Виконай дії.

а) $\left(1\frac{8}{13} : 3\frac{3}{13} + \frac{5}{7} : \frac{8}{21}\right) : \left(8\frac{1}{8} + 3\frac{1}{2}\right);$

б) $\left(28\frac{4}{5} : 13\frac{5}{7} + 6\frac{3}{5} : \frac{2}{3}\right) : \left(1\frac{11}{16} : 2\frac{1}{4}\right).$



Рене Декарт

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Формулюю і використовую правило множення і піднесення до степеня дробів

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

- ✓ Умію множити цілий вираз на дріб і дріб на цілий вираз

$$A \cdot \frac{B}{C} = \frac{A \cdot B}{C}$$

$$\frac{M}{N} \cdot P = \frac{M \cdot P}{N}$$

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке взаємно обернені дроби

$$\frac{a}{b} \text{ і } \frac{b}{a} \quad \frac{5}{7} \text{ і } \frac{7}{5}$$

- як зі звичайними дробами виконувати дію ділення

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

- як ділять ціле число на дріб і дріб на ціле число

$$a : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} : \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{c}$$

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{b \cdot c}$$

§ 6. Ділення дробів

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- частка дробів — *quotient of the fractions*

Дія ділення дробів обернена до множення: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$.

Дріб $\frac{d}{c}$ називають оберненим до $\frac{c}{d}$.

Щоб поділити один дріб на інший, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого:

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Приклади. $\frac{4a^2b}{5x} : \frac{2ax}{3b^2} = \frac{4a^2b}{5x} \cdot \frac{3b^2}{2ax} = \frac{12a^2b^3}{10ax^2} = \frac{6ab^3}{5x^2};$

$$\frac{1}{a+b} : \frac{a}{a^2-b^2} = \frac{1}{a+b} \cdot \frac{a^2-b^2}{a} = \frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)a} = \frac{a-b}{a}.$$

Цілий вираз можна подати у вигляді дробу зі знаменником 1:

$$\frac{4ax^2}{5c} : 2a^2x = \frac{4ax^2}{5c} \cdot \frac{1}{2a^2x} = \frac{2x}{5ac}; \quad (2a+3) : \frac{a}{2a-3} = \frac{2a+3}{1} \cdot \frac{2a-3}{a} = \frac{4a^2-9}{a}.$$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Проаналізуємо, при яких значеннях змінних a, b, c, d значення частки $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$

існує. Знаменники дробів не можуть дорівнювати нулю, тому $b \neq 0$ і $d \neq 0$. Не може дорівнювати нулю і значення c , бо за цієї умови значення другого дробу дорівнює 0, а на 0 ділити не можна. Отже, дана частка має значення тільки в тому випадку, коли виконуються всі три наступні умови: $b \neq 0, d \neq 0, c \neq 0$.

Розглянемо, при яких значеннях x має зміст вираз $\frac{6}{x-|x|} : \frac{x+|x|}{2}$.

Якщо $x \geq 0$, то $x - |x| = 0$; у цьому випадку знаменник першого дробу дорівнює 0, і частки не існує.

Якщо $x < 0$, то $x + |x| = 0$; у цьому випадку значення другого дробу дорівнює 0, а на нуль ділити не можна.

Отже, даний вираз не має змісту при будь-якому значенні x .

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Який дріб називають оберненим до даного дробу?
2. Сформулюй правило ділення дробів.
3. Як поділити дріб на цілий вираз? А як — цілий вираз на дріб?
4. При яких значеннях змінних частка дробів $\frac{a}{m} : \frac{c}{n}$ має зміст?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Спрости вираз $1 - \frac{a}{c} : \frac{a}{c^2}$.

Розв'язання. $1 - \frac{a}{c} : \frac{a}{c^2} = 1 - \frac{a}{c} \cdot \frac{c^2}{a} = 1 - \frac{a \cdot c^2}{c \cdot a} = 1 - c.$ Відповідь. $1 - c.$



2. Знайди частку від ділення дробу $\frac{ac^2}{a^2-1}$ на $\frac{2c}{a^3-a^2}$ і вкажи, при яких значеннях змінних частка існує.

Розв'язання. $\frac{ac^2}{a^2-1} : \frac{2c}{a^3-a^2} = \frac{ac^2}{(a-1)(a+1)} \cdot \frac{a^2(a-1)}{2c} = \frac{a^3c}{2(a+1)}.$

Перший із даних дробів не має змісту, якщо $a^2-1=0$, тобто при $a=1$ або $a=-1$. Другий дріб не має змісту, якщо $a^2(a-1)=0$, тобто при $a=0$ або $a=1$. При $c=0$ значення другого дробу дорівнює 0, а на 0 ділити не можна.

Отже, частка даних дробів існує, якщо $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$ і $c \neq 0$.

Відповідь. $\frac{a^3c}{2(a+1)}$; частка існує при $a \neq 0$, $a \neq 1$, $a \neq -1$, $c \neq 0$.

ВИКОНАЙ УСНО



259. Обчисли частку.

$$10 : \frac{1}{5}; \quad 20 : \frac{4}{5}; \quad \frac{2}{3} : 2; \quad \frac{3}{4} : 6; \quad \frac{2}{3} : \frac{2}{3}; \quad \frac{3}{5} : \frac{5}{3}; \quad 1\frac{1}{2} : \frac{1}{2}; \quad \frac{3}{2} : 1,5.$$

260. Виконай ділення.

а) $\frac{2a}{b} : \frac{4a}{b}$; б) $\frac{1}{a} : \frac{a}{2}$; в) $\frac{1}{a} : \frac{2}{a}$; г) $\frac{a^2}{b} : \frac{a}{b}$.

261. Спрости вираз.

а) $\frac{m-n}{m} : \frac{m-n}{n}$; б) $\frac{m^2-n^2}{a} : \frac{m+n}{a}$; в) $\frac{1}{m+n} : (m+n).$

262. Поділи вираз c^3 на: c , c^2 , c^3 , c^4 , c^5 , c^6 .

263. Поділи дріб $\frac{2}{x}$ на: x^2 , x , $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$.

264. Виконай ділення $\frac{8}{a+b} : \frac{a-b}{8}$.

А $\frac{1}{a^2-b^2}$ Б $\frac{64}{a^2-b^2}$ В $\frac{a-b}{a+b}$ Г $\frac{a^2-b^2}{64}$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Виконай ділення (265–267).

265. а) $\frac{4}{7} : \frac{2}{21}$; б) $-15 : \frac{5}{7}$; в) $\frac{35}{4} : \frac{-7}{16}$;



г) $\frac{5x}{3y} : \frac{10x}{6y}$;

г) $\frac{3a}{8b^2} : \frac{1}{4b^2}$;

д) $\frac{4m^2}{n^3} : \frac{12m^3}{n^4}$.

266. а) $\frac{1}{3ax^2} : \frac{1}{9a^2x}$;

б) $\frac{6x^2}{y} : \frac{1,5x^3}{y^2}$;

в) $\frac{14}{5x^3} : \frac{7x}{2y^2}$;

г) $\frac{2a}{3x} : \frac{4a^2}{9x}$;

г) $\frac{18c^2}{5xy} : \frac{9c^3}{15x^2}$;

д) $\frac{18z^3}{xy^2} : \frac{9z^3}{x^2y}$.

267. а) $\frac{34ab^2}{a^2} : \frac{17b^2}{ac^2}$;

б) $\frac{3m^2n^3}{4ap} : 9mn^4$;

в) $3x^2 : \frac{1}{9x^3}$;

г) $-\frac{2ab}{3xy} : \frac{8a^2b^2}{9x^2y^2}$;

г) $\frac{x}{5cz} : \left(-\frac{1}{15z^3}\right)$;

д) $1 : \frac{2xy}{z^2}$.

Знайди частку (268–273).

268. а) $\frac{1}{x+y} : \frac{1}{(x+y)^2}$;

б) $\frac{(a+b)^2}{3c} : \frac{a+b}{6c}$;

в) $\frac{x}{x+y} : \frac{x+y}{x}$.

269. а) $\frac{a^3+a^2}{11c^2} : \frac{4a+4}{c^3}$;

б) $\frac{8cx}{c^2-2c} : \frac{4cx}{3c-6}$;

в) $\frac{mc^2}{m^2-1} : \frac{3c}{m^3-m^2}$.

270. а) $\frac{3a}{x-y} : \frac{6a^2}{(x-y)^2}$;

б) $\frac{x^2-2x+1}{3x^2} : \frac{(x-1)^2}{3x^3}$;

в) $(a^2-b^2) : \frac{a+b}{a-b}$.

271. а) $\frac{4c^2-x^2}{3cx} : \frac{2c+x}{6cx^2}$;

б) $2ac^2 : \frac{ac^2}{3a-c}$;

в) $\frac{x^3-3x}{x^2-4} : \frac{x^2-3}{x^2+2x}$.

272. а) $(a^2-4c^2) : \frac{a-2c}{3ac}$;

б) $\frac{x^2-y^2z^2}{yz+x} : (yz-x)$.

273. а) $(a-4x^2) : (16x^4-a^2)$;

б) $(x^2+x+1) : (x^3-1)$.

274. **HMT** Спрости вираз.

а) $\frac{x^2-4xy+4y^2}{x-2y} : (2y-x)$;

б) $\frac{x^2-y^2}{x-y} : (2x+2y)$.

275. Спрости вираз.

а) $\frac{3x}{8a} : \left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{4a}\right)$;

б) $\left(\frac{4}{m} \cdot \frac{x}{2m}\right)^2 : \frac{6x^3}{m^2}$;

в) $\left(\frac{2a}{3b} \cdot \frac{6ab}{5c^2}\right) : \frac{4ab^2}{9c^2}$;

г) $\frac{-3xy}{25ac^3} : \left(\frac{-2cx}{5a} \cdot \frac{3}{-2c^3}\right)$;

г) $\left(\frac{2a}{m^2c}\right)^3 : \left(\frac{4a^2}{3mc^2}\right)^2$.

276. Simplify the expression.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{-5a^2}{4c^3} : \left(\frac{a^3}{2c^3} : \frac{a}{c^2} \right); & \text{b)} \quad & \frac{-9c^2}{5a} : \left(\frac{3c^2}{5a^3} \cdot \frac{a}{c} \right)^3; & \text{c)} \quad & \frac{8mn}{9ax^2} : \left(\frac{6m}{5x} : \frac{3x^2}{2n} \right); \\ \text{d)} \quad & \left(\frac{-2a}{9c^2x} \right)^3 : \left(\frac{2a}{3cx^2} \right)^4; & \text{e)} \quad & \left(\frac{0,5ax}{2m} : \frac{x}{4m^2} \right) : \frac{m}{a}. \end{aligned}$$

277. **ЗНО** Обчисли значення виразу $\frac{a^2 - 6ab + 9b^2}{a^2 + 4ab} : \frac{5a - 15b}{a + 4b}$

при $a = 0,1$, $b = 3,7$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Виконай ділення (278–284).



278. а) $\frac{x^2 - xy}{x^2 + xy} : \frac{xy}{x^2y + xy^2};$

б) $\frac{a^2b - 4b^3}{3ab^2} : \frac{a^2 - 2ab}{a^2b};$

в) $\frac{4x^2 - 16x + 16}{x^2 - 9} : \frac{x - 2}{x - 3};$

г) $\frac{a^2 + 6a + 9}{36 - a^2} : \frac{a + 3}{a + 6}.$

279. а) $\frac{16xy^2 - x^3}{x^2 - 2xy + y^2} : \frac{x^2y - 16y^3}{x^2 - y^2};$

б) $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{y^2x - 9x^3} : \frac{x^2 - y^2}{9x^2y - y^3};$

в) $\frac{x^2 - xy}{5x^2 - 5y^2} : \frac{x^2 - xy}{x^3 + y^3};$

г) $\frac{x^2 - 2xy}{x^2 + 4y^2} : \frac{(x - 2y)^2}{x^4 - 16y^4}.$

280. а) $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 - a + 1} : \frac{5a - 5}{3a^3 + 3};$

б) $\frac{1 - x^2y^2}{1 + xy} : \frac{xy - 1}{xy^2 + y};$

в) $(4a^2 - 1) : \frac{1 + 2a}{1 - 2a};$

г) $\frac{3 - x}{3 + x} : (x^2 - 9).$

281. а) $\frac{a^2 - 3ab}{3b} : (4a - 12b);$

б) $(8x - 12y) : \frac{(2x - 3y)^2}{xy}.$

282. а) $\frac{x^2 - 6x + 9}{4x^2 - 6x + 9} : \frac{6 - 2x}{27 + 8x^3};$

б) $\frac{a^2 + ax + x^2}{x - 1} : \frac{a^3 - x^3}{x^2 - 1}.$

283. а) $\frac{2a^3 + 16}{a^2 + 3a + 9} : \frac{a^2 - 2a + 4}{2a^3 - 54};$

б) $\frac{64a^3 - b^3}{16a^2 - 8ab + b^2} : \frac{16a^2 + 4ab + b^2}{b^2 - 16a^2};$

в) $\frac{3y - 9}{x^2 - xy + x - y} : \frac{xy - 3x + 2y - 6}{x^2 - y^2};$

г) $\left(\frac{a - 1}{a + 1} \right)^2 : \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 2a + 1}.$

284. а) $\frac{a^2 - 2ab + a - 2b}{ab^2 + a^2b} : \frac{a^2 - 4b^2}{a^2 + ab + a + b}$; б) $\left(\frac{x+z}{2x}\right)^2 : \frac{x^2 + z^2 + 2xz}{8x^4}$.

285. Знайдіть значення виразу.



а) $\frac{(t-2)^2}{t-1} : (t^2 - 4)$, якщо $t = 0,5$;

б) $(2a - 4b) : \frac{3(a^2 - 4b^2)}{a + 2b}$,

якщо $a = 2,65$, $b = 7,35$.

286. Знайди значення виразу.

а) $\frac{ab + 4b - 5a - 20}{b^2 - 1} : \frac{2b - 10}{b + 1}$, якщо $a = 4$, $b = \frac{3}{4}$;

б) $\frac{9 - (a+x)^2}{6a + 6x} : \frac{a^2 + 3a - x^2 - 3x}{a^2 + ax}$, якщо $a = \frac{3}{2}$, $x = \frac{1}{2}$.

287. Заповніть таблицю.



x	-4	-3	-1	0	1	2	3
$\frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1} : \frac{x - 1}{(x + 1)^2}$							
$\frac{3x^2 - 48}{x - 1} : \frac{12 + 3x}{1 - x}$							

288. На який вираз треба помножити дріб $\frac{3a}{a-2}$, щоб одержати:

а) $\frac{a-2}{3a}$;

б) $\frac{a+2}{a-2}$;

в) $3a(a-2)$?

289. На який вираз треба помножити дріб $\frac{a+5}{2a}$, щоб одержати:

а) $\frac{a+5}{2}$;

б) $\frac{a+5}{a-5}$;

в) $5a(a+5)$?

Поділи многочлен на многочлен, записавши частку у вигляді дробу і скоротивши його (290–294).

290. а) $(a^5 - a) : (a^2 - 1)$;

б) $(z^6 - z^2) : (z^2 - 1)$;

в) $(2a + 8b) : (16b^2 - a^2)$;

г) $(4x^2 - 4xy + y^2) : (y^2 - 4x^2)$.

291. а) $(c^6 - c^2) : (c^3 - c)$;

б) $(c^4 + c) : (c^2 + c)$;

в) $(x^3 + 4x^2 + 4x) : (x^2 + 2x)$;

г) $(x^4 + x) : (x^2 - x + 1)$.

«Ніякі людські дослідження не можна назвати справжньою наукою, якщо вони не пройшли через математичні доведення».

Леонардо да Вінчі

292. а) $(ac + ax + bc + bx) : (c + x)$; б) $(ac - ax + bc - bx) : (a + b)$.

293. а) $(a^3 - 2a^2 + 2a - 4) : (a^2 + 2)$; б) $(a^3 + 2a^2 - 2a - 4) : (a + 2)$.

294. а) $(2a^3b^2 + 3abc^2x - 2a^2bcx - 3c^3x^2) : (ab - cx)$;
б) $(32ac^2 + 15cx^2 - 48ax^2 - 10c^3) : (2c^2 - 3x^2)$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



295. Спрости вираз.

а) $\frac{a^2 - b^2 - c^2 + 2bc}{b^2 - c^2 - a^2 - 2ac} : \frac{a + b - c}{a + b + c}$; б) $\frac{a^2 - m^2}{a^2 - b^2} : \frac{a^2 + (m + n)a + mn}{a^2 - (m - b)a - mb} : \frac{a^2 + (b + m)a + bm}{a^2 - (b - n)a - bn}$.

296. Проаналізуй послідовність геометричних фігур. Запиши відповідну числову послідовність і продовж її.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



297. Розв'яжи систему рівнянь.

$$\begin{cases} 8(2x - 3y - 3) = 6x(4y - 3) - 3y(8x - 5), \\ 3(10x + 3y) = 9y(4x + 7) - 6x(6y + 1). \end{cases}$$

298. Знайди координати точок перетину з осями координат графіка рівняння. а) $3x + 2y = 6$; б) $x - 5y = 12$.

299. Розклади на множники.

а) $6x^2 - 6y^2$; б) $5 - 5m^2$; в) $ax^2 - a^3$;
г) $3x^4 - 12x^2$; г) $20a^2 - 45b^2$; д) $48x^2 - 75y^2$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Формулюю і використовую правило ділення дробів

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

✓ Умію ділити цілий вираз на дріб і дріб на цілий вираз

$$A : \frac{B}{C} = \frac{A \cdot C}{B} \quad \frac{M}{N} : P = \frac{M}{N \cdot P}$$

✓ Намагатимуся звертати увагу на те, при яких значеннях змінних вираз

має зміст $\frac{ac^2}{a^2 - 1} : \frac{2c}{a^3 - a^2} = \frac{a^3c}{2(a + 1)}$; частка існує при $a \neq 0, a \neq 1, a \neq -1, c \neq 0$

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- правило розкриття дужок;
- що таке тотожність (с. 6);
- як виконують тотожні перетворення цілих виразів;
- формули скороченого множення (форзац 1);
- способи розкладання многочленів на множники.

$$4x^5 - 20x^3 + 12x^2 = 4x^2(x^3 - 5x + 3)$$

$$9x^2 - 25 = (3x - 5)(3x + 5)$$

$$a^2 + 2x + 2a + ax = (a^2 + 2a) + (ax + 2x) = a(a + 2) + x(a + 2) = (a + 2)(a + x)$$

§ 7. Перетворення раціональних виразів

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- перетворення раціональних виразів —
transformation of rational expressions

Будь-який числовий вираз після виконання всіх наявних у ньому дій набуває конкретного значення. Подібно до того, як знаходять значення числового виразу, виконують перетворення раціональних виразів. Заданий вираз замінюють іншим — тотожним йому. Такі перетворення називають **тотожними перетвореннями**.

Тотожні перетворення раціональних виразів виконують частинами або «ланцюжком». Якщо вираз містить кілька різних дій, то їх виконують у такій самій послідовності:

- 1) дії в дужках;
- 2) піднесення до степеня;
- 3) множення, ділення;
- 4) додавання, віднімання.

Кожний раціональний дробовий вираз можна подати у вигляді дробу, а деякі — навіть у вигляді цілого виразу. Розглянемо, наприклад,

вирази: $a - \frac{a}{1 + \frac{1}{a}}, \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{x + y} - \frac{1}{xy}.$

Перший із них можна перетворювати так:

$$1) 1 + \frac{1}{a} = \frac{a+1}{a}; \quad 2) a : \frac{a+1}{a} = \frac{a^2}{a+1}; \quad 3) a - \frac{a^2}{a+1} = \frac{a^2 + a - a^2}{a+1} = \frac{a}{a+1}.$$

Отже, $a - \frac{a}{1 + \frac{1}{a}} = \frac{a}{a+1}.$

Подібним способом (частинами) можна спростити і другий вираз. А можна перетворювати його і «ланцюжком»:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{x+y} = \frac{y+x}{xy} : (x+y) - \frac{1}{xy} = \frac{x+y}{xy} \cdot \frac{1}{x+y} - \frac{1}{xy} = \frac{1}{xy} - \frac{1}{xy} = 0.$$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

У математиці часто доводиться не лише спрощувати вирази, наприклад суму кількох дробів записати одним виразом, а й робити зворотні операції.

Задача (О. Коші). Розклади дріб $\frac{2}{x^2-1}$ на суму двох дробів зі знаменниками $x-1$ і $x+1$.

Розв'язання. Нехай $\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}. \quad (1)$

Перетворимо праву частину рівності у дріб:

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{Ax + A + Bx - B}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B) + A-B}{(x-1)(x+1)}.$$

Підставимо цей вираз у праву частину (1): $\frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x(A+B) + A-B}{(x-1)(x+1)},$

звідси $x(A+B) + A-B = 2$.

Права частина останньої рівності не містить змінної x . Це можливо тільки за умови, коли $A+B=0$, тобто коли $B=-A$. За такої умови $A-(-A)=2$, звідси $2A=2, A=1, B=-1$.

Отже, $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x+1}.$



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Раціональні вирази та рівняння. Урок 5).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які дії можна виконувати з раціональними виразами?
2. Який порядок виконання дій?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Спрости вираз.

$$\text{а) } \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x}; \quad \text{б) } \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{y}{x-y} \right) : \frac{x^2-3xy}{x-y}.$$

Розв'язання. а) Перетворимо даний вираз частинами:

$$1) \frac{1}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x} = \frac{1}{x+2} \cdot \frac{(x-2)(x+2)}{x} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2) \cdot x} = \frac{x-2}{x};$$

$$2) \frac{x+1}{x} - \frac{x-2}{x} = \frac{x+1-x+2}{x} = \frac{3}{x}.$$

б) Перетворимо даний вираз «ланцюжком»:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x-y}{x+y} - \frac{y}{x-y} \right) : \frac{x^2-3xy}{x-y} &= \frac{(x-y)^2 - y(x+y)}{(x+y)(x-y)} : \frac{x(x-3y)}{x-y} = \\ &= \frac{x^2 - 2xy + y^2 - yx - y^2}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{x(x-3y)} = \frac{x^2 - 3xy}{(x-y)(x+y)} \cdot \frac{x-y}{x(x-3y)} = \\ &= \frac{x(x-3y)(x-y)}{(x-y)(x+y)x(x-3y)} = \frac{1}{x+y}. \end{aligned}$$

Відповідь. а) $\frac{3}{x}$; б) $\frac{1}{x+y}$.2. Подай дріб $\frac{5x+19}{x+3}$ у вигляді $m + \frac{n}{x+3}$, де m і n — цілі числа.

$$\text{Розв'язання. } \frac{5x+19}{x+3} = \frac{5(x+3)+4}{x+3} = \frac{5(x+3)}{x+3} + \frac{4}{x+3} = 5 + \frac{4}{x+3}.$$

ВИКОНАЙ УСНО



Спрости вираз (300–303).

$$300. \text{ а) } \left(a + \frac{x}{c} \right) : \left(a + \frac{x}{c} \right);$$

$$\text{б) } \left(1 + \frac{a}{n} \right) : \frac{n+a}{n}.$$

$$301. \text{ а) } 1 : \frac{a-c}{a+c};$$

$$\text{б) } 1 : \frac{1+x}{x-1}.$$

$$302. \text{ а) } \left(n + \frac{1}{n} \right) \left(n - \frac{1}{n} \right) : \left(n^2 - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$\text{б) } \frac{a}{c} \cdot \frac{a-c}{a+c} \cdot \frac{a+c}{a}.$$

$$303. \text{ а) } \frac{a^3-1}{a-1} : (a^2+a+1);$$

$$\text{б) } \frac{1+x^3}{1+x} : (1-x+x^2).$$

304. Якому числу при всіх допустимих значеннях a дорівнює значення виразу $\frac{a^2-1}{a} \cdot \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a}$?

А -1

Б 0

В 1

Г a

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Виконай дії (305, 306).

305. а) $\frac{x+2}{x+3} : \frac{5x+10}{9-x^2} - \frac{2x-1}{15}$;

б) $\left(\frac{6y}{y-4} - 3y\right) : \frac{6-y}{y-4}$;

в) $\frac{x^2-y^2}{(x-y)^2} \cdot \frac{x^2}{x+y} + \frac{1-x^2}{x-y}$;

г) $\frac{5-m}{5+m} \cdot \left(m + \frac{2m^2}{5-m}\right)$.

306. а) $\frac{a^2-4}{9-a^2} : \frac{a-2}{3+a} - \frac{2}{3-a}$;

б) $\left(x - \frac{5x}{x+3}\right) : \frac{x-2}{x+3}$;

в) $\frac{a^2-b^2}{4a+4} \cdot \frac{a+1}{a-b} + \frac{a+b}{4}$;

г) $\left(\frac{2a}{2a-1} + 1\right) \cdot \frac{6a-3}{4a^2-a}$.

Спрости вираз (307–311).

307. а) $\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) \cdot \frac{xy}{x+y}$;

б) $\frac{a-b}{ab} : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)$;

в) $\left(1 + \frac{a}{b}\right) : \left(1 - \frac{a}{b}\right)$;

г) $\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{y}\right) : \left(\frac{1}{xy} - \frac{1}{y}\right)$.

308. а) $\left(\frac{x}{y^2} - \frac{1}{x}\right) : \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$;

б) $\left(\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right) : \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{b}{a}\right)$;

в) $\left(\frac{m}{m+1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3m^2}{1-m^2}\right)$;

г) $\left(\frac{3a+1}{3a-1} - \frac{3a-1}{3a+1}\right) : \frac{12a}{15a-5}$.

309. а) $\frac{a-b}{a} \cdot \left(\frac{a}{a-b} + \frac{a}{b}\right)$;

б) $\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{x+y}\right) \cdot \frac{x+y}{x}$;

в) $\left(\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}\right) : \frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$;

г) $\left(\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}\right) : \frac{4}{a^2-b^2}$.

310. а) $\frac{x^3-a^3}{x^2-a^2} \cdot \frac{x+a}{a^2+ax+x^2}$;

б) $\left(\frac{2a}{a-x}\right)^3 \cdot \frac{a^2-2ax+x^2}{6a^2}$.

311. а) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{a}{b^2} - \frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$;

б) $\frac{3a^4}{a^2+x^2-2ax} : \left(1 + \frac{x}{a-x}\right)^2$.

Доведи тотожність (312, 313).

$$312. \text{ а) } \frac{(2a+1)^2}{(2a-1)^2+8a} = 1;$$

$$\text{б) } \left(1 - \frac{3-a}{a+2}\right) \cdot \left(\frac{a^2+1}{2a-1} - \frac{a}{2}\right) = \frac{1}{2};$$

$$\text{в) } \frac{8c}{(2c+1)^2 - (2c-1)^2} = 1;$$

$$\text{г) } \frac{1-a^2}{1+b} \cdot \frac{1-b^2}{1+a} \cdot \left(1 + \frac{a}{1-a}\right) = 1-b.$$

$$313. \text{ а) } \frac{(2a-1)^2}{(2a+1)^2-8a} = 1;$$

$$\text{б) } \frac{1}{5x} - \frac{1}{x+y} \cdot \left(\frac{x+y}{5x} - x - y\right) = 1;$$

$$\text{в) } \frac{8a^2+2}{(2a+1)^2+(2a-1)^2} = 1;$$

$$\text{г) } \frac{a^2-x^2}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a+x} \cdot \left(a + \frac{ax}{a-x}\right) = a^3 - a^2.$$

Доведи, що значення виразу не залежить від значень змінних, які до нього входять (314, 315).

$$314. \text{ а) } \left(\frac{4}{x} - \frac{x}{4}\right) \cdot \left(\frac{1}{4-x} - \frac{1}{4+x}\right); \text{ б) } \left(\frac{1}{a+b} + \frac{b^2}{a^3-ab^2}\right) : \left(\frac{a-b}{a^2+ab} - \frac{a}{ab+b^2}\right) + \frac{b}{a-b};$$

$$\text{в) } \left(\frac{2}{3a} - \frac{3a}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3a-2} + \frac{1}{3a+2}\right); \text{ г) } \left(1 - \frac{b}{a+b}\right) : \left(a+b - \frac{b^2}{a+b}\right) - \frac{1}{a+2b}.$$

$$315. \text{ а) } \left(\frac{2a}{b} - \frac{8b}{a}\right) \cdot \left(\frac{a}{a-2b} - \frac{a}{a+2b}\right);$$

$$\text{б) } \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2}\right) \cdot \left(\frac{x^2y}{y-x} + \frac{x^2y}{y+x}\right);$$

$$\text{в) } \left(\frac{c-x}{c^2+cx} - \frac{c}{cx+x^2}\right) : \left(\frac{x^2}{c^3-cx^2} + \frac{1}{c+x}\right) - \frac{x-c}{x}; \text{ г) } \frac{a+b}{ab} : \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) + \frac{1}{b-a}.$$

Виконай дії (316, 317).

$$316. \text{ а) } \left(\frac{x+y}{y} - \frac{2y}{y-x}\right) \cdot \frac{y-x}{x^2+y^2};$$

$$\text{б) } \left(\frac{2a}{a+x} + \frac{x-a}{a}\right) : \frac{x^2+a^2}{x+a};$$

$$\text{в) } \left(a+x - \frac{2ax}{a+x}\right) : \left(\frac{a-x}{a+x} + \frac{x}{a}\right);$$

$$\text{г) } \left(\frac{y}{x} - \frac{2y}{x+y}\right) \cdot \left(y + \frac{x^2+y^2}{x-y}\right).$$

$$317. \text{ а) } \frac{25+10a}{a-1} \cdot \left(\frac{3a+4}{4a^2-25} - \frac{1}{2a-5}\right);$$

$$\text{б) } \left(\frac{x+y}{x} - \frac{2x}{x-y}\right) : \frac{x^2+y^2}{y-x};$$

$$\text{в) } \left(\frac{a^2+b^2}{a} - 2b\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right);$$

$$\text{г) } \left(\frac{a^2+3a}{9a^2-1} - \frac{1}{3a+1}\right) \cdot \frac{9a^2+3a}{a^2+1}.$$

$$318. \text{ Знайди значення виразу } \frac{a}{a+1} \cdot \left(a - \frac{1}{a}\right), \text{ якщо } a = 2,37.$$

319. Знайди значення виразу $\left(\frac{x+1}{x} - \frac{2x}{x-1}\right) \cdot \frac{1-x}{x^2+1}$, якщо $x = -0,25$.

320. Find the value of the expression $\left(\frac{a+x}{a} - \frac{x-1}{x}\right) \cdot \frac{a^2x}{x^4-a^2}$,
if $a = 2,25$, $x = 3,5$.

321. Доведи рівності, які Евклід (III ст. до н. е.) довів геометричним способом для додатних a і b .

$$\text{а) } ab + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2; \quad \text{б) } a^2 + b^2 = 2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2} - b\right)^2\right).$$

322. Установіть відповідність між виразами (1–3) та значеннями цих виразів (А–Д) за умови, що $x = -2$, $y = 2$.

1 $\left(\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}\right) : \frac{x^2+y^2}{x^2+xy}$	А -1
2 $\left(\frac{2x-y}{2x+y} - \frac{2x+y}{2x-y}\right) : \frac{4xy}{2x-y}$	Б -0,5
3 $\left(\frac{x+2y}{x-2y} + \frac{x-2y}{x+2y}\right) \cdot \frac{3x^2+6xy}{x^2+4y^2}$	В 0,5
	Г 1
	Д 2

323. Задача Ейлера (1707–1783). Доведи тотожність

$$p^3 = \left(p^3 \cdot \frac{p^3-2q^3}{p^3+q^3}\right) + \left(q^3 \cdot \frac{2p^3-q^3}{p^3+q^3}\right) + q^3.$$

324. Доведи, що квадрат суми двох взаємно обернених дробів на 2 більший від суми їх квадратів.

325. Доведи, що при будь-якому натуральному n число $\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \cdot (n^2 + n)$ — натуральне.



Леонард
Ейлер

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Спрости вираз (326–338).

326. а) $\left(x+1 - \frac{1}{1-x}\right) : \left(x - \frac{x^2}{x-1}\right);$ б) $\left(\frac{a}{c^2} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) : \left(\frac{a^2}{c^2} - \frac{c}{a}\right).$



$$327. \text{ а) } \left(1 - \frac{2x-3y}{2x+3y}\right) : \left(\frac{2xy}{4x^2-9y^2} + \frac{y}{3y-2x}\right);$$

$$\text{б) } \left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3} + \frac{b}{a^2+b^2}\right) : \left(\frac{1}{a-b} - \frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right).$$

$$328. \text{ а) } \left(\frac{3}{a-1} - \frac{3a^2+6a+3}{a^2-1} : \frac{a^4+a}{a^3+1}\right) \cdot \frac{a-a^2}{3};$$

$$\text{б) } \left(\frac{4a}{a+2} - \frac{a^3-8}{a^3+8} : \frac{a^2-4}{4a^2-8a+16}\right) \cdot \frac{a+2}{16}.$$

$$329. \text{ а) } \frac{4ab}{b^2-a^2} : \left(\frac{1}{b^2-a^2} + \frac{1}{a^2+2ab+b^2}\right); \quad \text{б) } \frac{3c-3}{c^2-4} \cdot \frac{c+2}{c^2-2c+1} - \frac{3(c+2)}{c^2-4}.$$

$$330. \text{ а) } \left(\frac{x^2}{x+a} - \frac{x^3}{x^2+2xa+a^2}\right) : \left(\frac{x}{x+a} - \frac{x^2}{x^2-a^2}\right) + \frac{2x^2}{x+a};$$

$$\text{б) } \frac{c+2}{1-2c} - \left(\frac{2c}{3c+1} + \frac{3c}{1-2c}\right) \cdot \frac{9c^2+6c+1}{5c^2+5c}.$$

$$331. \text{ а) } \frac{xy^2-x^3}{x^2+y^2} \cdot \left(\frac{x}{(x-y)^2} - \frac{y}{x^2-y^2}\right) + \frac{y}{x-y};$$

$$\text{б) } \frac{4a^2+16+16a}{a-2} \cdot \left(\frac{a}{2a-4} - \frac{a^2+4}{2a^2-8} - \frac{2}{a^2+2a}\right) - \frac{a+8}{a}.$$

$$332. \text{ а) } \left(\frac{2x-1}{x+1} - x\right) \cdot \left(\frac{3}{x^3+1} - \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^2-x+1}\right);$$

$$\text{б) } \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right) : \frac{a+b+c}{2abc} + a^2.$$

«Розумова праця на уроках математики — це пробний камінь мислення».

В. О. Сухомлинський

$$333. \text{ а) } \left(1 - \frac{b^2-a^2-c^2}{2ac}\right) : \left(\frac{a+c}{b} - 1\right) - \frac{b^2}{2ac};$$

$$\text{б) } \frac{3x^2}{a^2-x^2} - 3a \left(\frac{1}{a-x} - \frac{x}{a^3-x^3} \cdot \frac{a^2+ax+x^2}{a+x}\right).$$

$$334. \text{ а) } \frac{\frac{a+c}{n} \cdot \frac{n}{a}}{\frac{n}{a}};$$

$$\text{б) } \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}}.$$

$$335. \text{ а) } \frac{m + \frac{mn}{m-n}}{m - \frac{m^2}{m-n}};$$

$$\text{б) } \frac{x - \frac{yz}{y-z}}{y - \frac{xz}{x-z}}.$$

$$336. \text{ а) } 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{x}}};$$

$$\text{б) } \frac{n}{n - \frac{1}{n - \frac{n}{1 - n}}}.$$

$$337. \text{ а) } \frac{n^2 - 1}{n^2 + n} \cdot \left(1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right)^2;$$

$$\text{б) } \frac{a^4 + c^4}{(a - c)^2} - \frac{2}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right)^2}.$$

$$338. \text{ а) } \frac{\frac{1}{a+c} - \frac{1}{x}}{a+c-x} \cdot \left(\frac{a}{c} - \frac{c}{a} \right);$$

$$\text{б) } \frac{1 - \frac{2x}{a} + \frac{x^2}{a^2}}{1 - \frac{x}{a}}.$$

339. Доведіть, що вирази A_1 і A_2 тотожно рівні.



$$\text{а) } A_1 = \frac{2}{mn} : \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)^2, \quad A_2 = \frac{m^2 + n^2}{(m - n)^2} - 1;$$

$$\text{б) } A_1 = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)^2 - \left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x} \right)^2, \quad A_2 = \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y} \right) : \frac{xy}{x^2 - y^2};$$

$$\text{в) } A_1 = \left(a - \frac{a^2 + b^2}{a+b} \right) \cdot \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a-b} \right), \quad A_2 = \left(1 + \frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 - b^2} \right) \cdot \left(\frac{2a+b}{a} - \frac{3a}{2a-b} \right).$$

Доведи тотожність (340, 341).

$$340. \text{ а) } \frac{2a-b}{ab} - \frac{1}{a+b} \cdot \left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a} \right) = \frac{1}{b};$$

$$\text{б) } \left(\frac{2a+2}{a-1} + a+1 \right) \cdot \left(1 - \frac{2}{a+1} \right) = a+1;$$

$$\text{в) } \left(\frac{xy+y^2}{x^2-xy} + xy+y^2 \right) \cdot \frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} = xy.$$

$$341. \text{ а) } \left(\frac{4ab}{a-b} + a-b \right) : \left(1 + \frac{2b}{a-b} \right) = a+b; \quad \text{б) } \frac{1}{x+y} \left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \right) + 1 = \frac{x^2+y^2}{xy};$$

$$\text{в) } \frac{1}{xy} + \left(x^2 - xy - \frac{x-y}{xy+y^2} \right) : \frac{x^2-xy}{x+y} = x+y.$$

342. Значення дробу $\frac{ax+15}{a}$ дорівнює 8, якщо $x = 3$. При якому значенні x цей дріб дорівнює 18?

343. Подай дріб $\frac{7x+9}{x+1}$ у вигляді $a + \frac{b}{x+1}$, де a, b — цілі числа.

344. При яких цілих значеннях n число $\frac{2n+5}{n+1}$ є цілим?

345. При яких натуральних значеннях n число $\frac{4n^2 - 12n + 21}{n - 3}$ є натуральним?

346. Доведи, що при будь-якому натуральному значенні n число $\frac{n^3}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{3}$ є натуральним.

347. Доведи, що при будь-якому значенні $a > 1$ число $\frac{1}{1-a} + \frac{1}{1+a} + \frac{2}{1+a^2} + \frac{4}{1+a^4} + \frac{8}{1+a^8}$ є від'ємним.

348. Доведи, що при всіх допустимих значеннях x вираз $\frac{18x}{27x^3 + 8} + \frac{1}{3x+2} - \frac{3x+2}{9x^2 - 6x + 4}$ дорівнює нулю.

349. Доведи, що при всіх допустимих значеннях x вираз $\left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1} + \frac{3}{x^2-x+1}\right) \cdot \left(x - \frac{2x-1}{x+1}\right)$ не залежить від значення змінної.

350. Задача китайського вченого Дай Шу.

Спрости. $\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}\right) \cdot \frac{ab}{a^2 - (b+c)^2}$.

351. Спрости вираз $\frac{1-a^2}{(1+ax)^2 - (a+x)^2} \cdot \frac{x+x^2}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2}$.

Знайди значення виразу (352, 353).

352. а) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2\right) : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{x}\right)$, якщо $x = 3,7$, $y = -1,3$;

б) $\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b}{a}\right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{a}{b^2}\right)$, якщо $a = 12$, $b = 8$.

353. а) $\left(\frac{xy}{x^2-y^2} + \frac{y}{2y-2x}\right) \cdot \left(\frac{x^2}{2y} - \frac{y}{2}\right)$, якщо $x = 5,6$, $y = -2,4$;

б) $\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{x+y}{x-y} - \frac{x-y}{x+y}\right)$, якщо $x = \frac{1}{3}$, $y = 12$.

354. **ЗНО** Знайди значення виразу $\frac{m+4}{m^2-6m+9} \cdot \frac{2m-6}{m^2-16} - \frac{2}{m-4}$, якщо $m = 4,25$.

Доведи твердження (355, 356).

355. а) Якщо $x = \frac{a-b}{a+b}$, то $\left(\frac{a}{b} - x\right) \cdot \frac{b}{ax+b} = 1$;

б) якщо $x = \frac{ab}{a^2+b^2}$, то $\frac{0,5-x}{0,5+x} = \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$.

356. Якщо $x = \frac{ab}{a+b}$, то $\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2} \cdot \frac{b^3}{a^3} = \frac{a+2b}{b+2a}$.

357. Виконай підстановку і спрости.

а) $\frac{x-a}{x-b}$, де $x = \frac{ab}{a+b}$;

б) $\frac{\frac{a}{b}-x}{\frac{a}{b}+x}$, де $x = \frac{a-b}{a+b}$;

в) $\frac{ax}{a+x} - \frac{bx}{b-x}$, де $x = \frac{ab}{a+b}$;

г) $\left(\frac{x+2b}{x-2b} + \frac{x+2a}{x-2a}\right) : \frac{x}{2}$, де $x = \frac{4ab}{a+b}$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

358. Круг з буквами перекресли двома прямими так, щоб із букв у кожній частині круга можна було скласти алгебраїчний термін (мал. 7.1).

359. Спрости вираз.

а) $\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)}$;

б) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)} + \frac{y^2}{(y-x)(y-z)} + \frac{z^2}{(z-x)(z-y)}$.



Мал. 7.1

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

360. Обчисли.

а) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) : (-2) - 16\frac{1}{4} : (-4)$;

б) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right) : (-3) + \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{6}\right) : (-2)$.

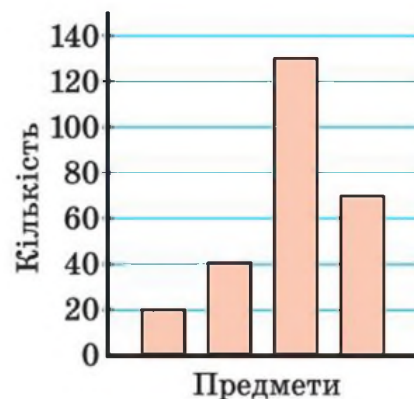
361. Знайди корені рівняння.

а) $\frac{x+1}{6} - \frac{2x}{9} = 5$;

б) $\frac{3x}{4} + \frac{2(x-1)}{5} = \frac{111}{10}$.

362. *Стародавня задача.* Один чоловік випиває барильце квасу за 14 днів, а із жінкою — за 10 днів. За скільки днів таке барильце квасу випиває одна жінка?

363. На діаграмі (мал. 7.2) вказано кількість зошитів, альбомів, блокнотів і ручок, проданих крамницею за тиждень. Відомо, що зошитів продали найбільше, альбомів — удвічі менше, ніж блокнотів. Скільки чого було продано?



Мал. 7.2

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Умію виконувати арифметичні дії з раціональними дробами:

$$\frac{A}{C} \pm \frac{B}{C} = \frac{A \pm B}{C}$$

$$\frac{A}{B} \pm \frac{C}{D} = \frac{A \cdot D}{B \cdot D} \pm \frac{C \cdot B}{D \cdot B} = \frac{A \cdot D \pm C \cdot B}{B \cdot D}$$

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^n = \frac{A^n}{B^n}$$

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

- ✓ Знаю порядок виконання дій.
 ✓ Умію розв'язувати вправи, що передбачають тотожні перетворення раціональних виразів.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- означення рівняння і його властивості;
- які рівняння називають рівносильними;
- що таке раціональне і дробово-раціональне рівняння (с. 25);
- умову рівності дробу нулю (с. 26);

$$\text{Якщо } \frac{A}{B} = 0, \text{ то } \begin{cases} A = 0, \\ B \neq 0 \end{cases}$$

- основну властивість пропорції.

$$\text{Якщо } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ то } a \cdot d = b \cdot c$$

§ 8. Раціональні рівняння

КЛЮЧОВІ СЛОВА

раціональні рівняння — *rational equations*

Ти вже знаєш, що рівняння називають **раціональним**, якщо його ліва і права частини — раціональні вирази.

Раціональне рівняння називають **дробовим**, якщо його права, ліва або права і ліва частини — дробові вирази.

Наприклад, $\frac{1}{x+5} = 3$, $x - \frac{1-2x}{x} = 2$, $\frac{x+1}{x-2} = \frac{x-3}{x+2}$.

Розв'язуючи ціле рівняння, його найчастіше намагаються замінити рівносильним. З дробовими рівняннями це можна зробити тільки в окремих випадках. Здебільшого їх замінюють рівняннями-наслідками.

Рівняння називають *наслідком* даного, якщо всі розв'язки даного рівняння задовольняють утворене рівняння.

Рівняння-наслідок задовольняють усі корені даного рівняння, але крім них воно може мати і сторонні корені.

Розв'язувати дробові раціональні рівняння можна різними способами. Зокрема:

1) замінити дане рівняння рівносильним йому рівнянням, ліва частина якого є дробом, а права — нулем;

2) замінити дане рівняння цілим, яке є наслідком даного.

Приклад 1. Розв'яжи рівняння $\frac{2}{x-2} - \frac{x+2}{x+3} = \frac{10}{(x+3)(x-2)}$.

Розв'язання. Перенесемо дріб з правої частини в ліву, змінивши знак перед ним на протилежний, і спростимо одержаний дробовий вираз:

$$\text{раз: } \frac{2}{x-2} - \frac{x+2}{x+3} - \frac{10}{(x+3)(x-2)} = 0,$$

$$\frac{2(x+3) - (x+2)(x-2) - 10}{(x+3)(x-2)} = 0, \quad \frac{-x^2 + 2x}{(x+3)(x-2)} = 0, \quad \frac{-x(x-2)}{(x+3)(x-2)} = 0.$$

Одержане рівняння рівносильне даному. Дріб дорівнює нулю тільки тоді, коли чисельник дорівнює нулю, а знаменник відмінний від нуля.

Прирівняємо чисельник до нуля: $-x(x-2) = 0$, якщо $x = 0$ або $x = 2$.

Якщо $x = 0$, то знаменник $(x+3)(x-2)$ не дорівнює 0. Отже, $x = 0$ — корінь даного рівняння. Якщо $x = 2$, то $(x+3)(x-2) = 0$.

Отже, $x = 2$ не задовольняє дане рівняння.

Відповідь. $x = 0$.

Щоб розв'язати дробове рівняння з використанням рівняння-наслідку, потрібно помножити його обидві частини на спільний знаменник — цілий вираз. Одержимо ціле рівняння. Треба знайти його корені й випробувати, які з них не задовольняють дане рівняння. Таким чином, перевірка коренів є невід'ємною складовою розв'язання.

Приклад 2. Розв'яжи рівняння $\frac{a+3}{a-1} + \frac{1}{a} = 1$.

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на $a(a-1)$ — спільний знаменник дробів.

$$\frac{(a+3) \cdot a(a-1)}{a-1} + \frac{a(a-1)}{a} = a(a-1),$$

$$a^2 + 3a + a - 1 = a^2 - a, \quad 5a = 1, \quad a = \frac{1}{5} = 0,2.$$

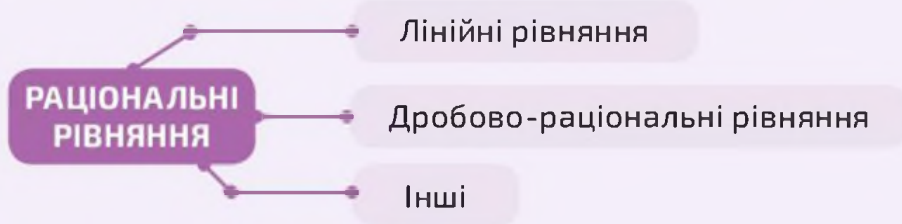
Перевірка. $\frac{0,2+3}{0,2-1} + \frac{1}{0,2} = \frac{3,2}{-0,8} + 5 = -4 + 5 = 1.$

Відповідь. $x = 0,2$.

Якщо дробове рівняння має вигляд пропорції або є таким, що його легко подати у вигляді пропорції, то можна скористатися основною властивістю пропорції. У цьому випадку також одержують рівняння-наслідок.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Відомі тобі лінійні рівняння — це окремий вид раціональних рівнянь. Як пов'язані між собою раціональні рівняння, ілюструє малюнок 8.1. Ті раціональні рівняння, які не є цілими, називають *дробово-раціональними*.



Мал. 8.1

Дробово-раціональними бувають не тільки рівняння з однією змінною, а й з двома, трьома і більшою кількістю змінних та системи таких рівнянь.

Наприклад:
$$\begin{cases} \frac{2}{x-1} + \frac{4}{y+1} = 2, \\ \frac{6}{x-1} - \frac{4}{y+1} = 2. \end{cases}$$
 Врахуємо, що $x-1 \neq 0$ і $y+1 \neq 0$, тобто $x \neq 1$, $y \neq -1$.

Додамо ліві й праві частини рівнянь: $\frac{8}{x-1} = 4$, або $4x - 4 = 8$, $x = 3$.

Підставивши це значення x у перше рівняння, матимемо: $\frac{4}{y+1} = 1$, звідси $y = 3$.

Відповідь. (3; 3)

ПЕРЕВІР СЕБЕ



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Раціональні вирази та рівняння. Урок 6).

1. Сформулюй означення рівняння.
2. Які рівняння називають раціональними?
2. За якої умови дріб дорівнює нулю?
4. Як розв'язують рівняння з використанням основної властивості пропорції? Сформулюй цю властивість.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Розв'яжи рівняння $\frac{x+3}{6(x-3)} = \frac{1}{x-3}$.

Розв'язання. I спосіб.

Перейдемо до рівносильного рівняння $\frac{x+3}{6(x-3)} - \frac{1}{x-3} = 0$.

Звідси $\frac{x+3-6}{6(x-3)} = 0$; $\frac{x-3}{6(x-3)} = 0$.

Це рівняння рівносильне системі $\begin{cases} x-3=0, \\ x-3 \neq 0. \end{cases}$ Звідси $\begin{cases} x=3, \\ x \neq 3. \end{cases}$

Отже, рівняння не має коренів.

II спосіб.

За основною властивістю пропорції:

$(x+3)(x-3) = 6(x-3)$; $x^2 - 9 = 6x - 18$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $(x-3)^2 = 0$, звідси $x = 3$. Але при такому значенні x знаменники дробів, що входять до даного рівняння, дорівнюють 0. Тому це значення x не є коренем рівняння.

Відповідь. Рівняння розв'язків не має.

2. Яке число слід додати до членів дробу $\frac{3}{5}$, аби одержати дріб, що дорівнює $\frac{5}{6}$?

Розв'язання. Позначимо шукане число буквою x . Тоді за умовою задачі: $\frac{3+x}{5+x} = \frac{5}{6}$, $18 + 6x = 25 + 5x$, звідси $x = 7$.

Перевірка. $\frac{3+7}{5+7} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.

Відповідь. Шукане число дорівнює 7.

ВИКОНАЙ УСНО



364. Укажи, при яких значеннях змінної чисельник дробу дорівнює нулю, при яких — знаменник дорівнює нулю.

а) $\frac{2x-8}{3x+15}$; б) $\frac{16+4y}{3-6y}$; в) $\frac{6x-18}{x(x+5)}$; г) $\frac{1+3a}{a(2-a)}$;
 г) $\frac{y^2-25}{4y-3}$; д) $\frac{5x+2}{16-x^2}$; е) $\frac{a^2-2a+1}{2a-1}$; є) $\frac{3y-2}{4+4y+y^2}$.

365. Чи має розв'язки рівняння?

а) $\frac{x^2+1}{(x+1)^2} = 0$; б) $\frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 0$; в) $\frac{x-1}{1-x} = 0$.

366. Чому не має розв'язків рівняння? а) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + 1 = 0$; б) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 0$.

367. Розв'яжи рівняння.

а) $\frac{x-2}{x} = 0$; б) $\frac{3+x}{x} = 0$; в) $\frac{x}{x+2} = \frac{2}{x+2}$; г) $\frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{x-1}$.

368. Знайди корені рівняння $\frac{x(x-1)}{x^2-1} = 0$.

А 0; 1 Б 0; 1; -1 В 0 Г рівняння коренів не має

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Розв'яжи рівняння (369–373).

369. а) $\frac{x+3}{x} - 2 = 0$; б) $\frac{2x-1}{3x} = 0$; в) $\frac{x}{x+2} - 2 = 0$;

г) $\frac{x-8}{x} = 3$; д) $\frac{5-x}{x} = 6$; е) $\frac{x}{x-2} = 2$.

370. а) $\frac{x-5}{x} - 2 = 0$; б) $\frac{x}{x+6} + 2 = 0$; в) $\frac{3x-7}{x} + 4 = 0$;

г) $\frac{3x-4}{x} = 2$; д) $\frac{5-2x}{x} = 3$; е) $\frac{2x}{x+3} = 1$.

371. а) $\frac{5x^2+1}{3x} = 2x$; б) $\frac{3x^2-4}{x} = 2x$; в) $\frac{x^2-1}{x} = 2x$;

г) $\frac{2x+3}{x-1} - 3 = 0$; д) $\frac{4x-2}{x+3} + 6 = 0$; е) $\frac{4-3x}{1-2x} - 5 = 0$.

372. а) $\frac{3x}{x+2} = -5$; б) $\frac{2x+5}{x+2} = 3$; в) $\frac{x-6}{3x-1} = 5$;
 г) $\frac{7x^2+1}{2x} = 4x$; ґ) $\frac{5x^2+4}{2x} = 3x$; д) $\frac{x^2+3}{x^2+1} = 2$.
 373. а) $\frac{4+x}{3x} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{7-2x}{x+1} = \frac{2}{3}$; в) $\frac{x+5}{x-3} = \frac{3}{4}$;
 г) $\frac{3x^2-4}{2x} = x$; ґ) $\frac{3x^2+5}{x^2-1} = 4$; д) $\frac{9-4x^2}{3x} = -x$.
 374. **НМТ** Розв'яжи рівняння $\frac{3x}{x-2} = 0$.

Користуючись властивістю пропорції, розв'яжи рівняння (375, 376).

375. а) $\frac{1}{23-3x} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{29} = \frac{1}{34y-5}$; в) $\frac{x}{x+1} = \frac{2}{3}$;
 г) $\frac{1}{x^2+4} = \frac{1}{4}$; ґ) $\frac{2}{x^2-1} = \frac{1}{12}$; д) $\frac{5x^2-16}{12x} = \frac{x}{3}$.
 376. а) $\frac{0,5}{18-x} = \frac{1}{4}$; б) $\frac{5x}{7x-12} = \frac{1}{0,2}$; в) $\frac{2}{x-1} = \frac{5}{x}$;
 г) $\frac{4}{x-1} = \frac{x+1}{6}$; ґ) $\frac{3z-1}{2} = \frac{4}{3z+1}$; д) $\frac{2x^2+8}{6x} = \frac{2x}{3}$.

377. Установи відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $\frac{x^2-9}{(x-3)^2} = 0$	А один
2 $\frac{(x+3)^2}{x^2-9} = 0$	Б два
3 $\frac{x^2-9}{x(x-9)} = 0$	В три
	Г безліч
	Д жодного

378. **ЗНО** Розв'яжи рівняння.

а) $\frac{1}{2x} = \frac{1}{2-3x}$; б) $\frac{x}{18-2x} = \frac{1}{4}$.

379. Яке одне й те саме число треба додати до чисельника і знаменника дробу $\frac{11}{17}$, щоб одержати $\frac{3}{4}$?

380. Знаменник даного дробу на 2 більший за чисельник. Якщо його чисельник збільшити в 3 рази, а до знаменника додати 67, то одержимо $\frac{1}{8}$. Знайди даний дріб.

381. Чисельник дробу на 5 менший від знаменника. Якщо до чисельника додати 11, а від знаменника відняти 2, то одержимо дріб, обернений до даного. Знайдіть даний дріб.

382. Для виготовлення українського віночка від атласної стрічки відрізали 4 м. Виявилося, що відрізана частина відноситься до решти, як 2 : 7. Якої довжини була стрічка?

1. Познач невідоме за x .
2. Вирази довжину стрічки, що залишилась, через x .
3. Склади рівняння до задачі у вигляді пропорції.

383. Брат старший за сестру на 6 років. По скільки років брату і сестрі, якщо три роки тому їх роки відносились, як 4 : 3? Склади план для розв'язування задачі та розв'яжи її.

1. Познач вік сестри за x .
2. Вирази вік брата через x .
3. Вирази вік кожного з них три роки тому.
4. Склади рівняння до задачі у вигляді пропорції.

384. Сума двох чисел дорівнює 50. Якщо більше з них поділити на менше, то в частці дістанемо 3 і в остачі 2. Знайди ці числа.

385. Максимальний вік журавля виражається двоцифровим числом, у якого цифра десятків на 4 більша за цифру одиниць. Якщо це число поділити на суму його цифр, то в частці буде 7 і в остачі 6. Скільки років може прожити журавель?

Розв'яжи рівняння (386, 387).

386. а) $\frac{3x^2-5}{x+2} = 3x+1$; б) $\frac{6x^2+5}{3x+2} = \frac{6x^2+x}{3x+2}$; в) $\frac{4x^2-x}{2x+3} = \frac{4x^2-9}{2x+3}$;

г) $\frac{2-x}{3x^2} = \frac{1}{x+2}$; г) $\frac{c+1}{c-1} = \frac{c-5}{c-3}$; д) $\frac{x^2-6x+9}{x^2-9} = 0$.

387. а) $\frac{3x^2-4}{x} = 3x-2$; б) $\frac{2x^2-3}{2x+1} = \frac{2x^2+3x}{2x+1}$; в) $\frac{x^2-2x}{x+1} = \frac{x^2-2}{x+1}$;

г) $\frac{2}{x+3} = \frac{3-x}{4x^2}$; г) $\frac{y-2}{y-6} = \frac{y}{y-5}$; д) $\frac{z^2-4z+4}{z^2-4} = 0$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



Знайди корені рівняння (388–391).

388. а) $\frac{12}{x^2-9} + \frac{2}{x+3} = \frac{3}{x-3};$

б) $\frac{2x+4}{3-x} + 1 = \frac{5-x}{x+2};$

в) $\frac{2x^2+8x-5}{x+3} - 2x = 1;$

г) $\frac{3x}{x^2+4x} + \frac{x-4}{x^2+3x} = \frac{9}{(x+3)(x+4)}.$

389. а) $\frac{7x-2}{4-x^2} + \frac{5}{2+x} = \frac{3}{2-x};$

б) $\frac{3x-5}{x+1} - \frac{x+5}{x-3} = 2;$

в) $2x - \frac{4x^2-1}{2x-1} = 5;$

г) $\frac{2x+2}{x^2-x} - \frac{x}{x^2-2x} = -\frac{1}{(x-1)(x-2)}.$

390. а) $\frac{4}{1+x} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2-3}{1-x^2};$

б) $\frac{8+24x}{36x^2-1} + \frac{1}{1-6x} = \frac{2}{6x+1};$

в) $\frac{2}{1+x} - \frac{5}{x-1} = \frac{7-x^2}{1-x^2};$

г) $\frac{3}{(x+2)^2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{5}{x^2-4}.$

391. а) $\frac{1-2x}{1+2x} = \frac{1+2x}{1-2x} + \frac{16}{4x^2-1};$

б) $\frac{2z}{2z+1} - \frac{2z+1}{1-2z} = \frac{1}{4z^2-1};$

в) $\frac{1}{3-2x} - \frac{4}{3+2x} = \frac{9-x^2}{4x^2-9};$

г) $\frac{1}{(x+5)^2} - \frac{3}{(x-5)^2} = \frac{2}{25-x^2}.$

392. Установи відповідність між рівняннями, заданими умовами (1–3), та їх розв'язками (А–Д).

1 $\frac{12}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = -3$

А -5

2 $\frac{2+x}{x-4} - \frac{x+4}{x+2} = 0$

Б 0 або -2

3 $\frac{3}{x+2} + \frac{x^2+4}{x^2-4} = \frac{x}{x-2}$

В -0,5 або 0

Г 2

Д рівняння коренів не має

393. Розв'яжи рівняння $\frac{7}{(5+2x)(1+2x)} = \frac{3}{(5+2x)^2} + \frac{4}{(1+2x)^2}.$

394. Solve the equation $\frac{1}{(1-3z)^2} - \frac{3}{(11+3z)^2} = \frac{2}{(1-3z)(11+3z)}.$

Розв'яжи рівняння (395, 396).

$$395. \text{ а) } \frac{5}{2-2t} - \frac{5}{18} = \frac{8}{3t-3} - \frac{2+t}{t-1};$$

$$\text{б) } \frac{6n+5}{4n+3} + \frac{3n-7}{3-4n} + \frac{6-4n^2+30n}{9-16n^2} = 0.$$

$$396. \text{ а) } \frac{3}{8-2x} - \frac{5}{6} = \frac{14}{3x-12} - \frac{2+x}{x-4};$$

$$\text{б) } \frac{2z-1}{z+4} - \frac{3z-1}{4-z} - \frac{96}{z^2-16} = 5.$$

397. *Відкрита задача.* Заміни праву частину рівнянь 395 а) та 396 а) так, щоб їх коренем було число 0.

398. Яке число слід додати до знаменника дробу $\frac{2}{5}$, щоб одержати дріб, на $\frac{3}{20}$ менший від даного?

399. Яке число слід відняти від знаменника дробу $\frac{1}{12}$, щоб значення дробу збільшилося на $\frac{1}{24}$?

Розв'яжи систему рівнянь (400–402).

$$400. \text{ а) } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}, \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{4}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{2}{y} = 2, \\ \frac{10}{x} - \frac{6}{y} = -1. \end{cases}$$

$$401. \text{ а) } \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{4}{y} = 51, \\ \frac{1}{x} - \frac{8}{y} = 8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{4}{x} + \frac{2}{y} = 4, \\ \frac{6}{x} - \frac{4}{y} = -1. \end{cases}$$

$$402. \text{ а) } \begin{cases} \frac{1}{x-y} + \frac{1}{x+y} = \frac{5}{8}, \\ \frac{1}{x-y} - \frac{1}{x+y} = \frac{3}{8}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{10}{z-5} + \frac{1}{x+2} = 1, \\ \frac{25}{z-5} + \frac{3}{x+2} = 2. \end{cases}$$

403. Відстань 160 км легковий автомобіль долає на 2 год швидше, ніж автобус. Знайдіть їх швидкості, якщо вони відносяться, як 2 : 1. Доповніть таблицю та розв'яжіть задачу.

	S , км	v , км/год	t , год
Легковий автомобіль	160		
Автобус	160	x	

404. Катер пройшов 9 км за течією річки і 5 км проти течії, витративши на весь шлях 2 год. Знайди власну швидкість човна, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год. Доповни таблицю і розв'яжи задачу.

	S , км	v , км/год	t , год
За течією		$x + 2$	
Проти течії			

405. Човен пройшов 96 км за течією річки і повернувся назад, витративши на весь шлях 20 год. Знайди швидкість течії річки, якщо

власна швидкість човна 10 км/год. Доповни таблицю і розв'яжи задачу.

	S , км	v , км/год	t , год
За течією			
Проти течії			

- 406.** Катер пройшов 28 км за течією річки і 25 км — проти течії, витративши на весь шлях стільки часу, скільки йому потрібно для проходження 53 км у стоячій воді. Знайди власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 2 км/год. Зроби модель до задачі у вигляді таблиці та розв'яжи задачу.
- 407.** Дві бригади шляховиків, працюючи разом, можуть відремонтувати дорогу за 12 днів. За скільки днів виконала б цю саму роботу кожна бригада окремо, якщо відомо, що продуктивність однієї з них у 1,5 рази вища за продуктивність іншої?
- 408.** Під час екологічного заходу «Чисте озеро» дві групи студентів працювали разом над очищенням берегів озера 6 годин. За який час може виконати такий самий обсяг робіт кожна група окремо, якщо відомо, що продуктивність праці першої групи у 1,5 рази вища за продуктивність другої?
- 409.** Сплав міді і цинку вагою 16 кг містить 55% міді. Скільки міді потрібно додати у сплав, щоб одержаний новий сплав містив 60% міді?
- 410.** Є 600 г 20% розчину солі. Скільки солі потрібно додати до розчину, щоб новий розчин містив 25% солі?
- 411.** Басейн наповнюється водою через одну трубу у два рази швидше, ніж через іншу. Якщо відкрити одночасно дві труби, то басейн наповниться водою за 1 год 20 хв. За скільки годин можна наповнити басейн водою через кожную трубу окремо?
- 412.** Два комбайни за 10 год зібрали всю картоплю з поля. Причому комбайн, потужність якого на 25% більша, був змушений через несправність простояти 4 год. За який час може зібрати цей урожай картоплі кожен комбайн, працюючи самостійно?

Для кожного значення параметра a розв'яжи рівняння (413, 414).

413. а) $\frac{(x-2)(x-5)}{x-a} = 0$; б) $\frac{x-a}{(x+2)(x-4)} = 0$; в) $\frac{x(x-6)}{x-a} = 0$.

414. а) $\frac{(x-3)(x-8)}{x-a} = 0$; б) $\frac{x-a}{(x-2)(x+9)} = 0$; в) $\frac{x(x-12)}{x-a} = 0$.

За яких значень параметра a рівняння має єдиний розв'язок? (415, 416)

415. а) $\frac{(x-7)(x+1)}{x-a} = 0$; б) $\frac{x(x-a)}{x-6} = 0$; в) $\frac{x-a}{(x-1)(x+3)} = 0$.

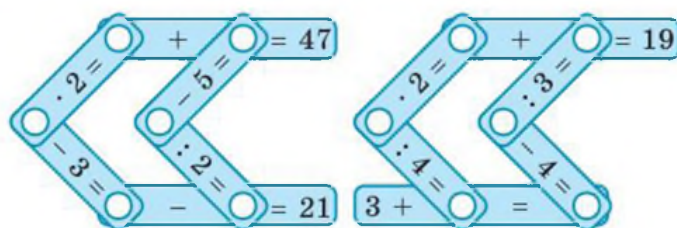
416. а) $\frac{(x+2)(x-4)}{x-a} = 0$; б) $\frac{x(x+a)}{x-10} = 0$; в) $\frac{x-a}{(x+6)(x-7)} = 0$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

417. Задача-жарт.

Для тата з мамою десяток на рік потрібно поросяток, із сином тато вісім з'їсть, а мама з сином — тільки шість. За скільки тижнів кожен сам упорався б із поросям?

418. Розв'яжи математичні кросворди, які зображено на малюнках 8.2 і 8.3.



Мал. 8.2

Мал. 8.3

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

419. Які з чисел 7, 84, 0, $\frac{2}{9}$, 0,5, -8, $2\frac{1}{3}$, -24, 9 натуральні;

які — цілі; які — раціональні?

420. Доведи, що:

а) $10^{12} + 2$ ділиться на 3;

б) $1 + 10^{10} + 10^{100}$ ділиться на 3;

в) $10^{15} + 8$ ділиться на 9;

г) $10^{10} - 1$ ділиться на 9.

421. Спрости вираз.

а) $\left(\frac{a^2+b^2}{2b} - a\right) : \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) + \frac{ba}{2}$;

б) $(a+b) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - ab \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right)$.

422. Побудуй графік функції. а) $y = 3 - 2x$; б) $y = \frac{6-x}{2}$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що таке рівносильні рівняння і вмію розв'язувати рівняння зі змінною в знаменнику, замінюючи його рівносильним.
- ✓ Умію переходити від дробового рівняння до цілого рівняння.
- ✓ Знаю, що обов'язково слід перевірити, чи задовольняють отримані корені початкове рівняння.
- ✓ Умію розв'язувати рівняння, використовуючи основну властивість пропорції.



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. Перемнож дроби. а) $\frac{2ax}{3x^3} \cdot \frac{5ax^2}{4x^3}$; б) $\frac{9xy^3}{x^2-y^2} \cdot \frac{x+y}{6y^2}$.
2. Виконай дії. а) $\frac{8ab}{a^2-3a} : \frac{4ab}{3a-9}$; б) $\frac{a^2-2a+1}{a^2-1} : \frac{a}{a+1}$.
3. Розв'яжи рівняння $\frac{3}{x-2} = \frac{10}{x} - \frac{7}{x+2}$.
4. Спрости вираз. а) $\frac{9ax^3}{x^2-a^2} \cdot \frac{a+x}{6x^2} - \frac{3a^2}{2x-2a}$; б) $\left(n + \frac{1}{2+n}\right) : \frac{n+1}{n+2} - n$.

ВАРІАНТ II

1. Перемнож дроби. а) $\frac{2xy^2}{3y^3} \cdot \frac{9x}{4y}$; б) $\frac{5a}{a-3b} \cdot \frac{a^2-9b^2}{10a^2}$.
2. Виконай дії. а) $\frac{2a}{a^2-3a} : \frac{4a^2}{a-3}$; б) $\frac{m+2}{m} : \frac{m^2-4}{m^2-4m+4}$.
3. Розв'яжи рівняння $\frac{9}{x} - \frac{2}{x-1} = \frac{7}{x+1}$.
4. Спрости вираз. а) $\frac{6ac^2}{a^2-c^2} \cdot \frac{a+c}{4c} - \frac{3a^2}{2a-2c}$; б) $\left(1 + \frac{a^2}{2a+1}\right) : \frac{a+1}{2a+1} - a$.

ВАРІАНТ III

1. Перемнож дроби. а) $\frac{3a^2b}{5b^3} \cdot \frac{10ab}{6b^3}$; б) $\frac{3xy}{4x^2+4xy+y^2} \cdot \frac{2x+y}{xy}$.
2. Виконай дії. а) $\frac{3ab}{ab+b^2} : \frac{6b^2}{2a+2b}$; б) $\frac{a+3}{2a} : \frac{a^2+6a+9}{a^2-9}$.
3. Розв'яжи рівняння $\frac{1}{x} + \frac{4}{x-3} = \frac{5}{x-2}$.
4. Спрости вираз. а) $\frac{8cn^2}{c^2-n^2} \cdot \frac{n+c}{4n} - \frac{2n^2}{c-n}$; б) $\left(\frac{a^2+c^2}{c} - 2a\right) : \frac{a-c}{c} - a$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ



Тестові завдання № 2

1. Спрости вираз $\frac{2a}{3} : a$ і знайди його значення, якщо $a = -3$.
 А $\frac{2}{3}$ Б $-\frac{2}{3}$ В 2 Г -2
2. Виконай піднесення до степеня $\left(\frac{a^3}{3b^2}\right)^3$.
 А $\frac{a^6}{3b^5}$ Б $\frac{a^9}{9b^7}$ В $\frac{a^6}{9b^6}$ Г $\frac{a^9}{27b^6}$
3. Скільки розв'язків має рівняння $\frac{x-3}{6-3x} = 0$?
 А один Б два В жодного Г безліч
4. Добутком дробів $\frac{3x}{(x-2)}$ і $\frac{(x-2)^2}{x^2-4}$ є дріб:
 А $\frac{3x}{x+2}$ Б $\frac{3}{x+2}$ В $\frac{3}{x(x+2)}$ Г $\frac{3x(x+2)}{(x-2)^2}$
5. Виконай ділення $1 : \frac{a-2}{a+2}$. А $a-2$ Б $a+2$ В $\frac{a-2}{a+2}$ Г $\frac{a+2}{a-2}$
6. Виконай дії $\frac{2a}{3b^2} \cdot \frac{3a}{ab} : \frac{a}{b^3}$. А $\frac{2a}{b}$ Б $\frac{2a^2}{3b}$ В 2 Г 3b
7. Вираз $\frac{x^3+1}{x+1} : (x^2-x+1)$ тотожно дорівнює:
 А 0 Б 1 В -1 Г x
8. Укажи корені рівняння $\frac{x^2-3x}{x^2-9} = 0$.
 А 0 Б 3 В 0 і 3 Г 3 і -3
9. Спрости вираз $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) : \frac{a-b}{ab}$.
 А $a+b$ Б $a-b$ В $\frac{a+b}{ab}$ Г $\frac{ab}{a+b}$
10. При яких значеннях a рівняння $\frac{x}{x-5} - \frac{a}{x-5} = 0$ не має коренів?
 А 5 Б -5 В 5 або -5 Г таких значень a не існує



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ № 2

1. Виконай ділення $\frac{24a^3b^2}{7m^2} : (8ab^2)$.

А $\frac{192a^4b^4}{7m^2}$

Б $\frac{3a^4b^4}{7m^2}$

В $\frac{3a^2}{7m^2}$

Г $\frac{3a^4b^4}{7m^2}$

2. Подай у вигляді дробу вираз $\frac{3x^2}{y^7} \cdot \frac{y^8}{6x^3}$.

А $\frac{y}{2x}$

Б $\frac{18x^5}{y^{15}}$

В $\frac{x^6}{2y^{56}}$

Г $\frac{x^5}{2y^{15}}$

3. Виконай піднесення до степеня $\left(-\frac{2a^2}{3b^3}\right)^3$.

А $\frac{4a^4}{9b^6}$

Б $-\frac{8a^6}{27b^9}$

В $\frac{8a^6}{27b^9}$

Г $-\frac{8a^5}{27b^6}$

4. Установи відповідність між рівняннями, заданими умовами (1–3), та кількістю їх коренів (А–Д).

1 $\frac{x^2-4}{x-5}=0$

А один

2 $\frac{x-2}{x^2-4}=0$

Б два

3 $\frac{x^2-6}{x-3}-\frac{3}{x-3}=0$

В три

Г жодного

Д безліч

5. Знайди значення виразу:

а) $\frac{(x-1)^2}{x} \cdot \frac{2x}{x-1}$, якщо $x = 1,5$;

б) $\frac{2(a+b)}{3a+b} + \frac{1}{a+b} : \frac{3a+b}{a^2-b^2}$, якщо $a = 1,5$, $b = -1\frac{1}{3}$.

6. Розв'яжи рівняння $\frac{x+7}{x} - \frac{x+6}{x+4} = \frac{8}{x^2+4x}$.

7. Катер проходить 160 км за течією річки за той самий час, що і 136 км проти течії. Знайди власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки дорівнює 2,4 км/год.

8. Доведи тотожність $\frac{2}{x+2} + \frac{(x-2)^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{x^2-4} + \frac{1}{x^2-4x+4}\right) = 1$.

Додаткове завдання

9. При яких значеннях параметра a коренем рівняння $\frac{a^2+3ax}{2a} = 0$ є число 2?

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- означення степеня з натуральним показником;
- властивості степеня з натуральним показником (форзац 1);
- квадрати натуральних чисел (форзац 4);
- степені чисел 2 і 3 (форзац 4);
- дії з одночленами.

§ 9. Степені з цілими показниками

КЛЮЧОВІ СЛОВА

ступінь — *power* основа — *base*
цілий показник — *integer exponent*

Деякі дроби часто записують у вигляді степенів з від'ємними показниками. Наприклад, замість $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{m^5}$ пишуть a^{-1} , x^{-2} , m^{-5} .

Згадай, як ділять степені з однаковими основами: $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Розглядаючи степені тільки з додатними показниками, наголошують, що остання рівність правильна тільки за умови, що $m > n$. Знявши це обмеження, приходимо до таких наслідків.

$$1 = a^n : a^n = a^{n-n} = a^0.$$

Тому й домовилися вважати, що $a^0 = 1$ (коли $a \neq 0$).

$$1 : a^n = a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n}.$$

Тому є сенс домовитися, що $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Отже, можна розглядати степені з довільними цілими показниками. Коротко зміст цього поняття пояснюється так:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{aa\dots a}_{n \text{ раз}}, & \text{якщо натуральне число } n > 1, \\ a, & \text{якщо } n = 1; \\ 1, & \text{якщо } n = 0 \text{ і } a \neq 0; \\ \frac{1}{a^{-n}} & \text{якщо число } n \text{ — ціле від'ємне і } a \neq 0. \end{cases}$$

Властивості степенів з цілими показниками такі самі, як і степенів з натуральними показниками. Для будь-яких $a \neq 0$, $b \neq 0$ та цілих m і n виконуються рівності:

$$\begin{array}{lll} 1) a^m \cdot a^n = a^{m+n}; & 2) a^m : a^n = a^{m-n}; & 3) (a^m)^n = a^{mn}; \\ 4) (ab)^n = a^n b^n; & 5) \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}. \end{array}$$

Доведемо першу з цих тотожностей (її називають **основною властивістю степенів**) для випадку, якщо m і n — цілі від'ємні числа. За цієї умови $m = -p$ і $n = -q$, де p, q — натуральні числа. Тому

$$a^m \cdot a^n = a^{-p} \cdot a^{-q} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{m+n}.$$

Так само можна довести рівність $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ для випадку, якщо один із показників m і n від'ємний, а другий — додатний або дорівнює 0.

Зверни увагу на степені, в яких основа або показник дорівнюють нулю. Якщо a і n відмінні від нуля, то $a^0 = 1$, $0^n = 0$.

Вираз 0^0 не має змісту, це не число, як і вираз $\frac{0}{0}$.

Вирази, що містять степені з цілими показниками, можна перетворювати двома способами: замінюючи їх дробами або користуючись властивостями степенів. Наприклад, спростимо вираз $9x^{-5} \cdot 3^{-2} x^6$.

Перший спосіб. $9x^{-5} \cdot 3^{-2} x^6 = 9 \cdot \frac{1}{x^5} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot x^6 = x.$

Другий спосіб. $9x^{-5} \cdot 3^{-2} x^6 = 3^2 \cdot 3^{-2} \cdot x^{-5} \cdot x^6 = 3^{2+(-2)} \cdot x^{-5+6} = 3^0 x^1 = x.$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Зверни увагу на те, як здійснюється розширення поняття *ступінь*. Спочатку тобі були відомі тільки *квадрат числа* і *куб числа*. Потім ти дізнався/дізналася про степені чисел і змінних з довільним *натуральним показником*. Тепер ти ознайомишся зі степенями з довільними *цілими показниками*. Згодом ти дізнаєшся також про степені, показники яких — довільні раціональні і навіть нерациональні числа.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що таке квадрат числа, куб числа?
2. Сформулюй означення степеня числа з натуральним показником n .
3. Що розуміють під степенем числа з показником: а) 1; б) 0?
4. Що розуміють під степенем числа з цілим від'ємним показником?
5. Запиши у вигляді формули означення степеня з довільним цілим показником.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Обчисли: а) $100 \cdot 2^{-2}$; б) $81 \cdot (-3)^{-4}$.

Розв'язання. а) $100 \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{100}{4} = 25$; б) $81 \cdot \frac{1}{(-3)^4} = \frac{81}{81} = 1$.

Відповідь. а) 25; б) 1.

2. Запиши без знаменника вираз $\frac{2}{ax^2}$.

Розв'язання. $\frac{2}{ax^2} = 2 \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{x^2} = 2a^{-1}x^{-2}$.

Відповідь. $2a^{-1}x^{-2}$.

3. Спрости вираз $(a-c)^{-1} \cdot (a^{-1}-c^{-1})$.

Розв'язання.

$$(a-c)^{-1} \cdot (a^{-1}-c^{-1}) = \frac{1}{a-c} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c} \right) = \frac{1}{a-c} \cdot \frac{c-a}{ac} = \frac{1}{a-c} \cdot \left(-\frac{a-c}{ac} \right) = -\frac{1}{ac}.$$

Відповідь. $-\frac{1}{ac}$.

ВИКОНАЙ УСНО



423. Обчисли.

а) 35^0 ; $(-8)^0$; $\left(\frac{2}{3}\right)^0$; $1,23^0$; $\left(4\frac{1}{3}\right)^0$;

б) 2^{-1} ; 6^{-1} ; $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$; $\left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$; $(-5)^{-1}$; $0,3^{-1}$; $0,02^{-1}$.

424. Як записати вираз без знаменника?

$$\frac{1}{2^3}; \quad \frac{1}{3^2}; \quad \frac{1}{5}; \quad \frac{1}{7^4}; \quad \frac{1}{a^2}; \quad \frac{1}{c^5}.$$

425. Подай у вигляді дробу вираз $a^{-3}b^{-2}c$.

А $\frac{a^3b^2}{c}$

Б $\frac{b^2c}{a^3}$

В $\frac{c}{a^3b^2}$

Г $\frac{1}{a^3b^2c}$

426. Обчисли.

а) $31^0 + 2^{-1}$;

б) $3 + 3^{-1}$;

в) $2^2 + 2^{-2}$;

г) $(-1)^{-4}$.

427. Подай у вигляді степеня вираз $(a^3)^{-5} : a^{-8}$.

А a^{-23}

Б a^{-7}

В a^7

Г a^6

428. Згрупуй степені: a^{-3} ; a^{-2} ; a^{-1} ; a ; a^2 ; a^3 по два так, щоб їх добутки дорівнювали один одному.

429. **ЗНО** Обчисли $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

А -9 Б $-\frac{1}{9}$ В $-\frac{1}{6}$ Г $\frac{1}{9}$ Д 9

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Заміни степені з цілим від'ємним показником дробом (430, 431).

430. а) 2^{-3} ; б) 77^{-1} ; в) b^{-3} ; г) $(xy)^{-3}$; ґ) $(m-n)^{-2}$.

431. а) 3^{-2} ; б) 17^{-3} ; в) c^{-5} ; г) $m^{-2}n^{-2}$; ґ) $(a+c)^{-5}$.

432. Заміни дріб степенем з цілим від'ємним показником.

а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{1}{33^2}$; в) $\frac{1}{x^9}$; г) $\frac{1}{ab}$; ґ) $\frac{1}{m^2+n^2}$.

433. Rewrite the fraction as a power with a negative integer exponent.

а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{1}{7^3}$; в) $\frac{1}{z^5}$; д) $\frac{1}{x^2y^2}$; е) $\frac{1}{a^3-c^3}$.

434. Подайте числа:

а) 16, 8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ у вигляді степеня з основою 2;

б) 125, 25, 1, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{25}$, $\frac{1}{125}$, $\frac{1}{625}$ у вигляді степеня з основою 5.

435. Подай числа:

а) 81, 27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$ у вигляді степеня з основою 3;

б) 1000, 100, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ у вигляді степеня з основою 10.

Обчисли (436, 437).

436. а) 7^{-1} ; б) 3^{-2} ; в) $(-2)^{-3}$; г) $\left(\frac{1}{6}\right)^{-1}$; ґ) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{-2}$.

437. а) 9^{-1} ; б) 7^{-2} ; в) $(-3)^{-3}$; г) $\left(\frac{1}{13}\right)^{-1}$; ґ) $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

438. Запиши степені, задані командами в Python.

- а) `print (5**6);` б) `print ((-7)**3);` в) `print (200**0);`
 г) `print (7**(-4));` р) `print ((-2)**-2);` д) `print (0.3**-10).`

Які є ще записи степеня в Python?

Знайди значення виразу (439, 440).

- 439.** а) $3^{-4} \cdot 3^2$; б) $5^4 \cdot 5^{-4}$; в) $0,5^{-3} \cdot 0,5^2$; г) $(-2)^{-3} \cdot (-2)^5$;
 р) $\left(\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$; д) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; е) $3^{-5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$; є) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \cdot 2^2$.

- 440.** а) $4^{-5} \cdot 4^3$; б) $3^6 \cdot 3^{-8}$; в) $0,7^{-6} \cdot 0,7^6$; г) $(-6)^{-8} \cdot (-6)^{10}$;
 р) $\left(\frac{3}{7}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^4$; д) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$; е) $8^{-7} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{-8}$; є) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} \cdot 5^{-2}$.

Спрости вираз (441, 442).

- 441.** а) $a^{-10} \cdot a^8$; б) $x^5 \cdot x^0$; в) $c^{12} \cdot c^{-10}$; г) $a^3 : a^{-3}$;
 р) $a^{-7} : a^{-5}$; д) $a^{11} \cdot a^{-15} : a^3$; е) $p^{-6} \cdot (p^{-2})^{-4}$; є) $(c^{-2})^5 : (c^3)^{-8} \cdot a^{14}$.

- 442.** а) $m^{-6} m^4$; б) $a^{12} \cdot a^0$; в) $p^{12} \cdot p^5$; г) $a^7 : a^{-5}$;
 р) $a^{-9} : a^{-3}$; д) $a^{16} \cdot a^{-20} : a^{-3}$; е) $a^{-4} \cdot (a^{-3})^{-2}$; є) $(x^{-3})^9 : (x^2)^{-6} \cdot x^6$.

Подай у вигляді дробу вираз (443, 444).

- 443.** а) $3x^{-2}$; б) $a^2 c^{-3}$; в) $4a^{-2} x^{-3}$; г) $\frac{2}{3} a^2 c^{-5} x^{-3}$.

- 444.** а) $5a^{-4}$; б) $m^7 n^{-5}$; в) $3x^{-3} y^{-8}$; г) $\frac{3}{8} a^2 b^{-3} c^{-5}$.

Знайди значення виразу (445, 446).

- 445.** а) $7 \cdot 14^{-1}$; б) $-2^{-4} \cdot 48$; в) $(-4)^{-3} : \frac{1}{8}$;
 г) $10 : (-5)^{-2}$; р) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{-3} : \frac{2}{9}$; д) $(1,5)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4$.

- 446.** а) $8 \cdot 16^{-1}$; б) $-3^{-3} \cdot 54$; в) $(-5)^{-3} : \left(\frac{1}{5}\right)^2$;
 г) $0,8 : (-0,5)^{-3}$; р) $100 : \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$; д) $\left(-1\frac{1}{9}\right)^{-3} : 0,81$.

- 447. Гра.** Один з учнів/одна з учениць записує звичайний дріб, другий/друга записує від'ємний цілий показник степеня, а третій/третя має записати дріб, у чисельнику і знаменнику якого будуть степені з натуральним показником.

448. Установи відповідність між виразами (1–3) та їх числовими значеннями (А–Д).

1 $2^{-7} \cdot 2^3$

2 $2^{-5} : 2^{-3}$

3 $(2^{-5})^3 \cdot 2^0 : (2^5)^{-2}$

А $\frac{1}{128}$

Б $\frac{1}{32}$

В $\frac{1}{16}$

Г $\frac{1}{4}$

Д 32

Спрости вираз (449, 450).

449. а) $6x^{-2}c \cdot 1,5xc^{-3}$; б) $1,6x^{-1}y^{-5} \cdot \frac{5}{8}xy$; в) $\frac{3}{4}a^2n^{-4} \cdot 8a^{-3}n^2$;

г) $\frac{6x^{-5}}{a^{-6}} \cdot \frac{a}{36x^{-9}}$;

г) $\frac{8x^2}{z} \cdot \frac{z^{-3}}{16x^{-3}}$;

д) $\frac{14c^{-17}}{x^{-8}} \cdot \frac{x}{7c^{-18}}$.

450. а) $\frac{1}{6}p^2q^{-5} \cdot \frac{1}{2}p^{-1}q^{-3}$; б) $15ac^{-2} : a^2c$; в) $3,6x^4y^5 : xy^5$;

г) $\frac{6x^{-5}}{y^{-6}} \cdot \frac{y}{36x^{-7}}$;

г) $\frac{5x^{-1}c}{3} \cdot \frac{9x^5}{c^{-3}}$;

д) $\left(\frac{a^{-2}}{10^2x}\right)^2 \cdot (ax^{-1})^2$.

Подай степінь у вигляді добутку (451, 452).

451. а) $(0,5x^{-3}y^2)^{-2}$; б) $(6a^2b)^{-1}$; в) $(-0,2m^2n^{-4})^{-3}$;

г) $\left(\frac{1}{2}x^3y^{-2}\right)^{-3}$;

г) $\left(\frac{5}{6}m^{-8}n\right)^{-1}$;

д) $(-0,3x^{-3}y)^2$.

452. а) $(xz^{-2})^{-3}$; б) $(a^3y^{-2})^4$; в) $(5a^{-3}b)^{-1}$;

г) $\left(1\frac{1}{3}a^4b^{-2}\right)^2$;

г) $(-0,1ab)^{-2}$;

д) $(-2m^5n^{-1})^{-1}$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Обчисли значення виразу (453–456).

453. а) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4^{-1} \cdot 5$; б) $-\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} + 0,25^2 \cdot 11^2$;

в) $2\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-2} + 35 \cdot 2^{-3}$;

г) $0,6^{-3} : 1\frac{2}{3} - \left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$.

454. а) $1000^{-2} : 0,1^5 + \frac{2}{5}$;

б) $0,1^{-1} - 1,1^0 : 10^{-1}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (0,05)^{-2} + (-0,2)^{-3}$;

г) $(-0,8)^3 : \left(-1\frac{1}{4}\right)^{-2} + 2,8$.



455. а) $0,064^2 : 0,16^3$;

б) $\frac{(6^6)^2 \cdot 36^{-2}}{6^{10}}$;

в) $\frac{0,8^7 \cdot 0,16^{-4}}{0,64^3 \cdot 0,4^{-7}}$;

г) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 : \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-7}$;

г) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)^{-2} : \frac{6}{7} - \left(1\frac{8}{17}\right)^{-1}$.

456. а) $0,0081^3 \cdot 0,3^{-10}$;

б) $\frac{125^5}{25^8 \cdot 5^{-3}}$;

в) $\frac{9^{-4} \cdot 27^3}{100^5 \cdot 10^{-12}}$;

г) $\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^5 : \left(\frac{2}{3}\right)^{-9} : \frac{2}{3}$;

г) $\left(\frac{4}{5} \cdot 4^{-2} + 0,2 : 5^{-2}\right)^{-1}$.

Спрости вираз (457, 458).

457. а) $0,2x^{-3} \cdot 5x^2y^3$;

б) $3^{-3}a^{-1}x \cdot 81a^2x$;

в) $0,2c^{-5}x : 5^{-2}c^{-3}x^{-1}$;

г) $\frac{27x^{-1}y^2}{10} \cdot \frac{5x^6}{9y^{-4}}$;

г) $\frac{3x^8}{4y^3z^{-2}} : \frac{x^7y^{-4}}{12z^{-2}}$;

д) $\left(\frac{x^2y^{-3}}{6z}\right)^{-3} : \left(\frac{x^3y^{-5}}{9z}\right)^{-2}$;

е) $(2a^{-2}x^3)^2 \cdot \left(\frac{a}{x}\right)^6$;

е) $(x^{-1}y) : \left(\frac{y^2}{2x^2}\right)^{-1}$.

458. а) $0,5x^{-6}y^2 \cdot 4x^7y^{-2}$;

б) $8a^{-3}b^3 \cdot 0,25a^5b^{-1}$;

в) $9a^6b^{-2} : (-3a^2b^{-5})$;

г) $\frac{12x^2}{7y^7} \cdot \frac{14y^9}{3x^{-2}}$;

г) $\frac{16a^4b^6}{c^7} : \frac{8b^6c^{-6}}{3a^{-3}}$;

д) $\left(\frac{a^{-3}b^4}{5}\right) : \left(\frac{10}{a^{-2}b^3}\right)^{-3}$;

е) $4a^7c^{-1} \cdot \left(\frac{ac}{5}\right)^{-1}$;

е) $\frac{a^{-2}}{9c^3} : \left(\frac{3a^2}{c^{-2}}\right)^{-3}$.

Спрости вираз і знайди його значення (459, 460).

459. а) $8a^{-5}$, якщо $a = 2$;

б) $2,2a^{-8}b^5 \cdot 5a^{10}b^{-4}$ при $a = -0,2$, $b = 50$;

в) $\frac{14a^{-7}}{b^{-3}} \cdot \frac{b^{-2}}{56a^{-5}}$ при $a = 1,5$, $b = 45$.

460. а) $0,5a^{-2}x^{-5}$, якщо $a = 4$, $x = 0,5$;

б) $2,8x^9y : (0,7x^{10}y^{-2})$ при $x = 0,125$, $y = -0,25$;

в) $\frac{21x^{15}}{10y^{-5}} : \frac{7x^{12}}{5y^{-2}}$ при $x = \frac{3}{7}$, $y = 2\frac{1}{3}$.

461. Доведи, що вираз набуває одного й того самого значення при будь-якому цілому n .

а) $\frac{5^{2n+1}}{25^n}$;

б) $\frac{2^{n-1} \cdot 3^{n+1}}{6^n}$;

в) $\frac{4^{n+1} - 4^n}{2^{2n}}$;

г) $\frac{2 \cdot 3^n + 3^n}{2 \cdot 3^{n+1}}$.

462. Скоротіть дріб (n — ціле число).



а) $\frac{4^{n+2} - 4^n}{15}$; б) $\frac{5^{n+1} + 5^{n+3}}{26}$; в) $\frac{3^n + 1}{3^{-n} + 1}$; г) $\frac{6^{-n} + 6^n}{36^n + 1}$.

463. Спрости вираз (n — ціле число).

а) $\frac{x^{6n}y^{n+4}}{x^{2n}y^{n+5}}$; б) $\frac{a^{3n}b^{n-3}}{a^{2n}b^{n-5}}$; в) $\frac{x^{-2n} + x^n}{x^{-n}}$; г) $\frac{a^{2n} - a^{-3n}}{a^{-2n}}$.

Спрости вираз (464–469).

464. а) $\frac{a^{-2} - 4}{a^{-1} + 2}$; б) $\frac{x^{-2} - 2x^{-1} + 1}{x^{-2} - 1}$; в) $\frac{x^7 + x^{13}}{x^{-3} + x^3}$; г) $\frac{x^4 + 2x^6 + x^7}{2 + x + x^{-2}}$.

465. а) $\frac{b^{-2} - 9}{b^{-1} - 3}$; б) $\frac{a^{-2} - 4}{a^{-2} + 4a^{-1} + 4}$; в) $\frac{a^8 + a^{12}}{a^{-8} + a^{-12}}$; г) $\frac{x^4 + 3x^5 + x^6}{x^{-4} + 3x^{-5} + x^{-6}}$.

466. а) $(a^{-1} - c^{-1}) : \frac{a^2 - c^2}{ac}$; б) $\frac{1}{a^{-3} - x^{-3}} - \frac{1}{a^{-3} + x^{-3}}$;

в) $(m^{-1} + n^{-1})^2 + (m^{-1} - n^{-1})^2$; г) $(c^{-2} - c^2)^2 - c^{-4} + 2$.

467. а) $(x - y)^{-2}(x^2 - y^2)$; б) $(a^{-3} - b^{-3})^{-1} - (a^{-3} + b^{-3})^{-1}$;

в) $(a^{-1} + b^{-1})^2 - (a^{-1} - b^{-1})^2$; г) $(p^{-3} + p^3)^2 - p^{-6} - 2$.

468. а) $\left(\frac{a^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}} + \frac{b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} \right) \cdot \frac{a^{-2} + a^{-1}b^{-1}}{a^{-2} + b^{-2}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}}$;

б) $\frac{a^{-1}}{b^{-2}} - \frac{a^{-2} - b^{-2}}{b^{-3}} : \frac{a^{-1} + b^{-1}}{b^{-1}}$.

469. а) $\frac{a^{-1} + 2}{a^{-1} + 1} \cdot \frac{a^{-2} + 2a^{-1} + 1}{a^{-2} - 4} - \frac{3}{a^{-1} - 2}$;

б) $\left(\frac{a^{-1}}{b^{-1}} - \frac{b^{-1}}{a^{-1}} \right) \cdot \frac{1}{a^{-1} + b^{-1}} + \frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}$.

«Вивчення математики, передусім, сприяє розвитку логічного мислення, вмінню думати, аналізувати, абстрагувати, схематизувати, узагальнювати».

Ю. О. Митропольський

470. Доведи, що значення виразу

$$\left(\frac{a^{-1} + b^{-1}}{a^{-2} + b^{-2}} \right)^{-1} \cdot \left(\left(\frac{b}{3a} \right)^{-1} - \left(\frac{a}{3b} \right)^{-1} \right)^{-1} \cdot \frac{3(a^{-1} + b^{-1})}{(ab)^{-1}}$$

є сталим числом при всіх допустимих значеннях змінних.

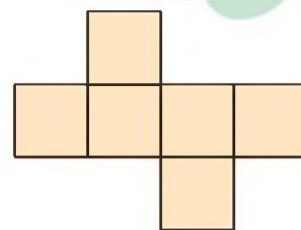
Розв'яжи рівняння (471, 472).

471. а) $2x^{-1} - x^{-1} = 2$; б) $x^{-2} - x^{-1} = 0$; в) $(2x - 1)x^{-1} = x$.

472. а) $x^{-1} - 4x^{-3} = 0$; б) $x^{-1} + x = 2$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

473. На малюнку 9.1 зображено розгортку куба. Перемалюй її у зошит. Напиши на кожній її грані один із виразів a , b , c , a^{-1} , b^{-1} , c^{-1} так, щоб добуток на двох протилежних гранях дорівнював добутку на двох інших протилежних гранях.



Мал. 9.1

474. Чи може значення виразу $\frac{c^{-2}}{c^{-2}-1}$ дорівнювати 0 або 1?

Чи може воно бути більшим за 1?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

475. Виконай множення.

а) $(2x - 3)(y + 1)$;

б) $(x - a)(y - b)$;

в) $(m + 5)(n - m)$;

г) $(6 - a)(2b - a)$.

476. Подай вираз у вигляді добутку трьох множників.

а) $16a^4 - 1$;

б) $81 - x^{12}$;

в) $(x^2 + xy + y^2)^2 - x^2y^2$;

г) $a^2b^2 - (a^2 + ab - b^2)^2$.

477. Спрости вираз та знайди його значення.

$$(5a(a - 4b) + 12ab) \cdot 2b + 16ab^2, \text{ якщо } a = 3, b = 1, 2.$$

478. При яких значеннях змінних не має змісту дріб: а) $\frac{a+3}{a-5}$; б) $\frac{2a}{a^2+2a}$?

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклад степеня з цілим показником.
- ✓ Формулюю означення степеня з нульовим показником і степеня з цілим від'ємним показником:

$$a^0 = 1, a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}$$

- ✓ Можу обґрунтувати властивості степеня з цілим показником.
- ✓ Умію розв'язувати вправи, що передбачають перетворення степенів з цілим показником.
- ✓ Умію використовувати формули:

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$\frac{k}{a^n} = k \cdot a^{-n}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-1} = \frac{B}{A}$$

$$\left(\frac{A}{B}\right)^{-n} = \left(\frac{B}{A}\right)^n$$

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- як виконують дії зі степенями (властивості степенів) (с. 87);
- правила множення і ділення чисел на 10.

$$5,374 \cdot 10 = 53,74$$

$$5,374 \cdot 100 = 537,4$$

$$5,374 \cdot 1000 = 5374$$

$$5550 : 10 = 555$$

$$5550 : 100 = 55,5$$

$$5550 : 1000 = 5,55$$

§ 10. Стандартний вигляд числа

КЛЮЧОВІ СЛОВА

стандартний вигляд числа —
standard form of a number/scientific notation

Якщо мають справу з дуже великими або дуже малими числами, то такі числа зручно записувати в **стандартному вигляді**, тобто у вигляді $a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$ і число n — ціле.

Показник степеня n називають **порядком числа** $a \cdot 10^n$.

Масу Землі, яка дорівнює 6 000 000 000 000 000 000 000 т, у стандартному вигляді записують так: $6 \cdot 10^{21}$ т. А масу атома Гідрогену 0,00000000000000000000017 г у стандартному вигляді записують так: $1,7 \cdot 10^{-21}$ г. Порядок маси Землі дорівнює 21, а маси атома Гідрогену становить -21 .

Над числами, записаними у стандартному вигляді, математичні дії можна виконувати так само, як їх виконують над одночленами. Але щоб вміти робити це, треба навчитися перетворювати добутки вигляду $a \cdot 10^n$ на рівні їм добутки з іншими показниками степенів. Щоб значення такого добутку не змінилося, при збільшенні показника степеня n на 1, 2, 3 значення a слід відповідно зменшувати в 10, 100, 1000 разів. І навпаки, зменшуючи n на 1, 2, 3, значення a слід відповідно збільшувати в 10, 100, 100 разів.

Наприклад,

$$35 \cdot 10^5 = 3,5 \cdot 10^6;$$

$$227 \cdot 10^{-4} = 2,27 \cdot 10^{-2};$$

$$0,23 \cdot 10^8 = 2,3 \cdot 10^7;$$

$$0,024 \cdot 10^{14} = 2,4 \cdot 10^{12}.$$

Як виконувати дії над числами, записаними в стандартному вигляді, покажемо на прикладах.

Якщо $a = 1,5 \cdot 10^8$, $b = 2,4 \cdot 10^7$, то:

$$a \cdot b = (1,5 \cdot 10^8) \cdot (2,4 \cdot 10^7) = 1,5 \cdot 2,4 \cdot 10^8 \cdot 10^7 = 3,6 \cdot 10^{15};$$

$$a : b = (1,5 \cdot 10^8) : (2,4 \cdot 10^7) = (15 \cdot 10^7) : (2,4 \cdot 10^7) = 6,25;$$

$$a + b = 1,5 \cdot 10^8 + 0,24 \cdot 10^8 = (1,5 + 0,24) \cdot 10^8 = 1,74 \cdot 10^8;$$

$$a - b = 1,5 \cdot 10^8 - 0,24 \cdot 10^8 = (1,5 - 0,24) \cdot 10^8 = 1,26 \cdot 10^8.$$

Зверни увагу! Числа, записані у стандартному вигляді, виражають переважно наближені значення величин. Це пояснюється тим, що у такий спосіб найчастіше записують значення відстаней, площ, мас, об'ємів, швидкостей, температур, які майже завжди є наближеними.

Наприклад, маса Місяця дорівнює $7,35 \cdot 10^{22}$ кг, тобто 73 500 000 000 000 000 000 000 кг. Чи є це значення точним? Ні, це наближене значення. Усі нулі в цьому числі — цифри не точні, а округлені. Значущими є тільки три перші цифри: 7, 3 і 5. А всі нулі поставлено замість невідомих нам точних цифр.

Взагалі, якщо значення величин записують у стандартному вигляді, тобто $a \cdot 10^n$, то число a — точне, всі його цифри — значущі. А всі нулі, які одержують від множення a на 10^n , є результатом округлення.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Як треба розуміти вислів *число x більше від y на порядок*?

Це передбачає, що число x більше від y приблизно в 10 разів. Наприклад,

$2 \cdot 10^7$ і $9 \cdot 10^7$ — числа одного порядку;

$2 \cdot 10^7$ більше за $9 \cdot 10^6$ на порядок, оскільки бо $7 - 6 = 1$;

$2 \cdot 10^7$ менше від $8 \cdot 10^{10}$ на три порядки, оскільки $10 - 7 = 3$.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Раціональні вирази та рівняння. Урок 2).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що таке стандартний вигляд числа?
2. Наведи приклад числа, записаного в стандартному вигляді.
3. Що таке порядок числа?
4. Перше число менше від другого у 100 разів. На скільки порядків друге число більше за перше?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Запиши у стандартному вигляді число.
 - а) 320; б) 0,4; в) 1000 000; г) 0,00000027.

Розв'язання. а) $320 = 3,2 \cdot 10^2$; б) $0,4 = 4 \cdot 10^{-1}$;
 в) $1\,000\,000 = 1 \cdot 10^6$; г) $0,00000027 = 2,7 \cdot 10^{-7}$.



490. Маса Землі дорівнює 5 980 000 000 000 000 000 000 000 т, а маса Місяця — 73 500 000 000 000 000 000 000 т. На скільки тон маса Землі перевищує масу Місяця?

491. На території Києво-Печерської лаври розташовано Музей мікромініатюр знаного в усьому світі українського майстра Миколи Сядристого. Тут експонуються: гілочка троянди, що має товщину 0,05 мм, фігурка чоловічка завтовшки 0,005 мм, найменша у світі книжка «Кобзар» Т. Шевченка розміром $0,6 \text{ мм}^2$ (товщина букв у середньому 0,0035 мм), найменший у світі діючий електромотор, об'єм якого $1/20 \text{ мм}^3$. Запиши подані вище числові дані в стандартному вигляді. Подай кожне з них у системі СІ.



Мікромініатюра
Миколи
Сядристого

492. Вирази:

- а) $2,6 \cdot 10^3$ т у грамах; б) $4,75 \cdot 10^{12}$ см у метрах;
в) $1,44 \cdot 10^9$ г у тоннах; г) $9,6 \cdot 10^5$ см у кілометрах;
г) $3,4 \cdot 10^{-8}$ т у грамах; д) $3,2 \cdot 10^8 \text{ м}^2$ у гектарах.

493. Вирази: а) $2,5 \cdot 10^3 \text{ м}^2$ у см^2 і км^2 ; б) $3,7 \cdot 10^2 \text{ м}^3$ у см^3 і км^3 .

Виконай дії і результати запиши у стандартному вигляді (494, 495).

494. а) $8 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^5$; б) $15 \cdot 10^{-8} - 8 \cdot 10^{-8}$;
в) $(2 \cdot 10^7) \cdot 30$; г) $(8 \cdot 10^{-9}) : 400$.

495. а) $7 \cdot 10^{12} + 6 \cdot 10^{12}$; б) $17 \cdot 10^{-5} - 3 \cdot 10^{-5}$;
в) $(5 \cdot 10^8) \cdot 20$; г) $(6 \cdot 10^{-8}) : 200$.

496. Знайди добуток чисел $5 \cdot 10^6$ і $8 \cdot 10^9$, а також порядок кожного множника та добутку.

497. Знайди квадрат і куб числа. а) $4 \cdot 10^{-12}$; б) $1,3 \cdot 10^{-6}$.

498. Швидкість світла становить $3 \cdot 10^5 \text{ км/с}$. Яку відстань світло проходить за: а) 5 с; б) за 1 год?

499. Швидкість світла становить $300\,000 \text{ км/с}$. Яку відстань світло проходить за: а) 3 с; б) за 20 хв?

500. У таблиці подано маси і радіуси семи планет Сонячної системи.



Планета	m , кг	R , м
Меркурій	$3,26 \cdot 10^{23}$	$2,42 \cdot 10^6$
Венера	$4,88 \cdot 10^{24}$	$6,10 \cdot 10^6$
Марс	$6,43 \cdot 10^{23}$	$3,38 \cdot 10^6$
Юпітер	$1,90 \cdot 10^{27}$	$7,13 \cdot 10^7$
Сатурн	$5,69 \cdot 10^{26}$	$6,04 \cdot 10^7$
Уран	$8,69 \cdot 10^{25}$	$2,38 \cdot 10^7$
Нептун	$1,04 \cdot 10^{26}$	$2,22 \cdot 10^7$

За даними таблиці:

- а) вирази діаметри планет у кілометрах;
- б) знайди маси планет у тоннах;
- в) перелічи планети в порядку зростання їх мас;
- г) обчисли, у скільки разів маса Нептуна більша за масу Меркурія;
- г) порівняй радіуси Урана і Марса. Який із них більший? Обчисли, на скільки метрів;
- д) порівняй радіуси і маси Урана та Нептуна. Зроби висновок.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



Виконай дії над числами, записаними в стандартному вигляді (501, 502).

501. а) $(2,8 \cdot 10^5) \cdot (2,5 \cdot 10^{-7})$; б) $(5,7 \cdot 10^4) : (3,8 \cdot 10^{-3})$;
 в) $6,2 \cdot 10^{-2} + 4,8 \cdot 10^{-2}$; г) $5,1 \cdot 10^5 - 2,9 \cdot 10^6$.
502. а) $(5,2 \cdot 10^9) \cdot (5 \cdot 10^{-2})$; б) $8,4 \cdot 10^6 + 5,6 \cdot 10^6$;
 в) $(9,6 \cdot 10^{-12}) : (3,2 \cdot 10^{-16})$; г) $9,5 \cdot 10^{-4} - 8,6 \cdot 10^{-5}$.

Знайди суму, різницю, добуток і частку чисел (503, 504).

503. а) $1,8 \cdot 10^4$ і $6 \cdot 10^3$; б) $8 \cdot 10^{-5}$ і $4 \cdot 10^{-6}$.
504. а) $6,5 \cdot 10^7$ і $5 \cdot 10^6$; б) $3,2 \cdot 10^{-5}$ і $4 \cdot 10^{-4}$.
505. Знаючи наближені значення $x \approx 3,7 \cdot 10^{11}$ і $y \approx 8,5 \cdot 10^{10}$, обчисли:
 а) xy ; б) $x : y$; в) $x + y$; г) $x - y$.
506. Округли число до десятків і одержаний результат запиши у стандартному вигляді.
 а) 1427; б) 155,678; в) 54,23; г) 4911,2.
507. Округли число до одиниць і одержаний результат запиши у стандартному вигляді.
 а) 157,415; б) 8901,5; в) 18,9; г) 315,5.

Порівняй числа (508, 509).

508. а) $4,2 \cdot 10^6$ і $3,95 \cdot 10^6$; б) $2,1 \cdot 10^{-5}$ і $2 \cdot 10^{-5}$;
 в) $5,8 \cdot 10^9$ і $7,5 \cdot 10^8$; г) $7,3 \cdot 10^{-7}$ і $6,4 \cdot 10^{-6}$.
509. а) $6,8 \cdot 10^{13}$ і $8,8 \cdot 10^{13}$; б) $3,7 \cdot 10^{-8}$ і $2,7 \cdot 10^{-8}$;
 в) $2,26 \cdot 10^{20}$ і $8,12 \cdot 10^{19}$; г) $4,71 \cdot 10^{-12}$ і $5 \cdot 10^{-13}$.

510. Порядок числа a дорівнює -12 . Який порядок числа:

- а) $1000a$; б) $0,0001a$; в) $a \cdot 10^{15}$; г) $\frac{a}{10^{-20}}$?

511. Порядок числа a дорівнює 8. Який порядок числа:

- а) $100a$; б) $0,000001a$; в) $a \cdot 10^{12}$; г) $\frac{a}{10^{12}}$?

-

Числа «ліліпути» і числа «велетні»

«Ліліпути»	«Велетні»
0,000000000028 м — діаметр молекули води	299 792 458 м/с — швидкість світла у вакуумі
0,0000000006 м — товщина плівки мильної бульбашки	696 000 000 м — радіус Сонця
0,00000375 м — радіус еритроцита	510 083 000 км ² — площа поверхні Землі
0,000000000000000000017 мг — маса атома Гідрогену	384 400 000 м — відстань від Землі до Місяця
0,000000000001 с — час існування атома надважкого Гідрогену	149 600 000 000 м — відстань від Землі до Сонця

За даними таблиці:

- а) запиши наведені значення величин у стандартному вигляді;

- б) округли значення швидкості світла у вакуумі так, щоб воно мало

- в) порівняй (приблизно) радіус Сонця і відстань від Землі до Місяця;

- г) обчисли, на скільки порядків відстань від Землі до Сонця більша

- г) обчисли, на скільки порядків діаметр еритроцита більший (чи

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



518. Швидкість світла $v = 3 \cdot 10^8$ м/с. Яку відстань воно проходить за 1 рік? За скільки секунд світло проходить 10 км?
519. Порядок числа a дорівнює 5, а порядок числа c дорівнює -6 . Яким може бути порядок значення виразу:
а) ac ; б) $1000000c + a$; в) $0,0000001a + c$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



520. Знайди добуток і частку чисел, сума і різниця яких дорівнюють: а) 1,5 і 0,5; б) a і c .
521. Розв'яжи рівняння.
а) $|2x - 1| = 5$; б) $|6 - x| = 2$.
522. Подай у вигляді многочлена.
а) $(xn + 1)^2$; б) $(a^2m - 1)^2$; в) $(an + am)^2$.
523. Біоетанол використовують для створення біопалива. З одного гектара цукрових буряків урожайністю 60 т/га можна отримати 4,3 т біоетанолу. Якою має бути врожайність буряків, щоб з одного гектара можна було одержати 5 т біоетанолу?

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу пояснити, що таке стандартний вигляд числа.

$$a \cdot 10^n, 1 \leq a < 10, n — \text{ціле}$$

- ✓ Умію записувати числа в стандартному вигляді.

$$273 = 2,73 \cdot 10^2 \quad 0,0003 = 3 \cdot 10^{-4}$$

- ✓ Умію розв'язувати вправи, що передбачають запис числа у стандартному вигляді.
- ✓ Розумію, що стандартний вигляд числа використовують для запису дуже малих і великих чисел.
- ✓ Зможу використовувати ці знання на уроках фізики, хімії, географії та під час опрацювання різних відомостей.

«Алгебру можна розглядати як мову особливої властивості, якій притаманні певні ідеї і умовні для їх зображень знаки».

М. В. Остроградський

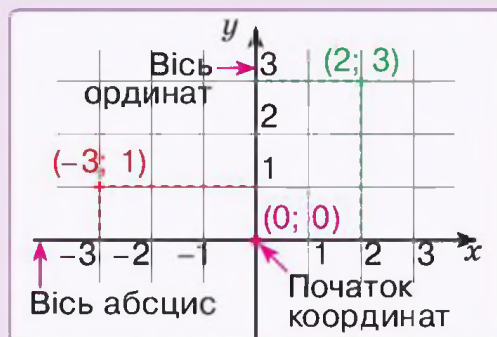
ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке система координат і координати точки;
- що таке функція;
- що таке область визначення і область значень функції;
- як задають функції;
- що таке графік функції;
- яку функцію називають:

лінійною $y = kx + b$

прямою пропорційністю $y = kx$



§ 11. Функція $y = \frac{k}{x}$

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- обернена пропорційність — *inversely proportional function*
- гіпербола — *hyperbole*

Функція — це відповідність між двома змінними, при якій кожному значенню однієї змінної відповідає єдине значення другої.

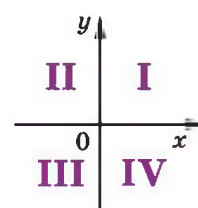
Осі координат поділяють координатну площину на чотири координатні кути, їх називають також координатними чвертями, або квадрантами, і нумерують (мал. 11.1).

Якщо при сталій відстані швидкість руху зменшити у 2 рази, то час руху збільшиться у 2 рази. Таку відповідність називають **оберненою пропорційністю**. У загальному випадку при сталій відстані залежність між швидкістю і

часом можна задати формулою $t = \frac{s}{v}$.

Розглянемо у загальному вигляді функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$, де k — довільне дійсне число, відмінне від нуля; аргумент x може набувати не тільки додатних, а й від'ємних значень.

Розглянемо функцію $y = \frac{6}{x}$. Область її визначення — множина всіх чисел, окрім $x = 0$ (бо на 0 ділити не можна). Складемо таблицю значень цієї функції для кількох значень аргументу.

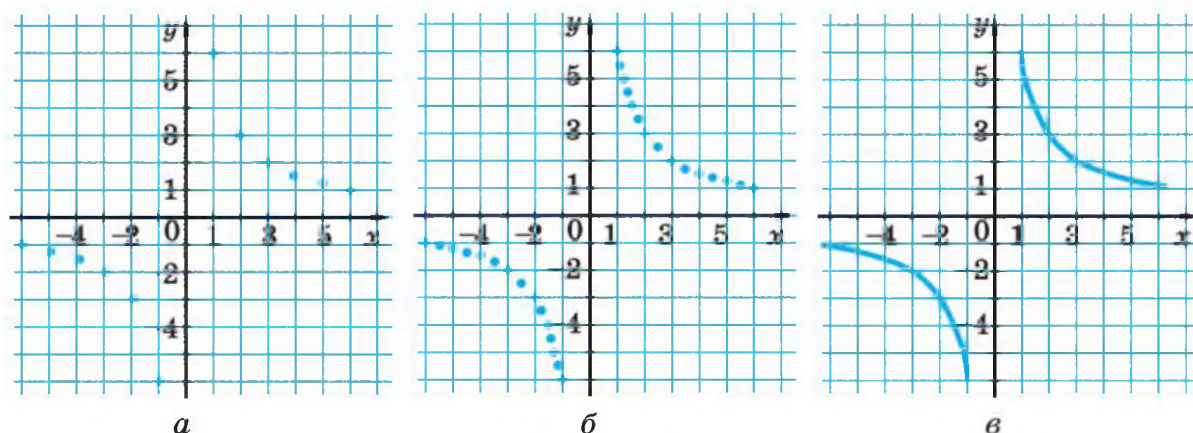


Мал. 11.1

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-1	-1,2	-1,5	-2	-3	-6	—	6	3	2	1,5	1,2	1

Позначимо на мал. 11.2, *а* точки, координати яких наведено в таблиці. Коли б на цій самій координатній площині позначили більше точок, координати яких задовольняють рівність $y = \frac{6}{x}$, вони розмістилися б, як показано на малюнку 11.2, *б*. Якщо для кожного значення x , крім $x = 0$, за формулою $y = \frac{6}{x}$ обчислити відповідне значення y і нанести всі точки з одержаними координатами на координатну площину, матимемо графік даної функції (мал. 11.2, *в*). Таку лінію називають **гіперболою**. Гіпербола складається з двох віток.

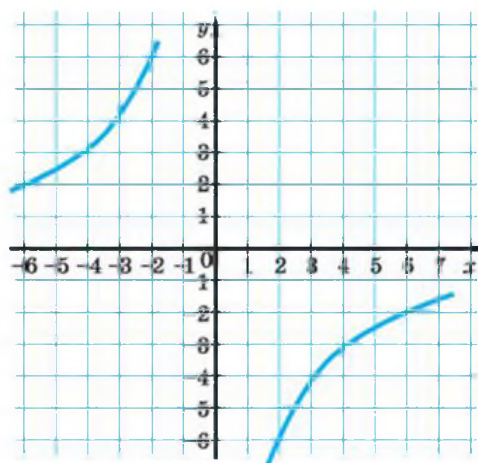
Графік функції $y = \frac{6}{x}$ — гіпербола, симетрична відносно початку координат. Її вітки розміщено в I і III координатних чвертях.



Мал. 11.2

Якщо таким способом побудувати графік функції $y = \frac{-12}{x}$, дістанемо також гіперболу; тільки її вітки розміщені в II і IV координатних чвертях (мал. 11.3).

Графік кожної функції $y = \frac{k}{x}$, де k — відмінне від нуля дане число, — це гіпербола.



Мал. 11.3

Якщо $k > 0$, вітки такої гіперболи розміщено в I і III координатних чвертях, якщо $k < 0$, — у II і IV.

Вітки гіперболи наближаються до осей координат, але ніколи їх не перетинають. Чому?

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$ для різних значень k можна визначити за графіками, наведеними, наприклад, на малюнках 11.2, в і 11.3. Подамо їх у вигляді таблиці.

Властивості функції	Вид функції	
	$y = \frac{k}{x} (k > 0)$	$y = \frac{k}{x} (k < 0)$
Область визначення	Усі числа, крім $x = 0$	Усі числа, крім $x = 0$
Область значень	Усі числа, крім $y = 0$	Усі числа, крім $y = 0$
Додатні значення	$x > 0$	$x < 0$
Від'ємні значення	$x < 0$	$x > 0$
Проміжки спадання	$x < 0$ і $x > 0$	—
Проміжки зростання	—	$x < 0$ і $x > 0$

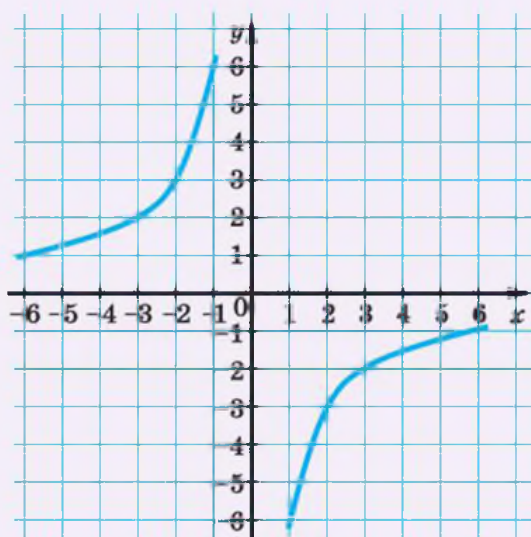
Використовуючи степінь з від'ємним показником, функцію $y = \frac{k}{x}$ можна записати так: $y = kx^{-1}$. Іноді її записують і у вигляді: $yx = k$.

Приклад. Чи є оберненою пропорційністю залежність, задана рівністю: а) $y = \frac{k}{|x|}$; б) $y = \frac{k}{x^2}$?

Відповідь. а) Ні; б) ні.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Функцію, задану формулою $y = \frac{k}{x}$, часто називають *оберненою пропорційністю* (на відміну від функції $y = kx$, яку називають *прямою пропорційністю*). Раніше оберненою пропорційністю ти називав / називала відповідність, при якій зі збільшенням однієї змінної в кілька разів значення другої зменшувалися в стільки само разів. Так буває тільки у випадку, коли k і x — додатні числа. Якщо у функції $y = \frac{k}{x}$ число k від'ємне, то зі збільшенням значень x у кілька разів значення y також збільшуються у стільки само разів. Це видно з мал. 11.4.



Мал. 11.4



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфу (Тема. Раціональні вирази та рівняння. Урок 3).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що називають областю визначення функції? Яка область визначення функції $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$?
2. Що називають областю значень функції? Яка область значень функції $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$?
3. Як називають фігуру, яка є графіком оберненої пропорційності?
4. У яких чвертях розміщений графік функції $y = \frac{k}{x}$, якщо:
 - а) $k > 0$; б) $k < 0$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Функцію задано формулою $y = \frac{k}{x}$. Знайди значення k ,

якщо графік функції проходить через точку $A(5; 2)$.

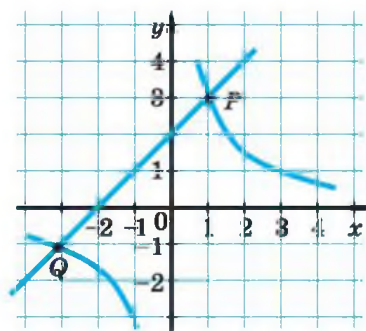
Розв'язання. Підставимо значення $x = 5$ і $y = 2$ у формулу, якою задано функцію. Одержимо $2 = \frac{k}{5}$.

Отже, $k = 10$.

2. Розв'яжи графічно рівняння $x + 2 = \frac{3}{x}$.

Розв'язання. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = x + 2$

і $y = \frac{3}{x}$ (мал. 11.5).



Мал. 11.5

Ці графіки перетинаються в точках P і Q , абсциси яких дорівнюють 1 і -3 . Перевіряємо, чи це точне значення, чи наближене:

$$1 + 2 = \frac{3}{1}, \quad 3 = 3. \quad -3 + 2 = \frac{3}{-3}, \quad -1 = -1.$$

Відповідь. $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

ВИКОНАЙ УСНО

524. Які із заданих функцій є прямою пропорційністю?

А $y = 2x$

Б $y = -\frac{2}{3}x$

В $y = 2$

Г $y = 3x - 1$



525. Які із заданих функцій є оберненою пропорційністю?

А $y = \frac{6}{x}$

Б $y = \frac{x}{6}$

В $y = 3x^{-1}$

Г $y = -3x$

526. Чи правильно, що при рівномірному русі час, який витрачає поїзд на проїзд 10 км, обернено пропорційний швидкості?

527. Укажи область визначення функції.

а) $y = \frac{5}{x-2}$;

б) $y = \frac{5}{x} - 2$;

в) $y = \frac{1}{x^2 - 4}$;

г) $y = \frac{x-3}{x^2 - 9}$.

528. У яких чвертях координатної площини розміщений графік функції?

а) $y = \frac{12}{x}$;

б) $y = -\frac{8}{x}$;

в) $y = x^{-1}$.

529. Чи перетинає графік функції $y = \frac{2}{x}$ вісь абсцис; вісь ординат?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



530. Сторони прямокутника дорівнюють x і y , а площа — 60 см^2 . Вирази формулою залежність y від x .

531. Відстань 6 км між двома містечками велосипедистка пододала за 2 год. Як зміниться час перебування в дорозі цієї велосипедистки, якщо її швидкість: а) збільшити вдвічі; б) зменшити вдвічі? Вирази формулою залежність v від t .

532. Відомо, що сила струму I в провіднику пропорційна напрузі на кінцях провідника U і обернено пропорційна його опорі R . Запиши цю залежність формулою.

533. Функцію задано формулою $y = \frac{16}{x}$. Заповни таблицю.

x	-32		-2	-0,5				8
y		-1			16	8	4	

534. Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x}$. Заповни таблицю.

x							
y	1	2	4	8	16	32	64

535. Склади таблицю значень функції $y = \frac{-12}{x}$ для цілих значень x , якщо $-6 \leq x \leq 6$.

536. Склади таблицю значень функції $y = \frac{12}{x}$ для натуральних значень x , менших від 13. Запиши кілька пропорцій із чисел цієї таблиці.

537. Функцію задано формулою $y = \frac{20}{x}$. Знайди:

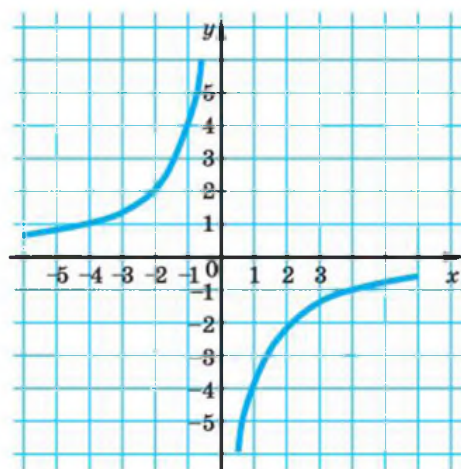
- а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -100 ; -10 ; $0,1$; 2 ;
- б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює -10 ; -20 ; 2 ; 40 ; 100 .

538. The inverse proportionality is given by the formula $y = -\frac{10}{x}$. Find:

- а) the value of the function if the value of the argument is -1000 ; -100 ; $0,1$; $0,02$; 50 ;
- б) the value of the argument when the value of the function is -100 ; -40 ; 2 ; 100 ; 200 .

539. На малюнку 11.6 побудовано графік оберненої пропорційності, заданої формулою $y = -\frac{4}{x}$. Знайди за графіком:

- а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -4 ; -1 ; 2 ; 4 ;
- б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює -4 ; -2 ; 1 .



Мал. 11.6

540. Побудуй графік функції $y = \frac{6}{x}$.

Користуючись графіком, знайди:

- а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -6 ; -3 ; 1 ; 2 ;
- б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює -2 ; -1 ; 3 .

541. Які з точок $A(-8; 1)$, $B(16; 0,5)$, $D(2; -4)$, $E(-32; 0,25)$, $F(80; 0,1)$, $K(-0,08; 1000)$ належать графіку функції $y = -\frac{8}{x}$?

542. Чи проходить графік функції $y = \frac{24}{x}$ через точки $A(-6; -4)$,

$B(-12; 2)$, $C(8; 3)$, $K(-0,4; 60)$, $E(-0,8; -30)$?

Побудуй графік функції (543, 544).

543. а) $y = \frac{12}{x}$; б) $y = -\frac{2}{x}$; в) $y = \frac{9}{x}$; г) $y = -\frac{1}{x}$.

544. а) $y = \frac{2}{x}$; б) $y = -\frac{12}{x}$; в) $y = \frac{4}{x}$; г) $y = -\frac{9}{x}$.

Знайди область визначення функції (545, 546).

545. а) $y = \frac{0,5}{x}$; б) $y = \frac{3}{x+1}$; в) $y = -\frac{5}{x-5}$; г) $y = \frac{1}{x} - 2$.

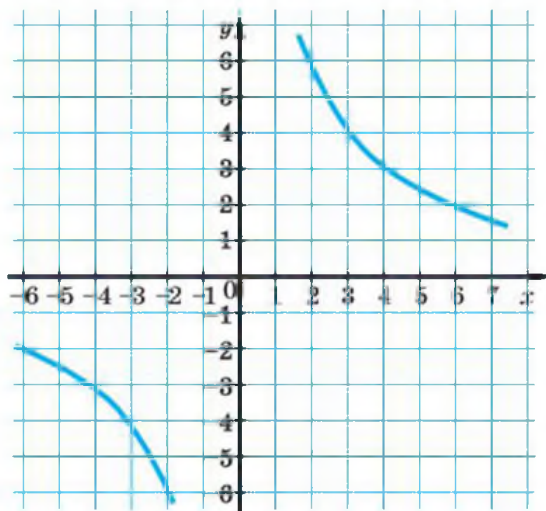
546. а) $y = \frac{8}{x}$; б) $y = \frac{16}{x+4}$; в) $y = \frac{1}{x-2}$; г) $y = 2 - \frac{1}{x}$.

547. Гра. Один з учнів / одна з учениць записує формулу оберненої пропорційності, а інший / інша має знайти її область визначення. Потім поміняйтеся ролями.

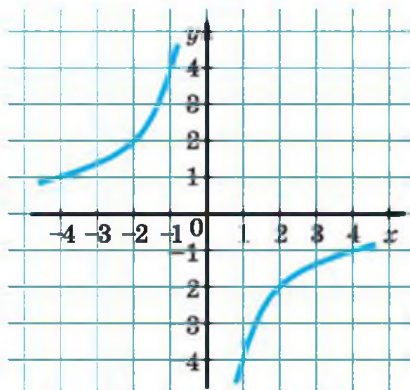
548. При якому значенні k графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:
а) $A(1; 1)$; б) $B(-2; 3)$; в) $C(1; -3)$?

549. При якому значенні k графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку:
а) $A(1; 3)$; б) $B(-3; 5)$; в) $C(4; -2)$?

550. Графік якої функції зображено на малюнках 11.7 та 11.8?



Мал. 11.7



Мал. 11.8

551. Три трактори мають зорати поле за 48 год. За скільки годин зорють це поле чотири таких самих трактори?

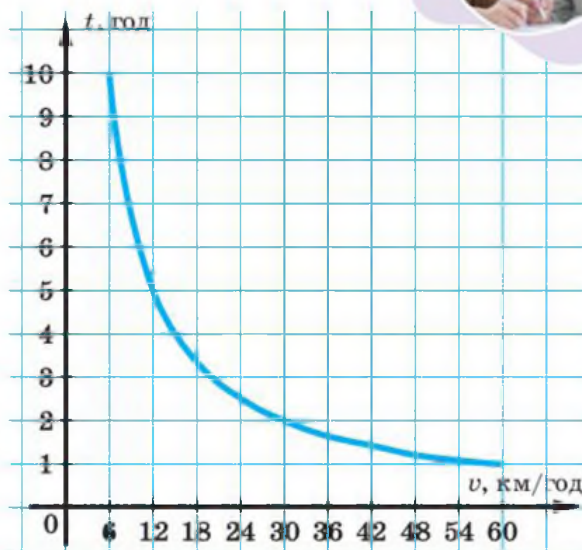
552. Двоє робітників виконують деяке замовлення за 12 днів. За скільки днів виконають це замовлення троє робітників, якщо продуктивність праці не зміниться?



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



553. На малюнку 11.9 зображено графік залежності часу, витраченого на шлях з пункту A в пункт B , від швидкості руху. Яка відстань між A і B ? Скільки часу потрібно, щоб прибути з A до B , рухаючись зі швидкістю 6 км/год; 30 км/год; 60 км/год? З якою швидкістю треба рухатися, щоб дістатися з A до B за 1 год; 5 год; 10 год?



Мал. 11.9

554. Запиши формулою залежність тиску сталої сили F на площу поверхні S . Чи є ця залежність оберненою пропорційністю?

555.  Зі збільшенням висоти над рівнем моря зменшуються атмосферний тиск і температура повітря. Чи кожна з цих залежностей є оберненою пропорційністю? Спробуй знайти і записати відповідні формули.

556. Мідний і алюмінієвий бруски мають однакову масу. Який із них має більший об'єм і в скільки разів? Густина міді — 8,6 г/см³, алюмінію — 2,6 г/см³.



557. Побудуй в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{6}{x}$ і $y = 5 - x$.

За допомогою цих графіків назви корені рівняння $\frac{6}{x} = 5 - x$.

Розв'яжи графічно рівняння (558, 559).

558. а) $\frac{8}{x} = 2x$; б) $\frac{12}{x} = x - 4$; в) $-\frac{4}{x} = x - 4$.

559. а) $\frac{2}{x} = x + 1$; б) $-\frac{8}{x} = x - 6$; в) $\frac{10}{x} = 7 - x$.

Розв'яжи графічно систему рівнянь (560, 561).

560. а) $\begin{cases} xy = -2, \\ y = -x - 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 6, \\ x + y = 5. \end{cases}$

561. а) $\begin{cases} xy = 4, \\ y = x + 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy = 6, \\ y = 6x. \end{cases}$

562. Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A(2; 1)$. Чи проходить



він через точку: $B(1; 2)$, $C(-2; -1)$, $K(-1; -2)$? Узагальни задачу.

563. Графік функції $y = \frac{k}{x}$ проходить через точку $A(-3; 3)$.

Покажи, що він проходить і через точку $B(3; -3)$.

При яких значеннях k і b гіпербола $y = \frac{k}{x}$ і пряма $y = kx + b$ про-

ходять через точку (**564, 565**):

564. а) $K(3; 4)$; б) $L(4; 6)$?

565. а) $M(-1; -8)$; б) $N(2; -2)$?

Побудуй графік функції (**566, 567**).

566. а) $y = \frac{2}{|x|}$; б) $y = \frac{6}{|x|}$.

567. а) $y = \frac{8}{|x|}$; б) $y = -\frac{4}{|x|}$.

«Математику не можна вчити, спостерігаючи, як це робить сусід».

А. Нівен

Знайди область визначення функції і побудуй її графік (**568, 569**).

568. а) $y = \frac{32}{(2-x)^2 - (2+x)^2}$;

б) $y = \frac{16+7x}{x^2+4x} - \frac{3}{x+4}$.

569. а) $y = \frac{48}{(x-1)^2 - (x+1)^2}$;

б) $y = \frac{3x(x+2) - 3x^2 - 18}{x(x-3)}$.

Побудуй графік функції, заданої формулою (**570, 571**).

570. а) $y = \begin{cases} -x-4, & x < -6, \\ -\frac{12}{x}, & -6 \leq x < -2, \\ 6, & x \geq -2; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -\frac{8}{x}, & x < -2, \\ 4, & -2 \leq x < 2, \\ \frac{8}{x}, & x \geq 2. \end{cases}$

571. а) $y = \begin{cases} \frac{6}{x}, & x < -2, \\ 1,5x, & -2 \leq x < 2, \\ \frac{6}{x}, & x \geq 2; \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} -x-3, & x < -5, \\ -\frac{10}{x}, & -5 \leq x < 0, \\ \frac{10}{x}, & 0 < x \leq 5, \\ x-3, & x \geq 5. \end{cases}$

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



572. Побудуй графік функції $y = \frac{4}{x^2}$. Перевір розв'язок за допомогою Desmos Calculator.

573. Вкажи значення a , за якого система рівнянь $\begin{cases} xy = 6, \\ y = ax + 2 \end{cases}$ має:

- а) один розв'язок; б) два розв'язки;
в) не має жодного розв'язку.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



574. Обчисли і порівняй:

- а) суму кубів чисел 3 і 2 та куб їх суми;
б) різницю кубів чисел 5 і 2 та куб їх різниці.

575. Спрости вираз і знайди його значення.

- а) $-4x(x^2 - x - 3) + 2x(2x^2 + x - 5)$, якщо $x = -3$;
б) $3a(4a^2 - 3a) - 6(4 + 2a^3) - 5a(2 - 5a)$, якщо $a = \frac{1}{2}$.

576. Знайди середнє арифметичне чисел 2, 4 і x .

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що графіком функції $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) є гіпербола, симетрична відносно початку координат і розташована:
у I і III координатних чвертях, якщо $k > 0$;
у II і IV координатних чвертях, якщо $k < 0$.
- ✓ Умію будувати графік функції $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$).
- ✓ Умію знаходити область визначення функції $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$).
- ✓ Умію описувати властивості функції $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) за графіком.
- ✓ Розумію, чому функцію $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$) називають оберненою пропорційністю.

Перейди за посиланнями та

- підсумуй головне в розділі <https://vse.ee/craq>
- ознайомся з історичними відомостями <https://vse.ee/crat>



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. Обчисли $2^{-3} \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$.
2. Запиши число у стандартному вигляді та вкажи порядок числа.
а) 48 000 000 000; б) 0,000000021.
3. Знайди значення виразу. а) $5^{-3} \cdot 5^5$; б) $\frac{3^2 \cdot 9^{-6}}{27^{-3}}$.
4. Розв'яжи графічно рівняння $\frac{4}{x} = x - 3$.

ВАРІАНТ II

1. Обчисли $2^{-4} \cdot \left(\frac{8}{19}\right)^0 + \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$.
2. Запиши число у стандартному вигляді та вкажи порядок числа.
а) 390 000 000; б) 0,00000000042.
3. Знайди значення виразу. а) $7^{-8} : 7^{-6}$; б) $\frac{4^{-4} \cdot 64^{-2}}{16^{-4}}$.
4. Розв'яжи графічно рівняння $\frac{8}{x} = 9 - x$.

ВАРІАНТ III

1. Обчисли $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \cdot (0,245)^0 + 4^{-2}$.
2. Запиши число у стандартному вигляді та вкажи порядок числа.
а) 71 000 000 000 000; б) 0,0000000043.
3. Знайди значення виразу. а) $6^{-13} \cdot 6^{15}$; б) $\frac{2^6 \cdot 4^{-5}}{16^{-2}}$.
4. Розв'яжи графічно рівняння $-\frac{12}{x} = x - 8$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 3



1. Дріб $\frac{1}{16}$ можна записати у вигляді:
 А 2^4 Б 2^6 В 2^{-4} Г 2^{-6}
2. Значення виразу $(3,75 - 5,75)^{-2}$ дорівнює:
 А 4 Б -4 В 0,5 Г 0,25
3. Подай у вигляді дробу вираз $4a^{-2}c^{-3}$.
 А $\frac{1}{4a^2c^3}$ Б $\frac{4}{a^2c^3}$ В $\left(\frac{2}{ac}\right)^2$ Г $\frac{4}{a^{-2}c^{-3}}$
4. Порядок числа $3,07 \cdot 10^5$ дорівнює:
 А 3 Б 10 В 7 Г 5
5. Яке з чисел записане в стандартному вигляді?
 А $255 \cdot 10^2$ Б $0,1 \cdot 10^5$ В $3,5 \cdot 10^{21}$ Г 35 700
6. Скільки коренів має рівняння $x^{-2} = 0$?
 А один Б два В жодного Г безліч
7. Вираз $a^{-1} + b^{-1}$ тотожно дорівнює виразу:
 А $a + b$ Б $-a - b$ В $\frac{a+b}{ab}$ Г $\frac{ab}{a+b}$
8. Подай вираз $(a^{-5})^{-3} \cdot a^{-17} : a^{-8}$ у вигляді степеня.
 А a^6 Б a^{-24} В a^{-17} Г a^{-10}
9. Графіком якої з функцій є гіпербола?
 А $y = 5$ Б $y = 5x$ В $y = \frac{5}{x}$ Г $y = \frac{x}{5}$
10. Графік функції $y = \frac{2}{x}$ проходить через точку:
 А (0; 2) Б (1; 2) В (2; 2) Г (3; 2)



ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ № 3

1. Спрости вираз $\left(\frac{1}{3}a^2\right)^{-2} : a^{-7}$.

А $9a^3$

Б $\frac{1}{9}a^3$

В $9a^{-11}$

Г $\frac{1}{9}a^{-7}$

2. Обчисли значення виразу $\left(1\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

А 37

Б $1\frac{1}{36}$

В $1\frac{13}{36}$

Г $\frac{36}{49}$

3. 0,00000000028 м — діаметр молекули води. Знайди радіус цієї молекули. Відповідь подай у стандартному вигляді.

А $14 \cdot 10^9$ м

Б $14 \cdot 10^{-11}$ м

В $1,4 \cdot 10^{-10}$ м

Г $0,14 \cdot 10^{-9}$ м

4. Установи відповідність між функцією, заданою умовами (1–3), та точкою (А–Д), через яку проходить графік цієї функції.

1 $y = \frac{2}{x}$

2 $y = -\frac{5}{x}$

3 $y = \frac{6}{x}$

А (1; 5)

Б (-2; -1)

В (-6; 1)

Г (-2; 2,5)

Д (-1; -6)

5. Швидкість світла становить $3 \cdot 10^5$ км/с. Яку відстань світло проходить за: а) 7 с; б) 5 хв?

6. Знайди значення виразу.

а) $\frac{3^5 \cdot 3^{-3}}{5^0}$;

б) $\frac{4^{-6} \cdot 16^{-5}}{8^{-10}}$;

в) $\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)^{-2} : \left(\frac{5}{12}\right)^{-2} - \left(3\frac{1}{16}\right)^{-1}$;

г) $2,8 \cdot 10^{-12} \cdot 4,5 \cdot 10^7$.

7. Розв'яжи графічно рівняння $\frac{6}{x} = 6x$.

8. Доведи, що для всіх допустимих значень змінних значення виразу

$$\frac{a^{-5}}{a^{-2} - b^{-2}} \cdot \frac{a^{-1} - b^{-1}}{a^{-4}} + \frac{b^{-1}}{a^{-1} + b^{-1}}$$
 є сталим.

Додаткове завдання

9. Порядок числа a дорівнює -9 . Який порядок числа:

а) $10000000a$;

б) $0,001a$?

Розділ 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ І ДІЙСНІ ЧИСЛА

КРЕЙН

Марк Григорович (1907–1989) — всесвітньо відомий український математик, лауреат міжнародної премії Вольфа в галузі математики.



Раціональні числа, з якими ти ознайомився / ознайомилася в попередніх класах, — це тільки незначна частина множини чисел. На числовій прямій крім чисел раціональних є ще більше нерациональних чисел. Без засвоєння і цих чисел, без уміння виконувати дії з ними неможливо далі вивчати математику та інші прикладні науки.

§ 12 Функція $y = x^2$
Function $y = x^2$

§ 15 Квадратний корінь із добутку, дробу, степеня
Fraction, Degree, Derivative Square Root

§ 13 Квадратні корені
Square Roots

§ 16 Перетворення виразів з коренями
Expressions with Radicals Transformation

§ 14 Числові множини
Numerical Sets

§ 17 Функція $y = \sqrt{x}$
Function $y = \sqrt{x}$

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

- функції $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$ та їх властивості;
- квадратні корені та їх властивості;
- перетворення виразів з коренями.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке функція (с. 102);
- що таке область визначення і область значень функції (с. 102);
- як складають таблицю значень функції (с. 103);
- як будують графік функції (с. 103);
- як за графіком визначають властивості функції;
- як розв'язують рівняння графічно.

§ 12. Функція $y = x^2$

КЛЮЧОВІ СЛОВА

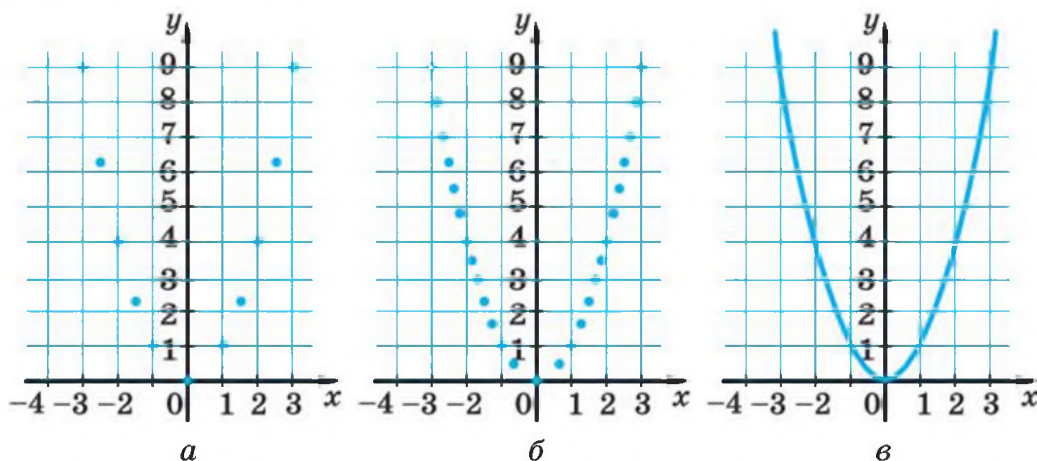
- квадратична функція — *quadratic function*
- парабола — *parabola*

Розглянемо функцію, задану формулою $y = x^2$. Область її визначення — множина всіх чисел.

Складемо таблицю значень функції для деяких значень аргументу x :

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	0	1	1,5	2	2,5	3
y	9	6,25	4	2,25	1	0	1	2,25	4	6,25	9

Позначимо точки (мал. 12.1, а), координати яких подано в цій таблиці. Якщо на координатній площині позначити більше точок з координатами x і y , що задовольняють формулу $y = x^2$, вони розмістяться так, як показано на малюнку 12.1, б.



Мал. 12.1

Якщо для кожного значення x за формулою $y = x^2$ обчислити відповідне значення y і позначити точки з такими координатами на коорди-

натній площині, одержимо неперервну криву лінію, яку називають **параболою** (мал. 12.1, в). Парабола має дві нескінченні вітки, що плавно сходяться в одній точці — **вершині параболі**.

Для функції $y = x^2$ вершиною параболі є точка $(0; 0)$. Тобто графік функції $y = x^2$ проходить через початок координат.

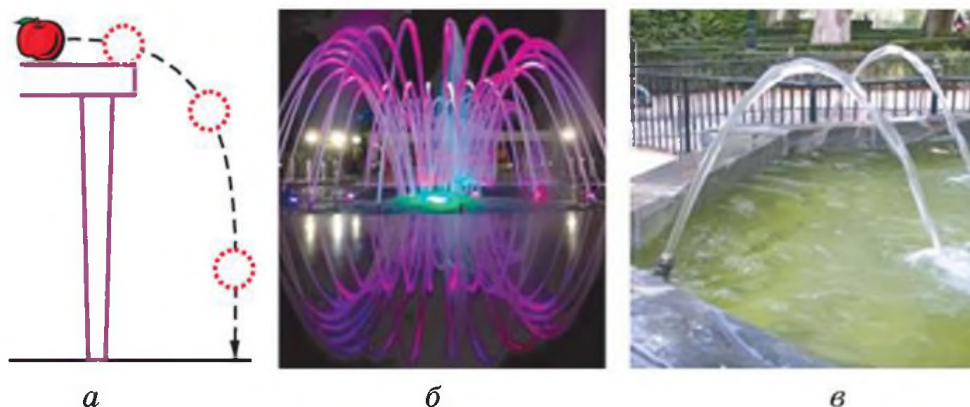
Оскільки протилежним значенням аргументу відповідають рівні значення функції, то її графік симетричний відносно осі y .

Побудований графік дає змогу наочно виявити властивості функції $y = x^2$.

Властивості функції $y = x^2$

Область визначення	Усі числа
Область значень	Усі невід'ємні числа ($y \geq 0$)
Додатні значення	$x \neq 0$
Від'ємні значення	—
Проміжки спадання	$x < 0$
Проміжки зростання	$x > 0$

З кривими у вигляді парабол мають справу фізики, астрономи, архітектори та інші фахівці. Графічне зображення траєкторії струменя води або кинутого (не вертикально) предмета — це параболі (мал. 12.2), арки мостів і споруд часто мають форму парабол. У багатьох прожекторів і різних приймачів радіохвиль осьові перерізи також мають параболічну форму.

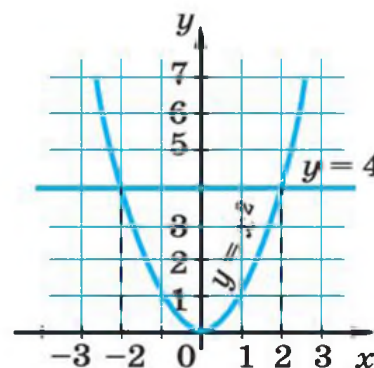


Мал. 12.2

Графіки функцій дають змогу розв'язувати рівняння, які іншими способами розв'язувати або надто важко, або й взагалі не можливо.

Скільки розв'язків має рівняння $x^2 = 4$? Пряма, рівняння якої $y = 4$, перетинає графік функції $y = x^2$ у двох точках (мал. 12.3). Їх абсциси $x = 2$ і $x = -2$ — розв'язки рівняння.

А скільки розв'язків має рівняння $x^2 = 2$? Спробуй дати відповідь на це запитання самостійно.



Мал. 12.3

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

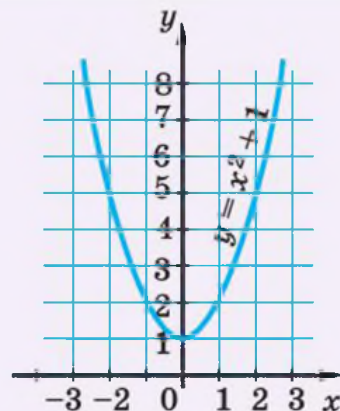
Функція $y = x^2$ — найпростіша із квадратичних функцій. Приклади інших квадратичних функцій:

$$y = x^2 + 1, y = x^2 - 3, y = -x^2.$$

Кожне значення функції $y = x^2 + 1$ на одиницю більше за відповідне значення функції $y = x^2$. Тому графік функції — така сама парабола, тільки зміщена вгору на 1 одиницю (мал. 12.4).

Спробуй побудувати графіки функцій:

$$y = x^2 - 1, y = -x^2, y = 2x^2.$$



Мал. 12.4



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Найпростіші функції. Урок 2).

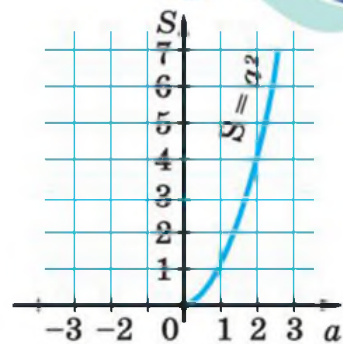
ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Як називають лінію, що є графіком функції $y = x^2$?
2. Яка область визначення та область значень функції $y = x^2$?
3. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через початок координат?
4. На яких проміжках функція $y = x^2$ зростає, на яких — спадає?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Побудуй графік залежності площі квадрата S від довжини його сторони a .

Розв'язання. Якщо сторона квадрата a , то його площа $S = a^2$. Це та сама функція $y = x^2$, тільки позначена буквами a і S . Тому такими самими буквами слід позначити і координатні осі. Оскільки довжина сторони квадрата може набувати тільки додатних значень, то область визначення розглядуваної функції — множина додатних чисел. Її графік — на малюнку 12.5.



Мал. 12.5

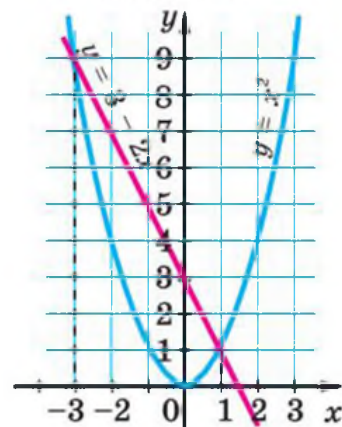
2. Розв'яжи графічно рівняння $x^2 + 2x - 3 = 0$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $x^2 = 3 - 2x$.

В одній системі координат побудуємо графіки функцій $y = x^2$ і $y = 3 - 2x$ (мал. 12.6). Перетинаються вони в точках, абсциси яких дорівнюють (можливо, наближено) 1 і -3 . Перевірка переконує, що це — точні корені.

Відповідь. $x_1 = 1, x_2 = -3$.

Мал. 12.6



ВИКОНАЙ УСНО



577. При яких значеннях аргументу значення функції $y = x^2$ дорівнює 0,16?
 А 0,4 Б 0,8 В 0,4 і -0,4 Г 0,8 і -0,8
578. Знайди значення функції $y = x^2$, якщо $x = -0,2$.
 А 0,4 Б -0,4 В -0,04 Г 0,04
579. Чи при всіх відповідних значеннях аргументу значення функцій $y = x^2$ і $y = (-x)^2$ рівні? А $y = x^2$ і $y = -x^2$? Чим різняться графіки цих функцій?
580. Чи може функція $y = x^2$ набувати від'ємних значень?
581. Як називають криві лінії, що є графіками функцій $y = x^2$ і $y = x^{-1}$?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

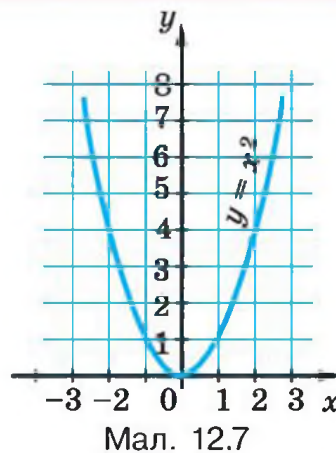


582. Заповни таблицю для функції $y = x^2$.

x	-5	-4,5	-3	-1,5	-1	0	0,5	2	2,5	3,5	4	5
y												

583. Користуючись графіком функції $y = x^2$ (мал. 12.7), знайди:

- а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: -2; 0; 1;
 б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 4; 0; 1;
 в) цілі значення аргументу, при яких значення функції — цілі числа, не більші за 7.



584. Гра. За графіком (мал. 12.7) один із учасників / одна із учасниць називає значення аргументу, а інший / інша — відповідне значення функції. Потім учасники / учасниці міняються ролями.

585. Користуючись графіком функції $y = x^2$, зображеним на малюнку 12.7, знайди: а) значення функції, якщо значення x дорівнює: -1; 2.
 б) значення x , при яких значення y дорівнює: 1; 0; 4;
 в) цілі значення x , при яких значення функції менші від 5.

586. Функцію задано формулою $y = x^2$. Знайди:

- а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 5; -8; 0,9; -2,6;
 б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 3600; 81; 1,69; 0,04.

587. Функцію задано формулою $y = x^2$. Знайди:

- а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 4; -6; 1,7; -0,8;
 б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює: 8100; 25; 1,44; 0,09.

588. Чи проходить графік функції $y = x^2$ через точки:



$A(5; 25); \quad B(-1,1; 1,21); \quad C(5; -25); \quad E\left(1\frac{1}{2}; 2\frac{1}{4}\right)?$

589. Які з точок належать графіку функції $y = x^2$?

$A(0,1; 0,01); \quad B(0,2; 0,4); \quad C(-10; 100); \quad F\left(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{9}\right).$

590. Заповни таблицю.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$							

Побудуй графік функції $y = -x^2$.

У скількох точках перетинаються графіки функцій **(591, 592)**?

591. а) $y = x^2$ і $y = x + 2$; б) $y = x^2$ і $y = 2x$.

592. а) $y = x^2$ і $y = 4x - 3$; б) $y = x^2$ і $y = -3x$.

593. Чи має розв'язки рівняння?

а) $x^2 = -\frac{1}{3}x - 1$; б) $x^2 = x - 3$; в) $\frac{4}{x} = x^2$.

Розв'яжи графічним способом рівняння **(594, 595)**.

594. а) $x^2 = x + 2$; б) $x^2 - 3x + 2 = 0$; в) $\frac{1}{x} - x^2 = 0$.

595. а) $x^2 = x + 6$; б) $x^2 + 2x - 3 = 0$; в) $x^2 = \frac{8}{x}$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

596. Розглянь картину «Ірина Володарівна» художника Артура Орльонова. Виміряй довжини сторін зображення картини. У скільки разів довжина більша за ширину? Познач ширину за x , а довжину вирази через x . Запиши формулою, як залежить площа зображення від його меншої сторони. Дізнайся більше про Ірину Володарівну та Артура Орльонова.

597. Задай формулою функцію, яка виражає залежність площі квадратної плитки від її периметра.



598. Як залежить площа S прямокутного рівнобедреного трикутника від довжини його катета a ? Заповни таблицю.

a	1	2	3	4	5	6	7	8
S								

599. Установи графічно, при яких значеннях аргументу функції $y = x^2$ і $y = 2x + 3$ набувають рівних значень.

600. Установи графічно, при яких значеннях аргументу функції $y = x^2$ і $y = 6 - x$ набувають рівних значень.

601. Дано графік функції $y = x^2$. Чи перетинає графік пряма?



- а) $y = 1$; б) $y = -1$; в) $y = 9$;
г) $y = -9$; д) $y = 100$; е) $y = -100$.

Якщо перетинає, то в якій точці?

602. Дано графік функції $y = -x^2$. Чи перетинає графік пряма?

- а) $y = 1$; б) $y = -1$; в) $y = 4$;
г) $y = -4$; д) $y = 81$; е) $y = -81$.

Якщо перетинає, то в якій точці?

603. Порівняй значення функції $y = x^2$, якщо:

- а) $x = -2,1$ і $x = 1,3$; б) $x = -2,1$ і $x = 2,1$; в) $x = -2,1$ і $x = 2,3$.

604. Compare the values of the function $y = x^2$, if:

- а) $x = -3,2$ і $x = 0,7$; б) $x = -3,2$ і $x = 3,2$; в) $x = -3,2$ і $x = 3,5$.

605. При яких цілих значеннях x значення функції $y = x^2$ менші від 10? А при яких — більші за 10 (запиши 4 таких значення)?

606. При яких цілих значеннях x значення функції $y = x^2$ менші від 8? А при яких більші за 8 (запиши 4 таких значення)?

607. Знайди значення c , при яких графіки функцій $y = x^2$ і $y = c$ перетинаються в точці з абсцисою 5. Яка ордината цієї точки? Знайди координати другої точки перетину цих графіків.

608. Знайди значення a , при яких графіки функцій $y = x^2$ і $y = a$ перетинаються в точці з абсцисою -2 . Яка ордината цієї точки? Знайди координати другої точки перетину цих графіків.

Побудуй графік функції (609, 610).

609. а) $y = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x < 0, \\ x^2, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x+6, & x < -2, \\ x^2, & -2 \leq x \leq 2, \\ 6-x, & x > 2. \end{cases}$

610. а) $y = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 3x, & x \geq 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 4, & x < -2, \\ x^2, & -2 \leq x \leq 2, \\ 8-2x, & x > 2. \end{cases}$

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



611. Розв'яжи графічно рівняння.

а) $x^2 = |x|$;

б) $x^2 = \frac{1}{|x|}$.

612. Склади і розв'яжи графічно рівняння, яке мало б:

а) один розв'язок у I чверті та один — у II чверті;

б) один розв'язок у I чверті та один — у III чверті;

в) один розв'язок у II чверті та один — у IV чверті, які були б симетричні відносно початку координат;

г) один розв'язок у I чверті та один — у III чверті, які були б симетричні відносно початку координат.



ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

613. Запиши у стандартному вигляді число.

а) 47 000 000;

б) 308 000 000;

в) 0,000000039;

г) 0,00000407;

г) $803 \cdot 10^9$;

д) $0,067 \cdot 10^7$;

е) $3,7 \cdot 100^5$;

е) $0,42 \cdot 10^{-7}$;

ж) 2000^5 .

614. Спрости вираз.

а) $2a^2 + 3 - ((a^2 - 5ab) - (7 - 3ab))$;

б) $-(1 - 6xy) + (7 + x^4 - (4xy + 6 - 2x^4))$;

в) $4a^3 + b^3 - (a^3 - 5ab + (3a^3 - (3b^3 + 4ab - a^3)))$.

615. Подай многочлен у вигляді степеня.

а) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$;

б) $8y^3 - 36y^2 + 54y - 27$.

616. При якому значенні x :

а) значення виразу $|x - 5| + 9$ найменше;

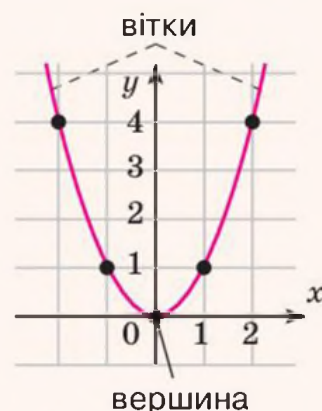
б) значення виразу $12 - |2x + 3|$ найбільше?

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що графік функції $y = x^2$ — парабола, симетрична відносно осі ординат.
- ✓ Умію будувати графік функції $y = x^2$ за точками

(0; 0); (1; 1); (2; 4); (3; 9); (-1; 1); (-2; 4); (-3; 9)

- ✓ Умію характеризувати властивості функції $y = x^2$ за її графіком.
- ✓ Умію графічно розв'язувати деякі рівняння, що містять x^2 .
- ✓ Спробую побудувати графіки функцій $y = x^2 - 1$ і $y = 2x^2$.



ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- квадрати натуральних чисел (форзац);
- степені числа 2 і 3 (форзац);
- розкладання чисел на прості множники;
- правило округлення чисел $5,231 \approx 5,2$; $17,281 \approx 17,3$;
- запис числа у стандартному вигляді $a \cdot 10^n$, $1 \leq a < 10$, n — ціле число.

§ 13. Квадратні корені

КЛЮЧОВІ СЛОВА

корінь квадратний — *square root*

Рівняння $x^2 = 9$ має два розв'язки: 3 і -3 . Говорять, що 3 і -3 — квадратні корені з числа 9.

Квадратним коренем з числа a називають число, квадрат якого дорівнює a .

Приклади. Квадратними коренями з числа:

а) 1600 є 40 і -40 , тому що $40^2 = 1600$ і $(-40)^2 = 1600$;

б) 0,49 є 0,7 і $-0,7$, тому що $0,7^2 = 0,49$ і $(-0,7)^2 = 0,49$.

Оскільки серед відомих тобі чисел немає такого, квадрат якого дорівнював би від'ємному числу, то квадратний корінь з від'ємного числа не існує.

Квадратний корінь з числа 0 дорівнює нулю. Квадратний корінь з додатного числа має два значення: одне з них додатне, інше — протилежне йому від'ємне число.

Невід'ємне значення квадратного кореня називають арифметичним значенням цього кореня, або арифметичним квадратним коренем.

Отже, арифметичним квадратним коренем з числа a називають невід'ємне число, квадрат якого дорівнює a .

Арифметичне значення квадратного кореня з числа a позначають символом $\sqrt{a}$. Знак $\sqrt{}$ називають знаком арифметичного квадратного кореня, або радикалом. Вираз, записаний під знаком кореня, називають підкореневим виразом.

Наприклад, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{1600} = 40$, $\sqrt{0,49} = 0,7$, $\sqrt{0} = 0$.

Зауваження. Символом $\sqrt{a}$ позначають тільки арифметичне значення квадратного кореня з числа a , хоч і читають його коротше: «квадратний корінь з числа a ».

Обчислення арифметичного значення квадратного кореня називають добуванням квадратного кореня.

З невеликих чисел, що є точними квадратами натуральних чисел, добувати квадратні корені бажано усно.

a	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$\sqrt{a}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Квадратні корені з більших натуральних чисел можна знаходити, користуючись таблицею квадратів (див. форзац). Наприклад, $\sqrt{5329} = 73$, $\sqrt{1000} \approx 32$.

Користуючись калькулятором, можна добувати квадратні корені з більшою точністю. Наприклад, щоб добути квадратний корінь з 1000, натискаємо « $\sqrt{}$ » чи $\sqrt{x}$. Отримаємо 31,622776.... Отже, $\sqrt{1000} \approx 31,622776$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Добувати квадратні корені з натуральних чисел вавилонські вчені вміли ще 4 тис. років тому. Вони склали таблицю квадратів багатьох натуральних чисел і, користуючись нею, знаходили квадратні корені з чисел, які були в тій таблиці. Якщо число m не було точним квадратом натурального числа, то вони шукали найближче наближене значення a квадратного кореня з m , подавали число m у вигляді $m = a^2 + b$ і застосовували правило, яке тепер можна записати у вигляді формули: $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a}$.

Наприклад, якщо $m = 108$, то $\sqrt{108} = \sqrt{10^2 + 8} = 10 + \frac{8}{2 \cdot 10} = 10,4$.

Перевірка. $10,4^2 = 108,16$.

Таке правило добування квадратних коренів знали і вчені Стародавньої Греції.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Ірраціональні вирази. Урок 1).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що називають квадратним коренем з числа a ?
2. Скільки існує різних квадратних коренів з додатного числа a ? А з числа 0?
3. Чи існує квадратний корінь з від'ємного числа?
4. Що називають арифметичним значенням квадратного кореня з числа a ?
5. Скільки існує арифметичних значень квадратних коренів з додатного числа a ? А з числа 0?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Покажи, що 28 — арифметичне значення квадратного кореня із 784.

Розв'язання. $28^2 = 784$; 28 — число додатне, тому $\sqrt{784} = 28$.

2. Чи є число $\frac{1}{7}$ квадратним коренем з числа $\frac{1}{49}$? А число $-\frac{1}{7}$? Чи є ці числа арифметичними значеннями квадратного кореня з числа $\frac{1}{49}$?

Розв'язання. $\left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$, $\left(-\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{1}{49}$. Отже, числа $\frac{1}{7}$ і $-\frac{1}{7}$ є квадратними коренями з числа $\frac{1}{49}$. Але тільки $\frac{1}{7}$ є арифметичним значенням квадратного кореня з числа $\frac{1}{49}$, бо $-\frac{1}{7} < 0$.

Відповідь. Числа $\frac{1}{7}$ і $-\frac{1}{7}$ — квадратні корені з числа $\frac{1}{49}$. Число $\frac{1}{7}$ — арифметичне значення квадратного кореня з числа $\frac{1}{49}$.

3. Обчисли $2,5\sqrt{64} - 3\sqrt{0,64}$.

Розв'язання. $\sqrt{64} = 8$, $\sqrt{0,64} = 0,8$. Тому

$$2,5\sqrt{64} - 3\sqrt{0,64} = 2,5 \cdot 8 - 3 \cdot 0,8 = 20 - 2,4 = 17,6.$$

Відповідь. 17,6.

4. Розв'яжи рівняння. а) $\sqrt{10x+9} = 7$; б) $\sqrt{x^2-9} = 4$.

Розв'язання. а) За означенням квадратного кореня, $7^2 = 10x + 9$, тоді $10x + 9 = 49$, $10x = 40$, $x = 4$;

б) $4^2 = x^2 - 9$, $x^2 - 9 - 16 = 0$, $x^2 - 25 = 0$, $(x - 5)(x + 5) = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = -5$.

Відповідь. а) $x = 4$; б) $x_1 = 5$, $x_2 = -5$.

ВИКОНАЙ УСНО



617. Прочитай вирази. $\sqrt{16}$; $\sqrt{0}$; $\sqrt{0,9}$; $\sqrt{a^2+b^2}$.

618. Обчисли. а) $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{16}$, $\sqrt{400}$, $\sqrt{90000}$;

б) $\sqrt{0,01}$, $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{0,09}$, $\sqrt{0,16}$, $\sqrt{0,0081}$;

в) $\sqrt{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{\frac{1}{9}}$, $\sqrt{\frac{4}{9}}$, $\sqrt{\frac{25}{36}}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$.

619. Знайди арифметичний квадратний корінь з числа.

$$9, \quad 100, \quad 400, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{9}{16}, \quad 3^2, \quad (-4)^2.$$

620. Який із виразів не має змісту?

А $\sqrt{16}$ Б $\sqrt{28}$ В $\sqrt{-25}$ Г $\sqrt{0}$

621. Яка з умов хибна?

А $\sqrt{36} = 6$ Б $\sqrt{16} = \pm 4$ В $\sqrt{0} = 0$ Г $\sqrt{-25}$ не існує

622. Чи правильна рівність?

а) $\sqrt{121} = -11$; б) $\sqrt{47^2} = 47$; в) $\sqrt{(-12)^2} = -12$.

623. Чи має зміст вираз?

а) $\sqrt{48}$; б) $\sqrt{-49}$; в) $-\sqrt{64}$; г) $\sqrt{(-5)^2}$;
 д) $\sqrt{(-4)^3}$; е) $\sqrt{8 \cdot (-4)}$; ж) $-\sqrt{-17}$; з) $\sqrt{(-6) \cdot (-12)}$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



624. Покажи, що 8 — квадратний корінь із числа 64. Чи існують інші квадратні корені з числа 64?

625. Покажи, що: а) $-5,4$ — квадратний корінь із числа 29,16;

б) $-0,99$ — квадратний корінь із числа 0,9801;

в) $\sqrt{29,16} = 5,4$; $\sqrt{0,9801} = 0,99$.

626. Чи є число -37 арифметичним значенням квадратного кореня числа 1369? А число 37?

627. Заповни таблицю.

x	0	1	4	9	16	25	36
$\sqrt{x}$							

628. Заповни таблицю.

x	0	0,01	0,04	0,09	0,16	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1
$\sqrt{x}$											

629. Гра. Один з учнів / одна з учениць записує число з таблиці квадратів, а другий / друга — добуває арифметичний квадратний корінь з нього. Потім учні / учениці міняються ролями.

Обчисли значення виразу (630–639).

630. а) $\sqrt{169}$; б) $\sqrt{256}$; в) $\sqrt{324}$; г) $\sqrt{361}$;
 д) $\sqrt{400}$; е) $\sqrt{900}$; ж) $\sqrt{2500}$; з) $\sqrt{3600}$.

631. а) $\sqrt{121}$; б) $\sqrt{196}$; в) $\sqrt{225}$; г) $\sqrt{625}$;
 р) $\sqrt{100}$; д) $\sqrt{10000}$; е) $\sqrt{1600}$; є) $\sqrt{2500}$.
632. а) $\sqrt{0,04}$; б) $\sqrt{0,09}$; в) $\sqrt{0,16}$; г) $\sqrt{0,64}$;
 р) $\sqrt{1,21}$; д) $\sqrt{1,44}$; е) $\sqrt{2,89}$; є) $\sqrt{3,24}$.
633. а) $\sqrt{0,01}$; б) $\sqrt{0,49}$; в) $\sqrt{1,96}$; г) $\sqrt{1,69}$;
 р) $\sqrt{4,84}$; д) $\sqrt{2,25}$; е) $\sqrt{0,0004}$; є) $\sqrt{0,0036}$.
634. а) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{16}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{25}}$; г) $\sqrt{\frac{25}{49}}$;
 р) $2 \cdot \sqrt{49}$; д) $4 \cdot \sqrt{64}$; е) $7 \cdot \sqrt{100}$; є) $5 \cdot \sqrt{144}$.
635. а) $\sqrt{\frac{1}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{9}{25}}$; в) $\sqrt{\frac{25}{36}}$; г) $\sqrt{\frac{4}{49}}$;
 р) $16 : \sqrt{16}$; д) $25 : \sqrt{25}$; е) $90 : \sqrt{81}$.
636. а) $-5 \cdot \sqrt{36}$; б) $-4,7 \cdot \sqrt{0}$; в) $0 \cdot \sqrt{47}$;
 р) $\frac{2}{3} \sqrt{81}$; г) $\frac{1}{5} \sqrt{225}$; д) $-\frac{3}{4} \sqrt{196}$.
637. а) $\sqrt{25} + \sqrt{49}$; б) $8 + \sqrt{16}$; в) $\sqrt{36} - 4$;
 р) $5 \cdot \sqrt{36} + \sqrt{16}$; г) $\sqrt{49} - 7 \cdot \sqrt{25}$; д) $3 \cdot \sqrt{16} - 2 \cdot \sqrt{36}$.
638. а) $3 \cdot \sqrt{0,01} + \sqrt{0,09}$; б) $\sqrt{0,04} - 0,5 \cdot \sqrt{1}$;
 в) $\sqrt{2,25} - \frac{1}{7} \sqrt{1,96}$; г) $2\sqrt{0,16} + \sqrt{1,44}$.
639. а) $\sqrt{36} \cdot \sqrt{25}$; б) $-\sqrt{0,49} \cdot \sqrt{49}$;
 в) $\sqrt{81} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{16}$; г) $\sqrt{64} \cdot \sqrt{0,25}$.

Користуючись таблицею квадратів, обчисли значення виразу (640–645).

640. а) $\sqrt{529}$; б) $\sqrt{729}$; в) $\sqrt{841}$; г) $\sqrt{961}$.
641. а) $\sqrt{1089}$; б) $\sqrt{2601}$; в) $\sqrt{2916}$; г) $\sqrt{3364}$.
642. а) $-\sqrt{5041}$; б) $-\sqrt{7396}$; в) $-\sqrt{8464}$; г) $\sqrt{5776}$.
643. а) $-\sqrt{48\,400}$; б) $-32,25 \cdot \sqrt{0}$; в) $24\sqrt{325 \cdot 0}$.
644. а) $169 : \sqrt{169}$; б) $576 : \sqrt{576}$; в) $24 : \sqrt{144}$.
645. а) $\frac{2}{3} \sqrt{36}$; б) $\frac{3}{4} \sqrt{1600}$; в) $-\frac{2}{5} \sqrt{1225}$.

Користуючись калькулятором, знайди наближене значення виразу (646, 647).

646. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{10}$.

647. а) $\sqrt{37}$; б) $\sqrt{3,7}$; в) $\sqrt{30,7}$; г) $\sqrt{54,76}$.



Знайди значення виразу (648, 649).

648. а) $\sqrt{2x+3}$, якщо $x = 11$; $x = -1$; $x = 83$;



б) $\sqrt{a+2c}$, якщо $a = 6$ і $c = 5$; $a = 0$ і $c = 8$.

649. а) $\sqrt{14-m}$, якщо $m = 5$; $m = -2$; $m = 14$;

б) $\sqrt{2a+c}$, якщо $a = 10$, $c = 5$; $a = -4$, $c = 24$.

650. Знайди сторону квадрата (у сантиметрах), площа якого дорівнює:

а) 64 см^2 ; б) 25 дм^2 ; в) $0,36 \text{ дм}^2$; г) 16 м^2 ; г) $0,49 \text{ м}^2$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



651. Заповни таблицю.

a	0	$\frac{1}{9}$				49	144		
$\sqrt{a}$			$\frac{1}{2}$	1	4			15	16

Обчисли (652, 653).

652. а) $\sqrt{\frac{121}{64}}$; б) $\sqrt{\frac{225}{81}}$; в) $\sqrt{1\frac{7}{9}}$; г) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$;

г) $\sqrt{0,0025}$; д) $\sqrt{0,0081}$; е) $\sqrt{10,89}$; є) $\sqrt{12,25}$.

653. а) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$; б) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; в) $\sqrt{6\frac{19}{25}}$; г) $\sqrt{5\frac{1}{16}}$;

г) $\sqrt{0,0001}$; д) $\sqrt{0,0169}$; е) $\sqrt{10,24}$; є) $\sqrt{98,01}$.

Обчисли значення виразу (654–656).

654. а) $2\sqrt{256} + 3\sqrt{169}$; б) $4\sqrt{225} - 3\sqrt{169}$;

в) $0,5\sqrt{1936} - 0,1\sqrt{256}$; г) $2,5\sqrt{676} + 1,2\sqrt{625}$.

655. а) $\frac{2}{7}\sqrt{784} - \frac{3}{4}\sqrt{676}$; б) $\frac{3}{5}\sqrt{3025} - 29\sqrt{0,01}$;

в) $-\frac{1}{2}\sqrt{1156} + 17\sqrt{0,04}$; г) $-\sqrt{7056} - 380\sqrt{0,25}$.

656. а) $\sqrt{1296} - 0,2\sqrt{2025}$;

б) $0,4\sqrt{1225} + \sqrt{256}$;

в) $5,4 : \sqrt{3,24} - \frac{1}{3}\sqrt{144}$;

г) $\frac{1}{4}\sqrt{576} + \sqrt{1,96} : 0,35$.

Знайди значення виразу (657, 658).

657. а) $\sqrt{a+b}$, якщо $a = 1,21$, $b = \frac{3}{4}$; б) $\sqrt{x^2 + 2x + 1}$, якщо $x = -2,8$.

658. а) $\sqrt{2x+y}$, якщо $x = \frac{1}{8}$, $y = 2$; б) $\sqrt{4x^2 - 4x + 1}$, якщо $x = 0,25$.

Користуючись калькулятором, знайди наближене значення виразу. Відповідь округли до десятих (659, 660).

659. а) $27\sqrt{321} - 15\sqrt{105}$;

б) $34 : \sqrt{127} + 127$;

в) $(\sqrt{879} + \sqrt{1125}) \cdot 0,5$;

г) $1,37 : \sqrt{0,2} - 73,8$.

660. а) $32\sqrt{635} + 15\sqrt{483}$;

б) $85 : \sqrt{325} - 12$;

в) $0,24 : \sqrt{0,15} + 2,4$;

г) $(\sqrt{353} - \sqrt{187}) : 12$.

661. **ЗНО** Укажи правильну нерівність, якщо $a = 5\sqrt{2}$, $b = 7$, $c = \sqrt{51}$.

А $b < a < c$ Б $a < b < c$ В $c < a < b$ Г $a < c < b$ Д $b < c < a$

662. Знайди число, квадратний корінь з якого дорівнює:

а) 48;

б) 3,7;

в) 0,07;

г) -0,0004.

663. Find the number whose square root is equal to:

а) 54;

б) 7,3;

в) 0,06;

г) -23,7.

Чи існує значення змінної x (664, 665), при якому:

664. а) $\sqrt{x} = 4$;

б) $\sqrt{x} = 0$;

в) $\sqrt{x} = -2$;

г) $\sqrt{-x} = 7$?

665. а) $\sqrt{x} = 100$;

б) $\sqrt{3x} = 0$;

в) $5 + \sqrt{x} = 0$;

г) $\sqrt{-x} = 2$?

666. Добудуй блок-схему.

Розв'яжи рівняння (667–670).

667. а) $\sqrt{x} = 7$;

б) $3 - \sqrt{x} = 0$;

в) $2 \cdot \sqrt{x} = 12$.

668. а) $5\sqrt{y} = 10$;

б) $-3 + \sqrt{y} = 0$;

в) $4\sqrt{z} = 8$.

669. а) $\sqrt{x+3} = 5$;

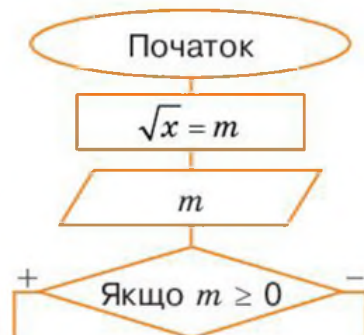
б) $\sqrt{11-y} = 7$;

в) $\sqrt{5x-1} = 3$;

г) $\sqrt{1+2x} = 5$;

г) $\frac{12}{\sqrt{x+2}} = 3$;

д) $\frac{28}{\sqrt{x+5}} = 7$.



670. а) $\sqrt{x+2} = 3$;

б) $\sqrt{x-12} = 8$;

в) $\frac{36}{\sqrt{x-5}} = 4$;

г) $\frac{15}{\sqrt{x-3}} = 3$;

г) $\sqrt{14+5x} = 8$;

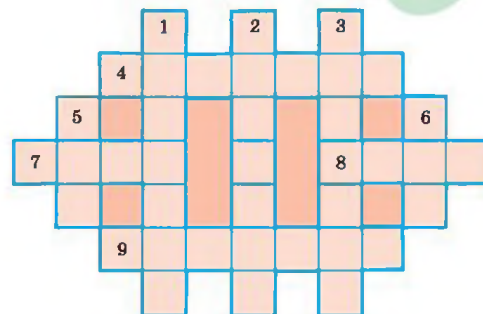
д) $1 + \sqrt{1-x} = 0$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

671. Розв'яжи кросворд (мал. 13.1).

По горизонталі: 4. Давньогрецький математик. 7. Елемент системи координат. 8. Основна думка. 9. Компонент дії додавання.

По вертикалі: 1. Квадрат числа 1000. 2. Знак $\sqrt{}$. 3. Латинська назва многочлена. 5. Четверте просте число. 6. Латинська буква.



Мал. 13.1

672. Розв'яжи рівняння.

а) $\sqrt{\sqrt{x}+5} = 4$;

б) $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{x}}} = 2$;

в) $\sqrt{7+\sqrt{6-\sqrt{x}}} = 3$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

673. Назви порядок числа. а) $2,3 \cdot 10^8$; б) $7,8 \cdot 10^{-12}$.

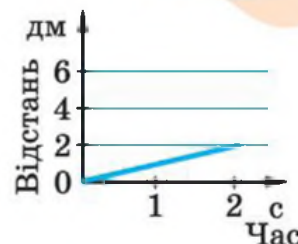
674. Обчисли значення виразу.

$(3x - 7y)^2 - (7x - 3y)^2$, якщо $x = 2,8$, $y = 2,2$.

675. Доведи, що значення виразу не залежить від значення змінної.

$(x + 5)(x^2 - 2x - 3) - (5x + x^2)(x - 2) + 3(x + 5)$.

676. На малюнку 13.2 зображено графік руху жука, який повзе прямолінійно і рівномірно. За який час він подолає відстань 6 дм, рухаючись з тією самою швидкістю?



Мал. 13.2

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Розумію, що таке квадратний корінь із числа.
- ✓ Знаю, що існує два різні квадратні корені з додатного числа.
- ✓ Знаю, що таке арифметичний квадратний корінь із числа a і як він позначається:

$\sqrt{a} = b, \quad b^2 = a, \quad b > 0$

$\sqrt{0} = 0$

- ✓ Умію добувати квадратні корені з невід'ємних чисел.
- ✓ Умію обчислювати значення виразів, що містять знак кореня.
- ✓ Умію розв'язувати деякі види рівнянь, що містять знак кореня.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— види числових множин та їх позначення;

$$N \subset Z \subset Q$$

— закони дій.

§ 14. Числові множини

КЛЮЧОВІ СЛОВА

множина — *set*, раціональні числа — *rational numbers*,
ірраціональні числа — *irrational numbers*

Ти знаєш, що таке набір фломастерів, табун коней, підписники блогера, зграя птахів, футбольна команда. У математиці будь-які сукупності називають одним словом — **множина**. Наприклад, множина точок числової прямої, коренів рівняння, правильних дробів зі знаменником 7, геометричних фігур тощо. Говорять також про множину квартир у будинку, учнів та учениць у класі, хімічних елементів у таблиці Менделєєва тощо.

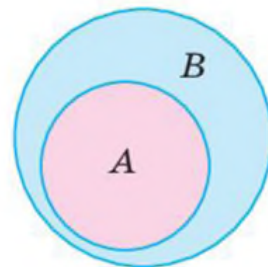
Множини позначають великими літерами: $A, B, C, \dots, M \dots$ і записують за допомогою фігурних дужок. Наприклад:

$C = \{\square, \bigcirc\}$ — множина фігур $\square, \bigcirc$;

$M = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ — множина непарних одноцифрових чисел.

Об'єкти, які входять до множини, називають її **елементами**. Вважають, що елементи множини різні. Якщо a — елемент множини A , то пишуть: $a \in A$. Якщо c не є елементом множини A , то пишуть: $c \notin A$. Якщо множина не містить жодного елемента, її називають **порожньою множиною** і позначають символом $\emptyset$.

Якщо A частина множини B (мал. 14.1), то її називають **підмножиною** множини A і записують: $A \subset B$. Наприклад, натуральні числа є підмножиною цілих чисел: $N \subset Z$.



Мал. 14.1

Відомі тобі досі числа — цілі й дробові, додатні й від'ємні — утворюють множину **раціональних чисел**. Раціональними їх називають тому, що кожне з них можна записати у вигляді частки, відношення двох цілих чисел, а слово «відношення» латинською мовою — *ratio*.

Спробуємо записати раціональні числа $\frac{9}{8}, \frac{7}{6}, \frac{4}{11}$ у вигляді десяткових дробів. Для цього їх чисельники поділимо на знаменники.

Отже, $\frac{9}{8} = 1,125$, $\frac{7}{6} = 1,16666\dots$, $\frac{4}{11} = 0,363636\dots$.

У двох останніх виразах ділення можна продовжувати без кінця. Утворені частки — нескінченні десяткові дробу, цифри яких періодично повторюються. Це **нескінченні періодичні десяткові дробу**.

Нескінченні періодичні десяткові дробу записують коротше:

$$0,363636\dots = 0,(36); \quad 1,166666\dots = 1,1(6).$$

Цифру або групу цифр, які повторюються, називають **періодом** періодичного десяткового дробу. 36 — період періодичного десяткового дробу $0,363636\dots$.

Будь-який десятковий дріб і навіть ціле число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, якщо дописати до його дробової частини безліч нулів:

$$1,125 = 1,125000\dots, \quad 18 = 18,000\dots, \quad -3,7 = -3,7000\dots$$

Можна довести, що: **кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу; кожний нескінченний періодичний десятковий дріб зображає деяке раціональне число.**

Чи існують числа, відмінні від раціональних? Існують. Наприклад, обчислюючи значення $\sqrt{2}$, $\sqrt{10}$, π , дістають нескінченні неперіодичні десяткові дробу: $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$, $\sqrt{10} = 3,1622776\dots$, $\pi = 3,1415926\dots$.

Ці числа — **нераціональні**.

Числа, які зображають нескінченними неперіодичними десятковими дробами, називають **ірраціональними**. Ірраціональний — значить не раціональний (латинське *ir* відповідає заперечувальній частці *ne*).

Ірраціональні числа разом з раціональними утворюють множину дійсних чисел.

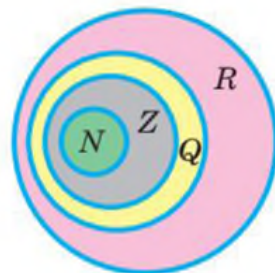
Множини натуральних, цілих, раціональних і дійсних чисел позначають відповідно буквами N , Z , Q і R . Кожна з цих множин є підмножиною (частиною) наступної множини (мал. 14.2).

Кожне натуральне число є водночас і цілим, і раціональним, і дійсним.

Кожне ціле число є також раціональним і дійсним.

Наприклад, усі числа 12 , -3 , $\frac{3}{7}$, $\sqrt{10}$ — дійсні, три перших — раціональні, два перших — цілі і тільки число 12 — натуральне.

Дійсні числа, записані у вигляді нескінченних десяткових дробів, порівнюють за тим самим правилом, що й десяткові дробу. Наприклад, число $3,131313\dots$ менше від $4,0111\dots$, і від $3,25$, і від π , але більше за $3,1222\dots$, за -2 , за 0 .



Мал. 14.2

Дійсні числа можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на числа, відмінні від 0). Для їх додавання і множення справедливі переставний, сполучний і розподільний закони.

Наприклад, $\sqrt{2} + \pi = \pi + \sqrt{2}$, $(3 + \pi) + \sqrt{5} = 3 + (\pi + \sqrt{5})$,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}, (\sqrt{5} \cdot \sqrt{20}) \cdot \sqrt{8} = \sqrt{5} \cdot (\sqrt{20} \cdot \sqrt{8}),$$

$$\pi \cdot (1,020202\dots + 5,12345\dots) = \pi \cdot 1,020202\dots + \pi \cdot 5,12345\dots$$

Усі правила дій над виразами зі змінними, доведені раніше для раціональних значень змінних, справедливі і для довільних дійсних значень цих змінних. Зокрема, для будь-яких дійсних чисел правильні відомі тобі властивості пропорцій, дробів, степенів.

Розв'язуючи прикладні задачі, ірраціональні числа звичайно округлюють, відкидаючи їх нескінченні «хвости» десяткових знаків. Наприклад, якщо треба знайти значення суми чисел π і $\sqrt{2}$ з точністю до тисячних, пишуть: $\pi + \sqrt{2} \approx 3,1416 + 1,4142 \approx 4,5558 \approx 4,556$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Ірраціональність числа $\sqrt{2}$ можна довести так. Припустимо, що число $\sqrt{2}$ раціональне, тобто дорівнює деякому нескоротному звичайному дробу $\frac{m}{n}$. Тоді: $2 = \frac{m^2}{n^2}$, або $2n^2 = m^2$. Тобто число m^2 , а отже, і m — парне: $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Тоді, підставивши $m = 2k$ у рівність $2n^2 = m^2$, одержимо $2n^2 = 4k^2$, $n^2 = 2k^2$, число n також парне. Виходить, що дріб $\frac{m}{n}$ можна скоротити на 2. А припускалось, що цей дріб нескоротний. Отже, припущення приводить до протиріччя, тому число $\sqrt{2}$ не є раціональним.

Доведи таким способом, що числа $\sqrt{3}$ і $\sqrt{5}$ — ірраціональні.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Ірраціональні вирази. Урок 2).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які числа називають: а) дійсними; б) раціональними; в) ірраціональними? Наведи приклади.
2. Чи бувають ірраціональні числа від'ємними?
3. Чи є число 0: а) цілим; б) раціональним; в) дійсним?
4. Які дії можна виконувати над ірраціональними числами? А над дійсними числами?
5. Чи завжди сума, різниця, добуток або частка двох ірраціональних чисел є числом ірраціональним?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Подай у вигляді десяткового дробу: а) $\frac{3}{8}$; б) $\frac{5}{11}$; в) $\frac{13}{6}$.

Розв'язання. Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, потрібно чисельник даного дробу поділити на його знаменник. Маємо:

а) $\frac{3}{8} = 0,375$; б) $\frac{5}{11} = 0,4545... = 0,(45)$;

в) $\frac{13}{6} = 2,1666... = 2,1(6)$.

Відповідь. а) 0,375; б) 0,(45); в) 2,1(6).

2. Порівняй числа. а) $-\frac{4}{3}$ і $-1,33$; б) $-\frac{4}{3}$ і $-1,34$; в) $-\frac{4}{3}$ і $-1,333...$

Розв'язання. а) Поділивши чисельник даного дробу $\frac{4}{3}$ на знаменник, одержимо $1,333...$. Число $1,333...$ більше за $1,33$.

Тому $-1,333... < -1,33$, або $-\frac{4}{3} < -1,33$;

б) $1,333... < 1,34$, отже, $-\frac{4}{3} > -1,34$;

в) $\frac{4}{3} = 1,333...$, отже, $-\frac{4}{3} = -1,333...$.

ВИКОНАЙ УСНО



677. Які з чисел 35, -128 , π , $\sqrt{25}$, $\sqrt{10}$, $-\sqrt{0,04}$ — раціональні, які — ірраціональні, які — дійсні?

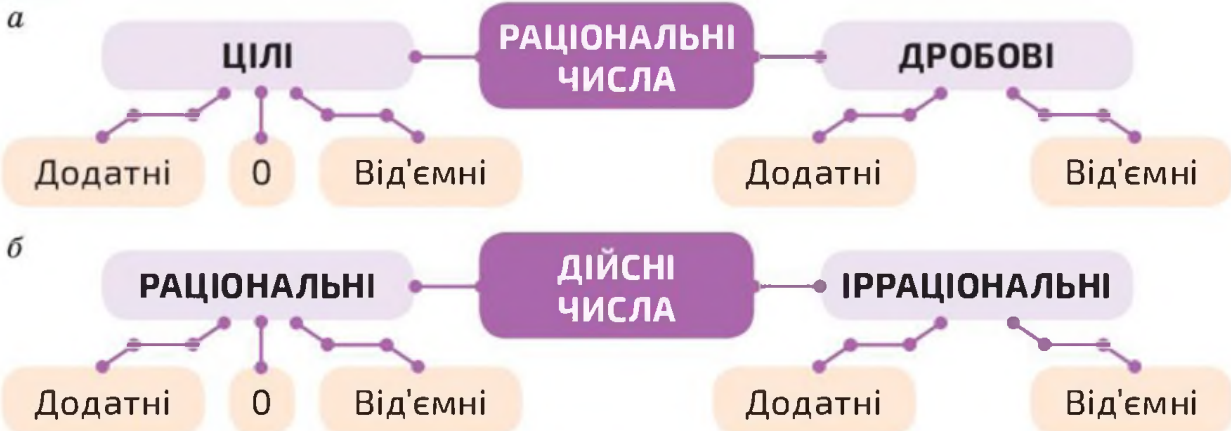
678. Які з тверджень правильні?

- а) Кожне натуральне число є дійсним;
б) не кожне ціле число є дійсним;
в) кожне раціональне число є дійсним;
г) кожне ірраціональне число є дійсним;
г) не кожне дійсне число є раціональним;
д) кожне дійсне число є ірраціональним.

679. Укажи правильні твердження.

- а) 2π — число дійсне; б) $-\pi$ — число ірраціональне;
в) $1+\pi$ — число раціональне; г) $\pi:2\pi$ — число раціональне.

680. Чи правильні схеми на малюнку 14.3?



Мал. 14.3

681. Як називають: а) множину жоржин у вазі; б) множину людей, які вкладають гроші у будівництво з метою їх збереження та примноження; в) множину чотирьох співачок, які виступають разом; г) множину осіб, які добровільно і безкорисливо підтримують розвиток культури, освіти тощо?

682. Який із записів правильний?

- а) $10,5 \in N$; б) $10,6 \in Z$; в) $10,7 \in Q$; г) $10,8 \in R$; ґ) $\sqrt{3} \in N$;
 д) $\sqrt{4} \in Z$; е) $12 \in Q$; є) $13 \in R$; ж) $\sqrt{5} \in Q$; з) $\sqrt{6} \in R$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



683. **ЗНО** Яке з наведених чисел є ірраціональним?

- А $\sqrt{0,64}$ Б $\sqrt{20}$ В π^0 Г 2,7

684. Which of the numbers $-3,5$, $-\sqrt{39}$, 6 , $1,010010001$, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{1024}$, $5\frac{1}{3}$ are irrational?

685. Із наведених чисел випиши: а) цілі; б) ірраціональні.

- 5 ; $\frac{3}{4}$; $-\sqrt{4}$; -32 ; $\sqrt{3}$; $0,7$; $-\sqrt{49}$; $\frac{12}{3}$; $0;7\frac{1}{2}$; $2\sqrt{\frac{25}{4}}$; $-1,1111$; $\sqrt{3\frac{1}{16}}$.

686. Які з наведених чисел є: а) натуральними; б) цілими; в) ірраціональним; г) дійсними? Зобразіть діаграму, як на малюнку 14.2, і позначте на ній кожне з цих чисел.

$\sqrt{17}$; $\sqrt{17,64}$; 49 ; $-1,21$; 1 ; $-2,5\sqrt{100}$; 3 ; 0 ; $\sqrt{1000}$;

$4\sqrt{3}$; $3\sqrt{4}$; $\sqrt{2\frac{7}{9}}$; $5+\sqrt{2}$; $-0,30033000333$; π ; -2π .

687. Гра. Один із гравців / одна із гравчинь записує число, а інший / інша визначає, раціональним чи ірраціональним є це число. Потім учні / учениці міняються ролями.

688. Установи відповідність між множиною A , заданою умовами (1–3), та числовими множинами (A – Γ).

1	множина чисел, протилежних до чисел $\sqrt{3}; \sqrt{5}; \sqrt{7}$	A	N
2	множина чисел, протилежних до чисел 3; 5; 7	B	Z
3	множина чисел, обернених до чисел $\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \frac{1}{7}$	B	Q
		Γ	R

689. Подай у вигляді звичайного дробу.

а) 0,7; б) 0,53; в) 3; г) 1,25.

690. Подай у вигляді десяткового дробу.

а) $\frac{9}{4}$; б) $\frac{2}{5}$; в) $\frac{13}{25}$; г) $\frac{17}{16}$; г) $\frac{1}{125}$.

691. Подай у вигляді нескінченного десяткового дробу.

а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{5}{6}$; в) $\frac{16}{15}$; г) $\frac{38}{12}$; г) $\frac{1}{7}$.

692. **ЗНО** Запиши число $\frac{8}{3}$ у вигляді десяткового дробу, округливши його до десятих.

A 2,6 B 2,66 B 2,67 Γ 2,7 D 8,3

693. Яке з чисел більше?

а) 0,3754 чи 1,2; б) 2,0379 чи 2,0401;
в) 2,333... чи 2,327; г) 13,777... чи 12,888...

Порівняй числа (694–697).

694. а) $\frac{5}{6}$ і $\frac{6}{7}$; б) $\frac{8}{3}$ і $\frac{9}{4}$; в) $-\frac{3}{8}$ і $-\frac{4}{9}$.

695. а) $\frac{2}{3}$ і 0,66; б) $\frac{2}{3}$ і 0,67; в) $\frac{2}{3}$ і 0,666....

696. а) $\sqrt{2}$ і 1,41; б) $\sqrt{2}$ і 1,42; в) $\sqrt{2}$ і 1,414141... .

697. а) π і 3,14; б) π і $\frac{27}{7}$; в) π і $\sqrt{10}$.

698. **ЗНО** Установи відповідність між числом (1–4) та множиною, до якої воно належить (A – D).

- | | | | |
|---|-------------|---|---|
| 1 | -8 | А | множина парних натуральних чисел |
| 2 | 23 | Б | множина цілих чисел, що не є натуральними числами |
| 3 | $\sqrt{16}$ | В | множина раціональних чисел, що не є цілими |
| 4 | 1,7 | Г | множина ірраціональних чисел |
| | | Д | множина простих чисел |

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б


Задай переліком елементів множину (699, 700).

- 699.** а) Букв, якими записують твоє ім'я та прізвище;
 б) цифр, якими записують дату народження твоїх батьків або близьких;
 в) букв, із яких складається назва множини, що не містить жодного елемента.

- 700.** а) Букв, якими записують ім'я та прізвище твого друга / подруги;
 б) цифр, якими записують дату твого народження.

- 701.** Користуючись калькулятором, обчисліть з точністю до тисячних.



- | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|-------------------------|
| а) $\frac{2}{3} + \sqrt{15}$; | б) $4,13 - \sqrt{10}$; | в) $\sqrt{23} + \pi$; |
| г) $\sqrt{35} \cdot \sqrt{10}$; | г) $\sqrt{45} \cdot \sqrt{20}$; | д) $\pi : \sqrt{5,7}$. |

- 702.** Користуючись калькулятором, обчисли з точністю до сотих.



- | | | |
|--|--------------------------------|--|
| а) $\sqrt{18} \cdot \sqrt{50}$; | б) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$; | в) $\pi + \sqrt{18}$; |
| г) $3 \cdot \sqrt{30} - \frac{2}{3}$; | г) $\frac{2}{3} + 2\sqrt{3}$; | д) $\pi \cdot \sqrt{10} - \frac{2}{7}$. |

- 703.** Яке з чисел більше?

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| а) 0,257 чи 0,26; | б) -3,0973 чи -3,098; |
| в) 7,666... чи 7,67; | г) -0,0222... чи -0,019. |

- 704.** Записи 0,(6) і 0,(58) означають нескінченні періодичні десяткові дробу 0,666... і 0,585858.... Яке з цих чисел більше? Знайди таке раціональне число, яке менше від одного з них, але більше за друге.

- 705.** Відомо, що числа a і b : 1) натуральні; 2) цілі; 3) раціональні. Яким буде в кожному з випадків 1)–3) число:

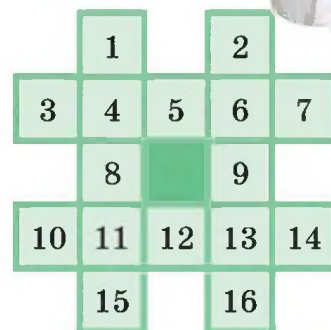
- | | | | |
|--------------|--------------|-----------|----------------------------------|
| а) $a + b$; | б) $a - b$; | в) ab ; | г) $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)? |
|--------------|--------------|-----------|----------------------------------|

- 706.** Раціональне чи ірраціональне число 2,001001001..., якщо група його цифр 001 нескінченно повторюється?

- 707.** Раціональне чи ірраціональне число $2,010010001\dots$, якщо після кожної його одиниці на один нуль більше, ніж перед нею?
- 708.** Запишіть у порядку зростання числа.
 $3\sqrt{20}$; $\sqrt{37} - 1,5$; $5,74 - \sqrt{74}$; $\sqrt{50} - \sqrt{30}$; $2\sqrt{13} + \sqrt{3}$; $\pi - \sqrt{37}$.
- 709.** Доведи, що сума двох раціональних чисел — число раціональне.
- 710.** Доведи, що добуток двох раціональних чисел — число раціональне.
- 711.** Чи правильно, що різниця двох будь-яких раціональних чисел є раціональним числом? А частка?
- 712.** Чи може сума двох ірраціональних чисел бути числом раціональним? Наведи приклад.
- 713.** Наведи приклад двох ірраціональних чисел, добуток яких дорівнює раціональному числу.
- 714.** Доведи, що сума раціонального та ірраціонального чисел завжди є числом ірраціональним.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

- 715.** Доведи, що ірраціональним є число:
 а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) $\sqrt{6}$.
- 716.** Перенеси у зошит малюнок 14.4 і перестав числа так, щоб чотири суми — у двох горизонтальних і двох вертикальних рядах — стали рівними. Знайди найменшу з таких сум.



Мал. 14.4

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 717.** Спрости вираз.
 а) $(x + 4)(2x^4 - x^3 + 3x^2)$; б) $(a^3 + a^2 + a + 1)(a - 1)$;
 в) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$; г) $(a^2 + ab - b^2)(a + b)$.
- 718.** На скільки порядків число 342 000 000 більше за 4 000 000?
- 719.** Вирази:
 а) $2,4 \cdot 10^3$ т у грамах; б) $6,23 \cdot 10^{12}$ кг у тоннах;
 в) $5,4 \cdot 10^{-6}$ км у міліметрах; г) $3,8 \cdot 10^{-10}$ см у метрах.
- 720.** Знайди суму, різницю, добуток і частку чисел.
 а) $8 \cdot 10^9$ і $4 \cdot 10^9$; б) $4,8 \cdot 10^7$ і $4 \cdot 10^6$;
 в) $6 \cdot 10^{-5}$ і $3 \cdot 10^{-5}$; г) $4,5 \cdot 10^{-6}$ і $1,5 \cdot 10^{-7}$.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу пояснити, що таке множина і підмножина.

$$\begin{aligned} Z &\subset R; \\ N &\subset Q \end{aligned}$$

Якщо A — множина букв українського алфавіту,
а G — множина букв, що позначають голосні звуки, то $G \subset A$.

- ✓ Можу пояснити, що таке раціональне, ірраціональне та дійсне число, і навести приклади цих чисел.

$$\left\{-50, 5, -10, \frac{1}{3}, 1\frac{1}{5}, 2, 4, 6, 800\right\} \subset Q; \quad \left\{-3\frac{1}{7}, -\sqrt{3}, 0, \sqrt{5}, 2,5, \sqrt{7}\right\} \subset R.$$

- ✓ Знаю, що кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу, а кожне ірраціональне число зображають нескінченим неперіодичним десятковим дробом.
- ✓ Можу порівнювати значення виразів, використовуючи правила порівняння десяткових дробів: $7,8654 > 7,85643$.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- розкладання числа на множники;

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7;$$

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \end{array}$$

$$4356 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 11^2$$

$$350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7;$$

$$\begin{array}{r|l} 350 & 2 \cdot 5 \\ 35 & 7 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

- квадрати натуральних чисел;
- степені числа 2 і 3;
- закони арифметичних дій;
- що таке арифметичний квадратний корінь із числа a .

$$\sqrt{a} = b, \text{ якщо } b \geq 0 \text{ і } b^2 = a.$$

§ 15. Квадратний корінь з добутку, дробу, степеня

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- властивості коренів — *properties of square roots*

Арифметичний корінь із a — невід'ємне значення квадратного кореня з невід'ємного числа a . Тому для будь-якого невід'ємного числа a справджується тотожність $(\sqrt{a})^2 = a$.

Приклади. $(\sqrt{7})^2 = 7$, $(\sqrt{0,3})^2 = 0,3$, $(\sqrt{0})^2 = 0$.

Правильні й такі тотожності:

1. $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ — для невід'ємних значень a і b ;

2. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — для невід'ємного a і додатного b ;

3. $\sqrt{a^{2k}} = a^k$ — для невід'ємного a і натурального k .

Доведемо ці тотожності.

1. Якщо a і b — довільні невід'ємні числа, то числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{ab}$ і $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ також невід'ємні. Крім того, $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$.

Отже, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ — невід'ємне число, квадрат якого дорівнює ab , тобто $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

2. Якщо $a \geq 0$ і $b > 0$, то числа $\sqrt{a}$, $\sqrt{\frac{a}{b}}$ і $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ невід'ємні, а $\sqrt{b}$ — додатне. Крім того, $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right)^2 = \frac{(\sqrt{a})^2}{(\sqrt{b})^2} = \frac{a}{b}$.

Отже, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ — невід'ємне число, квадрат якого дорівнює $\frac{a}{b}$, тобто $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3. Якщо число a — невід'ємне, а k — натуральне, то числа a^k , a^{2k} і $\sqrt{a^{2k}}$ — невід'ємні. Крім того, $(a^k)^2 = a^{2k}$. Отже, a^k — невід'ємний квадратний корінь з a^{2k} , тобто $\sqrt{a^{2k}} = a^k$.

Доведені три теореми коротко можна сформулювати так.

1. Корінь із добутку двох невід'ємних чисел дорівнює добутку коренів із цих чисел (теорема про корінь із добутку).

2. Корінь із дробу, чисельник якого невід'ємний, а знаменник додатний, дорівнює кореню з чисельника, поділеному на корінь зі знаменника (теорема про корінь із дробу).

3. Корінь зі степеня a^{2k} , в якому числа a — невід'ємне і k — натуральне, дорівнює a^k (теорема про корінь зі степеня).

Зауваження. Тут під «коренем» розуміють тільки квадратний арифметичний корінь.

Теорему про корінь із добутку можна поширити на три і більше множників. Справді, якщо числа a , b і c — невід’ємні, то

$$\sqrt{abc} = \sqrt{(ab) \cdot c} = \sqrt{ab} \cdot \sqrt{c} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}.$$

Якщо в доведених тотожностях поміняти місцями їх ліві й праві частини, одержимо: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Ці тотожності показують, як можна множити і ділити корені. Наприклад, $\sqrt{20} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{20 \cdot 5} = \sqrt{100} = 10$, $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{45}{5}} = \sqrt{9} = 3$.

З теореми про корінь із степеня випливає, що $\sqrt{a^2} = a$, якщо $a \geq 0$. Якщо $a < 0$, то рівність $\sqrt{a^2} = a$ неправильна, оскільки число $\sqrt{a^2}$ невід’ємне і не може дорівнювати від’ємному числу a .

Для будь-якого дійсного числа a виконується рівність $\sqrt{a^2} = |a|$.

Ця рівність правильна при кожному значенні a , оскільки число $|a|$ — невід’ємне і його квадрат дорівнює a^2 .

Приклади. $\sqrt{7^2} = 7$, $\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

У сформульованих вище теоремах ідеться тільки про найпростіші випадки перетворення арифметичних значень квадратних коренів: коли всі числа під коренями додатні або невід’ємні. Але нерідко доводиться мати справу і з такими виразами, в яких під знаком кореня — добуток чи частка двох від’ємних чисел. У таких випадках можна користуватися означенням квадратного кореня, арифметичного значення квадратного кореня тощо. Наприклад,

$$\sqrt{(-4)(-9)} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6; \quad \sqrt{\frac{-4}{-9}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}; \quad \sqrt{(-2)^4} = \sqrt{16} = 4.$$

З теореми 3 неважко одержати такий наслідок.

Якщо натуральне число k — парне, то для будь-яких значень a правильна тотожність $\sqrt{a^{2k}} = a^k$.

Якщо k — непарне, то $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Сформулюй теорему про:
а) корінь з добутку; б) корінь з дробу; в) корінь зі степеня.
2. При яких значеннях змінної правильні тотожності?

$$\sqrt{a^2} = a; \quad \sqrt{a^2} = -a; \quad \sqrt{a^2} = |a|; \quad (\sqrt{a})^2 = a.$$

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Знайди значення виразу.

а) $\sqrt{49 \cdot 25}$; б) $\sqrt{9 \cdot 0,16}$; в) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$; г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}}$.

Розв'язання. а) $\sqrt{49 \cdot 25} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{25} = 7 \cdot 5 = 35$;

б) $\sqrt{9 \cdot 0,16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{0,16} = 3 \cdot 0,4 = 1,2$;

в) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$;

г) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{12}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

Відповідь. а) 35; б) 1,2; в) 6; г) $\frac{1}{2}$.

2. Спрости вираз $\sqrt{36a^2b^2}$, якщо $a > 0$, $b < 0$.

Розв'язання. Оскільки $\sqrt{a^2} = |a|$, то $\sqrt{36a^2b^2} = 6|a| \cdot |b| = 6 \cdot a \cdot (-b) = -6ab$, бо за умови, що $a > 0$, $b < 0$, $|a| = a$, $|b| = -b$.

3. Обчисли $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(4-\sqrt{5})^2}$.

Розв'язання. $\sqrt{(1-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(4-\sqrt{5})^2} = |1-\sqrt{5}| + |4-\sqrt{5}| = -1 + \sqrt{5} + 4 - \sqrt{5} = 3$.

ВИКОНАЙ УСНО



Знайди значення виразу (721–723).

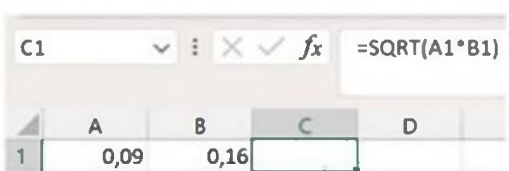
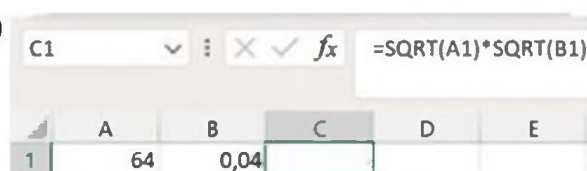
721. а) $\sqrt{25 \cdot 36}$; б) $\sqrt{18 \cdot 2}$; в) $\sqrt{10 \cdot 0,1}$.

722. а) $\sqrt{\frac{1}{4}}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$; в) $\sqrt{\frac{64}{81}}$; г) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{45}}$.

723. а) $\sqrt{2^2}$; б) $\sqrt{3^4}$; в) $\sqrt{(-3)^2}$; г) $\sqrt{0}$.

724. В Excel команда SQRT дає змогу добути квадратний корінь з числа.

 Проаналізуй формулу у комірці C1. Яке число має стояти у комірці?

а)  б) 

725. Знайди добуток чисел.

а) $\sqrt{30}$ і $\sqrt{30}$;

б) $\sqrt{18}$ і $\sqrt{2}$.

726. Знайди значення x , якщо $x \cdot \sqrt{2} = 2$.

А 1

Б 2

В $\sqrt{2}$

Г $2\sqrt{2}$

727. Спрости вираз $\sqrt{(a-3)^2}$, якщо $a < 3$.

А $a - 3$

Б $3 - a$

В 3

Г $a + 3$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Обчисли значення виразу (728–734).

728. а) $\sqrt{64 \cdot 100}$;

б) $\sqrt{49 \cdot 144}$;

в) $\sqrt{25 \cdot 121}$;

г) $\sqrt{0,16 \cdot 49}$;

г) $\sqrt{0,01 \cdot 0,04}$;

д) $\sqrt{0,16 \cdot 0,09}$.

729. а) $\sqrt{36 \cdot 900}$;

б) $\sqrt{121 \cdot 64}$;

в) $\sqrt{900 \cdot 81}$;

г) $\sqrt{0,01 \cdot 25}$;

г) $\sqrt{0,04 \cdot 144}$;

д) $\sqrt{0,25 \cdot 0,01}$.

730. а) $\sqrt{\frac{16}{25}}$;

б) $\sqrt{\frac{121}{144}}$;

в) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$;

г) $\sqrt{3\frac{6}{25}}$.

731. а) $\sqrt{\frac{25}{144}}$;

б) $\sqrt{\frac{0,04}{0,49}}$;

в) $\sqrt{2\frac{1}{4}}$;

г) $\sqrt{11\frac{1}{9}}$.

732. а) $\sqrt{4 \cdot 9 \cdot 25}$;

б) $\sqrt{36 \cdot 225 \cdot 144}$;

в) $\sqrt{144 \cdot 36 \cdot 25 \cdot 9}$;

г) $\sqrt{5\frac{1}{16} \cdot 9}$;

г) $\sqrt{12\frac{1}{4} \cdot 10\frac{6}{25}}$;

д) $\sqrt{\frac{16}{25} \cdot \frac{49}{36} \cdot \frac{64}{81}}$.

733. а) $\sqrt{64 \cdot 100 \cdot 9}$;

б) $\sqrt{\frac{9}{4} \cdot \frac{25}{49} \cdot \frac{81}{121}}$;

в) $\sqrt{1,69 \cdot 0,0001 \cdot 0,16}$.

734. а) $\sqrt{25 \cdot 16 \cdot 81}$;

б) $\sqrt{2\frac{7}{9} \cdot 1\frac{11}{25} \cdot \frac{1}{4}}$;

в) $\sqrt{\frac{4 \cdot 36 \cdot 49}{25 \cdot 81 \cdot 121}}$.

Обчисли значення добутку (735–738).

735. а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$;

б) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{56}$;

в) $\sqrt{75} \cdot \sqrt{3}$;

г) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{44}$;

г) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{60}$;

д) $\sqrt{135} \cdot \sqrt{15}$;

е) $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0,18}$;

е) $\sqrt{12,5} \cdot \sqrt{24,5}$;

ж) $\sqrt{3,2} \cdot \sqrt{80}$.

736. а) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{8}$;

б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$;

в) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{242}$;

г) $\sqrt{11} \cdot \sqrt{99}$;

г) $\sqrt{37} \cdot \sqrt{3700}$;

д) $\sqrt{444} \cdot \sqrt{111}$;

е) $\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{120}$;

е) $\sqrt{40} \cdot \sqrt{62,5}$;

ж) $\sqrt{0,72} \cdot \sqrt{0,98}$.

737. а) $\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{6}{25}}$;

б) $\sqrt{1\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{1\frac{8}{17}}$;

в) $\sqrt{2\frac{1}{16}} \cdot \sqrt{\frac{3}{11}}$.



738. а) $\sqrt{1\frac{4}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{3}{13}}$; б) $\sqrt{3\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{5}}$; в) $\sqrt{3\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{8}{7}}$.

Обчисли, користуючись таблицею квадратів (739, 740).

739. а) $\sqrt{202\,500}$; б) $\sqrt{4\,840\,000}$; в) $\sqrt{33,64}$;
г) $-\sqrt{152\,100}$; д) $2\sqrt{230\,400}$; е) $\frac{1}{2}\sqrt{7\,290\,000}$.

740. а) $\sqrt{52900}$; б) $-3\sqrt{1690000}$; в) $0,5\sqrt{57,76}$.

Знайди значення частки (741, 742).

741. а) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{50}}$; б) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{112}}$; в) $\frac{\sqrt{4,8}}{\sqrt{0,3}}$; г) $\frac{\sqrt{2,7}}{\sqrt{4,8}}$.

742. а) $\frac{\sqrt{2,5}}{\sqrt{90}}$; б) $\frac{\sqrt{96}}{\sqrt{1,5}}$; в) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{108}}$; г) $\frac{\sqrt{52}}{\sqrt{13}}$.

743. Обчисли значення виразу.

а) $\sqrt{3^4}$; б) $\sqrt{975^2}$; в) $\sqrt{0,2^6}$; г) $\sqrt{1,2^4}$;
д) $5 \cdot \sqrt{12^2}$; е) $3 \cdot \sqrt{(-2)^8}$; ж) $-0,4 \cdot \sqrt{(-10)^6}$; з) $-0,1 \cdot \sqrt{3^6}$.

744. Calculate the value of the expression.

а) $3 \cdot \sqrt{5^2}$; б) $-\sqrt{4^4}$; в) $4\sqrt{0,1^4}$; г) $-8\sqrt{0,2^4}$;
д) $\sqrt{(-5)^2}$; е) $\sqrt{(-3)^6}$; ж) $-\sqrt{(-7)^8}$; з) $-2\sqrt{(-4)^2}$.

745. Гра. Один з учасників / одна з учасниць записує вираз, що є коренем зі степеня із парним показником, а інший / інша має записати відповідний степінь вже без кореня. Потім учні / учениці міняються ролями.

Обчисли найраціональнішим способом (746, 747).

746. а) $\sqrt{20^2 - 16^2}$; б) $\sqrt{29^2 - 20^2}$; в) $\sqrt{17^2 - 8^2}$;
г) $\sqrt{25^2 - 24^2}$; д) $\sqrt{41^2 - 40^2}$; е) $\sqrt{50,5^2 - 49,5^2}$.

747. а) $\sqrt{100^2 - 96^2}$; б) $\sqrt{61^2 - 60^2}$; в) $\sqrt{37^2 - 12^2}$;
г) $\sqrt{6,8^2 - 3,2^2}$; д) $\sqrt{1,3^2 - 0,66^2}$; е) $\sqrt{3,73^2 - 2,52^2}$.

748. Гіпотенуза і катет прямокутного трикутника дорівнюють c і a .



Знайдіть другий катет b , якщо $a^2 + b^2 = c^2$ та відомо, що:

а) $c = 13$ см, $a = 12$ см; б) $c = 8,2$ м, $a = 1,8$ м;
в) $c = 21,8$ дм, $a = 18,2$ дм; г) $c = 45,8$ км, $a = 44,2$ км.

749. Знайди значення виразу:

а) $\sqrt{4m^2}$, якщо $m = -3$;

б) $\sqrt{(-4m)^2}$, якщо $m = -3$;

в) $\sqrt{\left(\frac{a}{a-1}\right)^4}$, якщо $a = 2$;

г) $\sqrt{\left(\frac{a}{1-a}\right)^4}$, якщо $a = 2$.

750. Знайди значення виразу:

а) $\sqrt{c^2}$, якщо $c = 3$, $c = -6$, $c = -12$;

б) $x\sqrt{x^2}$, якщо $x = 5$, $x = -5$, $x = -7$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



Обчисли, розклавши підкореневий вираз на множники (751, 752).

751. а) $\sqrt{640\,000}$; б) $\sqrt{20\,736}$; в) $\sqrt{30\,976}$; г) $\sqrt{104\,976}$;

р) $\sqrt{80 \cdot 45}$; д) $\sqrt{48 \cdot 768}$; е) $\sqrt{600 \cdot 150}$; є) $\sqrt{243 \cdot 108}$.

752. а) $\sqrt{6\,250\,000}$; б) $\sqrt{50\,625}$; в) $\sqrt{86\,436}$; г) $\sqrt{213\,444}$;

р) $\sqrt{12 \cdot 27}$; д) $\sqrt{297 \cdot 33}$; е) $\sqrt{250 \cdot 160}$; є) $\sqrt{125 \cdot 245}$.

Обчисли значення виразу (753–758).

753. а) $\sqrt{8 \cdot 50}$; б) $\sqrt{40 \cdot 90}$; в) $\sqrt{20 \cdot 45}$; г) $\sqrt{7 \cdot 63}$;

р) $\sqrt{18 \cdot 98}$; д) $\sqrt{50 \cdot 18}$; е) $\sqrt{2,5 \cdot 6,4}$; є) $\sqrt{9,8 \cdot 7,2}$.

754. а) $\sqrt{10 \cdot 490}$; б) $\sqrt{360 \cdot 40}$; в) $\sqrt{7 \cdot 700}$; г) $\sqrt{12 \cdot 48}$;

р) $\sqrt{72 \cdot 32}$; д) $\sqrt{80 \cdot 45}$; е) $\sqrt{1,6 \cdot 90}$; є) $\sqrt{6,4 \cdot 250}$.

755. а) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{50}$; б) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{135} - \sqrt{24} \cdot \sqrt{6}$.

756. а) $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}} + \sqrt{\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{\frac{2}{27}}$; б) $\sqrt{2,5} \cdot \sqrt{0,9} - \sqrt{0,1} \cdot \sqrt{0,4}$.

757. а) $\sqrt{5\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{6\frac{2}{3}}$; б) $\sqrt{\frac{2}{5}} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{1\frac{1}{5}}$; в) $\sqrt{\frac{4}{15}} \cdot \sqrt{1\frac{7}{8}} \cdot \sqrt{2\frac{13}{18}}$.

758. а) $\sqrt{4\frac{3}{8}} \cdot \sqrt{1\frac{23}{40}}$; б) $\sqrt{3\frac{5}{7}} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{\frac{9}{14}}$; в) $\sqrt{10\frac{5}{7}} \cdot \sqrt{\frac{8}{11}} \cdot \sqrt{1\frac{1}{21}}$.

При яких значеннях змінної правильна рівність (759, 760)?

759. а) $\sqrt{a^4} = a^2$; б) $\sqrt{a^6} = a^3$; в) $\sqrt{a^4} = a\sqrt{a^2}$.

760. а) $\sqrt{x^2} = x$; б) $(\sqrt{a})^2 = a$; в) $m\sqrt{m^2} = m^2$.

Заміни вираз тотожно рівним (761, 762).

761. а) $(\sqrt{x})^2$; б) $5\sqrt{a^2}$; в) $b\sqrt{b^2}$; г) $-\sqrt{m^2}$.

762. а) $(\sqrt{a-1})^2$; б) $\sqrt{(a-1)^2}$; в) $-\sqrt{(a-1)^2}$.

Спрости вираз (763, 764).

763. а) $\sqrt{9n^2}$, якщо $n < 0$; б) $x\sqrt{x^2}$, якщо $x > 0$;

в) $\sqrt{0,36a^4b^6}$, якщо $a \geq 0$, $b \leq 0$; г) $-3c\sqrt{16c^{10}}$, якщо $c \leq 0$;

г) $\sqrt{(x-1)^2}$, якщо $x < 1$; д) $\sqrt{(a-b)^2}$, якщо $a > b$.

764. а) $\sqrt{16m^2}$, $m < 0$; б) $\sqrt{(-x)^2}$, якщо $x > 0$;

в) $-0,2a\sqrt{64a^{14}}$, якщо $a \leq 0$; г) $\sqrt{0,81a^6b^6}$, якщо $a \geq 0$, $b \leq 0$;

г) $\sqrt{(a-b)^2}$, якщо $a < b$; д) $\sqrt{(x+5)^2}$, якщо $x > -5$.

765. Спростіть вираз, якщо a, b, c — додатні числа.

а) $\sqrt{9a^4b^2c^6}$; б) $\sqrt{0,25a^2b^6c^{10}}$;

в) $-\sqrt{16a^4b^4c^6}$; г) $-\sqrt{2,25a^2b^2c^8}$.

766. Спрости вираз, якщо x, y, z — від'ємні числа.

а) $\sqrt{x^2y^2z^2}$; б) $\sqrt{x^2y^2z^4}$; в) $-\sqrt{4x^2y^6z^4}$; г) $-\sqrt{0,81x^4y^6z^{12}}$.

Спрости вираз (767, 768).

767. а) $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2}$; б) $\sqrt{(a+1)^2(a^2+1)^2}$.

768. а) $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$; б) $\sqrt{(2n-1)^2(n^4+1)^2}$.

Обчисли (769, 770).

769. а) $\sqrt{(1-\sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$; б) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} - \sqrt{(\sqrt{5}+3)^2}$.

770. а) $\sqrt{(\sqrt{17}-3)^2} + \sqrt{(12-\sqrt{17})^2}$; б) $\sqrt{(\sqrt{11}-4)^2} + \sqrt{(3-\sqrt{11})^2}$.

771. ЗНО Спрости вираз $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}$.

А $-2\sqrt{3}$ Б -4 В $-2\sqrt{3}+4$ Г 4 Д $2\sqrt{3}$

772. ЗНО Знайди значення виразу $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$, якщо $\frac{\sqrt{3}a - \sqrt{3}b}{ab} = \sqrt{12}$.

А -2 Б $0,5$ В 2 Г 3 Д 6

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



773. Обчисли найраціональнішим способом.

а) $\sqrt{660^2 + 880^2}$; б) $\sqrt{333^2 + 444^2}$; в) $\sqrt{666^2 + 888^2}$.

 774. Побудуй графік функції. а) $y = \sqrt{x^2} + x$; б) $y = \frac{2x^2}{\sqrt{x^2}} + 1$.


ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

775. Заміни «зірочки» одночленом, щоб утворилась тотожність.

а) $(* + 2a)^2 = * + 8ab + 4b^2$; б) $(3x - *)^2 = 25y^2 + * - 30xy$;
 в) $(4a^2 + *)^2 = * + * + b^6$; г) $(* - 6b)^2 = * - 60a^4b + *$.

776. Розклади на множники.

а) $-1 + 4a - 4a^2$; б) $0,36x^2 + 25y^2 - 6xy$;
 в) $2xy - 0,01x^2y^2 - 100$; г) $2ab - 25a^2b^2 - 0,04$.

777. Подай у вигляді добутку.

а) $x^{2n} - 1$; б) $a^{4p} - 4$; в) $9x^{2n+2} - y^{6n}$; г) $a^{4m-2} - 49b^{2m-4}$.

 778. **Відкрита задача.** Добова потреба у вітаміні С дорослої людини 70–100 мг, а дитини — 50–60 мг. Дізнайся про вміст вітаміну С у різних овочах і фруктах і склади план поповнення цього вітаміну, доступний для твоєї родини, на тиждень: а) узимку; б) навесні. Врахуй втрати вітаміну під час кулінарної обробки.


СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Розумію та можу сформулювати властивості арифметичного квадратного кореня:

$$\begin{aligned} \sqrt{ab} &= \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0; \\ \sqrt{\frac{a}{b}} &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, \quad a \geq 0, \quad b > 0; \\ \sqrt{a^{2k}} &= a^k, \quad a \geq 0. \\ \sqrt{a^2} &= |a| \text{ для довільного } a \\ \sqrt{a^{2k}} &= |a^k| \text{ для довільного } a \end{aligned}$$

- ✓ Умію застосовувати властивості арифметичного квадратного кореня до обчислення значень виразів та виконання дій.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- означення арифметичного квадратного кореня із числа;
- властивості арифметичного квадратного кореня.

§ 16. Перетворення виразів, які містять квадратні корені

КЛЮЧОВІ СЛОВА

вирази з квадратними коренями — *radical expressions*
звільнення від ірраціональності в знаменнику — *rationalize a denominator*

Вирази, що містять квадратні корені, можна додавати, віднімати, множити, підносити до степеня і ділити (на дільник, відмінний від 0).

Приклади.

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 7\sqrt{3}; \quad 12\sqrt{6} : 3\sqrt{6} = \frac{12\sqrt{6}}{3\sqrt{6}} = 4; \quad 4\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{10};$$

$$(3\sqrt{2})^2 = 3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 18 \text{ або } (3\sqrt{2})^2 = 3^2 \cdot (\sqrt{2})^2 = 9 \cdot 2 = 18.$$

Розглянемо ще деякі перетворення виразів з коренями.

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}.$$

Таке перетворення називають **винесенням множника за знак кореня**. В останньому прикладі за знак кореня винесено множник 10.

Перетворення, обернене до винесення множника за знак кореня, називають **внесенням множника під знак кореня**.

$$0,3\sqrt{10} = \sqrt{0,09} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{0,09 \cdot 10} = \sqrt{0,9}.$$

У цьому прикладі під знак кореня внесено множник 0,3. Розглянуті перетворення здійснюються на основі теореми про корінь з добутку.

Якщо знак кореня міститься в знаменнику дробу, то такий дріб можна замінити тотожним йому дробом, знаменник якого не містить коренів. Досить домножити члени дробу на відповідно підібраний ви-

раз. Наприклад, $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

$$\frac{1}{2 - \sqrt{3}} = \frac{2 + \sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3})} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 + \sqrt{3}.$$

Такі перетворення називають звільненням дробу від ірраціональності в знаменнику дробу.

Наведені перетворення можна виконувати і над виразами зі змінними. Наприклад,

$$a\sqrt{2} \cdot x\sqrt{3} = ax\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}ax; \quad \sqrt{9a} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{a} = 3\sqrt{a};$$

$$2\sqrt{\frac{x}{2}} = \sqrt{4 \cdot \frac{x}{2}} = \sqrt{2x}; \quad -3a\sqrt{2a} = -\sqrt{9a^2 \cdot 2a} = -\sqrt{18a^3};$$

$$\frac{x}{a - \sqrt{x}} = \frac{x(a + \sqrt{x})}{(a - \sqrt{x})(a + \sqrt{x})} = \frac{x(a + \sqrt{x})}{a^2 - x}.$$

Зауваження. Виносячи за знак кореня змінну, слід пам'ятати, що рівність $\sqrt{a^2c} = a\sqrt{c}$ правильна тільки при невід'ємних значеннях a і c . Якщо $a < 0$, $c \geq 0$, то $\sqrt{a^2c} = -a\sqrt{c}$.

Оскільки $\sqrt{a^2} = |a|$, то при будь-яких дійсних значеннях a і невід'ємних c правильною є тотожність: $\sqrt{a^2c} = |a| \cdot \sqrt{c}$.

Приклад. Винеси множник з-під знака кореня.

а) $\sqrt{16a^2c^4d^3}$, $a > 0$, $d > 0$; б) $\sqrt{50x^6y}$, $x < 0$, $y > 0$.

Розв'язання. а) $\sqrt{16a^2c^4d^3} = \sqrt{16a^2c^4d^2d} = 4|a| \cdot c^2 \cdot |d| \cdot \sqrt{d} = 4ac^2d\sqrt{d}$;

б) $\sqrt{50x^6y} = \sqrt{25x^6 \cdot 2y} = 5|x^3| \sqrt{2y} = -5x^3 \sqrt{2y}$.

Відповідь. а) $4ac^2d\sqrt{d}$; б) $-5x^3\sqrt{2y}$.

Вносячи змінну під знак кореня, слід пам'ятати, що під корінь можна вносити лише додатні числа.

Приклад. Внеси множник під знак кореня.

а) $2a\sqrt{3ab^2}$, $a \geq 0$; б) $mn^2\sqrt{5mn}$, $m < 0$, $n < 0$; в) $a\sqrt{-2a}$.

Розв'язання. а) $2a\sqrt{3ab^2} = \sqrt{(2a)^2 \cdot 3ab^2} = \sqrt{4a^2 \cdot 3ab^2} = \sqrt{12a^3b^2}$;

б) $mn^2\sqrt{5mn} = -(-m) \cdot n^2\sqrt{5mn} = -\sqrt{((-m) \cdot n^2)^2 \cdot 5mn} =$
 $= -\sqrt{m^2n^4 \cdot 5mn} = -\sqrt{5m^3n^5}$.

в) Даний вираз існує лише за умови, що $a \leq 0$. Тоді

$$a\sqrt{-2a} = -\sqrt{a^2 \cdot (-2a)} = -\sqrt{-2a^3}.$$

Відповідь. а) $\sqrt{12a^3b^2}$; б) $-\sqrt{5m^3n^5}$; в) $-\sqrt{-2a^3}$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Вживаючи словосполучення «вирази з коренями», в цьому розділі ми маємо на увазі тільки «вирази з арифметичними квадратними коренями». Насправді вирази з коренями в математиці мають ширший зміст. Бо корені бувають не тільки квадратні, а й кубічні четвертого, п'ятого, ..., сьомого степенів. Корені з числа a таких степенів позначають символами: $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ..., $\sqrt[n]{a}$.

Вирази, що містять будь-які з таких коренів, називають *виразами з коренями*, або *ірраціональними виразами*. Вирази з арифметичними квадратними коренями — це тільки частина ірраціональних виразів.

Раніше знаки коренів $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, ..., $\sqrt[n]{a}$ називали *радикалами*, тому іноді і дотепер ірраціональні вирази називають виразами з радикалами.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Ірраціональні вирази. Урок 3).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які дії можна виконувати над виразами з коренями?
2. Чи можна перетворювати вирази з коренями за формулами скороченого множення?
3. Наведи приклади винесення множника за знак кореня.
4. Як можна позбутися ірраціональності в знаменнику дробу?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Спрости вираз.

а) $\sqrt{50} - \sqrt{18}$; б) $(\sqrt{17} - 1)(\sqrt{17} + 1)$; в) $(\sqrt{5} + 2)^2 - 4\sqrt{5}$.

Розв'язання.

а) $\sqrt{50} - \sqrt{18} = \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{9 \cdot 2} = 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$;

б) $(\sqrt{17} - 1)(\sqrt{17} + 1) = (\sqrt{17})^2 - 1 = 17 - 1 = 16$;

в) $(\sqrt{5} + 2)^2 - 4\sqrt{5} = (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5} \cdot 2 + 4 - 4\sqrt{5} = 5 + 4\sqrt{5} + 4 - 4\sqrt{5} = 9$.

Відповідь. а) $2\sqrt{2}$; б) 16; в) 9.

2. Розклади на множники вираз.

а) $\sqrt{28} - \sqrt{2}$; б) $n + \sqrt{n}$; в) $a - 1$, якщо $a > 1$.

Розв'язання.

а) $\sqrt{28} - \sqrt{2} = \sqrt{2 \cdot 14} - \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{14} - \sqrt{2} = \sqrt{2}(\sqrt{14} - 1)$;

б) $n + \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} + \sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)$;

в) якщо a — число додатне, то $a = (\sqrt{a})^2$.

Тому $a-1 = (\sqrt{a})^2 - 1 = (\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)$.

Відповідь. а) $\sqrt{2}(\sqrt{14}-1)$; б) $\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)$; в) $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+1)$.

3. Звільнився від ірраціональності в знаменнику дробу.

а) $\frac{4}{\sqrt{6}}$; б) $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

Розв'язання. а) $\frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4 \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$;

б) $\frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$.

Відповідь. а) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$; б) $\frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$.

ВИКОНАЙ УСНО



779. Спрости вираз.

а) $2\sqrt{5}+7\sqrt{5}$;

б) $8\sqrt{3}-4\sqrt{3}$;

в) $13\sqrt{2a}-3\sqrt{2a}$.

780. Знайди суму, різницю, добуток і частку чисел.

а) $6\sqrt{2}$ і $3\sqrt{2}$;

б) $-10\sqrt{3}$ і $5\sqrt{3}$.

781. Знайди квадрат числа.

а) $\sqrt{23}$;

б) $3\sqrt{2}$;

в) $-\sqrt{0,4}$.

782. Хто з дітей правильно виніс множник з-під знака кореня?

Максим: $\sqrt{20} = 5\sqrt{4}$;

Дмитро: $\sqrt{20} = 4\sqrt{5}$;

Олександра: $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$;

Катерина: $\sqrt{20} = 2\sqrt{10}$.

783. Винеси множник з-під знака кореня.

а) $\sqrt{12}$;

б) $\sqrt{18}$;

в) $\sqrt{500}$.

784. Внеси множник під знак кореня.

а) $5\sqrt{2}$;

б) $-3\sqrt{2}$;

в) $7\sqrt{10}$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Винеси множник з-під знака кореня (**785, 786**).

785. а) $\sqrt{8}$;

б) $\sqrt{20}$;

в) $\sqrt{32}$;

г) $\sqrt{98}$;

г) $\sqrt{162}$;

д) $\sqrt{300}$;

е) $\sqrt{0,72}$;

е) $\sqrt{17500}$.



786. а) $\sqrt{12}$; б) $\sqrt{27}$; в) $\sqrt{45}$; г) $\sqrt{72}$;
 р) $\sqrt{640}$; д) $\sqrt{500}$; е) $\sqrt{0,48}$; є) $\sqrt{10800}$.

787. Гра. Один із гравців / одна із гравчинь записує квадратний корінь з деякого числа, а інший / інша має сказати, чи можна винести множник з-під знака кореня, і якщо так, то записати утворений вираз. Потім учні / учениці міняються ролями.

Внеси множник під знак кореня (788–791).

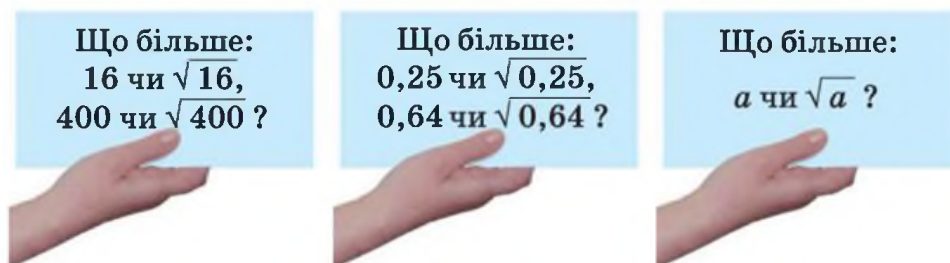
788. а) $2\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{10}$; в) $12\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{21}$;
 р) $2\sqrt{3a}$; д) $-6\sqrt{2b}$; е) $0,5\sqrt{0,2}$; є) $1,2\sqrt{0,1}$.

789. а) $11\sqrt{2}$; б) $5\sqrt{3}$; в) $-10\sqrt{7}$; г) $-3\sqrt{6}$;
 р) $3\sqrt{2a}$; д) $-4\sqrt{3c}$; е) $1,5\sqrt{2}$; є) $2,5\sqrt{10}$.

790. а) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $-3\sqrt{\frac{2}{3}}$; в) $1\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{33}}$; г) $-2\frac{1}{4}\sqrt{5\frac{1}{3}}$.

791. а) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; б) $-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$; в) $1\frac{1}{5}\sqrt{2\frac{1}{2}}$; г) $-3\frac{2}{5}\sqrt{\frac{5}{17}}$.

792. Дай відповідь на запитання, наведені на малюнку 16.1. Спробуй зробити узагальнення.



Мал. 16.1

Спрости вираз (793–796).

793. а) $2\sqrt{a} + 3\sqrt{a} - 4\sqrt{a}$; б) $2\sqrt{x} + \sqrt{x} - 5\sqrt{x}$;
 в) $\sqrt{25a} - \sqrt{64a} + \sqrt{9a}$; г) $9\sqrt{p} - \sqrt{9p} + \sqrt{16p}$.

794. а) $5\sqrt{c} - 2\sqrt{c} + 6\sqrt{c}$; б) $7\sqrt{y} - \sqrt{y} + 3\sqrt{y}$;
 в) $\sqrt{16a} + \sqrt{81a} - \sqrt{169a}$; г) $\sqrt{25b} - \sqrt{81b} + 3\sqrt{b}$.

795. а) $2\sqrt{20x} - \sqrt{5x} - \sqrt{45x}$; б) $\sqrt{18p} - \sqrt{8p} + \sqrt{81}$;
 в) $\sqrt{12a} - \sqrt{75a} + \sqrt{48a}$; г) $\sqrt{6b} - \sqrt{54b} + \sqrt{24b}$.

796. а) $\sqrt{48m} - \sqrt{300m} + \sqrt{75m}$; б) $\sqrt{72a} - \sqrt{50a} + 2\sqrt{18a}$;
 в) $\sqrt{20c} + \sqrt{125c} - \sqrt{500c}$; г) $3\sqrt{28n} + \sqrt{63n} - 2\sqrt{7n}$.

Порівняй значення виразів (797, 798).

797. а) $2\sqrt{3}$ і $\sqrt{15}$;

б) $3\sqrt{2}$ і $\sqrt{17}$;



в) $\frac{2}{3}\sqrt{27}$ і $3\sqrt{\frac{2}{3}}$;

г) $0,2\sqrt{150}$ і $\frac{1}{3}\sqrt{54}$.

798. а) $3\sqrt{5}$ і $5\sqrt{3}$;

б) $\sqrt{26}$ і $3\sqrt{3}$;

в) $\frac{1}{3}\sqrt{108}$ і $\frac{2}{5}\sqrt{75}$;

г) $0,5\sqrt{12}$ і $\frac{1}{3}\sqrt{18}$.

Виконай дії (799–804).

799. а) $(\sqrt{12} + \sqrt{75}) \cdot \sqrt{3}$;

б) $(\sqrt{18} - \sqrt{50}) \cdot \sqrt{2}$;

в) $(4\sqrt{3} - \sqrt{27}) \cdot \sqrt{12}$;

г) $(-3\sqrt{18} + \sqrt{72}) \cdot 2\sqrt{2}$.

800. а) $(\sqrt{20} + \sqrt{45}) \cdot \sqrt{5}$;

б) $(\sqrt{63} - \sqrt{28}) \cdot \sqrt{7}$;

в) $(7\sqrt{24} - 5\sqrt{54}) \cdot \sqrt{6}$;

г) $(5\sqrt{12} - 3\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}$.

801. а) $(\sqrt{7} - 2)(\sqrt{7} + 3)$;

б) $(2 - \sqrt{3})(5 - 2\sqrt{3})$;

в) $(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5})$;

г) $(3\sqrt{5} + 2)(2 - 3\sqrt{5})$.

802. а) $(2 - \sqrt{3})(4 + 2\sqrt{3})$;

б) $(6 - 3\sqrt{2})(2 - \sqrt{2})$;

в) $(2\sqrt{3} + 1)(2\sqrt{3} - 1)$;

г) $(4 + 3\sqrt{7})(3\sqrt{7} - 4)$.

803. а) $(1 + \sqrt{3})^2$;

б) $(3\sqrt{2} + 5\sqrt{3})^2$;

в) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 + 2\sqrt{10}$;

г) $(\sqrt{5} + 1)^2 - \sqrt{20}$.

804. а) $(3 - \sqrt{5})^2$;

б) $(2\sqrt{3} - \sqrt{5})^2$;

в) $(\sqrt{7} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{14}$;

г) $(1 - \sqrt{3})^2 + \sqrt{12}$.

805. **ЗНО** Установіть відповідність між числовими виразами (1–4) та їх значеннями (А–Д).

1	$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6}$	А 15
2	$(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$	Б 6
3	$(3\sqrt{3} - \sqrt{12})^2$	В 5
4	$\sqrt{2}(\sqrt{50} - \sqrt{8})$	Г 3
		Д 1

«Математика володіє не тільки істотною, а й найвищою красою».

Б. Рассел

806. Винеси множник з-під знака кореня, якщо $a > 0$.

а) $\sqrt{2a^2}$; б) $\sqrt{12a^2}$; в) $3\sqrt{a^3}$; г) $\sqrt{8a^4}$.

807. Винеси множник з-під знака кореня, якщо $x > 0, y > 0$.

а) $\sqrt{3x^2}$; б) $\sqrt{7y^4}$; в) $\sqrt{2x^3}$; г) $\sqrt{9x^5y^2}$.

808. Внеси множник під знак кореня, якщо $x > 0$.

а) $2x\sqrt{3}$; б) $x\sqrt{2x}$; в) $x^2\sqrt{5}$; г) $3x^3\sqrt{x}$.

809. Внеси множник під знак кореня, якщо $x > 0, y > 0$.

а) $x\sqrt{2}$; б) $y\sqrt{3}$; в) $2x^2\sqrt{x}$; г) $3y\sqrt{x}$.

Звільнися від ірраціональності в знаменнику дробу (**810, 811**).

810. а) $\frac{x}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{a}}$; в) $\frac{2}{\sqrt{2}}$; г) $\frac{6}{\sqrt{3}}$;

г) $\frac{12}{\sqrt{6}}$; д) $\frac{7}{3\sqrt{2}}$; е) $\frac{6}{5\sqrt{12}}$; є) $\frac{a}{b\sqrt{a}}$.

811. а) $\frac{a}{\sqrt{3}}$; б) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; в) $\frac{3}{\sqrt{3}}$; г) $\frac{8}{\sqrt{2}}$;

г) $\frac{15}{\sqrt{5}}$; д) $\frac{12}{5\sqrt{3}}$; е) $\frac{3}{2\sqrt{5}}$; є) $\frac{2c}{b\sqrt{c}}$.

812. Звільнися від ірраціональності в знаменнику дробу.

а) $\frac{2}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; б) $\frac{34}{3\sqrt{2}+1}$; в) $\frac{9}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; г) $\frac{x}{1-\sqrt{x}}$.

813. Rationalize a denominator of the fraction.

а) $\frac{6}{\sqrt{7}-2}$; б) $\frac{10}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; в) $\frac{22}{2\sqrt{3}+1}$; д) $\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

814. Що більше?

а) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{235} \cdot \sqrt{6}$ чи $\sqrt{3} \cdot \sqrt{237} \cdot \sqrt{10}$;

б) $\sqrt{0,2} \cdot \sqrt{0,03} \cdot \sqrt{0,006}$ чи $\sqrt{0,3} \cdot \sqrt{0,06} \cdot \sqrt{0,002}$.

815. Що більше: сума десяти доданків $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{2}$ чи добуток



десяти множників $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \dots \cdot \sqrt{2}$?

Виконай дії (**816, 817**).

816. а) $\sqrt{6} \cdot (\sqrt{50} + \sqrt{32}) - 10\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{10} \cdot (\sqrt{45} - \sqrt{80}) + \sqrt{200}$;

в) $(\sqrt{42} - \sqrt{189}) \cdot \sqrt{21} - 21\sqrt{2}$; г) $(\sqrt{56} - \sqrt{63}) \cdot \sqrt{14} + \sqrt{800}$.



817. а) $(\sqrt{30} + \sqrt{24}) \cdot \sqrt{6} - 6\sqrt{5}$; б) $(\sqrt{60} - 2\sqrt{45}) \cdot \sqrt{15} + \sqrt{2700}$;
в) $(\sqrt{125} - 2\sqrt{5}) \cdot \sqrt{10} + \sqrt{32}$; г) $(7\sqrt{3} + \sqrt{6}) \cdot \sqrt{6} - \sqrt{800}$.

Обчисли (818, 819).

818. а) $(3\sqrt{32} + \sqrt{162} - 2\sqrt{288}) \cdot \sqrt{2} + 15$; б) $(4\sqrt{150} - 6\sqrt{54} + 2\sqrt{96})^2 - 20$;
в) $(\sqrt{45} - \sqrt{20}) : \sqrt{5}$; г) $\frac{7\sqrt{108} - \sqrt{12}}{2\sqrt{75}}$.

819. а) $(4\sqrt{12} - 6\sqrt{48} + 5\sqrt{27}) \cdot \sqrt{3} - 12$; б) $(2\sqrt{320} - 7\sqrt{20} - \sqrt{45})^2 + 20$;
в) $(\sqrt{28} + \sqrt{63}) : \sqrt{7}$; г) $\frac{3\sqrt{28} + 2\sqrt{175}}{2\sqrt{112}}$.

820. Площа поверхні куба дорівнює $37,5 \text{ дм}^2$ (мал. 16.2). Знайди довжину його ребра.

821. Площа поверхні тіла, складеного із семи рівних кубів (мал. 16.3), дорівнює 480 см^2 . Знайдіть довжину ребра такого куба.

822. Винеси множник з-під знака кореня, якщо $a < 0, c < 0$.

- а) $\sqrt{12a^4}$; б) $\sqrt{3c^{10}}$;
в) $-\sqrt{-18a^7}$; г) $-\sqrt{32a^2c^8}$;
г) $\sqrt{-48a^{11}c^2}$; д) $\sqrt{60a^7c^9}$;
е) $\sqrt{\frac{20a^4}{-9c}}$; є) $\sqrt{\frac{27a^{16}}{16c^6}}$.

823. Винеси множник з-під знака кореня, якщо $x < 0$.

- а) $\sqrt{2x^2}$; б) $\sqrt{20x^4}$; в) $-\frac{2}{x}\sqrt{x^2c}$; г) $\sqrt{x^6m}$.

824. Внесіть множник під знак кореня, якщо $c < 0$.

- а) $c\sqrt{a}$; б) $c^2\sqrt{a}$; в) $c^3\sqrt{x}$; г) $c^4\sqrt{p}$.

825. Внеси множник під знак кореня, якщо $m < 0$.

- а) $m\sqrt{m^2}$; б) $2m\sqrt{\frac{1}{m^2}}$; в) $m^2\sqrt{\frac{3}{m^4}}$; г) $m^3\sqrt{\frac{1}{m^8}}$.

Розклади на множники вираз (826, 827).

826. а) $\sqrt{35} - \sqrt{5}$; б) $7 - \sqrt{7}$; в) $x\sqrt{y} - \sqrt{x}$; г) $4a^2 - 3$;
г) $m^2 - n$, якщо $n \geq 0$; д) $x - y$, якщо $x \geq 0; y \geq 0$;
е) $a - 2\sqrt{ab} + b$, якщо $a \geq 0; b \geq 0$; є) $x^2 + 4x\sqrt{y} + 4y$, якщо $y \geq 0$.



Мал. 16.2



Мал. 16.3

827. а) $\sqrt{35} - \sqrt{7}$; б) $a + \sqrt{a}$; в) $a\sqrt{c} - c\sqrt{a}$; г) $a^2 - 5$;
 г) $p - a$, якщо $p \geq 0$; $a \geq 0$; д) $9x^2 - y$, якщо $y \geq 0$;
 е) $a + 2\sqrt{a} + 1$, якщо $a \geq 0$; є) $x^2 - 6x\sqrt{c} + 9c$, якщо $c \geq 0$.

Скороти дріб (828, 829).

828. а) $\frac{\sqrt{a}-1}{a-1}$; б) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{z}}{x-z}$; в) $\frac{a+\sqrt{2}}{a^2-2}$;
 г) $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+a}$; г) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{a\sqrt{x}+x\sqrt{a}}$; д) $\frac{a+2\sqrt{a}+1}{a+\sqrt{a}}$;
 е) $\frac{x-6\sqrt{x}+9}{x-9}$; є) $\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2+\sqrt{3}}$; ж) $\frac{(\sqrt{7}-1)^2}{\sqrt{7}-4}$.
829. а) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; б) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$; в) $\frac{4a^2-x}{2a-\sqrt{x}}$;
 г) $\frac{\sqrt{m}-2}{m-2\sqrt{m}}$; г) $\frac{a\sqrt{b}+b\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$; д) $\frac{a-2\sqrt{3a}+3}{a-\sqrt{3a}}$;
 е) $\frac{m-4\sqrt{m}+4}{m-4}$; є) $\frac{(\sqrt{5}-3)^2}{7-3\sqrt{5}}$; ж) $\frac{(\sqrt{6}-2)^2}{2\sqrt{6}-5}$.

Спрости вираз (830, 831).

830. а) $(2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2$; б) $(7-2\sqrt{10})(\sqrt{2}+\sqrt{5})^2$;
 в) $\sqrt{9-4\sqrt{2}} \cdot \sqrt{9+4\sqrt{2}}$; г) $(\sqrt{5+\sqrt{24}} + \sqrt{5-\sqrt{24}})^2$.
831. а) $(\sqrt{5}+3)^2 - (\sqrt{5}-3)^2$; б) $(14+6\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^2$;
 в) $\sqrt{10+2\sqrt{21}} \cdot \sqrt{10-2\sqrt{21}}$; г) $(\sqrt{6+\sqrt{20}} - \sqrt{6-\sqrt{20}})^2$.

832. **ЗНО** Обчисли значення виразу.

а) $20\sqrt{6} - \left(\frac{4}{\sqrt{2}} + 5\sqrt{3}\right)^2$; б) $\frac{\sqrt{18-8\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{9+4\sqrt{2}}$.

Звільнися від ірраціональності у знаменнику дробу (833, 834).

833. а) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; б) $\frac{a-1}{\sqrt{a+3}-2}$; в) $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{8}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$; г) $\frac{x}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1-2x}}$.
834. а) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; б) $\frac{b+1}{\sqrt{b+5}-2}$; в) $\frac{\sqrt{20}+\sqrt{12}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; г) $\frac{4-a}{\sqrt{a+1}-\sqrt{2a-3}}$.

Порівняй числа (835, 836).

835. а) $\sqrt{7} + \sqrt{3}$ і $\sqrt{19}$; б) $6 - \sqrt{14}$ і $\sqrt{37} - \sqrt{15}$.
836. а) $\sqrt{3} + \sqrt{19}$ і $\sqrt{24}$; б) $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ і $\sqrt{17} - \sqrt{15}$.

837. Що більше: $\sqrt{2003} - \sqrt{2001}$ чи $\sqrt{2004} - \sqrt{2002}$?

Спрости вираз (838–841).

838. а) $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{7 + 2\sqrt{6}}$; в) $\sqrt{21 - 8\sqrt{5}}$.

839. а) $\sqrt{12 + 2\sqrt{11}}$; б) $\sqrt{6 - 4\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{67 + 12\sqrt{7}}$.

840. а) $\frac{2 + a^2}{\sqrt{2} - a} - \frac{2\sqrt{2}a}{\sqrt{2} - a}$; б) $\frac{a - 4}{a - 3\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 2} - \frac{1}{\sqrt{a} - 3}$;

в) $\left(\frac{1}{x + x\sqrt{y}} + \frac{1}{x - x\sqrt{y}} \right) : \frac{2}{y - 1}$; г) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \cdot \frac{a - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} + \frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$.

841. а) $\frac{a + 3\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{ab} - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{b}$; б) $\frac{3\sqrt{a} - 6}{9a + 6\sqrt{a} + 1} : \frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a} + 1} + \frac{9\sqrt{a}}{3\sqrt{a} + 1}$;

в) $\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right) \cdot \frac{x - 2\sqrt{xy} + y}{x} + \frac{4\sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

842. Доведи рівності індійського математика А. Бхаскара (1114–1185).

а) $\sqrt{5 + \sqrt{24}} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$; б) $\frac{\sqrt{9} + \sqrt{54} + \sqrt{450} + \sqrt{75}}{5 + \sqrt{3}} = 3\sqrt{2} + \sqrt{3}$;

в) $\sqrt{10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$.

843. Задача французького математика Ж. Л. Ф. Бертрана (1822–1900).

Доведи, що $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}} = \sqrt{2}$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

844. Знайди квадрат і куб числа: а) $2,1 \cdot 10^6$; б) $8,3 \cdot 10^{-5}$.

845. Побудуй графік рівняння $x^2 - y = 0$.

846. Розв'яжи систему рівнянь.

а) $\begin{cases} \frac{x+y}{3} + x = 15, \\ y - \frac{y-x}{5} = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x-y}{2} + y = 4, \\ x - \frac{y-x}{3} = 9; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 7, \\ |x - y| = 5. \end{cases}$

847. Один із кутів трикутника дорівнює 50° , а різниця двох інших — 50° . Знайди міри цих кутів.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Умію виконувати дії з виразами, що містять квадратні корені.
- ✓ Розумію, що таке винесення множника з-під знака кореня, і вмію розв'язувати вправи, що передбачають такі перетворення.
- ✓ Розумію, що таке внесення множника під знак кореня, і вмію розв'язувати вправи, що передбачають такі перетворення.
- ✓ Розумію, що означає звільнити дріб від ірраціональності в знаменнику.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке функція;
- що таке область визначення і область значень функції;
- як складають таблицю значень функції;
- як будують графік функції;
- як за графіком визначають властивості функції;
- як розв'язують рівняння графічно.

§ 17. Функція $y = \sqrt{x}$ **КЛЮЧОВІ СЛОВА**

- властивості функції $y = \sqrt{x}$ — *properties of the function $y = \sqrt{x}$*

Ти вже знаєш, що площа квадрата є функцією довжини його сторони: $S = a^2$. У даному параграфі ми з'ясуємо, як залежить довжина сторони квадрата від зміни його площі. Для цього розв'яжемо рівняння $a^2 = S$ ($S > 0$, $a > 0$), використавши означення арифметичного кореня. Маємо: $a = \sqrt{S}$. Користуючись цією формулою, кожному значенню S можемо поставити у відповідність єдине значення a , тобто a є функцією S .

Існують й інші задачі, розв'язування яких приводить до функцій, де аргумент розміщується під знаком квадратного кореня. Розглянемо 2 такі задачі.

Площу круга (S) знаходять за формулою $S = \pi R^2$, де R — радіус круга, $\pi \approx 3,14$. Звідси

$$R = \sqrt{\frac{S}{\pi}}.$$

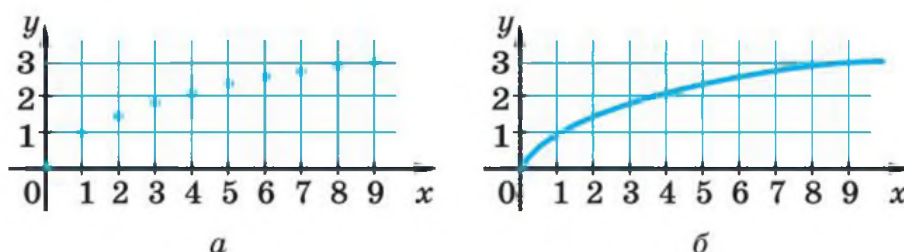
Шлях, що проходить тіло під час вільного падіння, визначають формулою $h = \frac{1}{2}gt^2$, де t — час, g — прискорення вільного падіння

(стала, що приблизно дорівнює $9,8 \text{ м/с}^2$). Звідси $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Далі розглянемо властивості функції $y = \sqrt{x}$. Область її визначення — множина невід'ємних дійсних чисел, оскільки тільки з невід'ємного числа можна добути квадратний корінь. Складемо таблицю значень функції для кількох значень аргументу x .

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1	1,41	1,73	2	2,24	2,45	2,65	2,83	3

Дробові значення тут наближені. Точки з координатами, наведені у цій таблиці, позначимо на малюнку 17.1, а. Якщо на координатній площині позначити точки з координатами x і y за умови, що змінна x набуває всіх невід'ємних дійсних значень, то одержимо графік функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 17.1, б). Цей графік — одна вітка параболи, вона виходить з початку координат і розміщена в першому координатному куті. Функція $y = \sqrt{x}$ зростає на всій області визначення.



Мал. 17.1

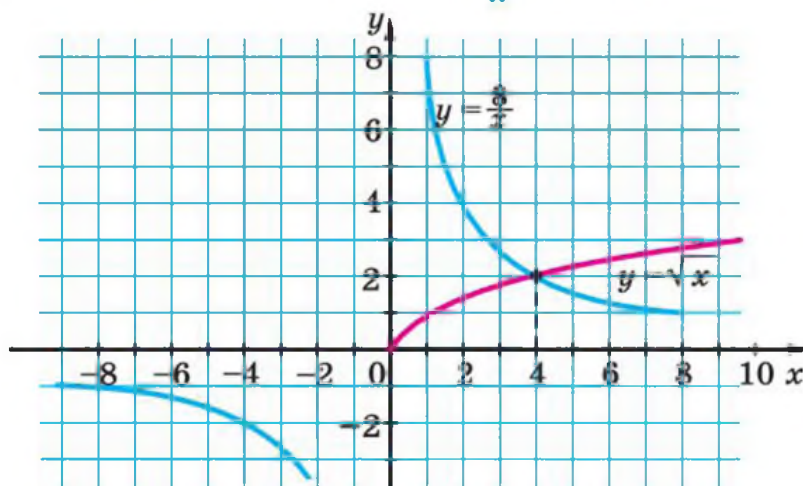
Властивості функції $y = \sqrt{x}$ можна встановити за графіком, зображеним, наприклад, на малюнку 17.1, б. Подаємо їх у вигляді таблиці.

Властивості функції	Вид функції $y = \sqrt{x}$
Область визначення	Усі невід'ємні числа ($x \geq 0$)
Область значень	Усі невід'ємні числа ($y \geq 0$)
Додатні значення	Усі числа, крім $x = 0$
Від'ємні значення	—
Проміжки спадання	—
Проміжки зростання	$x \geq 0$

У сучасній математиці графіки функцій використовують досить часто. Зупинимось на графічному розв'язуванні рівнянь.

Нехай треба розв'язати рівняння $\frac{8}{x} - \sqrt{x} = 0$.

Замінімо дане рівняння рівносильним $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$ і побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{8}{x}$ і $y = \sqrt{x}$ (мал. 17.2).



Мал. 17.2

Ці графіки перетинаються в точці з абсцисою $x = 4$.

Підставивши $x = 4$ у дане рівняння, переконуємося, що 4 — точний корінь рівняння.

Інших спільних точок побудовані графіки не мають, отже, дане рівняння має тільки один корінь: $x = 4$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Графік функції $y = \sqrt{x}$ не обов'язково будувати за точками. Виявляється, що цей графік для $x > 0$ симетричний графіку функції $y = x^2$ відносно бісектриси першого координатного кута. Адже рівності $y = \sqrt{x}$ і $y^2 = x$ при додатному x виражають одну і ту саму залежність між змінними x і y . Якщо у другій з цих рівностей поміняти x на y , а y — на x , то це рівнозначно заміні осі x віссю y і навпаки. Такі функції, як $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$, ($x > 0$), називають *оберненими*. Побудуй їх графіки в одній системі координат і переконайся, що вони симетричні відносно прямої $y = x$.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Найпростіші функції. Урок 1).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Якою є: а) область визначення; б) область значень функції $y = \sqrt{x}$?
2. Чи має функція $y = \sqrt{x}$: а) найменше значення; б) найбільше значення?
3. Який графік має функція $y = \sqrt{x}$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

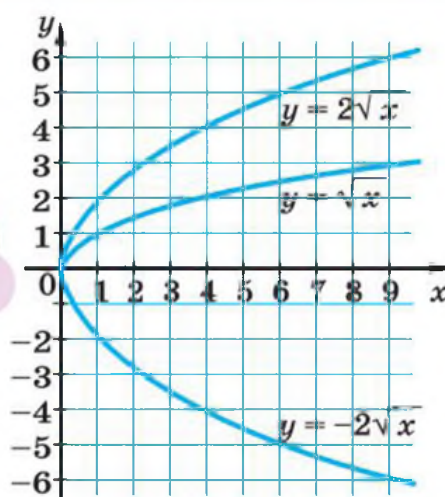


1. В одній системі координат побудуй графіки функцій $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ та $y = -2\sqrt{x}$.

Розв'язання. Складемо таблицю відповідних значень x і y .

x	0	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sqrt{x}$	0	0,7	1	1,4	1,7	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3
$2\sqrt{x}$	0	1,4	2	2,8	3,4	4	4,4	4,8	5,2	5,6	6
$-2\sqrt{x}$	0	-1,4	-2	-2,8	-3,4	-4	-4,4	-4,8	-5,2	-5,6	-6

Дробові значення тут наближені. Побудуємо в системі координат точки, координати яких подано в таблиці. Одержимо графіки відповідних функцій (мал. 17.3).



Мал. 17.3

ВИКОНАЙ УСНО



848. Знайди значення функції $y = \sqrt{x}$, якщо $x = 1$; 16; 36; 100; 0,04; 1,21.

849. При якому значенні x значення функції $y = \sqrt{x}$ дорівнює 8?

А 4

Б 8

В 16

Г 64

850. Через яку з точок не проходить графік функції $y = \sqrt{x}$?

А (4; 2)

Б (4; 16)

В (9; 3)

Г (0,01; 0,1)

851. Розв'яжи рівняння.

а) $\sqrt{x} = 0$;

б) $\sqrt{x} = -1$;

в) $\sqrt{x} = 2$.

852. Скільки спільних точок мають графіки функцій?

а) $y = 1$ і $y = \sqrt{x}$;

б) $y = \sqrt{x}$ і $y = -5$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

853. Заповни таблицю для функції $y = \sqrt{x}$.

x	0	0,25	1	2,25	4	6,25	7,84	9	12,25	14,44	16
y											

Побудуй графік.



854. Користуючись графіком функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 17.4), знайди:

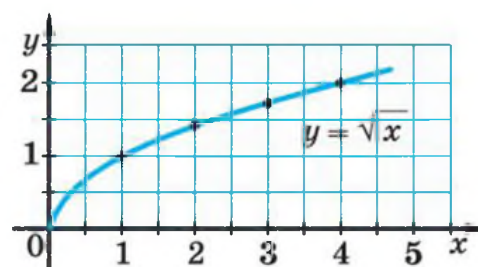
а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 0,8; 1; 1,2; 2,3; 4;

б) значення аргументу, якому відповідає значення функції, що дорівнює: 0; 1,3; 1,7; 2.

855. Користуючись графіком функції $y = \sqrt{x}$ (мал. 17.4), знайди:

а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює: 0; 0,5; 2; 2,5; 3;

б) значення аргументу, якому відповідає значення функції, що дорівнює: 0,5; 1; 1,5; 2,2.



Мал. 17.4

856. Функцію задано формулою $y = \sqrt{x}$. Знайди значення:

а) функції, якщо значення аргументу дорівнює: 4; 64; 121; 0,16; 2500;

б) аргументу, якщо значення функції дорівнює: 4; 0,5; 1,1; 13.

857. The function is given by the formula $y = \sqrt{x}$. Find the value of:

а) the function if the argument value is equal: 9; 25; 1,21; 0,04; 4900;

б) the argument if the function value is equal: 1; 0,3; 1,2; 15.

858. Які з точок належать графіку функції $y = \sqrt{x}$?



A(1; 1);

B(16; -4);

C(0,4; 0,2);

D(0,09; 0,3);

E $\left(2\frac{7}{9}; 1\frac{2}{3}\right)$;

F $\left(-\frac{4}{9}; -\frac{2}{3}\right)$.

859. Чи проходить графік функції $y = \sqrt{x}$ через точки:

A(16; 4);

B(16; -4);

C(-5; 25);

K(10; $\sqrt{10}$)?

Порівняй числа (860, 861).

860. а) $\sqrt{32}$ і $\sqrt{35}$;

б) $\sqrt{1,17}$ і $\sqrt{1,07}$;

в) $\sqrt{48,8}$ і 7;

г) $\sqrt{2300}$ і $20\sqrt{5}$.

861. а) $\sqrt{73}$ і $\sqrt{72}$;

б) $\sqrt{0,38}$ і $\sqrt{0,4}$;

в) $\sqrt{65,1}$ і 8;

г) $\sqrt{1800}$ і $30\sqrt{2}$.

Між якими двома послідовними цілими числами міститься число (862, 863)?

862. а) $\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{17}$;

в) $\sqrt{90}$;

г) $-\sqrt{13}$.

863. а) $\sqrt{5}$;

б) $\sqrt{21}$;

в) $\sqrt{105}$;

г) $-\sqrt{33}$.

864. Гра. Один із учасників / одна із учасниць записує квадратний корінь з деякого числа, другий / друга — ще один квадратний корінь, а третій / третя — має їх порівняти. Потім учні / учениці міняються ролями.

865. Існує 10 точок, які належать графіку функції $y = 2\sqrt{x}$. Їх абсциси містяться у першій таблиці, а ординати — у другій. Правильно установивши відповідність між числами першої таблиці і буквами другої, ти дізнаєшся прізвище відомого українського математика. Він був учителем М. Г. Крейна, вважав його одним із найкращих математиків України і писав про нього: «Мені дуже приємно вважати його своїм першим учнем». Портрет цього математика висів на стіні домашнього кабінету Марка Григоровича. Дізнайся більше про М. Г. Крейна.



М. Г. Крейн

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
49	1,21	100	25	400	0,09	169	1	0	$\sqrt{16}$
2	20	0	0,6	14	4	2,2	26	40	10
Ь	Б	О	А	Ч	В	Е	Р	Т	О

Розв'яжи графічно рівняння (**866**, **867**).

866. а) $\sqrt{x} = 3$; б) $\sqrt{x} = x$; в) $\sqrt{x} + 2 = 0$.

867. а) $\sqrt{x} + 3 = 0$; б) $\sqrt{x} = 0,5x$; в) $\sqrt{x} - 2 = 0$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

868. Побудуй в одній системі координат графіки функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$, якщо $x \geq 0$. Чи симетричні ці графіки? Відносно якої прямої?

869. Дано графік функції $y = \sqrt{x}$. Чи перетинає його пряма:

- а) $y = 1$; б) $y = -1$;
в) $y = 4$; г) $y = -4$;
г) $y = 100$; д) $y = -100$?

Якщо перетинає, то в якій точці?

870. Не виконуючи побудови, знайди координати точки перетину графіка функції $y = \sqrt{x}$ і прямої.

- а) $y = 3$; б) $y = -3$;
в) $y = 144$; г) $y = -144$.



На малюнку 17.5, а, б побудовано графіки функцій $y = x$; $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. Користуючись графіками, порівняй (871, 872):

871. а) $0,7^2$ і $0,7$; б) $1,3$ і $\sqrt{1,3}$;

в) $0,26$ і $\sqrt{0,26}$; г) $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ і $\sqrt{\frac{4}{5}}$.

872. а) $0,2^2$ і $\sqrt{0,2}$; б) 2 і $\sqrt{2}$;

в) $0,31$ і $\sqrt{0,31}$; г) $\left(\frac{5}{3}\right)^2$ і $\sqrt{\frac{5}{3}}$.

873. Розмісти числа у порядку зростання.

а) $0,32$; $0,32^2$; $\sqrt{0,32}$; б) $1,74$; $1,74^2$; $\sqrt{1,74}$.

874. Розмісти числа у порядку спадання.

а) $3,57$; $3,57^2$; $\sqrt{3,57}$; б) $0,2$; $0,2^2$; $\sqrt{0,2}$.

Розв'яжи рівняння графічним способом (875, 876).

875. а) $x + \sqrt{x} = 6$; б) $x^2 - \sqrt{x} = 0$; в) $\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 0$.

876. а) $\sqrt{x} + 2 = x$; б) $x^2 + \sqrt{x} = 0$; в) $\sqrt{x} + \frac{6}{x} = 0$.

877. Чи має розв'язки рівняння?

а) $\sqrt{x} = x + 3$; б) $x + \sqrt{x} + 1 = 0$; в) $\sqrt{x} = 0,5x - 4$.

878. Скільки коренів має рівняння?

а) $\sqrt{x} = 0,5x + 2$; б) $\sqrt{x} = \frac{1}{3}(x + 2)$; в) $\sqrt{x} = -\frac{4}{x}$.

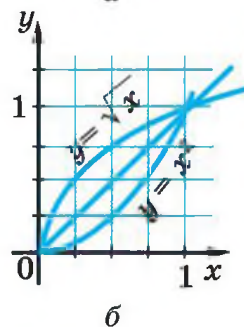
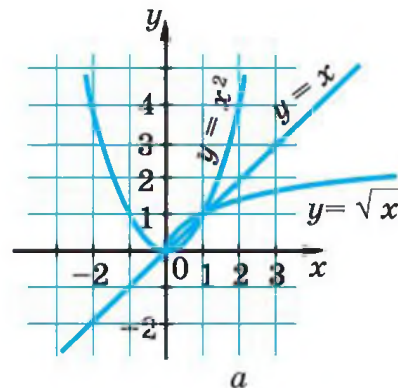
Побудуй графік функції (879, 880).

879. а) $y = \begin{cases} -2x, & \text{якщо } x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} 3x + 4, & \text{якщо } x < -1, \\ x^2, & \text{якщо } -1 \leq x \leq 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases}$

880. $y = \begin{cases} 3, & \text{якщо } x \leq -3, \\ -x, & \text{якщо } -3 < x < 0, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$

881. Побудуй графік функції.

а) $y = \sqrt{x+3}$; б) $y = \sqrt{x} + 3$; в) $y = \sqrt{x} - 3$.



Мал. 17.5

882. За допомогою Desmos Calculator (<https://vse.ee/cube¹>) побудуй графіки функцій в одній системі координат. Що ти помітив / помітила?



а) $y = \sqrt{x}$ і $y = -\sqrt{x}$;

б) $y = \sqrt{x}$ і $y = 2\sqrt{x}$;

в) $y = 2\sqrt{x}$, $y = \sqrt{x}$ і $y = \frac{1}{2}\sqrt{x}$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

883. Розв'яжи графічно рівняння. а) $\sqrt{-x} = x + 6$; б) $\sqrt{|x|} = x^2$.

884. Побудуй графік функції $y = \sqrt{(x-2)^2} - 2x$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Спрости вираз (885, 886).

885. а) $0,2x^{-2}y \cdot 5x^2y^{-2}$;

б) $(a^{-1} + b^{-1}) \cdot (a + b)^{-1}$;

в) $\left(\frac{m^4n^{-2}}{9p}\right)^2 \left(\frac{m^2n^{-3}}{3p}\right)^{-3}$;

г) $\left(\frac{a^4b^{-3}}{c^5}\right)^{-3} \left(\frac{c^8}{ab^3}\right)^2$.

886. а) $\frac{x}{x^2-4} - \frac{2}{3x+6}$;

б) $\frac{1}{3x-1} - \frac{2x}{6x^2-2x}$;

в) $1 - a + \frac{2a^2}{a+1}$.

887. У таблиці представлено результати виконання учнями та ученицями десяти завдань діагностувальної роботи. Скільки учнів / учениць одержали більше 7 балів? Скільки це становить відсотків від усіх учнів / учениць класу?

Кількість балів	Кількість учнів/учениць
4	1
5	3
6	6
7	2
8	4
9	3
10	1

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Умію будувати графік функції $y = \sqrt{x}$ за точками (0; 0); (1; 1); (4; 2) (9; 3).
- ✓ Можу встановити, яка з точок належить графіку заданої функції, а яка — ні.
- ✓ Умію характеризувати властивості функції $y = \sqrt{x}$ за її графіком.
- ✓ Умію графічно розв'язувати деякі рівняння, що містять $\sqrt{x}$.

¹ Desmos Calculator (<https://www.desmos.com/calculator?lang=uk>)

Перейди за посиланнями та

- підсумуй головне в розділі <https://vse.ee/crar>
- ознайомся з історичними відомостями <https://vse.ee/crau>



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ВАРІАНТ I

1. Обчисли.

а) $2\sqrt{81} - 3\sqrt{25}$;

б) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{45}$;

в) $\sqrt{68^2 - 32^2}$.

2. Спрости вираз.

а) $(4 - \sqrt{3})(4 + \sqrt{3})$;

б) $(1 + \sqrt{5})^2 - \sqrt{20}$;

в) $\sqrt{12} + \sqrt{75} - 6\sqrt{3}$.

3. Скороти дріб $\frac{a + \sqrt{a}}{\sqrt{a} + 1}$.4. Розв'яжи графічно рівняння $\sqrt{x} = 0,5x$.

ВАРІАНТ II

1. Обчисли.

а) $3\sqrt{100} - 2\sqrt{36}$;

б) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{28}$;

в) $\sqrt{82^2 - 18^2}$.

2. Спрости вираз.

а) $(6 + \sqrt{5})(6 - \sqrt{5})$;

б) $(3 - \sqrt{2})^2 + \sqrt{72}$;

в) $\sqrt{20} + \sqrt{125} - 8\sqrt{5}$.

3. Скороти дріб $\frac{x - 6\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 6}$.4. Розв'яжи графічно рівняння $\sqrt{x} = x - 6$.

ВАРІАНТ III

1. Обчисли.

а) $5\sqrt{16} + 2\sqrt{64}$;

б) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{75}$;

в) $\sqrt{58^2 - 42^2}$.

2. Спрости вираз.

а) $(\sqrt{44} - 6)(\sqrt{44} + 6)$;

б) $(2 + \sqrt{3})^2 - \sqrt{48}$;

в) $\sqrt{8} + \sqrt{50} - 6\sqrt{2}$.

3. Скороти дріб $\frac{a + 2\sqrt{a}}{\sqrt{a} + 2}$.4. Розв'яжи графічно рівняння $\sqrt{x} = 6 - x$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ



Тестові завдання № 4

1. Скільки коренів має рівняння $x^2 = 4$?
 А один Б два В безліч Г жодного
2. Число $\sqrt{51}$ міститься між числами:
 А 5 і 6 Б 6 і 7 В 7 і 8 Г 8 і 9
3. Укажи, яке число є ірраціональним.
 А $\sqrt{25}$ Б $-1,7$ В $3,14$ Г $\sqrt{5}$
4. Значення виразу $2\sqrt{25} - 4$ дорівнює:
 А 5 Б 6 В 4 Г 2
5. Рівність $(\sqrt{x})^2 = -x$ виконується, якщо:
 А $x > 0$ Б $x = 0$ В $x < 0$ Г x — будь-яке
6. Графіком якої функції є парабола?
 А $y = \sqrt{x}$ Б $y = x^2$ В $y = \frac{5}{x}$ Г $y = \frac{x}{5}$
7. Знайди корені рівняння $\sqrt{x} = 3$.
 А $\sqrt{3}$ Б 3 В 9 Г 9 або -9
8. Значення $\sqrt{11\frac{1}{9}}$ дорівнює:
 А $1\frac{1}{3}$ Б $\frac{3}{10}$ В $3\frac{1}{3}$ Г $11\frac{1}{3}$
9. Спрости вираз $\sqrt{27x^2}$, якщо $x < 0$.
 А $9x\sqrt{3}$ Б $3x\sqrt{3}$ В $-9x\sqrt{3}$ Г $-3x\sqrt{3}$
10. Графік функції $y = \sqrt{x}$ проходить через точку:
 А (2; 4) Б (1; 2) В (4; 2) Г (4; -2)

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ № 4



1. Знайди значення функції $y = \sqrt{2x^2 + 1}$, якщо значення аргументу дорівнює -2 .
 А $\sqrt{-7}$ Б $\sqrt{8}$ В 3 Г 3 або -3
2. Внеси множник під знак кореня $5\sqrt{3}$.
 А $\sqrt{8}$ Б $\sqrt{15}$ В $\sqrt{75}$ Г $\sqrt{125}$
3. Який знак потрібно поставити замість $*$ у виразі $3\sqrt{5} * 2\sqrt{11}$?
 А $>$ Б $<$ В $=$ Г не можна встановити
4. Установи відповідність між виразами (1–3) та їх значеннями (А–Д).

1 $\sqrt{225} - 2\sqrt{144}$	А -9
2 $\sqrt{2} \cdot (\sqrt{32} + \sqrt{8})$	В 5
3 $\frac{\sqrt{55} \cdot \sqrt{11}}{\sqrt{5}}$	Б 1
	Г 11
	Д 12

5. Розв'яжи графічно рівняння $x^2 = \sqrt{x}$.
6. Виконай дії.
 а) $\sqrt{10}(\sqrt{20} - 2\sqrt{45} + \sqrt{125}) - 5\sqrt{2}$; б) $(\sqrt{9 - 6\sqrt{2}} + \sqrt{9 + 6\sqrt{2}})^2$;
 в) $\frac{3}{2\sqrt{7} - 1} - \frac{3}{2\sqrt{7} + 1}$; г) $\sqrt{(6 - \sqrt{47})^2} + \sqrt{(6 + \sqrt{47})^2}$.
7. Звільнися від ірраціональності в знаменнику дробу.
 а) $\frac{15}{\sqrt{5}}$; б) $\frac{8}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$.
8. Спрости вираз.
 а) $ab\sqrt{a^3b} - 5a^2\sqrt{ab^3}$, якщо $a > 0$;
 б) $ab^2\sqrt{9a^6b^3} - 5a^2b\sqrt{a^4b^5}$, якщо $a < 0$.

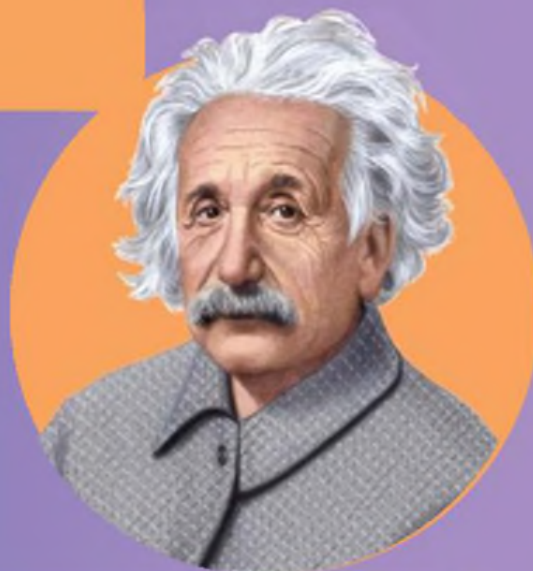
Додаткове завдання

9. Розв'яжи рівняння $\sqrt{5 + \sqrt{4 + \sqrt{x}}} = 3$.

Розділ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

Мені доводиться розподіляти свій час між політикою і рівняннями.
Але рівняння, на мою думку, набагато важливіші.

А. Ейнштейн



У попередніх класах ти вже навчився/навчилася складати та розв'язувати рівняння, але тільки найпростіші, до яких зводяться порівняно нескладні задачі. Для розв'язування складніших задач використовують квадратні рівняння. Вивчивши цю тему, ти зможеш розв'язувати багато прикладних задач з різних галузей знань.

§ 18 **Неповні квадратні рівняння**
Incomplete Quadratic Equations

§ 21 **Квадратний тричлен**
Quadratic Trinomial

§ 19 **Формула коренів квадратного рівняння**
Quadratic Equation Formula Roots

§ 22 **Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі**
Quadratic Equations as a Mathematical Applied Problem

§ 20 **Теорема Вієта**
Vieta Theorem

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

- неповні квадратні рівняння;
- формулу коренів квадратного рівняння;
- теорему Вієта;
- розкладання квадратного тричлена на множники.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке рівняння і корінь рівняння;
- що означає розв'язати рівняння;
- які рівняння називають лінійними з однією змінною;
- які рівняння називають рівняннями першого степеня з однією змінною;
- скільки коренів має рівняння першого степеня з однією змінною;
- квадрати натуральних чисел;
- як добувати квадратні корені з невід'ємних чисел.

§ 18. Неповні квадратні рівняння

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- коефіцієнти квадратного рівняння — *coefficients of a quadratic equations*
- неповне квадратне рівняння — *incomplete quadratic equations*

Задача. Одне з двох чисел більше за друге на 6, а їх добуток дорівнює 112. Знайди менше число.

Розв'язання. Позначимо менше із шуканих чисел буквою x . Тоді більше число дорівнює $x + 6$. Їх добуток — 112. Отже,

$$x(x + 6) = 112, \text{ або } x^2 + 6x - 112 = 0.$$

Це рівняння другого степеня з однією змінною. Такі рівняння називають також квадратними. Як його розв'язувати, покажемо у наступному параграфі.

Квадратним називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x — змінна; a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

Числа a, b, c — коефіцієнти квадратного рівняння:

a — перший коефіцієнт, b — другий, c — вільний член.

За означенням перший коефіцієнт квадратного рівняння не може дорівнювати нулю. Якщо хоч один коефіцієнт (b або c) дорівнює нулю, то квадратне рівняння називають **неповним**. Неповні квадратні рівняння бувають трьох видів:

$$1) ax^2 = 0; \quad 2) ax^2 + bx = 0; \quad 3) ax^2 + c = 0.$$

1. Рівняння виду $ax^2 = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 = 0$ і тому завжди має тільки один корінь $x = 0$.

2. Рівняння виду $ax^2 + bx = 0$ рівносильне рівнянню $x(ax + b) = 0$ і завжди має два корені: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$.

Приклад. Розв'яжи рівняння $5x^2 + 4x = 0$.

Розв'язання. Винесемо змінну x за дужки:

$$x(5x + 4) = 0.$$

Отже, $x = 0$, або $5x + 4 = 0$, звідси $x = -0,8$.

Відповідь. $x_1 = 0$, $x_2 = -0,8$.

3. Квадратне рівняння виду $ax^2 + c = 0$ ($c \neq 0$) рівносильне рівнянню $x^2 = -\frac{c}{a}$. Якщо $-\frac{c}{a} > 0$, то воно має два розв'язки: $x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$ і $x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$; якщо $-\frac{c}{a} < 0$ — жодного розв'язку.

Приклад. Розв'яжи рівняння $4x^2 - 3 = 0$.

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння: $4x^2 = 3$, $x^2 = \frac{3}{4}$, x — чис-

ло, квадрат якого дорівнює $\frac{3}{4}$. Таких чисел є два: $\sqrt{\frac{3}{4}}$ і $-\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Відповідь. $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Деякі квадратні рівняння (повні) можна розв'язувати, зводячи їх до неповних квадратних рівнянь. Наприклад, користуючись формулою квадрата двочлена, рівняння $x^2 - 2x + 1 = 0$ можна подати у вигляді $(x - 1)^2 = 0$ і розв'язати його так: $(x - 1)^2$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли $x - 1 = 0$, тобто $x = 1$.

Таким способом можна розв'язати кожне квадратне рівняння, ліву частину якого можна подати у вигляді квадрата двочлена.

Наприклад, $4y^2 + 4y + 1 = 0$, $(2y + 1)^2 = 0$, $2y + 1 = 0$, $y = -0,5$.

$$c^2 - 2\sqrt{2}c + 2 = 0, \quad (c - \sqrt{2})^2 = 0, \quad c - \sqrt{2} = 0, \quad c = \sqrt{2}.$$

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які рівняння називають квадратними?
2. Які рівняння називають неповними квадратними?
3. Назви три види неповних квадратних рівнянь. Як розв'язувати кожний з них?
4. Скільки розв'язків може мати неповне квадратне рівняння?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Розв'яжи квадратне рівняння.

а) $3x^2 - 6x = 0$; б) $2y^2 - 72 = 0$.

Розв'язання.

а) $3x^2 - 6x = 0$; б) $2y^2 - 72 = 0$;
 $3x(x - 2) = 0$; $2y^2 = 72$;
 $3x = 0$ або $x - 2 = 0$; $y^2 = 36$;
 $x_1 = 0, x_2 = 2$. $y_1 = 6, y_2 = -6$.

Відповідь. а) $x_1 = 0, x_2 = 2$; б) $y_1 = 6, y_2 = -6$.

2. Розв'яжи рівняння $\frac{9}{x+25} + \frac{16}{x} = 1$.

Розв'язання. $\frac{9^{\setminus x}}{x+25} + \frac{16^{\setminus x+25}}{x} - 1^{\setminus x^3+25x} = 0$,

$$\frac{9x+16x+400-x^2-25x}{x(x+25)} = 0, \quad \frac{400-x^2}{x(x+25)} = 0, \quad 400-x^2 = 0,$$

звідси $x_1 = -20, x_2 = 20$.

При цих значеннях x знаменник не перетворюється на нуль.

Отже, $x_1 = -20, x_2 = 20$ — корені рівняння.

Відповідь. $x_1 = -20, x_2 = 20$.

ВИКОНАЙ УСНО



888. Які з даних рівнянь є квадратними?

а) $x^2 = \frac{1}{x} + 3$; б) $2x^2 - 3x = 0$; в) $-x^2 + 5x + \sqrt{8} = 0$;
г) $2x^2 + x^3 = 0$; г) $5x^2 = 4 - 3x$; д) $2z(z + 5) = 7$.

889. Які з рівнянь є неповними квадратними?

а) $x^2 + 8 = 0$; б) $\sqrt{2}x^2 = 0$; в) $x^2 + 3x = 1$;
г) $x^2 + \frac{2}{x} = 0$; г) $\sqrt{5}x^2 + \pi x = 0$; д) $2x^2 - \sqrt{x} = 0$.

Розв'яжи рівняння (890–892).

890. а) $3x^2 = 0$; б) $\sqrt{7}y^2 = 0$; в) $-z^2 = 0$.

891. а) $x^2 - 2x = 0$; б) $3z^2 - 6z = 0$; в) $2c - c^2 = 0$.

892. а) $y^2 - 9 = 0$; б) $2x^2 - 8 = 0$; в) $-x^2 + 1 = 0$.

893. Яке з рівнянь має один корінь?

А $2x^2 = 8$ Б $2x^2 = 0$ В $2x^2 = -8$ Г $2x^2 - x = 0$

894. Скільки коренів має рівняння $5x^2 + 20 = 0$?

А один Б два В жодного Г безліч

895. Як потрібно змінити рівняння $8x^2 - 32 = 0$, щоб воно мало:

а) один корінь; б) жодного кореня?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



З наведених нижче рівнянь випиши: а) квадратні рівняння; б) неповні квадратні рівняння. Для кожного квадратного рівняння укажи, чому дорівнюють його перший і другий коефіцієнти та вільний член (896, 897).

896. а) $x^2 + 3x - 7 = 0$; б) $-2x^2 + \sqrt{3}x = 4$; в) $6x^2 - x^3 = 0$;

г) $\frac{1}{3}x^2 + 2x = 0$; ґ) $x + \frac{1}{x} + 4 = 0$; д) $9x^2 = 0$.

897. а) $x^2 - 2x + 6 = 0$; б) $x^3 - 2x^2 = 0$; в) $x^2 - 25 = x$.

Заміни дане рівняння рівнянням виду $ax^2 + bx + c = 0$ та вкажи значення коефіцієнтів a , b і c (898, 899).

898. а) $2x(x - 3) = 50$; б) $(3 - y)y = 5y^2 - 4$;
в) $4z^2 = 2z(3z + 5)$; ґ) $(1 - x)(3x - 2) = 2x + x^2$.

899. а) $(x - 1)(x - 2) = 4x$; б) $3(x + 5) - 8 = -5x(x + 2)$.

Розв'яжи рівняння (900, 901).

900. а) $3x^2 - 27 = 0$; б) $3x^2 + 27 = 0$; в) $0,5y^2 + y = 0$;
г) $z - 2z^2 = 0$; ґ) $x^2 - 144 = 0$; д) $0,16x^2 + 100 = 0$;
е) $16x^2 = 25$; є) $-4y^2 = 0$; ж) $(\sqrt{7} - \sqrt{3})x^2 = 0$.

901. а) $2x^2 - 8x = 0$; б) $x^2 + 3x = 0$; в) $12x = 0,24x^2$;
г) $x - x^2 = 0$; ґ) $-0,1x^2 = 0$; д) $9x^2 = 0$;
е) $9x^2 = 64$; є) $-2x^2 + 50 = 0$; ж) $100x^2 - 225 = 0$.

902. **ЗНО** Розв'яжи рівняння.

а) $x^2 = 25x$.

А -5; 5 Б 0; 25 В 25 Г -5; 0; 5 Д -25; 0

б) $4x^2 = 1$.

А -2; 2 Б 2 В 0,25 Г 0,5 Д -0,5; 0,5

903. **Гра.** Один із учасників / одна із учасниць записує неповне квадратне рівняння, а другий / друга має його розв'язати. Потім учні / учениці міняються ролями.

904. Розв'яжи рівняння.

а) $(x - 1)x + 3x = 0$;

б) $2y(y + 5) = 6y$;

в) $(z + 2)(z - 2) = 0$;

ґ) $(x + 2)(x - 2) = 4$;

г) $5x^2 + 3x + 7 = 7(x + 1)$;

д) $2(x^2 - 1) = (x - 1)(x + 1)$.

905. Установіть відповідність між рівняннями (1–3) та кількістю їх коренів (А–Д).



1	$2x(x + 5) = x^2 + 7x$	А	один
2	$4x^2 - 2x = x(x - 2)$	Б	два
3	$-8 - 6x = 2x(x - 3)$	В	три
		Г	жодного
		Д	безліч

Розв'яжи рівняння (906, 907).

906. а) $\frac{5-x^2}{3} = \frac{3x^2-2}{4}$; б) $\frac{z+1}{8} = \frac{1}{z-1}$; в) $\frac{2z^2}{5} = \frac{3z^2+1}{4}$.

907. а) $\frac{x^2-1}{7} = \frac{3}{4}$; б) $\frac{2x^2+3}{5} = \frac{4}{7}$; в) $\frac{y-2}{4} = \frac{-1}{y+2}$.

Які значення змінних задовольняють пропорцію (908, 909)?

908. а) $(x+1):2 = 4:(x-1)$; б) $(x-4):3 = 3:(x+4)$;
в) $(3x^2-4):5 = 3x^2:20$; г) $(0,2-x):4 = (0,01+x):(0,2+x)$.

909. а) $(3x-6):x = 5x:(3x+6)$; б) $(2x+1):13 = 3:(2x-1)$.

910. Знайди периметр квадрата, площа якого дорівнює:

а) 289 см^2 ; б) $0,81 \text{ м}^2$; в) S .

911. Знайди сторону квадрата, якщо його площа дорівнює:

а) 484 м^2 ; б) S .

Користуючись калькулятором, розв'яжи рівняння (912, 913).

912. а) $2,324x^2 = 93,70949$; б) $4,574z^2 = 4,8027z$.

913. а) $4,022y^2 - 9,0495 = 0$; б) $7,467x^2 = 7,84035x$.

914. 55 га поля квадратної форми засіяли пшеницею, а решту — 89 га — житом. Знайди периметр цього поля.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Розв'яжи рівняння (915, 916).

915. а) $(x-1)(x-5) + (x+3)^2 = x^2 + 18$;
б) $(x-2)^2 - (x+1)(x+4) = x(x+3)$;
в) $(x+3)^2 + (x-1)^2 = (x-2)(x+6) + 23$.

916. а) $(x+2)^2 + (x+10)(x-2) = x(x+12)$;
б) $(x+6)(x+1) - (x+5)^2 = x^2 - 19$;
в) $(x-2)^2 + (x+1)^2 = (x+3)(x-1) + 8$.

«Рівняння — це золотий ключ, що відчиняє усі математичні сезами».

С. Коваль



Не виконуючи побудови, знайди координати точок перетину графіків функцій (917, 918).

917. а) $y = x^2$ і $y = 121$;

б) $y = x^2$ і $y = 3x$.

918. а) $y = x^2$ і $y = 2,56$;

б) $y = x^2$ і $y = -2x$.

Розв'яжи рівняння (919–922).

919. а) $3(x - 5)^2 = 0$;

б) $(x - 3)^2 = 1$;

в) $3(5 - y)^2 = 12$;

г) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

г) $3x^2 + 36x = -108$.

920. а) $2(3x - 2)^2 = 0$;

б) $(z - 4)^2 = 4$;

в) $2(x - 7)^2 = 18$;

г) $x^2 - 10x + 25 = 0$;

г) $4x^2 + 32x = -64$.

921. а) $\frac{x}{x+3} + \frac{x}{x-3} = 4$;

б) $\frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = 3\frac{1}{3}$;

в) $\frac{12}{x^2-4} + \frac{x}{x-2} = -3$;

г) $\frac{7(2x+5)}{x^2-10x+25} + \frac{2}{x-5} = 1$.

922. а) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-1} = \frac{5}{2}$;

б) $\frac{x}{x+5} + \frac{x}{x-5} = 2\frac{2}{3}$;

в) $\frac{4}{3+x} = \frac{3-4x^2}{x^2-9} - \frac{5}{x-3}$;

г) $\frac{5(x+2)}{x^2+6x+9} + \frac{1}{x+3} = 1$.

923. Знайди довжини катетів прямокутного рівнобедреного трикутника, площа якого дорівнює $0,72 \text{ дм}^2$.

924. Площу круга радіуса r знаходять за формулою $S = \pi r^2$. Знайди радіус круга, площа якого дорівнює: а) 314 см^2 ; б) S .

925. Площа кільця дорівнює 942 см^2 , а радіус його зовнішнього кола — 20 см (мал. 18.1). Знайди радіус його внутрішнього кола.

926. Добуток двох послідовних натуральних чисел на 324 більший за менше з них. Знайди ці числа.

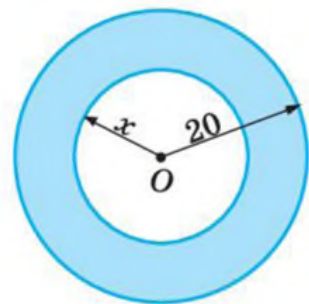
927. Добуток двох послідовних натуральних чисел на 224 більший за більше з них. Знайди ці числа.

928. Сума квадратів трьох послідовних натуральних чисел дорівнює 365 . Знайди ці числа. Як слід позначити їх, щоб розв'язання задачі звелось до неповного квадратного рівняння?

929. Знайди число, яке менше від квадратного кореня з цього числа в $2,5$ раза.

930. Добуток двох чисел на сусідніх кріслах у залі в $1,5$ раза більший за квадрат меншого з них. Знайди ці номери крісел.

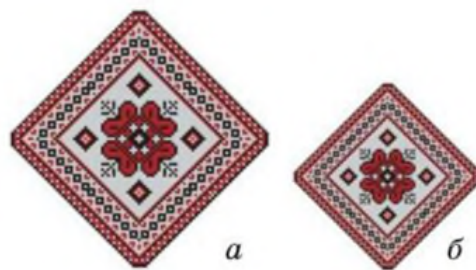
931. Знайди периметр прямокутного трикутника, у якого гіпотенуза дорівнює 10 м , а катети відносяться, як $3 : 4$.



Мал. 18.1

932. Знайди периметр прямокутника, якщо його сторони відносяться, як $5 : 6$, а площа дорівнює 120 см^2 .
933. На станції технічного обслуговування, виконуючи замовлення, майстер і учень працювали разом 2 год. Решту роботи учень закінчив сам за 4 год. За скільки годин майстер зміг би виконати цю роботу самостійно, якщо учню на це знадобилося б на 8 год більше?
934. Одна бригада працювала на ремонті дороги 8 днів, після чого до неї приєдналася друга бригада, і за 4 дні спільної роботи вони закінчили ремонт. За скільки днів могла б відремонтувати дорогу друга бригада, працюючи самостійно, якщо першій бригаді для цього потрібно на 16 днів більше, ніж другій?
935. Довжина паркану для огорожі однієї квадратної клумби на 8 м менша від довжини паркану іншої квадратної клумби, а їх площі відносяться, як $1 : 4$. Знайди довжини парканів кожної клумби.

936. Майстриня вишивала серветки квадратної форми двох розмірів (мал. 18.2). Сторона однієї серветки на 3 дм довша від сторони іншої, а їх площі відносяться, як $9 : 4$. Скільки мережива їй знадобиться для оздоблення по периметру 2 великих і 6 маленьких серветок?



Мал. 18.2

937. За якої умови дорівнює нулю:
 а) один корінь квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$;
 б) сума коренів рівняння $(x - a)(x + a - b) = 0$?

938. Розв'яжи рівняння. а) $x^2 - 7|x| = 0$; б) $2x^2 - \frac{8x}{|x|} = 0$.

939. Solve the equation. а) $x^2 + 3|x| - x = 0$; б) $x^2 + \frac{5x^2}{|x|} = 0$.

940. Складіть неповне квадратне рівняння, яке мало б корені:



- а) -3 і 3 ; б) $-\sqrt{2}$ і $\sqrt{2}$; в) 0 і 7 ; г) 0 і -4 .

941. *Відкрита задача.* Доповни вираз $2x^2 + x - 8$ так, щоб утворилося рівняння, яке мало б корені:
 а) 0 і -2 ; б) -2 і 2 .
942. *Відкрита задача.* Доповни вираз $x^2 - 3x$ так, щоб утворилося рівняння, яке мало б корені:
 а) -3 і 3 ; б) 0 і -3 .

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

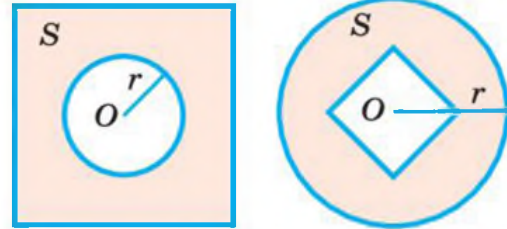


943. Знайди радіус кола r , якщо площа зафарбованої фігури (мал. 18.3) дорівнює S , а сторона квадрата — a .

944. За яких значень a корені рівняння рівні за модулем, але протилежні за знаком?

а) $x^2 + (a^2 + 5a)x + 9 + 2a = 0$;

б) $x^2 - (|a| - 3)x - a^2 + 3a = 0$.



Мал. 18.3

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



945. Обчисли. $-12\frac{3}{80} + \left(-\frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{2}\right) : (-0,8)\right) : (-2)$.

946. Знайди останню цифру числа.

а) 5^{100} ;

б) 6^{66} ;

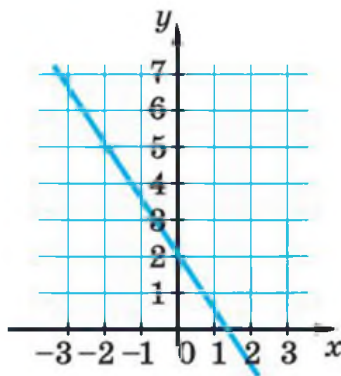
в) 4^{1000} ;

г) 9^{999} .

947. Спрости вираз і знайди його значення.

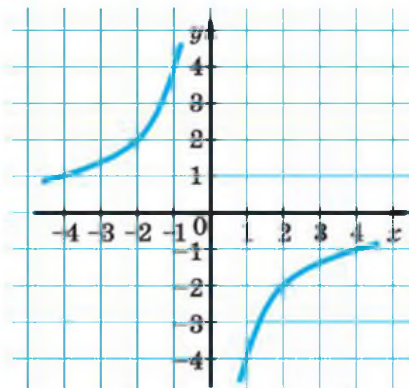
$(x^2 + 3xy + 2y^2)(x - 3y) + 6y^2(x + y)$, якщо $x = 6$, $y = 5$.

948. Опиши властивості функції, заданої графіком (мал. 18.4, 18.5).



а

Мал. 18.4



б

Мал. 18.5

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклади квадратних рівнянь.
- ✓ Знаю, що таке неповне квадратне рівняння.

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

$$b = 0, c \neq 0$$

$$ax^2 + c = 0$$

$$c = 0, b \neq 0$$

$$ax^2 + bx = 0$$

$$b = 0, c = 0$$

$$ax^2 = 0$$

- ✓ Умію розв'язувати неповні квадратні рівняння.

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \\ x^2 &= -\frac{c}{a}, \\ x_{1,2} &= \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}, \text{ якщо } -\frac{c}{a} > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x(ax + b) &= 0 \\ x = 0, \text{ або } ax + b &= 0 \\ ax &= -b, x = -\frac{b}{a}, \\ x_1 &= 0, x_2 = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax^2 &= 0 \\ x^2 &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- формулу квадрата двочлена $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$;
- як виділяти квадрат двочлена;

$$a^2 + 2ab + c = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 + c = (a + b)^2 + c - b^2$$

- як розв'язують рівняння $x^2 = c$ і за яких умов воно має корені.

$$\begin{aligned} x^2 &= c \\ c &> 0 \\ x_1 &= \sqrt{c}; x_2 = -\sqrt{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= c \\ c &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 &= c \\ c &< 0 \\ \text{коренів немає} \end{aligned}$$

- квадрати натуральних чисел;
- як добувати квадратні корені з невід'ємних чисел.

§ 19. Формула коренів квадратного рівняння

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- формула коренів квадратного рівняння — *quadratic formula*
- біквадратне рівняння — *biquadratic equation*

Розв'яжемо рівняння $x^2 + 6x - 112 = 0$, яке ми склали за умовою задачі (с. 170).

Розв'язання. Якщо до виразу $x^2 + 6x$ додати 9, то одержимо квадрат двочлена $x + 3$. Тому дане рівняння рівносильне рівнянню

$$x^2 + 6x + 9 - 9 - 112 = 0, \text{ або } (x + 3)^2 = 121.$$

Отже, $x + 3 = 11$, звідки $x = 8$; або $x + 3 = -11$, звідси $x = -14$.

Відповідь. $x_1 = 8, x_2 = -14$.

Розглянутий спосіб розв'язування квадратного рівняння називають **способом виділення квадрата двочлена**.

Розв'яжемо цим способом рівняння

$$5x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Щоб перший його член став квадратом одночлена з цілим коефіцієнтом, помножимо обидві частини даного рівняння на 5:

$$25x^2 - 10x - 15 = 0,$$

$$25x^2 - 2 \cdot 5x \cdot 1 + 1 - 1 - 15 = 0,$$

$$(5x - 1)^2 = 16.$$

Отже, $5x - 1 = 4$, звідси $5x = 5$, $x = 1$;

або $5x - 1 = -4$, звідси $5x = -3$, $x = -0,6$.

Відповідь. $x_1 = 1$, $x_2 = -0,6$.

Розв'яжемо таким способом рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Помножимо обидві частини рівняння на $4a$ (пам'ятаємо, що $a \neq 0$):

$$4a^2x^2 + 4ax \cdot b + 4ac = 0,$$

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$$

Вираз $b^2 - 4ac$ називають дискримінантом (від лат. *discriminans* — розрізняючий) даного квадратного рівняння і позначають буквою D .

Якщо $D < 0$, то дане рівняння не має коренів: не існує такого значення x , при якому значення виразу $(2ax + b)^2$ було б від'ємним.

Якщо $D = 0$, то $2ax + b = 0$, звідси $x = -\frac{b}{2a}$ — єдиний корінь.

Якщо $D > 0$, то дане квадратне рівняння рівносильне рівнянню $(2ax + b)^2 = (\sqrt{D})^2$, звідси $2ax + b = \sqrt{D}$, $x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ або $2ax + b = -\sqrt{D}$,
 $x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$.

У цьому випадку дане рівняння має два корені, які відрізняються тільки знаками перед $\sqrt{D}$.

Коротко записують: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, де $D = b^2 - 4ac$.

Це формула коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Користуючись нею, можна розв'язати будь-яке квадратне рівняння.

Приклад 1. Розв'яжи рівняння.

а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$; б) $x^2 + 6x + 9 = 0$; в) $5x^2 - x + 1 = 0$.

Розв'язання.

а) $D = (-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 25 - 24 = 1, D > 0$,

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{2}{3};$$

б) $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$. Отже, дане рівняння має один корінь: $x = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3; \quad x = -3$;

в) $D = (-1)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 1 - 20 = -19, D < 0$.

Рівняння коренів не має.

Відповідь. а) $x_1 = 1, x_2 = \frac{2}{3}$; б) $x = -3$; в) рівняння коренів не має.

Формулу коренів квадратного рівняння використовують для розв'язування багатьох рівнянь, які зводяться до квадратних.

Приклад 2. Розв'яжи рівняння.

а) $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$; б) $(3x^2 - x - 3)(3x^2 - x + 5) = 9$.

Розв'язання. Такі рівняння зручно розв'язувати шляхом введення допоміжної змінної.

а) $4x^4 - 9x^2 + 5 = 0$. Нехай $x^2 = t$, тоді $x^4 = t^2$, одержимо рівняння відносно змінної t : $4t^2 - 9t + 5 = 0$,

$$D = (-9)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 81 - 80 = 1, \quad D > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 4} = \frac{9 \pm 1}{8}, \quad t_1 = \frac{9+1}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}, \quad t_2 = \frac{9-1}{8} = 1.$$

Повернемося до змінної x :

1) $x^2 = 1, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1$;

2) $x^2 = \frac{5}{4}, \quad x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, \quad x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$, де $a \neq 0$, називають біквадратним.

б) $(3x^2 - x - 3)(3x^2 - x + 5) = 9$. Нехай $3x^2 - x = t$, тоді відносно змінної t одержимо рівняння:

$$(t - 3)(t + 5) = 9, \quad t^2 + 2t - 15 = 9, \quad t^2 + 2t - 24 = 0,$$

$$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-24) = 4 + 96 = 100, \quad D > 0,$$

$$t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{100}}{2} = \frac{-2 \pm 10}{2}, \quad t_1 = 4, \quad t_2 = -6.$$

Повернемося до змінної x .

1) $3x^2 - x = -6, \quad 3x^2 - x + 6 = 0, \quad D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6 = -71, \quad D < 0$, отже, це рівняння коренів не має.

$$2) 3x^2 - x = 4, 3x^2 - x - 4 = 0, x_1 = -1, x_2 = 1\frac{1}{3}.$$

$$\text{Відповідь. а) } x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -\frac{\sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{\sqrt{5}}{2}; \text{ б) } x_1 = -1, x_2 = 1\frac{1}{3}.$$

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Формулу коренів рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ можна записати і в такому вигляді:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Якщо другий коефіцієнт рівняння — парне число, тобто рівняння має вигляд

$$ax^2 + 2kx + c = 0, \text{ то } x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

Виведи ці формули з основної формули коренів квадратного рівняння.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Квадратні рівняння. Уроки 1, 2).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Як називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$?
2. Що таке дискримінант квадратного рівняння?
3. Скільки коренів має квадратне рівняння залежно від його дискримінанта?
4. Який вигляд має формула коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$?
5. Яке квадратне рівняння називають бікватратним?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Зведи рівняння $(x - 4)(2x + 1) = 3x(x - 1) - 9$ до квадратного та знайди його корені.

Розв'язання. $(x - 4)(2x + 1) = 3x(x - 1) - 9$.

Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 8x - 4 &= 3x^2 - 3x - 9, \\ 3x^2 - 2x^2 - 3x + 8x - x - 9 + 4 &= 0, \\ x^2 + 4x - 5 &= 0. \end{aligned}$$

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння:

$$\begin{aligned} D &= 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36 = 6^2, \\ x_{1,2} &= \frac{-4 \pm 6}{2}, \quad x_1 = \frac{-4 - 6}{2} = -5, \quad x_2 = \frac{-4 + 6}{2} = 1. \end{aligned}$$

Відповідь. $x_1 = -5, x_2 = 1$.

2. Розв'яжи дробове раціональне рівняння $\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-3}$.

Розв'язання. $\frac{x^{\setminus x-3}}{x-2} + \frac{2^{\setminus 1}}{(x-2)(x-3)} - \frac{2^{\setminus x-2}}{x-3} = 0,$

$$\frac{x(x-3) + 2 - 2(x-2)}{(x-2)(x-3)} = 0, \quad \frac{x^2 - 5x + 6}{(x-2)(x-3)} = 0.$$

Дане рівняння рівносильне системі
$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x - 2 \neq 0, \\ x - 3 \neq 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо квадратне рівняння:

$$D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1, \quad x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2}, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

Тоді отримаємо систему
$$\begin{cases} x = 2 \text{ або } x = 3, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Отже, рівняння коренів не має.

Відповідь. Рівняння коренів не має.

ВИКОНАЙ УСНО



949. За якої умови квадратне рівняння має один корінь?

А $D > 0$

Б $D < 0$

В $D = 0$

Г не можна
встановити

950. Скільки коренів має рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$?

А один

Б два

В безліч

Г жодного

951. Обчисли дискримінант і вкажи кількість коренів рівняння.

а) $x^2 - 2x + 1 = 0$;

б) $x^2 + 2x + 1 = 0$;

в) $y^2 - 6y + 1 = 0$;

г) $z^2 + 6z - 1 = 0$;

г) $2x^2 - x + 1 = 0$;

д) $3x^2 - 2x - 1 = 0$.

952. Яке з рівнянь не має коренів?

А $x^2 - 2x + 2 = 0$

Б $x^2 + 2x - 2 = 0$

В $x^2 + 5x + 6 = 0$

Г $x^2 - 6x + 9 = 0$

953. Яке з рівнянь має два корені?

А $x^2 + 2x + 1 = 0$

Б $2x^2 + 3x - 3 = 0$

В $4x^2 + 2x + 3 = 0$

Г $x^2 + 2x + 3 = 0$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



954. Гра. Один із учнів / одна з учениць записує повне квадратне рівняння, а другий / друга — знаходить дискримінант. Потім учні / учениці міняються ролями.

955. Побудуй блок-схему для розв'язування повного квадратного рівняння.

Користуючись формулою коренів, розв'яжи рівняння (956–963).

956. а) $x^2 - 7x - 18 = 0$;

б) $x^2 + 7x - 18 = 0$;



в) $x^2 + x - 6 = 0$;

г) $x^2 - x - 42 = 0$.

957. а) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

б) $x^2 - 7x - 30 = 0$;

в) $x^2 - x - 12 = 0$;

г) $x^2 + x - 20 = 0$.

958. а) $3x^2 - 2x - 5 = 0$;

б) $2z^2 - 3z - 2 = 0$;

в) $2y^2 - 7y + 3 = 0$;

г) $5z^2 - 8z + 3 = 0$.

959. а) $2x^2 - 7x - 30 = 0$;

б) $4x^2 + 3x - 10 = 0$;

в) $3y^2 - 7y + 4 = 0$;

г) $5x^2 + 7x + 2 = 0$.

960. а) $-x^2 + 8x - 12 = 0$;

б) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;

в) $3x^2 + 2x + 2 = 0$;

г) $x^2 + 2x - 1 = 0$;

г) $-x^2 + 4x + 2 = 0$;

д) $9x^2 - 3x - 1 = 0$.

961. а) $-x^2 + 2x + 15 = 0$;

б) $9x^2 + 30x + 25 = 0$;

в) $5x^2 + 3x + 1 = 0$;

г) $x^2 + 4x + 1 = 0$;

г) $-x^2 + 2x + 5 = 0$;

д) $3x^2 - 2x - 3 = 0$.

962. а) $6x^2 - 12,5x + 6 = 0$;

б) $8x^2 - 8,8x + 2,1 = 0$.

963. а) $10y^2 - 0,8y = 1,92$;

б) $4n^2 + 11n + 7,36 = 0$.

964. ЗНО Розв'яжи рівняння.

а) $x^2 - 8x + 15 = 0$;

А 3; 5

Б -3; -5

В -3; 5

Г 3; -5

б) $x^2 - 4x + 3 = 0$.

А -4; 3

Б 1; 3

В -3; -1

Г -2; 3

Д -1; 4

Розв'яжи рівняння, що зводиться до квадратного (965–968).

965. а) $4x(x - 1) = 3$;

б) $3x(3x - 8) = 20$;

в) $3x(2x - 5) = 2(x^2 + 2)$;

г) $2x(3x + 4) = 4x^2 + 5x + 27$;

г) $(x + 4)(2x - 3) - (5x - 6)(x - 3) = 10$.

966. а) $4z(z - 1) = 15$;

б) $3y(3y - 4) = 5$;

в) $x(7 - x) = 5x - 8$;

г) $3x(5x + 3) = 2x(6x + 5) + 2$;

г) $(2x - 8)(3x + 1) = (4x - 12)(x - 2) + 8$.

967. а) $(2x - 3)^2 = 8x$;

б) $(2x + 1)^2 = 3x + 4$;

в) $2(3z + 9) = (3z + 5)^2$;

г) $12(3 - x) = (3x - 1)^2$.

968. а) $(x - 5)^2 = 3x - 5$; б) $(x + 4)^2 = 3x^2 - 8$;
в) $(p - 3)^2 = 2(p + 1)$; г) $(3c - 5)^2 = 10c - 19$.

969. **ЗНО** Розв'яжи рівняння $2x(x + 2) = 5(x + 2)$.

А -2,5; 2 Б -2 В 2,5 Г -2; 0,4 Д -2; 2,5

Розв'яжи рівняння (970, 971).

970. а) $x + 3 = \frac{x+3}{x}$; б) $y = \frac{18}{y-3}$; в) $\frac{z+2}{z} = \frac{5z+1}{z+1}$;

г) $\frac{5+3m}{5-m} = \frac{m+3}{m+1}$; г) $\frac{x^2-5x+6}{x-3} = 0$; д) $\frac{2x^2+5x+2}{x^2-4} = 0$.

971. а) $\frac{15}{x+2} = x$; б) $\frac{3c^2}{c-1} = c-2$; в) $\frac{x-5}{x+3} = \frac{3+2x}{1-6x}$;

г) $\frac{2x-1}{3-2x} = \frac{4x+1}{2x+3}$; г) $\frac{x^2+x-12}{x+4} = 0$; д) $\frac{4x^2-11x-3}{x^2-9} = 0$.

972. Знайди натуральне число, яке на 132 менше від його квадрата.

973. Знайди число, яке на 0,16 більше за його квадрат.

974. Знайди два послідовних натуральних числа, сума квадратів яких дорівнює 545.

975. Добуток двох послідовних натуральних чисел більший за їх суму на 239. Знайди ці числа.

Не виконуючи побудови, знайди координати точок перетину графіку функції з осями координат (976, 977).

976. а) $y = x^2 + x - 20$; б) $y = 0,5x^2 - 5x + 8$.

977. а) $y = x^2 + 3x - 28$; б) $y = -2x^2 + 3x - 1$.

978. Розв'яжи біквадратне рівняння.

а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$; б) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;

в) $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$; г) $x^4 + x^2 - 6 = 0$;

г) $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$; д) $3x^4 - 7x^2 + 2 = 0$.

979. Solve the biquadratic equation.

а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; б) $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$;

с) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$; д) $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$;

е) $9x^4 - 10x^2 + 1 = 0$; ф) $5x^4 - 11x^2 + 2 = 0$.

980. Розв'яжи рівняння $x^4 - x^2 - 20 = 0$. У відповіді запиши добуток усіх його дійсних коренів.

Використовуючи метод заміни змінної, розв'яжи рівняння (981, 982).

981. а) $x - 7\sqrt{x} + 12 = 0$; б) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$;

в) $3x - 8\sqrt{x} + 5 = 0$; г) $2x + 3\sqrt{x} + 1 = 0$.

982. а) $x - 8\sqrt{x} + 15 = 0$;

б) $x + 3\sqrt{x} - 10 = 0$;

в) $2x - 5\sqrt{x} + 2 = 0$;

г) $3x + 7\sqrt{x} + 2 = 0$.

 983. Складіть рівняння виду $(x - a)(x - b) = 0$, корені якого:


а) 2 і 3;

б) 1 і 5;

в) 3 і -2;

г) -2 і -6.

 984. *Відкрита задача.* Склади рівняння, корені якого:

а) 2 і 5;

б) 3 і -7;

в) 0,5 і 4;

г) -0,2 і -8.

 985. Один корінь квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ дорівнює 1.

 Чому дорівнює $a + b + c$?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



Розв'яжи рівняння (986–991).

986. а) $(2,5x - 7)(2x + 3) + 3x + 4 = (4x - 9)(1,5x + 1)$;

б) $(3z - 5)(4z + 1) + (2z + 3)(5z - 4) = 6z(3 + 2z) - 11$;

в) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 0$; г) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$.

987. а) $(2t - 3)(5t + 2) + (3t - 1)(4t + 2) = 10t^2 - 5$;

б) $(3n - 2)(3n + 2) - (2n - 3)^2 = 3n(n + 7) - 17$;

в) $\sqrt{2}b^2 - 3b + \sqrt{2} = 0$;

г) $c^2 - \sqrt{6}c + 1,5 = 0$.

988. а) $\frac{x^2 - 4x}{x + 1} = \frac{5}{x + 1}$;

б) $\frac{x^2 - x}{x - 4} = \frac{5x - 8}{x - 4}$;

в) $\frac{1 + 3x}{2 + x} + \frac{x - 1}{2 - x} = 1$;

г) $\frac{2y - 2}{y + 3} - \frac{3y - 5}{3 - y} = 6$;

д) $\frac{5}{z - 2} + \frac{4}{z - 3} = \frac{5}{z}$;

е) $\frac{3x + 1}{x - 5} + \frac{6x - 2}{x + 5} = \frac{5x^2 + 3}{x^2 - 25}$.

989. а) $\frac{x^2 - 2x}{x + 2} = \frac{8}{x + 2}$;

б) $\frac{x^2 - 2x}{x - 3} = \frac{5x - 12}{x - 3}$;

в) $\frac{c - 7}{c + 5} + \frac{c + 4}{5 - c} = 3$;

г) $\frac{2x + 3}{2x - 3} - \frac{3x - 1}{x - 1} = 2$;

д) $\frac{7}{x + 2} - \frac{3}{2 - x} = \frac{16}{x}$;

е) $\frac{4x - 2}{x + 4} - \frac{3x - 14}{x - 4} = \frac{2x - 1}{x^2 - 16}$.

990. а) $\frac{3x}{2x - 1} + \frac{x - 1}{2x + 1} - \frac{4x - 2}{4x^2 - 1} = 5$;

б) $\frac{x + 3}{2x} - \frac{2x - 1}{x^2 - 3x} = \frac{3x - 17}{4x - 12}$;

в) $\frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 4} - \frac{5x - 6}{x^2 - 2x} = \frac{6}{x}$;

г) $\frac{1}{x - 1} - \frac{8x - 2}{x^2 + x + 1} = \frac{x - 9}{x^3 - 1}$.

991. а) $\frac{2(x+7)}{x-1} - \frac{3x+7}{x^2-1} + \frac{x-1}{x+1} = 4;$

б) $\frac{x+1}{4x} - \frac{4x-1}{3x^2-6x} = \frac{x-4}{2x-4};$

в) $\frac{9-2x}{x^2-3x} + \frac{4-x}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x} = 0;$

г) $\frac{4}{x+1} - \frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3x^2-1}{x^3+1} = 0.$

Не виконуючи побудови, знайди координати точок перетину графіків функцій (992, 993).

992. а) $y = 2x^2 + 7x - 2$ і $y = x^2 - 2x - 16;$ б) $y = \frac{6}{x}$ і $y = x - 5.$

993. а) $y = x^2 + x - 8$ і $y = -2x^2 + 5x - 9;$ б) $y = \frac{15}{x+1}$ і $y = x + 3.$

Знайди корені рівняння (994, 995).

994. а) $|x^2 + 5x - 3| = 3;$

б) $|2x^2 - 3x - 1| = 1;$

в) $x^2 - 10|x| + 24 = 0;$

г) $6x^2 + 5|x| - 1 = 0;$

г) $x|x| - 7x + 10 = 0;$

д) $6x^2 + 7x - 5\frac{|x|}{x} = 0;$

е) $x^2 - 4\sqrt{x^2} - 21 = 0;$

е) $x^2 - 5(\sqrt{x})^2 - 6 = 0.$

995. а) $|x^2 + 7x + 5| = 5;$

б) $|2x^2 - x - 3| = 3;$

в) $x^2 - 8|x| + 12 = 0;$

г) $3x^2 - 4|x| - 20 = 0;$

г) $x|x| - 4x + 3 = 0;$

д) $2x^2 - 7x - 4\frac{|x|}{x} = 0;$

е) $x^2 + 2\sqrt{x^2} - 3 = 0;$

е) б) $x^2 + (\sqrt{x})^2 - 12 = 0.$

Розв'яжи рівняння, використовуючи метод заміни змінної (996–1001).

996. а) $(x+3)^4 + (x+3)^2 - 2 = 0;$

б) $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 8 = 0;$



в) $\left(\frac{2x+1}{x}\right)^2 - 6\left(\frac{2x+1}{x}\right) = -5;$

г) $\left(\frac{\sqrt{x}-1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{x}-1}{2} = 12;$

г) $x^2 + 2x + 2(x+1) - 23 = 0;$ д) $x^2 + 5 = 2\sqrt{x^2 + 5} + 3.$

997. а) $(2x-1)^4 - 10(2x-1)^2 + 9 = 0;$ б) $(x^2 + 2)^2 - (x^2 + 2) - 6 = 0;$

в) $\left(\frac{x}{x-2}\right)^2 - \frac{x}{x-2} = 42;$

г) $\left(\frac{\sqrt{x}+1}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{x}+1}{3} = 2;$

г) $4x^2 - 12x + 2(2x-3) - 6 = 0;$ д) $x^2 + 7 = 3\sqrt{x^2 + 7} + 4.$

998. а) $(x^2 + x)(x^2 + x - 7) = 60$; б) $(2x^2 - 5x - 4)(2x^2 - 5x) = 21$;
 в) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$; г) $(x - 1)^2(x^2 - 2x) = 12$;
 ґ) $(x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x + 4) = 10$;
 д) $(x - 2)(x + 1)(x + 2)(x + 5) + 36 = 0$.

999. а) $(x^2 + 4x)(x^2 + 4x + 3) = 40$; б) $(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x + 3) + 1 = 0$;
 в) $(x - 2)^2(x^2 - 4x) = -3$; г) $(x^2 - 5x + 2)(x^2 - 5x - 1) = 28$;
 ґ) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = 120$;
 д) $(x + 3)(x + 1)(x - 5)(x - 7) = 192$.

1000. а) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x-1}{x+3} = \frac{3}{2}$; б) $\frac{x}{x+2} - \frac{3(x+2)}{x} = 2$.

1001. а) $\frac{2x+1}{x+2} + \frac{x+2}{2x+1} = \frac{10}{3}$; б) $\frac{5x}{x-4} - \frac{x-4}{x} = -4$.

При яких значеннях m рівняння матиме один корінь (1002, 1003)?

1002. а) $x^2 + 4x + m = 0$; б) $x^2 + mx + 4 = 0$;
 в) $mx^2 + 8mx + 1 = 0$; г) $mx^2 + 20x + m = 0$.

1003. а) $5x^2 - 2x + m = 0$; б) $x^2 + mx + 9 = 0$;
 в) $mx^2 + (m + 1)x + 1 = 0$; г) $x^2 + (m + 2)x + 2m + 1 = 0$.

1004. **ЗНО** Укажи найменше значення a , при якому рівняння
 $\frac{x^2 - x + a}{2x + 3} = 0$ має рівно один корінь.

1005. Доведи, що при будь-якому значенні a рівняння має два корені.
 а) $x^2 + ax - 5 = 0$; б) $x^2 + (2a + 1)x + a^2 + a = 0$.

1006. При яких значеннях m рівняння матиме три корені?
 а) $(5x^2 - 2x - 3)(x^2 - mx + 4) = 0$;
 б) $(x^2 + 3x - 10)(mx^2 - 6x + 1) = 0$.

Розв'яжи рівняння (1007, 1008).

1007. а) $x^2 - (a + 3)x + 2a + 2 = 0$; б) $x^2 + ax + a - 1 = 0$.

1008. а) $x^2 - (a + 5)x + 3a + 6 = 0$; б) $ax^2 - (2a + 1)x + a + 1 = 0$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1009. Покажи, що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ навіть за умови, що $a = 0$, можна розв'язувати за формулою

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

1010. Вирази a через b , якщо задано співвідношення:

а) $3a^2 - 4ab + b^2 = 0$; б) $\left(\frac{6a+b}{2a-3b}\right)^2 - 4\left(\frac{6a+b}{2a-3b}\right) = 5$.





ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1011. Порівняй числа $7,8 \cdot 10^5$ і $2,4 \cdot 10^6$. Знайди різницю їх квадратів.
1012. Доведи, що: а) $4^{20} - 1$ ділиться на 5; б) $9^{60} + 5$ ділиться на 2.
1013. Спрости вираз. а) $(2y+8)\left(3-\frac{1}{2}y\right)$; б) $\left(5-\frac{1}{3}a\right)(6a+9)$.
1014. За підрахунками екологів одна пальчикова батарейка, яка потрапила у смітник, забруднює 20 м^2 землі. Яку частину площі своєї області збережуть від забруднення учні / учениці твоєї школи, якщо віднесуть по одній використаній батарейці у спеціальний бокс для утилізації?



СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що таке дискримінант квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ і можу записати його формулу

$$D = b^2 - 4ac$$

- ✓ Можу записати формулу коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac$$

- ✓ Умію розв'язувати квадратні рівняння і задачі, що передбачають знаходження коренів рівнянь, що зводяться до квадратних.
- ✓ Спробую навчитися розв'язувати квадратні рівняння виду

$$ax^2 + 2kx + c = 0 \quad (a \neq 0) \text{ за допомогою формули } x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ



ВАРІАНТ I

1. Розв'яжи рівняння.

а) $3x^2 - 27 = 0$; б) $4z^2 + z = 0$.

2. Знайди корені рівняння.

а) $y^2 - 9y + 14 = 0$; б) $\frac{15 - 2x^2}{x + 3} = \frac{x^2 + 4x}{x + 3}$.

3. Розв'яжи бікватратне рівняння $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$.

4. Розв'яжи рівняння, використовуючи метод заміни змінної.

$(x^2 + x - 4)(x^2 + x - 18) = 32$.

ВАРІАНТ II

1. Розв'яжи рівняння.

а) $2x^2 - 50 = 0$; б) $9z^2 - z = 0$.

2. Знайди корені рівняння.

а) $y^2 + 2y - 15 = 0$; б) $\frac{3x + x^2}{x - 1} = \frac{3x^2 + 1}{x - 1}$.

3. Розв'яжи бікватратне рівняння $x^4 - 8x^2 + 7 = 0$.

4. Розв'яжи рівняння, використовуючи метод заміни змінної.

$(x^2 - 2x - 8)(x^2 - 2x - 6) = 63$.

ВАРІАНТ III

1. Розв'яжи рівняння.

а) $5z^2 - 20 = 0$; б) $9x^2 + 4x = 0$.

2. Знайди корені рівняння.

а) $y^2 + y - 12 = 0$; б) $\frac{9x - x^2}{x - 2} = \frac{3x^2 + 2}{x - 2}$.

3. Розв'яжи бікватратне рівняння $x^4 - 11x^2 + 18 = 0$.

4. Розв'яжи рівняння, використовуючи метод заміни змінної.

$(x^2 - x - 5)(x^2 - x - 17) = 45$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ



Тестові завдання № 5

1. Укажи квадратне рівняння.
А $x^2 + 12 = 0$ Б $20 - x = 0$ В $3x = 9$ Г $x^{-2} = 100$
2. Скільки коренів має рівняння $x^2 + 2x + 1 = 0$?
А один Б два В безліч Г жодного
3. Дискримінант рівняння $x^2 + 7x + 6 = 0$ дорівнює:
А 73 Б 6 В 25 Г 5
4. Яке з рівнянь не має коренів?
А $x^2 + 12x + 20 = 0$ Б $x^2 + 6x = 0$
В $3x^2 - 2x + 2 = 0$ Г $20x^2 - 3 = 0$
5. Скільки коренів має рівняння $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$?
А один Б два В чотири Г жодного
6. Дискримінант рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ — це вираз:
А $b^2 - ac$ Б $2b - 4ac$ В $b^2 - 4ac$ Г $-b^2 - 4ac$
7. Рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два корені, якщо:
А $D > 0$ Б $D = 0$ В $D < 0$ Г $D \leq 0$
8. Рівняння $x^2 + 6x - 7 = 0$ має корені:
А 1 і 7 Б 1 і 6 В 1 і -7 Г -1 і 7
9. При якому значенні a рівняння $x^2 + 2x + a = 0$ має один корінь?
А 1 Б -1 В -2 Г такого значення не існує
10. Рівняння $ax^2 + c = 0$ має корені, якщо:
А $a > 0, c > 0$ Б $a > 0, c < 0$
В $a < 0, c < 0$ Г $a = 0, c \neq 0$

1. Яке з рівнянь має два корені?
А $4x^2 = 0$ Б $4x^2 + 36 = 0$
В $4x^2 + x = 0$ Г $4x^2 - 3x + 10 = 0$

2. Знайди корені рівняння $x^2 - 9x = 0$.
А 9 Б 0; 9 В 0; -9 Г коренів немає

3. Вкажи менший корінь рівняння $\frac{3-x}{x} = \frac{x}{4}$.
А 2 Б 6 В -2 Г -6

4. Установи відповідність між рівняннями (1-3) та кількістю їх коренів (А-Д).

1	$2x^2 - 18 = 0$	А	один
2	$4x^2 + 4x + 1 = 0$	Б	два
3	$x^4 + 5x^2 + 4 = 0$	В	три
		Г	чотири
		Д	жодного

- ### Додаткове завдання

- «Вся глибина думки, яка закладена у формулювання математичних понять, згодом розкривається тим умінням, з яким ці поняття використовуються».

191

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- означення квадратного рівняння (с. 170);
- формулу коренів квадратного рівняння (с. 179);
- формулу різниці квадратів $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$;
- правила виконання дій з дробами і коренями.

§ 20. Теорема Вієта

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- теорема Вієта — *Vieta's theorem*
- зведене квадратне рівняння — *quadratic equation with the leading coefficient 1*
- корені рівняння — *roots of the equation*

Квадратне рівняння називають **зведеним**, якщо перший його коефіцієнт дорівнює одиниці.

$x^2 + px + q = 0$ — загальний вигляд зведеного квадратного рівняння.

У таблиці наведено приклади трьох зведених квадратних рівнянь, їх корені, а також суми і добутки коренів.

Рівняння	x_1 і x_2	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	2 і 3	5	6
$x^2 - 3x - 4 = 0$	-1 і 4	3	-4
$x^2 + 8x + 15 = 0$	-5 і -3	-8	15

Порівняй суму коренів кожного зведеного квадратного рівняння з його другим коефіцієнтом, а добуток коренів — з вільним членом.

Теорема Вієта.

Якщо зведене квадратне рівняння має два корені, то їх сума дорівнює другому коефіцієнту рівняння, взятому з протилежним знаком, а добуток — вільному члену.

Доведення. Якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені x_1 і x_2 , то їх можна знайти за формулами:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \text{ і } x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}, \quad (*)$$

де $D = p^2 - 4q$ — дискримінант рівняння.

Знайдемо суму і добуток цих коренів:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-p - \sqrt{D} - p + \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 \cdot x_2 = q$. А це й вимагалось довести.

Примітка. Якщо $p^2 - 4q = 0$, то рівняння $x^2 + px + q = 0$ має один корінь $x = -\frac{p}{2}$. Формули (*) у цьому випадку дають $x_1 = -\frac{p}{2}$ і $x_2 = -\frac{p}{2}$.

Тому часто вважають, що дане рівняння має два рівних корені. Теорема Вієта правильна і для цього випадку, оскільки

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} + \left(-\frac{p}{2}\right) = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2}\right) = \frac{p^2}{4} = \frac{4q}{4} = q.$$

Кожне квадратне рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) рівносильне зведеному квадратному рівнянню $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$. Тому якщо таке рівняння має корені x_1 і x_2 , то $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ і $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема (обернена до теореми Вієта).

Якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно $-p$ і q , то m і n — корені рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Доведення. Нехай $m + n = -p$ і $m \cdot n = q$.

За цих умов рівняння $x^2 + px + q = 0$ рівносильне рівнянню

$$x^2 - (m + n)x + mn = 0.$$

Підставимо у це рівняння замість змінної x числа m і n :

$$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - nm + mn = 0,$$

$$n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - mn - n^2 + mn = 0.$$

Отже, m і n — корені даного рівняння. А це й треба було довести.

З теореми Вієта випливає, що коли p і q — цілі числа, то цілі розв'язки рівняння $x^2 + px + q = 0$ є дільниками числа q . Користуючись оберненою теоремою, можна перевіряти, чи є та чи інша пара чисел коренями зведеного квадратного рівняння. Це дає можливість усно розв'язувати такі рівняння.

Приклад. Розв'яжи рівняння $x^2 + 12x + 11 = 0$.

Розв'язання (усне). Якщо рівняння має цілі корені, то їх добуток дорівнює 11. Це можуть бути числа 1 і 11 або -1 і -11. Сума коренів має дорівнювати -12, тому корені рівняння -1 і -11.

Відповідь. $x_1 = -1$, $x_2 = -11$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Теорема Вієта правильна не тільки для зведеного квадратного рівняння, а й для рівнянь вищих степенів. Наприклад, якщо рівняння третього степеня $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ має корені x_1, x_2 і x_3 , то

$$x_1 + x_2 + x_3 = -a,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b,$$

$$x_1x_2x_3 = -c.$$

Якщо таке рівняння з цілими коефіцієнтами має цілі розв'язки, то вони є дільниками вільного члена.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які квадратні рівняння називають зведеними?
2. Сформулюй теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння.
3. Сформулюй теорему, обернену до теореми Вієта.
4. Як можна знаходити цілі розв'язки квадратного рівняння з цілими коефіцієнтами?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Знайди суму і добуток коренів рівняння.

а) $x^2 + x - 6 = 0$; б) $x^2 + 2x + 3 = 0$.

Розв'язання.

а) $D = 1 + 24 > 0$. Корені існують, тому

$$x_1 + x_2 = -1; \quad x_1 \cdot x_2 = -6;$$

б) $D = 4 - 12 < 0$. Корені не існують.

Відповідь. а) $x_1 + x_2 = -1, x_1 \cdot x_2 = -6$; б) корені не існують.

2. При яких значеннях m добуток коренів рівняння $x^2 + mx + m - 7 = 0$ дорівнює 3?

Розв'язання.

Оскільки для даного рівняння $x_1 \cdot x_2 = m - 7$, то $m - 7 = 3, m = 10$.

Але ми не можемо стверджувати, що при $m = 10$ добуток коренів дорівнює 3, бо не знаємо, чи при $m = 10$ корені взагалі існують. Тому потрібно знайти дискримінант заданого квадратного рівняння ($D = m^2 - 4(m - 7) = m^2 - 4m + 28$) і переконатися, що при $m = 10$ він додатний, або підставити $m = 10$ у рівняння і перевірити, чи рівняння має корені. Після підстановки отримаємо рівняння $x^2 + 10x + 3 = 0$. Це рівняння має корені, бо $D = 100 - 12 > 0$.

Відповідь. $m = 10$.

3. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 4x + 1 = 0$, знайди суму квадратів його коренів.

Розв'язання.

$D = 16 - 4 > 0$. Корені існують.

$$x_1 + x_2 = 4; \quad x_1 \cdot x_2 = 1;$$

$$(x_1 + x_2)^2 = 16;$$

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 16;$$

$$x_1^2 + 2 \cdot 1 + x_2^2 = 16; \quad x_1^2 + x_2^2 = 16 - 2, \quad x_1^2 + x_2^2 = 14.$$

Або можна скористатися формулою: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.

$$\text{Тоді } x_1^2 + x_2^2 = 4^2 - 2 \cdot 1 = 16 - 2 = 14.$$

Відповідь. $x_1^2 + x_2^2 = 14$.

ВИКОНАЙ УСНО



1015. Переконайся, що рівняння мають корені, і знайди їх суму і добуток.
- а) $x^2 - 7x + 10 = 0$; б) $x^2 - 9x + 14 = 0$;
в) $x^2 - 5x - 15 = 0$; г) $x^2 - 4x + 2 = 0$.
1016. Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, перевір, чи є дані числа коренями рівняння.
- а) $x^2 - 8x + 7 = 0$, 1 і 7; б) $x^2 + 8x + 15 = 0$, 3 і 5;
в) $z^2 - 12z - 13 = 0$, -1 і 13; г) $t^2 - 6t + 6 = 0$, 3 і 3.
1017. Визнач знаки коренів рівняння (якщо вони є), не розв'язуючи рівняння.
- а) $x^2 - 4x + 3 = 0$; б) $x^2 + 7x + 10 = 0$;
в) $x^2 - 6x - 8 = 0$; г) $x^2 + 10x - 21 = 0$.
1018. У якого з рівнянь сума коренів дорівнює 4?
- А $x^2 + 4x + 3 = 0$ Б $x^2 - 4x + 5 = 0$
В $x^2 - 4x + 2 = 0$ Г $3x^2 - 4x + 3 = 0$
1019. Рівняння $x^2 + kx + t = 0$ має корені -3 і $\frac{1}{3}$. Знайди t .
- А -8 Б -1 В -3 Г 1
1020. **ЗНО** а) Обчисли добуток коренів рівняння $x^2 + 6x - 55 = 0$;
А -55 Б 55 В -6 Г 6 Д -49
б) обчисли суму коренів рівняння $x^2 + 3x - 4 = 0$.
А -4 Б -3 В 3 Г 4
1021. Рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені 0,7 і 10. Знайди його коефіцієнти p і q .

1022. Соломія хоче розв'язати квадратне рівняння $x^2 + dx + m = 0$. Розглянь план, який вона склала. Чи правильний він?

- 1) Проаналізувати множники числа m .
- 2) Знайти серед них пару, що в сумі дає d .
- 3) Записати, що кожне з цих чисел є коренем рівняння.

1023. Розв'яжи рівняння.

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $x^2 - 4x - 5 = 0$;

в) $x^2 - 4x + 3 = 0$;

г) $x^2 - 7x + 12 = 0$.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

Знайди коефіцієнти p і q рівняння $x^2 + px + q = 0$, якщо його коренями є числа (1024, 1025).

1024. а) 2 і 3;

б) -2 і 5;

в) -3 і -7.

1025. а) 4 і 1;

б) -3 і 2;

в) -6 і -5.

Розв'яжи рівняння (1026, 1027).

1026. а) $z^2 - 5z + 4 = 0$;

б) $z^2 - 3z - 40 = 0$;

в) $y^2 - y - 12 = 0$;

г) $x^2 + 2x - 15 = 0$;

г) $x^2 + 5x + 6 = 0$;

д) $x^2 + x - 20 = 0$.

1027. а) $y^2 + 5y - 14 = 0$;

б) $z^2 - 2z - 15 = 0$;

в) $c^2 - 2c - 8 = 0$;

г) $t^2 + 9t - 10 = 0$.

1028. Знайди значення q , при якому рівняння має рівні корені.

а) $x^2 - 14x + q = 0$;

б) $x^2 + qx + 25 = 0$.

1029. Знайди значення q , при якому рівняння має рівні корені.

а) $x^2 + 12x + q = 0$;

б) $x^2 + qx + 121 = 0$.

1030. Один із коренів рівняння $x^2 - 5x + c = 0$ дорівнює 3. Знайди c .

1031. Один із коренів рівняння $x^2 + mx + 30 = 0$ дорівнює 5. Знайди m .

1032. Знайди p і x_1 , якщо:

а) $x^2 + px + 35 = 0$ і $x_2 = 7$;

б) $x^2 + px + 21 = 0$ і $x_2 = -3$.

1033. Знайди q і x_1 , якщо:

а) $x^2 - 11x + q = 0$ і $x_2 = 6$;

б) $x^2 + 6x + q = 0$ і $x_2 = 3$.

1034. Знайди k і x_1 , якщо:

а) $kx^2 + 9x - 2 = 0$ і $x_2 = -2$;

б) $kx^2 - 4x - 39 = 0$ і $x_2 = -3$.

Склади зведене квадратне рівняння, корені якого дорівнюють (1035, 1036):

1035. а) 2 і 4; б) -3 і 5; в) 0,5 і 4; г) $\frac{1}{7}$ і 7; г) $2 - \sqrt{3}$ і $2 + \sqrt{3}$.

1036. а) 3 і 8; б) -4 і 2; в) 3 і 0,6; г) $3 + \sqrt{5}$ і $3 - \sqrt{5}$.



- 1037.** Гра. Один із гравців/одна із гравчинь записує одне число, другий/друга — інше, а третій/третя записує зведене квадратне рівняння, коренями якого є записані числа.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



Користуючись теоремою, оберненою до теореми Вієта, перевір, чи є дані числа m і n коренями рівняння (1038, 1039).

1038. а) $6x^2 - 5x + 1 = 0$, $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{3}$; б) $4x^2 - 4x - 3 = 0$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = 1\frac{1}{2}$.

1039. а) $3x^2 - 8x + 5 = 0$, $m = -1$, $n = -1\frac{2}{3}$;

б) $3x^2 + 4x + 1 = 0$, $m = -1$, $n = -\frac{1}{3}$.

Склади квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, корені якого дорівнюють (1040, 1041).

1040. а) 1 і $\frac{1}{2}$; б) $\frac{2}{3}$ і $1\frac{1}{2}$; в) $\frac{3}{5}$ і $-1\frac{2}{3}$; г) $\frac{-2-\sqrt{5}}{3}$ і $\frac{-2+\sqrt{5}}{3}$.

1041. а) 2 і $\frac{1}{3}$; б) $\frac{3}{4}$ і $\frac{2}{3}$; в) $\frac{1}{3}$ і $-1\frac{1}{2}$; г) $\frac{3-\sqrt{7}}{2}$ і $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$.

- 1042.** Складіть усі можливі квадратні рівняння, які мали б по одному спільному кореню з даними рівняннями.

а) $x^2 - 3x - 28 = 0$ і $2x^2 + x - 10 = 0$;

б) $2x^2 + 5x - 3 = 0$ і $x^2 - 4x + 4 = 0$.

- 1043.** Не розв'язуючи дане рівняння, склади нове квадратне рівняння, корені якого менші від відповідних коренів даного рівняння на одиницю.

а) $x^2 + 11x - 4 = 0$;

б) $2x^2 - 6x - 3 = 0$.

- 1044.** Не розв'язуючи дане рівняння, склади нове квадратне рівняння, корені якого втричі більші за відповідні корені даного рівняння.

а) $x^2 + 2x - 85 = 0$;

б) $2x^2 - 6x + 3 = 0$.

- 1045.** Не розв'язуючи дане рівняння, склади нове квадратне рівняння, корені якого були б обернені до відповідних коренів даного рівняння.

а) $x^2 - 14x + 5 = 0$;

б) $2x^2 - 7x + 6 = 0$.

- 1046.** Знайди корені рівняння x_1 і x_2 ($x_2 > x_1$) та вільний член q , якщо:

а) $x^2 - 10x + q = 0$ і $x_2 - x_1 = 14$; б) $x^2 + 6x + q = 0$ і $x_2 = 2x_1$.

- 1047.** Знайди корені рівняння x_1 і x_2 ($x_2 > x_1$) і значення k , якщо:

а) $x^2 + kx + 10 = 0$ і $x_1 - x_2 = -3$;

б) $x^2 - 8x + k = 0$ і $x_1 : x_2 = -0,2$.

- 1048.** Різниця коренів рівняння $3x^2 + 6x + q = 0$ дорівнює 8. Знайди його корені та число q .
- 1049.** Різниця коренів рівняння $2x^2 + 3x + c = 0$ дорівнює 2,5. Знайди число c .
- 1050.** Знайдіть значення параметра c та корені рівняння $x^2 - 8x + c = 0$, якщо:
- а) один із них у 3 рази більший за другий;
 - б) один із них на 5 менший від другого;
 - в) один із них становить 20 % від другого.
- 1051.** При яких значеннях параметра c рівняння $x^2 - 4x + c = 0$ має два корені, один із яких:
- а) у 2 рази більший за другий;
 - б) на 8 більший за другий?
- 1052. НМТ** Визнач додатне значення параметра m , за якого один із коренів рівняння $x^2 - (2m - 2)x + 21 = 0$ на 4 більший за інший.
- 1053.** Не знаходячи корені x_1 і x_2 рівняння $x^2 - 8x + 6 = 0$, обчисли:
- а) $2x_1x_2 - 3x_1 - 3x_2$; б) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; в) $x_1^2 + x_2^2$; г) $x_1^3 + x_2^3$.
- 1054.** Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 2x - 9 = 0$, обчисли:
- а) $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$; б) $x_1^2 + x_2^2$; в) $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$,
- де x_1 і x_2 — корені даного рівняння.
- 1055.** Without solving the equation $3x^2 - 2x + 6 = 0$, find:
- а) $6x_1 + 6x_2 - 5x_1x_2$; б) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$; в) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$,
- where x_1 and x_2 — roots of the equation.
- 1056.** Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 2mx + 2m^2 - 2 = 0$, знайди суму квадратів його коренів.
- 1057.** Доведи, що коли $p^2 - 4q = 0$, то $x^2 + px + q$ — квадрат двочлена. Якого?
- 1058.** Дано рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. За якої умови:
- а) сума його коренів дорівнює 0;
 - б) добуток його коренів дорівнює 0;
 - в) різниця його коренів дорівнює 0;
 - г) сума квадратів його коренів дорівнює 0?
- 1059.** За якого значення параметра a сума коренів рівняння $x^2 - (a^2 + 4a - 10)x + 3a = 0$ дорівнює 2?
- 1060.** За якого значення параметра a добуток коренів рівняння $x^2 - 3ax + (a^2 + 2a + 3) = 0$ дорівнює 6?

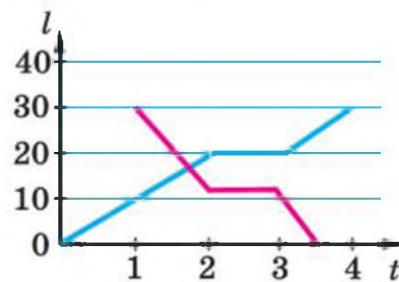
1061. **НМТ** За якого значення a сума коренів рівняння $x^2 + (a - 2)x + 28 - 4a = 0$ на 1 більша за їх добуток?
1062. За якого значення параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$ дорівнює 6?
1063. **НМТ** За якого значення параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - 8x + 4a - 1 = 0$ дорівнює 38?
1064. **ЗНО** Визнач додатне значення m , за якого один із коренів рівняння $x^2 - (2m - 4)x + 16 = 0$ на 6 більший за інший.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1065. За якого значення параметра a сума квадратів коренів рівняння $x^2 - (a + 3)x - a - 7 = 0$ найменша?
1066. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - 3x + 1 = 0$, знайди: а) різницю його коренів; б) різницю квадратів його коренів.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1067. Запиши у стандартному вигляді число.
а) 375 000 000 000; б) 0,0000000038.
1068. Подай у вигляді многочлена.
а) $(a + b^2)(a^2 + b)$; б) $(x^2 - 3y)(2x^2 + y)$;
в) $(5a^2 + b^2)(2a^2 - 3b^2)$; г) $(2m^2 - n)(2n^2 - m)$.
1069. На малюнку 20.1 зображено графіки руху двох велосипедистів. Прокоментуй, як довго кожен із них їхав, з якою швидкістю.
1070. Заміни літери цифрами, щоб виконувалась рівність ДИСК + РИМ = ІНАНТ.



Мал. 20.1

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, які квадратні рівняння називають зведеними.
- ✓ Розумію і можу сформулювати теорему Вієта:

x_1, x_2 — корені рівняння	
$x^2 + px + q = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
$x_1 + x_2 = -p$	$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$
$x_1 x_2 = q$	$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$

- ✓ Розумію і формулюю теорему, обернену до теореми Вієта.
- ✓ Умію складати квадратні рівняння за вказаними умовами.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке многочлен;
- що означає розкласти многочлен на множники;
- як скорочують дробі.

§ 21. Квадратний тричлен

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- виділення квадрату двочлена — *completing the square*
- розкладання на множники квадратного тричлена — *factoring the quadratic trinomial*

Квадратним тричленом називають многочлен виду $ax^2 + bx + c$, де x — змінна, a, b, c — деякі числа, причому $a \neq 0$.

Змінну квадратного тричлена можна позначати будь-якою буквою. Приклади квадратних тричленів:

$$4x^2 - 5x + 6, \quad -y^2 + 4y + 7, \quad \frac{1}{2}z^2 + z - 1.$$

Якщо квадратний тричлен прирівняти до нуля, матимемо квадратне рівняння. Його корені й дискримінант називають відповідно коренями і дискримінантом даного квадратного тричлена. Наприклад, дискримінант і корені квадратного тричлена $5x^2 - 7x - 6$ дорівнюють відповідно 169, 2 і $-\frac{3}{5}$, бо це дискримінант і корені рівняння $5x^2 - 7x - 6 = 0$.

Квадратний тричлен, як і квадратне рівняння, може мати два корені, один корінь або не мати коренів. Кількість коренів квадратного тричлена залежить від значення його дискримінанта.

Якщо $D > 0$, то квадратний тричлен має два різні корені, якщо $D = 0$, то один корінь, і якщо $D < 0$, то квадратний тричлен коренів не має.

Якщо квадратний тричлен має корені, то його можна розкласти на лінійні множники.

Правильною є така теорема.

Якщо корені квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ дорівнюють x_1 і x_2 , то його можна розкласти на лінійні множники:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Доведення. $ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$, $a \neq 0$. Отже, корені x_1 і x_2

тричлена $ax^2 + bx + c$ є також коренями рівняння $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$.

За теоремою Вієта, $\frac{b}{a} = -(x_1 + x_2)$, $\frac{c}{a} = x_1x_2$.

$$\begin{aligned} \text{Тому } ax^2 + bx + c &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2) = \\ &= a(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2) = \\ &= a(x(x - x_1) - x_2(x - x_1)) = a(x - x_1)(x - x_2). \end{aligned}$$

Приклад. Розклади на множники тричлен:

а) $x^2 + 4x - 21$; б) $3x^2 + 5x - 2$.

Розв'язання.

а) Корені рівняння $x^2 + 4x - 21 = 0$ дорівнюють 3 і -7.

Тому $x^2 + 4x - 21 = (x - 3)(x + 7)$.

Відповідь. $(x - 3)(x + 7)$.

б) Щоб розкласти на множники тричлен $3x^2 + 5x - 2$, розв'язуємо рівняння $3x^2 + 5x - 2 = 0$. Його дискримінант $D = 25 + 24 = 49$, тому

$$x_1 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{-5-7}{6} = -2.$$

Отже, $3x^2 + 5x - 2 = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x + 2)$.

Відповідь можна записати і так:

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2).$$

Відповідь. $(3x - 1)(x + 2)$.

Розкласти квадратні тричлени на множники доводиться при скороченні дробів, зведенні їх до спільного знаменника тощо. Наприклад,

щоб скоротити дріб $\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$, спочатку розкладають його чисельник

і знаменник на множники. Оскільки

$$3x^2 + 5x - 2 = (3x - 1)(x + 2), \quad x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2), \text{ то}$$

$$\frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2} = \frac{(3x - 1)(x + 2)}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{3x - 1}{x - 1}.$$

Кожний квадратний тричлен $ax^2 + bx + c$ можна подати у вигляді $a(x - k)^2 + p$, де k і p — деякі числа. Таке перетворення називають **виділенням квадрата двочлена** з квадратного тричлена.

Щоб виділити з квадратного тричлена $2x^2 - 12x + 25$ квадрат двочлена, спочатку винесемо за дужки множник 2:

$$2x^2 - 12x + 25 = 2\left(x^2 - 6x + \frac{25}{2}\right).$$

Одночлен $6x$ подамо у вигляді добутку $2 \cdot 3 \cdot x$, додамо до нього 9 і віднімемо 9:

$$(x^2 - 2 \cdot 3x + 9) - 9 + \frac{25}{2} = (x - 3)^2 + \frac{7}{2}.$$

Остаточо маємо: $2x^2 - 12x + 25 = 2(x - 3)^2 + 7$.

Виділення квадрата двочлена дає можливість розв'язувати задачі на знаходження найбільшого чи найменшого значення квадратного тричлена. Наприклад, щоб знайти, при якому значенні x значення виразу $2x^2 - 12x + 25$ найменше, виділимо з нього квадрат двочлена:

$$2x^2 - 12x + 25 = 2(x - 3)^2 + 7.$$

Другий доданок одержаної суми — число 7, а перший має найменше значення, коли дорівнює 0, тобто якщо $x = 3$.

Отже, тричлен $2x^2 - 12x + 25$ має найменше значення 7, якщо $x = 3$.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Якщо квадратний тричлен має дробові корені, то в розкладі його на лінійні множники бажано перший коефіцієнт цього тричлена внести в дужки. Наприклад:

$$3x^2 - 5x + 2 = 3(x - 1)\left(x - \frac{2}{3}\right) = (x - 1)(3x - 2).$$

$$10x^2 - 17x + 3 = 10\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{5}\right) = (2x - 3)(5x - 1).$$



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфа (Тема. Квадратні рівняння. Урок 3).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що називають квадратним тричленом?
2. Скільки коренів може мати квадратний тричлен?
3. Чи можна розкласти на лінійні множники квадратний тричлен, якщо його дискримінант від'ємний?
4. Як розкласти на лінійні множники тричлен виду $ax^2 + bx + c$?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розклади на множники квадратний тричлен.

а) $-x^2 + 4x + 45$; б) $5x^2 - 30x + 45$; в) $x^2 - 2x + 5$.

Розв'язання. а) Знайдемо корені рівняння $-x^2 + 4x + 45 = 0$.

$x^2 - 4x - 45 = 0$, $x_1 = 9$, $x_2 = -5$. Тоді $-x^2 + 4x + 45 = -(x - 9)(x + 5)$.

б) Розв'яжемо рівняння $5x^2 - 30x + 45 = 0$, $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Рівняння має один корінь $x = 3$, тобто $x_1 = x_2 = 3$.

Тоді $5x^2 - 30x + 45 = 5(x - 3)(x - 3) = 5(x - 3)^2$.



в) Дискримінант квадратного тричлена $x^2 - 2x + 5$ від'ємний ($D = 4 - 20 = -16$), тому даний квадратний тричлен не можна розкласти на множники.

2. Знайди значення функції $y = \frac{2x^2 + x - 3}{2x + 3}$ при $x = 2026$.

Розв'язання. Розкладемо чисельник дробу на множники:

$$2x^2 + x - 3 = 0.$$

$$D = 1 + 24 = 25 = 5^2; \quad x_1 = \frac{-1+5}{4} = 1, \quad x_2 = \frac{-1-5}{4} = -\frac{3}{2}.$$

$$\text{Тоді } 2x^2 + x - 3 = 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right) = (x-1)(2x+3).$$

$$\text{Отримаємо: } y = \frac{(x-1)(2x+3)}{2x+3} = x-1.$$

Якщо $x = 2026$, то $y = 2026 - 1 = 2025$.

Відповідь. $y = 2025$.

ВИКОНАЙ УСНО



1071. Знайди корені квадратного тричлена, якщо вони існують.

- а) $x^2 - 6x + 5$; б) $x^2 + 2x + 3$; в) $x^2 - 4x + 4$;
г) $x^2 + 2x - 15$; ґ) $x^2 + 6x + 9$; д) $x^2 + 4x + 6$.

1072. Дискримінант квадратного тричлена $2x^2 - 3x + 1$ дорівнює:

- А 5 Б 1 В -1 Г 17

1073. Який із квадратних тричленів не можна розкласти на множники?

- А $x^2 + 2x + 1$ Б $x^2 + 2x - 1$ В $x^2 + 2x + 2$ Г $x^2 - 2x + 1$

1074. Коренями квадратного тричлена $3x^2 - 7x + 2$ є числа 2 і $\frac{1}{3}$.

Розклади даний тричлен на множники.

- А $(x-2)(x-1)$ Б $(x-2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$
В $(3x+2)(3x+1)$ Г $(x-2)(3x-1)$

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



Знайди корені квадратного тричлена (**1075, 1076**).

- 1075.** а) $x^2 + 8x - 9$; б) $2x^2 - 5x - 7$; в) $5x^2 + 2x - 3$;
г) $y^2 - y - 6$; ґ) $4z^2 - 5z + 1$; д) $3n^2 - n - 2$.
1076. а) $4x^2 + 3x - 1$; б) $6x^2 + 7x - 5$; в) $-x^2 - 4x + 5$;
г) $9x^2 + 6x + 1$; ґ) $-4x^2 + 5x - 2$; д) $0,4x^2 + 0,7x - 3$.

1077. Склади і запиши план розкладання квадратного тричлена $kx^2 + px + t$ на множники.

1078. Розклади на множники квадратний тричлен.

- а) $x^2 - 10x + 21$; б) $a^2 + 2a - 15$; в) $-2x^2 - 5x + 3$;
г) $c^2 - 11c - 26$; р) $9a^2 + 24a + 16$; д) $4c^2 + 25c + 25$.

1079. Factoring the quadratic trinomial.

- а) $x^2 - 3x + 2$; б) $x^2 - 2x - 35$; с) $-x^2 + 5x - 6$;
д) $x^2 - 7x + 6$; е) $9x^2 - 12x + 4$; ф) $y^2 + 2y - 8$.

Скороти дріб (1080, 1081).

1080. а) $\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$; б) $\frac{x - 4}{x^2 - x - 12}$; в) $\frac{2x - 10}{x^2 - 3x - 10}$.

1081. а) $\frac{x + 5}{x^2 + 7x + 10}$; б) $\frac{x - 3}{x^2 - 2x - 3}$; в) $\frac{12 + 3x}{x^2 + 5x + 4}$.

Виділи квадрат двочлена з квадратного тричлена (1082, 1083).

1082. а) $x^2 + 6x - 4$; б) $x^2 - 4x + 5$;
в) $x^2 - 8x + 15$.

1083. а) $x^2 + 4x - 18$; б) $x^2 - 6x + 8$;
в) $x^2 + 8x + 7$.

1084. Гра. Один із гравців / одна із гравчинь записує тричлен виду $x^2 + ax + c$, а другий / друга має виділити квадрат двочлена. Потім учні / учениці міняються ролями.



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

Розклади на множники тричлен (1085, 1086).

1085. а) $0,6a^2 + a - 1,6$; б) $c^2 - \sqrt{2}c - 4$; в) $1,5y^2 - 3y + \frac{4}{3}$.

1086. а) $0,2n^2 + 0,8n - 12$; б) $\frac{4}{49}x^2 + 1\frac{5}{7}x + 9$; в) $m^2 - 3\sqrt{2}m + 4$.

Скороти дріб (1087, 1088).

1087. а) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 7x + 10}$; б) $\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9}$; в) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$;
г) $\frac{3c^2 - 5c + 2}{3c^2 - c - 2}$; р) $\frac{x^2 + 2x - 15}{35 + 2x - x^2}$; д) $\frac{-3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 1}$;
е) $\frac{2a^2 - 5a + 2}{3a^2 - 3,5a - 5}$; є) $\frac{a^2 + 9a + 14}{a^2 + 10a + 21}$; ж) $\frac{c^2 + \sqrt{5}c - 10}{c^2 - 3\sqrt{5}c + 10}$.



1088. а) $\frac{3x-9}{2x^2-5x-3}$; б) $\frac{a^2-9}{2a^2+7a+3}$; в) $\frac{c^2-8c-20}{c^2-11c+10}$;
 г) $\frac{a^2-8a+7}{a^2-9a+14}$; ґ) $\frac{2-3c+c^2}{c^2-4c+4}$; д) $\frac{2x^2-3x+1}{3x^2-4x+1}$;
 е) $\frac{x^2+2x-15}{x^2+4x-5}$; є) $\frac{x^2-3}{x^2-2\sqrt{3}+3}$; ж) $\frac{2c^2-5c-3}{2c^2+7c+3}$.

Обчисли значення дробу (1089, 1090).

1089. а) $\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}$ при $x = -1, 1; x = 9; x = 11; x = 99$;
 б) $\frac{a^3-5a^2+6a}{a^3-6a^2+9a}$ при $a = -2; a = 3, 5; a = 13$.

1090. $\frac{x^2+x-6}{x^2+4x+3}$ при $x = -1, 1; x = 9; x = 11; x = 99$.

1091. Чим відрізняються графіки функцій?

а) $y = x + 6$ і $y = \frac{x^2+7x+6}{x+1}$; б) $y = x + 3$ і $y = \frac{x^2-2x-15}{x-5}$.

Побудуй графік функції (1092, 1093).

1092. а) $y = \frac{x^2-x-6}{x-3}$; б) $y = \frac{2x^2-9x-5}{5-x}$.

1093. а) $y = \frac{x^2-x-12}{x-4}$; б) $y = \frac{3x^2-7x+2}{2-x}$.

Знайди суму і різницю дробів (1094, 1095).

1094. а) $\frac{1}{x^2-2x-3}$ і $\frac{3}{x^2-x-6}$; б) $\frac{1}{2x^2+5x-3}$ і $\frac{1}{2x^2-7x+3}$.

1095. а) $\frac{2}{x^2+3x-10}$ і $\frac{1}{x^2-7x+10}$; б) $\frac{1}{6a^2-13a+6}$ і $\frac{1}{3a^2-11a+6}$.

Розв'яжи рівняння (1096, 1097).

1096. а) $\frac{x}{x-2} + \frac{6}{x^2-7x+10} = \frac{2}{x-5}$; б) $\frac{2}{x^2+3x+2} - \frac{x}{x^2-1} + \frac{5x+4}{x^2+x-2} = 0$;

в) $\frac{1}{x-1} + \frac{3}{x^2+9x+18} = \frac{2x+5}{x^2+5x-6}$.

1097. а) $\frac{2}{x-7} = \frac{x}{x-2} + \frac{10}{x^2-9x+14}$; б) $\frac{x}{x^2-9} - \frac{3}{x^2+2x-3} + \frac{2x-5}{x^2-4x+3} = 0$;

в) $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{2x-7}{x^2-9x+14}$.

Спрости вираз (1098, 1099).

1098. а) $\frac{a+4}{a-3} - \frac{4a^2-1}{2a^2-3a+1} \cdot \frac{a^2+2a-3}{a^2-9}$; б) $\left(\frac{2a-5}{a+2} - \frac{a}{a-3} + \frac{15}{a^2-a-6} \right) : \frac{a-10}{a^2+2a}$;

в) $\left(\frac{x}{x^2+6x+8} - \frac{2}{x^2+3x+2} + \frac{6}{x^2+5x+4} \right) \cdot \frac{x^2+2x}{x-3} - \frac{3}{x-3}$.

1099. а) $\frac{2a^2-10a}{a^2-2a-3} \cdot \frac{a^2+2a-15}{a^2-25} - \frac{a-1}{a+1}$;

б) $\left(\frac{5}{x^2+7x+12} - \frac{1}{x^2+5x+6} + \frac{x}{x^2+6x+8} \right) \cdot \frac{(x+2)(x+3)}{(x+1)(x+6)}$.

1100. Доведи: якщо в квадратному тричлені $ax^2 + bx + c = 0$ коефіцієнти $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

1101. Доведи: якщо в квадратному тричлені $ax^2 + bx + c = 0$ сума коефіцієнтів $a + c = b$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

1102. Доведи, що при будь-якому значенні x набуває додатного значення квадратний тричлен: а) $x^2 - 4x + 5$; б) $3x^2 - 12x + 17$.

1103. Доведи, що при будь-якому значенні x набуває від'ємного значення квадратний тричлен: а) $-x^2 - 8x - 20$; б) $-2x^2 - 12x - 21$.

1104. При якому значенні x значення даного тричлена найменше? Знайди це значення. а) $x^2 - 6x + 10$; б) $2x^2 + 16x + 13$.

1105. При яких значеннях x значення виразу $f(x)$ найбільше? Обчисли це значення, якщо:

а) $f(x) = 8 + 4x - x^2$; б) $f(x) = -3x^2 + 6x + 1$.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1106. Знайди відстань між найближчими точками осі x і графіка функції $y = x^2 - 2x + 7$.

1107. Розклади на множники многочлен.

а) $a^2 - 6ab + 8b^2$; б) $2a^2 + 7ab - 15b^2$; в) $6a^2 + ab - b^2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1108. В таблиці наведено депозити на 12 місяців з фіксованою ставкою. Знайди, скільки грошей отримає вкладниця через рік від кожного банку, якщо вкладе 100 000 грн у кожен банк.



Назва банку	Відсоток річних
Перший банк	4,3 %
Родинний банк	4,6 %
Банк успішних	4,15 %

1109. Скороти дріб з натуральними показниками степенів.

а) $\frac{3^n}{3^{n+1}}$; б) $\frac{2^{3n}}{8^n}$; в) $\frac{a^{n+2}}{a^n}$; г) $\frac{x^{n+3}}{x^3}$; ґ) $\frac{a^{2n}-1}{a^n+1}$; д) $\frac{a^{2n}-2a^n+1}{a^n-1}$.

1110. Квадрат цілого числа не може закінчуватися однією з цифр — 2, 3, 7 або 8. Чи завжди є цілим числом квадратний корінь із числа, яке закінчується цифрою 5?

1111. Розташуй числа кожної таблиці у порядку зростання — і ти дізнаєшся ім'я (а) та прізвище (б) відомого скульптора, автора пам'ятника Нільсу Хенріку Абелю в Осло.

а

$\sqrt{0,16}$	$(-2)^3$	$(0,55)^1$	$(-1,1)^4$	256^0	$\sqrt{(-2)^2}$
у	ґ	с	а	т	в

б

$(\sqrt{8}+\sqrt{2})^{-2}$	5^0	$\sqrt{1,21}$	$(4^2-5^2)^3$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3$	$\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2}$	$(-0,2)^{-4}$	$(\sqrt{4+9})^2$
і	л	а	в	ґ	е	д	н

У центрі міста Осло — столиці Норвегії — в Королівському парку встановлено бронзовий пам'ятник видатному норвезькому математику Нільсу Хенріку Абелю (1802–1829). Ця споруда має вигляд гранітної глиби, на яку здіймається молодий чоловік, переступаючи через двох огидних чудовиськ. Деякі математики жартома говорять, що ці чудовиська символізують рівняння п'ятого степеня й еліптичні функції, переможені Абелем.



СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу навести приклад квадратного тричлена.
- ✓ Можу записати і використати формулу розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \text{ де } x_1 \text{ і } x_2 \text{ — корені.}$$
- ✓ Умію розв'язувати вправи, що передбачають розкладання квадратного тричлена на лінійні множники.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- що таке прикладна задача та математична модель;
- основні етапи розв'язування задач складанням рівнянь:
 - 1) вибрати невідоме і позначити його буквою;
 - 2) за допомогою цієї букви виразити всі інші невідомі й залежності;
 - 3) скласти рівняння;
 - 4) розв'язати рівняння;
 - 5) перевірити, чи відповідає умові задачі одержаний розв'язок.

§ 22. Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- математична модель — *mathematical model*

Значна частина питань життєдіяльності людини зводиться до розв'язування різного роду задач. З 7 класу тобі відомо, що в математиці задачі, умови яких містять нематематичні поняття, називають прикладними. Для розв'язування таких задач створюють спеціальні математичні моделі у вигляді рівнянь, нерівностей, схем, таблиць тощо. Розв'язання багатьох прикладних задач можна спростити, якщо подати модель у вигляді квадратного рівняння. Наведемо приклади.

Приклад 1. Клумба площею 54 м^2 має форму ромба, середнє арифметичне діагоналей якого дорівнює $10,5 \text{ м}$ (мал. 22.1). Знайди відстані між протилежними вершинами клумби.

Розв'язання. Приймемо довжини діагоналей ромба за шукані відстані. Якщо середнє арифметичне двох чисел дорівнює $10,5$, то їх сума вдвічі більша, тобто сума діагоналей ромба дорівнює 21 м . Нехай одна з діагоналей — $x \text{ м}$, тоді друга дорівнює $(21 - x)$. $S = \frac{1}{2}d_1d_2$ або

$d_1d_2 = 2S$. Маємо рівняння: $x(21 - x) = 108$, або $x^2 - 21x + 108 = 0$.

Розв'яжемо це рівняння:

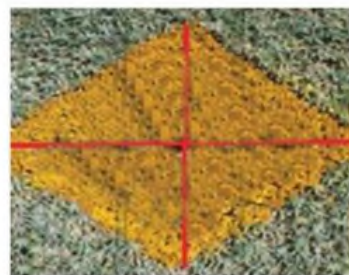
$$D = 21^2 - 4 \cdot 108 = 9, \quad x_{1,2} = \frac{21 \pm 3}{2}, \quad x_1 = 9, \quad x_2 = 12.$$

Якщо $x = 9$, то $21 - x = 12$;

якщо $x = 12$, то $21 - x = 9$.

Отже, шукані відстані 9 м і 12 м .

Відповідь. 9 м і 12 м .



Мал. 22.1

Приклад 2. Власна швидкість моторного човна — 18 км/год. Відстань 12 км за течією річки він проходить на 9 хв швидше, ніж проти течії. Знайди швидкість течії річки.

Розв'язання. 9 хв = 0,15 год. Якщо швидкість течії річки дорівнює x км/год, то швидкість човна за течією становить $(18 + x)$ км/год, а проти течії — $(18 - x)$ км/год. Відстань 12 км за течією він проходить за $\frac{12}{18+x}$ год, а проти течії — за $\frac{12}{18-x}$ год. Маємо рівняння:

$$\frac{12}{18-x} - \frac{12}{18+x} = 0,15, \text{ або } \frac{4}{18-x} - \frac{4}{18+x} = 0,05.$$

Звідси

$$\frac{4(18+x) - 4(18-x) - 0,05(18-x)(18+x)}{(18-x)(18+x)} = 0;$$

$$\frac{72+4x-72+4x-16,2+0,05x^2}{(18-x)(18+x)} = 0; \quad \frac{0,05x^2+8x-16,2}{(18-x)(18+x)} = 0;$$

$$\begin{cases} 0,05x^2 + 8x - 16,2 = 0, \\ x \neq 18, \\ x \neq -18. \end{cases}$$

$$0,05x^2 + 8x - 16,2 = 0;$$

$$D = 64 - 4 \cdot 0,05 \cdot (-16,2) = 64 + 3,24 = 67,24 = 8,2^2;$$

$$x_1 = 2,$$

$$x_2 = -162 \text{ (не задовольняє умову задачі).}$$

Отже, швидкість течії річки 2 км/год.

Відповідь. 2 км/год.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Розглянемо і геометричну задачу, що можна розв'язати за допомогою квадратного рівняння.

Задача. На площині n точок розміщені так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Якщо кожну з цих точок сполучити відрізком з усіма іншими, то утвориться 351 відрізок. Знайди число n .

Розв'язання. З однієї точки виходить $n - 1$ відрізків, з усіх n даних точок виходить $n(n - 1)$ відрізків. При цьому кожен відрізок повторюється двічі, бо має два кінці. Отже, всього відрізків $\frac{n(n-1)}{2}$.

$$\text{Маємо рівняння: } \frac{n(n-1)}{2} = 351, \text{ або } n^2 - n - 702 = 0.$$

Розв'яжемо це рівняння: $D = 1 + 4 \cdot 702 = 2809$, звідси $n_1 = 27$, $n_2 = -26$. Від'ємний корінь задачу не задовольняє.

Відповідь. $n = 27$.



Перейди за посиланням vse.ee/cubd та закріпи матеріал параграфу (Тема. Квадратні рівняння. Урок 4).

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що називають математичною моделлю задачі?
2. Як знайти швидкість тіла: а) за течією річки; б) проти течії річки?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. Знайди три послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 509.

Розв'язання. Нехай шукані числа: $x-1$, x , $x+1$.

Тоді маємо рівняння: $(x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 = 509$.

Розкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$x^2 - 2x + 1 + x^2 + x^2 + 2x + 1 - 509 = 0,$$

$$3x^2 - 507 = 0, \text{ звідси } x^2 = 169, x_1 = 13, x_2 = -13.$$

Отже, два інші числа: 12, 14 або -12, -14.

Відповідь. 12, 13, 14 або -12, -13, -14.

2. Комунікаційне агентство зобов'язалося виготовити за певний строк 1200 матеріалів для соціальних мереж великого холдингу. Роботу було закінчено на 4 дні раніше, бо план щоденно перевиконувався на 10 одиниць. За скільки днів агентство зобов'язувалося закінчити роботу?

Розв'язання. Запишемо дані задачі в таблицю.

Робота	Всього випущено	Днів	Щоденний випуск
За планом	1200	t	$\frac{1200}{t}$
Фактично	1200	$t - 4$	$\frac{1200}{t - 4}$

На 10
більше

Складаємо рівняння, скориставшись даними стовпчика «Щоденний випуск».

$$\frac{1200}{t-4} - \frac{1200}{t} = 10, \text{ або } \frac{120}{t-4} - \frac{120}{t} = 1.$$

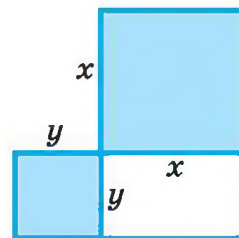
$$\frac{120t - 120(t-4)}{t(t-4)} = 1.$$

$$\text{Звідси: } 120t - 120(t-4) = t(t-4) \text{ або } t^2 - 4t - 480 = 0.$$

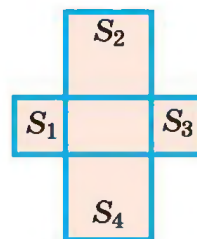
Корені рівняння: 24 і -20. Задачу задовольняє тільки додатний корінь: $t = 24$.

Відповідь. За 24 дні.

- 1122.** Знайди дві суміжні сторони прямокутника, якщо:
 а) їх сума дорівнює 13 м, а площа прямокутника — 40 м^2 ;
 б) периметр прямокутника дорівнює 60 м, а площа — 221 м^2 .
 До кожної задачі зроби відповідний малюнок.
- 1123.** Знайди дві суміжні сторони прямокутника, якщо:
 а) їх різниця дорівнює 5 м, а площа прямокутника — 66 м^2 ;
 б) їх сума дорівнює 28 см, а довжина діагоналі — 20 см.
 До кожної задачі зроби відповідний малюнок.
- 1124.** Периметр поля прямокутної форми дорівнює 6 км, а його площа — 200 га. Знайди довжину і ширину поля.
- 1125.** Знайди число, яке на:
 а) 435 менше від його подвоєного квадрата;
 б) 240 більше за квадратний корінь з цього числа.
- 1126.** *Задача Л. Магніцького.* Знайди число, знаючи, що, додавши до його квадрата 108, одержимо число, у 24 рази більше за шукане.
- 1127.** Добуток двох послідовних парних чисел на 41 більший за їх середнє арифметичне. Знайди ці числа.
- 1128.** Квадрат суми двох послідовних натуральних чисел більший за суму їх квадратів на 264. Знайди ці числа.
- 1129.** Знайди три послідовних цілих числа, сума квадратів яких дорівнює 434.
- 1130.** Периметр прямокутника дорівнює 26 см, а сума площ квадратів, побудованих на двох суміжних сторонах прямокутника, дорівнює 89 см^2 . Знайди сторони цього прямокутника (мал. 22.3).
- 1131.** Периметр прямокутника дорівнює 32 см, а сума площ чотирьох квадратів, побудованих на його сторонах, — 260 см^2 . Знайди сторони прямокутника (мал. 22.4).
- 1132.** Дно ящика — прямокутник, довжина якого в 1,5 раза більша за ширину. Висота ящика дорівнює 0,5 м. Знайди об'єм ящика, якщо відомо, що площа його дна на $0,76 \text{ м}^2$ менша від площі бічних стінок. Розв'яжи задачу, користуючись планом.



Мал. 22.3



Мал. 22.4

1. Познач ширину дна ящика за x .
2. Вирази довжину дна ящика через x .
3. Вирази через x площу меншої, а потім більшої, а потім всіх бічних стінок ящика.
4. Склади рівняння, знаючи, що площа дна ящика на $0,76 \text{ м}^2$ менша від площі бічних стінок.
5. Розв'яжи рівняння та знайди виміри ящика.
6. Знайди об'єм ящика.

1133. У кінотеатрі було 320 місць. Коли кількість місць у кожному ряді збільшили на 4 і додали ще один ряд, у залі стало 420 місць. Скільки стало рядів у кінотеатрі? Склади план розв'язування задачі та розв'яжи її.

1134. Катер пройшов униз річкою 150 км і повернувся назад, затративши на весь шлях 5,5 год. Знайди швидкість течії річки, якщо швидкість катера в стоячій воді становить 55 км/год. За таблицею склади рівняння та розв'яжи задачу.

	S , км	v	t
За течією	150	$55 + x$	$\frac{150}{55 + x}$
Проти течії	150	$55 - x$	$\frac{150}{55 - x}$

1135. Катер пройшов за течією річки 48 км і стільки само проти течії, затративши на весь шлях 5 год. Знайди власну швидкість катера, якщо швидкість течії річки становить 4 км/год. Познач власну швидкість катера за x , побудуй таблицю до задачі, а потім склади рівняння і розв'яжи його.

1136. A boat traveled 50 km downstream and 45 km upstream, taking 10 hours to complete the journey. Find the boat's own speed if the river's current is 2,5 km/h. Write the boat's own velocity as x , create a table for the problem, and then write and solve the equation.

1137. Турист проплив моторним човном угору річкою 25 км, а назад спустився плотом. Човном він плив на 10 год менше, ніж плотом. Знайди швидкість течії річки, якщо швидкість човна в стоячій воді — 12 км/год.

1138. Поїзд затримався в дорозі на 4 хв і ліквідував запізнення на перегоні в 20 км, пройшовши його зі швидкістю на 10 км/год більшою, ніж за розкладом. Якою була швидкість поїзда на цьому перегоні?

1139. На середині шляху між A і B поїзд затримали на 10 хв. Щоб прибути у B за розкладом, довелося початкову швидкість поїзда збільшити на 12 км/год. Знайди початкову швидкість поїзда, якщо відстань між A і B дорівнює 120 км.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

1140. Велосипедист проїхав 96 км на 1,6 год швидше, ніж передбачав. При цьому за кожну годину він проїжджав на 2 км більше, ніж передбачав проїжджати. З якою швидкістю він їхав?



- 1141.** З A до B , відстань між якими становить 700 км, виїхав автобус. Якби він зменшив швидкість на 10 км/год, то в дорозі був би на $1\frac{2}{3}$ год довше. Скільки годин їде автобус від A до B ?
- 1142.** Мотоцикліст їхав з одного міста в друге впродовж 4 год. Повертаючись назад, він перші 100 км їхав з тією самою швидкістю, а потім зменшив її на 10 км/год і тому на зворотний шлях затратив на 30 хв більше. Знайди відстань між містами.
- 1143.** Рибалка вирушив на човні з пункту A проти течії річки. Пропливши 6 км, він кинув весла, і через 4,5 год після виходу з A течія знову віднесла його до пункту A . Знайди швидкість течії річки, якщо швидкість човна в стоячій воді — 90 м/хв.
- 1144.** З пункту A відправили за течією річки пліт. Через 5 год 20 хв з пункту A слідом за плотом вийшов моторний човен, який наздогнав пліт, пройшовши 20 км. Знайди швидкість течії річки, якщо човен проходив щогодини на 12 км більше, ніж пліт.
- 1145.** Батько й син пройшли 480 м, причому батько зробив на 200 кроків менше, ніж син. Знайди довжину кроку кожного з них, якщо крок батька довший від кроку сина на 20 см.
- 1146.** Дві бригади, працюючи разом, закінчили асфальтування дороги за 4 дні. Скільки днів потрібно було б на виконання цієї роботи кожній бригаді окремо, якщо одна з них могла б закінчити асфальтування дороги на 6 днів раніше, ніж друга?
- 1147.** Водонапірний бак наповнюється за допомогою двох труб за 2 год 55 хв. Перша труба може наповнити його на 2 год швидше, ніж друга. За який час кожна труба окремо може наповнити бак?
- 1148.** Два робітники, з яких другий починає роботу на 1,5 дня пізніше від першого, можуть виконати роботу за 7 днів. За скільки днів кожний із них окремо міг би виконати всю роботу, якщо другий робітник може виконати її на 3 дні швидше, ніж перший?
- 1149.** Перша бригада працювала на ремонті дороги 6 днів, після чого до неї приєдналася друга бригада. Через 9 днів спільної роботи виявилося, що відремонтували половину дороги. За скільки днів може відремонтувати цю дорогу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо першій бригаді для цього потрібно на 9 днів менше, ніж другій?
- 1150.** Перший робітник може виконати виробниче завдання на 10 год швидше, ніж другий. Коли перший робітник пропрацював 9 год, а потім його змінив другий робітник, який працював 12 год, то виявилося, що було виконано 60 % завдання. За скільки годин може виконати це завдання кожен робітник, працюючи самостійно?

1151. *Стародавня індійська задача (Бхаскара, 1114 р.).*



Розділившись на дві зграї,
забавлялись мавпи в гаї.
Одна восьма їх в квадраті
танцювали, вельми раді.

А дванадцять на деревах
підняли веселий регіт,
що навколо аж гуло.
Скільки їх всього було?

1152. На вишні завітчаній кілька гілок,
на них сіли порівну двісті бджілок.
Коли б на п'ять менше гілок розцвіло,
на кожній би бджіл на дві більше було б.
То ж скільки гілок на цій вишеньці гожій
і скільки бджілок працювало на кожній?



1153. Бригада планувала засіяти 200 га до певного терміну, але засівала щодня на 5 га більше, ніж планувала, і тому завершила роботу на 2 дні раніше. За скільки днів бригада закінчила сівбу?

1154. Робітник мав за певний час виготовити 120 деталей. Але щодня він виготовляв на 2 деталі більше, ніж планував, і тому закінчив роботу на 3 дні раніше терміну. Скільки деталей виготовляв робітник щодня?

1155. Бригада мала за певний час прокласти 720 м кабелю. Але щогодини вона прокладала на 18 м більше, ніж планувала, і тому закінчила роботу на 2 години раніше. Скільки годин працювала бригада?

1156. З першої ділянки землі зібрали 4,8 т картоплі. З другої ділянки, площа якої на 0,03 га менша від першої, — 2 т картоплі, причому з однієї сотки цієї ділянки зібрали на 200 кг менше, ніж з однієї сотки першої ділянки. Знайди площу кожної ділянки.

1157. До розчину, що містить 40 г солі, додали 200 г води, після чого його концентрація зменшилася на 10 %. Скільки води містив розчин і яка була його концентрація?

1158. З розчину, який містив 4 кг кислоти, випарували 4 кг води (мал. 22.5). Після цього концентрація розчину збільшилася на 5 %. Скільки води містив розчин і яка була його концентрація?

1159. Сплав золота зі сріблом, який містив 80 г золота, сплавив з 100 г чистого золота. В результаті вміст золота в сплаві збільшився на 20 %. Скільки в сплаві срібла?

1160. З двох кусків металу перший має масу 880 г, а другий — 858 г, причому об'єм першого куска на 10 см^3 менший, ніж другого. Знайди густину кожного металу, якщо густина першого на 1 г/см^3 більша за густину другого.



Мал. 22.5

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ



- 1161.** Родина готувала великодні крашанки і писанки (мал. 22.6). Вони підраховали: жовтих крашанок у стільки разів більше, ніж блакитних, у скільки блакитних більше, ніж писанок. А якщо з однієї жовтої крашанки зробити ще одну писанку, то писанок стане утричі менше, ніж жовтих крашанок. Скільки було крашанок і писанок?



Мал. 22.6



Мал. 22.7

- 1162.** Круговою доріжкою завдовжки 2 км рухаються в одному напрямку Таня і Сергій, які сходяться через кожні 20 хв (мал. 22.7). Знайди швидкість Тетяни і Сергія, якщо Тетяна пробігає коло на 1 хв швидше, ніж Сергій.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



- 1163.** Сума квадратів двох від'ємних чисел дорівнює 74, а різниця їх квадратів — 24. Знайди ці числа.
- 1164.** Розв'яжи рівняння.

а) $\frac{x^2+2}{x+3} = \frac{x^2+4x}{x+3};$

б) $\frac{x^2+2x}{x-4} = \frac{x^2+8}{x-4}.$

- 1165.** *Відкрита задача.* Розв'яжи графічно систему рівнянь $y = \sqrt{x}$ і $y = ?$, якщо один із її розв'язків (1; 1).

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Можу розв'язувати вправи, що передбачають складання і розв'язування квадратних рівнянь і рівнянь, що зводяться до них як математичних моделей прикладних задач.

Перейди за посиланнями та

- підсумуй головне в розділі <https://vse.ee/cras>
- ознайомся з історичними відомостями <https://vse.ee/crav>

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ



ВАРІАНТ I

1. Знайди корені квадратного тричлена.
а) $x^2 + 8x - 9$; б) $x^2 - 12x + 20$.
2. Один із коренів рівняння $x^2 - 7x + c = 0$ дорівнює 5. Знайди значення c і другий корінь рівняння.
3. Скороти дріб. а) $\frac{x-1}{x^2-4x+3}$; б) $\frac{x^2-3x-10}{x^2-25}$.
4. Один із катетів прямокутного трикутника на 7 см довший за другий. Знайди периметр трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 13 см.

ВАРІАНТ II

1. Знайди корені квадратного тричлена.
а) $x^2 + 2x - 15$; б) $x^2 - 5x - 14$.
2. Один із коренів рівняння $x^2 + bx - 6 = 0$ дорівнює 3. Знайди значення b і другий корінь рівняння.
3. Скороти дріб. а) $\frac{x^2-6x+8}{x-2}$; б) $\frac{x^2-4x-5}{x^2-1}$.
4. Один із катетів прямокутного трикутника на 2 см менший від другого. Знайди периметр трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 10 см.

ВАРІАНТ III

1. Знайди корені квадратного тричлена.
а) $x^2 - 5x + 4$; б) $x^2 + 4x - 12$.
2. Один із коренів рівняння $x^2 - 6x + c = 0$ дорівнює 2. Знайди значення c і другий корінь рівняння.
3. Скороти дріб. а) $\frac{x-7}{x^2-5x-14}$; б) $\frac{x^2-7x+12}{x^2-16}$.
4. Один із катетів прямокутного трикутника на 3 см менший від другого. Знайди периметр трикутника, якщо його гіпотенуза дорівнює 15 см.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ



Тестові завдання № 6

1. Добуток коренів рівняння $x^2 + 12x + 20 = 0$ дорівнює:
А 12 Б 20 В -20 Г -12
2. Сума коренів рівняння $x^2 + 2x - 15 = 0$ дорівнює:
А 15 Б 2 В -2 Г -15
3. Дискримінант квадратного тричлена $3x^2 + x - 4$ дорівнює:
А -47 Б 49 В 7 Г 7 або -7
4. Знайди корені квадратного тричлена $x^2 - 4x - 5$.
А -1; 5 Б -5; 1 В 1; 5 Г коренів немає
5. Перший коефіцієнт зведеного квадратного рівняння дорівнює:
А 1 Б 2 В -1 Г 0
6. Розклади на множники квадратний тричлен $2x^2 - 5x - 3$.
А $(x - 3)(x + 0,5)$ Б $(x + 3)(x - 0,5)$
В $(x + 3)(2x - 1)$ Г $(x - 3)(2x + 1)$
7. Один із коренів рівняння $x^2 + mx - 21 = 0$ дорівнює 3. Знайди m .
А -4 Б 4 В 18 Г -18
8. Один із коренів рівняння $2x^2 - 10x + n = 0$ дорівнює 2. Знайди другий корінь рівняння.
А 3 Б -7 В 8 Г -12
9. Найменше значення виразу $x^2 - 6x + 10$ дорівнює:
А 10 Б 1 В -1 Г 19
10. Склади квадратне рівняння, корені якого дорівнюють 2 і 5.
А $x^2 + 10x + 7 = 0$ Б $x^2 + 7x - 10 = 0$
В $x^2 - 7x + 10 = 0$ Г $x^2 - 10x + 7 = 0$

«Важкі й складні задачі цікавіше розв'язувати, ніж прості. І нехай це не видається парадоксом, — легше розв'язувати!»

Є. О. Патон

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ № 6



1. Знайди суму коренів рівняння $3x^2 - 9x + 5 = 0$.
А 9 Б -9 В -3 Г 3
2. Знайди корені квадратного тричлена $x^2 - 6x - 27$.
А 9; 3 Б -9; -3 В -3; 9 Г -9; 3
3. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - 5x + 3 = 0$. Знайди значення виразу $2x_1 + 2x_2 + 5x_1x_2$.
А 5 Б 15 В 25 Г -5
4. Установи відповідність між квадратними тричленами (1–3) та їх розкладом на множники (А–Д).

1 $4x^2 - 12x + 9$	А $(4x - 1)(x - 1)$
2 $4x^2 + 5x + 1$	Б $(4x - 3)^2$
3 $4x^2 - 8x + 3$	В $(4x + 1)(x + 1)$
	Г $(2x - 1)(2x - 3)$
	Д $(2x - 3)^2$

5. Різниця коренів рівняння $x^2 - 6x + p = 0$ дорівнює 2. Знайди корені рівняння і коефіцієнт p .
6. Розв'яжи рівняння $\frac{x}{x-2} + \frac{x+2}{x+1} = \frac{6}{x^2 - x - 2}$.
7. Сервісний центр зобов'язався відремонтувати за певний час 72 гаджети. Роботу було закінчено на 3 дні раніше, бо план щоденно перевищували на 4 одиниці. За скільки днів сервісний центр зобов'язався виконати роботу?
8. За якого значення параметра a сума коренів рівняння $x^2 - (a^2 - 2a + 3)x + a + 8 = 0$ дорівнює 6?

Додаткове завдання

9. При яких значеннях a рівняння $x^2 - (a + 2)x + a + 5 = 0$ має один корінь?

Розділ 4. СТОХАСТИКА

Кажуть, що числа правлять світом. Ні, вони тільки показують, як правлять світом.

Йоганн Вольфганг Гете



В житті і в своїй професійній діяльності найчастіше люди використовують вміння працювати з даними. Розв'язування задач цього розділу допоможе пригадати, як систематизувати дані у таблиці, як читати і будувати діаграми, як розв'язувати задачі, що містять відсотки, а також задачі з комбінаторики та теорії ймовірностей.

§ 23 **Відсотки. Задачі на відсотки. Діаграми**
Percentages. Percentage problems.
Graphs and charts

§ 24 **Збирання та систематизація даних. Частотні таблиці. Діаграми**
Collecting and organizing data.
Frequency tables. Graphs and charts

§ 25 **Вибірка. Середнє значення, мода вибірки**
Sample. Sample mean, mode

§ 26 **Комбінаторні задачі**
Combinatorial problems

§ 27 **Поняття ймовірності**
The concept of probability

У цьому розділі ти дізнаєшся про:

- відсотки, діаграми;
- збирання та систематизацію даних, частотні таблиці;
- вибірку, середнє арифметичне, моду вибірки;
- комбінаторні задачі;
- поняття ймовірності.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

— щоб записати відсотки десятковим дробом або натуральним числом, потрібно число, яке стоїть перед знаком %, поділити на 100.

$$45 \% = 45 : 100 = 0,45; \quad 200 \% = 200 : 100 = 2$$

§ 23. Відсотки. Задачі на відсотки. Діаграми

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- відсотки — *percent*
- кругова діаграма — *pie chart*
- стовпчаста діаграма — *bar graphs*

Відсоток — сота частина.

Найпростіші задачі на відсотки

1. Задачі на знаходження відсотка від числа

Щоб знайти відсоток від числа, треба число помножити на відсоток, що переведений в десятковий дріб.

Наприклад, 7 % від числа x становлять $0,07x$.

2. Знаходження числа за значенням його відсотка

Щоб знайти число за значенням його відсотка, треба відоме значення поділити на відсоток, що переведений у десятковий дріб.

Наприклад, якщо 7 % деякого числа становить x , то саме це число — $x : 0,07$.

3. Знаходження відсоткового відношення

Щоб знайти, скільки відсотків одне число складає від іншого, треба перше число поділити на друге, і результат перевести у відсотки.

Наприклад, щоб знайти, який відсоток 7 становить від 10, необхідно

$$7 : 10 = 0,7 = 70 \% .$$

Складніші задачі розв'язуються на основі цих 3 наведених видів.

Задача. Одна зі шкіл змогла зібрати і відправити в районну бібліотеку на 20 % книжок менше, ніж друга. Якби друга школа збрала на 32 книжки менше, а перша на 12 більше, то кількість зібраних і відправлених книжок обома школами була б однакова. Знайди, скільки книжок збрала кожна школа.

Розв'язання. Задачу зручно розв'язати за допомогою рівняння.

Нехай друга школа збрала x книжок, тоді перша збрала 80 % від x , тобто $0,8x$.

За умовою складемо рівняння: $x - 32 = 0,8x + 12$

$$x - 0,8x = 12 + 32$$

$$0,2x = 44$$

$$x = 220$$

Отже, друга школа зібрала 220 книжок, тоді перша зібрала $0,8 \cdot 220 = 176$ книжок.

Відповідь. 220 книжок та 176 книжок.

Відсотки також широко використовують для подання чи аналізу даних.

Діаграми — символічний малюнок, який наочно ілюструє співвідношення між значеннями величин.



ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

В банківській справі також говорять про складні відсотки. Це спосіб нарахування прибутку, наприклад за депозитним вкладом, за якого нараховані відсотки періодично додаються до тіла вкладу. Є також низка аналогічних термінів «депозит з капіталізацією» або «реінвестування прибутку».

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які види задач на відсотки ти знаєш? Наведи приклади.
2. Які види діаграм ти знаєш?
3. Для чого використовують діаграми?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Розв'язати задачі на розчини і сплави зазвичай допомагають 2 моделі: таблиця і рівняння.
Є два види молока з масовою часткою жиру 2 % та 5 %. Скільки треба взяти кожного виду молока, щоб отримати 12 кг молока жирністю 4 %?



Модель до задачі — таблиця.

	Загальна маса, кг	% жирності	Маса жиру, кг
Молоко I		2 %	
Молоко II		5 %	
Розчин	12	4 %	

Нехай маса першого виду молока буде x кг, тоді другого — $(12 - x)$ кг. Знаходимо масу жиру для кожного рядка і заповнюємо далі третій стовпчик таблиці.

	Загальна маса, кг	% жирності	Маса жиру, кг
Молоко I	x	2 %	$0,02x$
Молоко II	$12 - x$	5 %	$0,05(12 - x)$
Розчин	12	4 %	$12 \cdot 0,04$

Використовуючи дані стовпця «Маса жиру», складемо ще одну математичну модель — лінійне рівняння:

$$0,02x + 0,05(12 - x) = 12 \cdot 0,04$$

$$0,02x + 0,6 - 0,05x = 0,48$$

$$-0,03x = -0,12$$

$$x = 4 \text{ (кг)} \quad 12 - x = 12 - 4 = 8 \text{ (кг)}$$

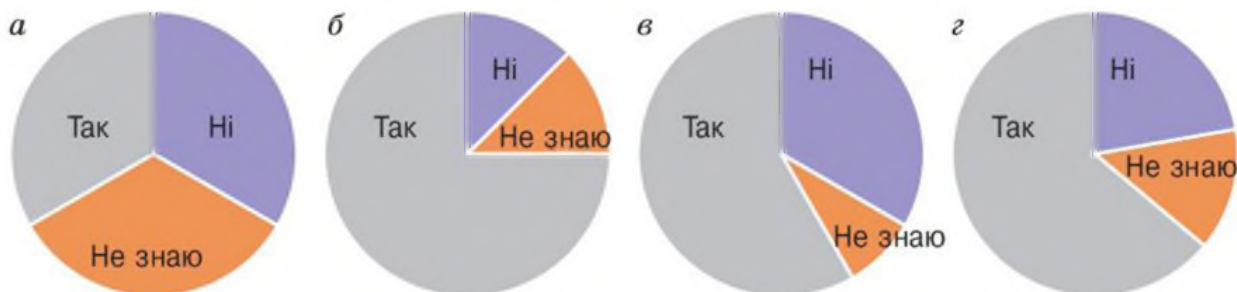
Відповідь. 4 кг молока жирністю 2 % та 8 кг молока жирністю 5 %.

ВИКОНАЙ УСНО



- 1166.** Зазвичай перукарі змішують фарбу з окислювачем у відношенні 1 : 2.
- Який відсоток фарби у цій суміші? Округли до одиниць відсотків.
 - Який відсоток окислювача у цій суміші?
- 1167.** Під час сушіння в сушарці втрачається 90 % вологи абрикос. Скільки потрібно було взяти свіжих абрикос, щоб отримати 350 г сушених?
- 1168.** Який відсоток становить 18 від 45?
- А 0,4 % Б 2,5 % В 25 % Г 40 %
- 1169.** Початкова ціна товару становить x грн. Вирази ціну товару, якщо:
- вона становить 85 % початкової ціни;
 - вона зросла на 11 %;
 - вона стала вдвічі меншою;
 - вона стала утричі більшою.
- 1170.** У шкільному електронному опитуванні про сортування сміття взяли участь 500 учнів та учениць, 320 із яких дали стверджуваль-

ну відповідь, а 110 — заперечну. Яка діаграма відповідає описаній ситуації?



- 1171.** Число 150 у 2 рази більше 20 % числа x . За допомогою якого рівняння можна знайти число x ?

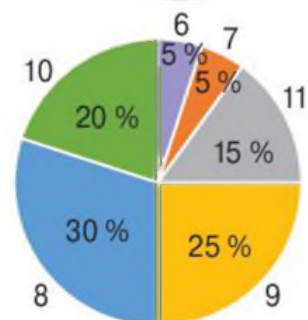
А $2x = 150$

Б $150 : 2 = 0,2x$

В $150 \cdot 2 = 20 \% x$

Г $0,5 \cdot 150 = 0,02x$

- 1172.** На діаграмі (мал. 23.1) зображено результати (у балах) учнів / учениць класу за тестування з математики. Які висновки можна зробити на основі цієї діаграми?



Мал. 23.1

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

- 1173.** В Україні рівень урбанізації становить близько 70 %.

Скільки людей проживають в селах України на даний момент?

- 1174. Гра.** Один із учнів / одна з учениць записує ціле число, другий / друга — записує відсоток, а третій / третя має знайти відсоток від цього числа. Потім учні / учениці міняються ролями.

- 1175.** Розглянь таблицю витрат сімейного місячного бюджету.

а) Чому дорівнює місячний бюджет цієї родини?

б) Скільки відсотків бюджету родини витрачає на доброчинність?

в) Зазвичай родина інвестує 60 % статті «Інші витрати». Яку суму інвестує родина? І яка залишається на розваги?

ВИТРАТИ

Продукти	10 000
Медицина та спорт	2000
Транспорт	5000
Дом. тварини	500
Комуналка	2200
Борги	800
Навчання	5000
Доброчинність	4000
Інші витрати	10 500

- 1176.** Із 72 учнів / учениць, які бажають вивчати математику поглиблено, утворили 3 класи з однаковою кількістю учнів / учениць у кожному. В одному із цих класів 75 % становлять учні / учениці, які також вивчають поглиблено англійську. Скільки учнів / учениць, які вивчають поглиблено математику й англійську?

1177. В компанії є вакантна посада координатора проєкту з місячною заробітною платою 45 000 грн за 40 робочих годин на тиждень. Після співбесід компанія вирішила час та заробітну платню координатора розбити між двома претендентками — Оленою та Іриною. Олену буде залучено лише на 30 % часу, а Ірину — на решту часу. Яку зарплатню отримуватиме кожна претендентка?

1178. Власник магазину хоче закупити 1000 упаковок сметани. Її відвантажують в ящиках по 50 упаковок у кожному. Ціна однієї упаковки становить 32 грн, але при купівлі кожних 3 ящиків діє знижка 3 %.

а) Скільки гривень має заплатити власник магазину?

б) Скільки грошей він виручить за всю сметану, якщо зможе її продати за ціною 40 грн?

в) Який відсоток прибутку закладає власник магазину?

1179. У збільшеній акційній пляшці міститься 750 мл мінеральної води. Який стандартний об'єм води в пляшках цієї фірми? Скільки мілілітрів води отримує покупець у подарунок, купуючи акційну пляшку?

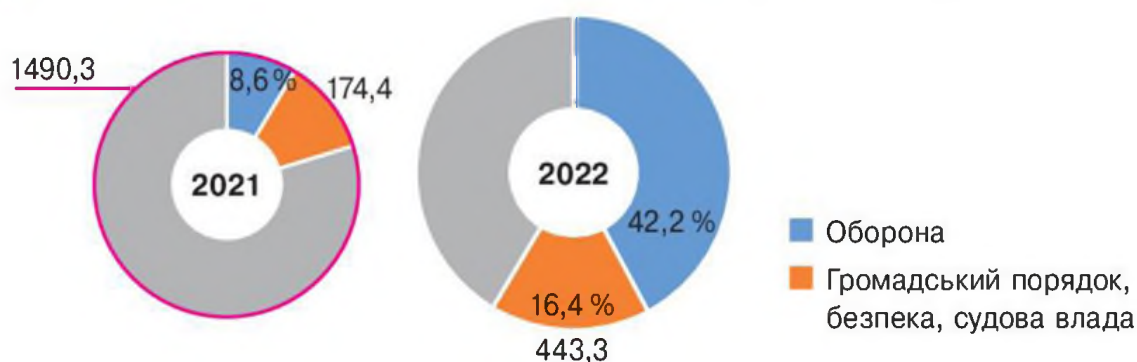


1180. Після подорожчання на 30 % велосипед став коштувати 14 352 грн. Яка була його початкова ціна?

1181. After the price of the bike went up by 20 %, it cost 15 000 UAH. What was its original price?

1182. Після того як було викуплено 20 % квитків на благодійний реп-мюзикл «Ти [Романтика]» про «Розстріляне відродження», у продажі залишилося ще 320 квитків. Яку суму грошей можна виручити за цей концерт, якщо ціна одного квитка становить 500 грн?

1183. Проаналізуйте, яку частку у держбюджеті займали видатки на оборону та безпеку (у млрд грн) у 2021 та 2022 роках (мал. 23.2).



Мал. 23.2

- а) Чим спричинені такі зміни?
 б) Знайдіть, скільки мільярдів гривень виділялось на оборону в 2021 році.
 в) Який відсоток припадав на безпеку у 2021 році?
 г) Знайдіть, який був державний бюджет України у 2022 році.
 ґ) Скільки грошей виділялося на оборону в 2022 році? Відповіді округліть до цілих.

1184. Скільки відсотків становлять 3 з 24 записаних пісень?

1185. За перші три дні користування послугою «Шлюб онлайн» в застосунку «Дія» українці зробили 416 133 пропозицій, проте «так» сказали тільки 49 282 дівчат. Який відсоток пропозицій отримав відповідь «так»? Відповідь округли до цілих відсотка.

1186. 5 учнів/учениць проходили тестування, щоб визначитися з рівнем їхніх знань англійської мови. У таблиці наведено набрані бали учнів/учениць із 20 можливих. Знайди відсоток успішності кожного учня/кожної учениці.

Учасники	Бал
1	18
2	17
3	13
4	12
5	20

1187. На уроці 8 учнів/учениць працювали самостійно з підручником, 3 виконували практичну роботу в групі, 4 працювали з вчителем і ще 10 працювали на онлайн-платформі. Який відсоток учнів/учениць припадає на кожен вид роботи?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



1188. На присадибній ділянці вирощують різні ягоди (мал. 23.3).

- а) Яку площу ділянки відведено під ягоди?
 б) Який відсоток площі ділянки, відведеної під ягоди, займає кожен із видів ягід?
 в) На скільки менше відсотків припадає на полуницю, ніж на лохину?
 г) Яка площа припадає на вирощування ожини, якщо вся присадибна ділянка має площу 1 га?



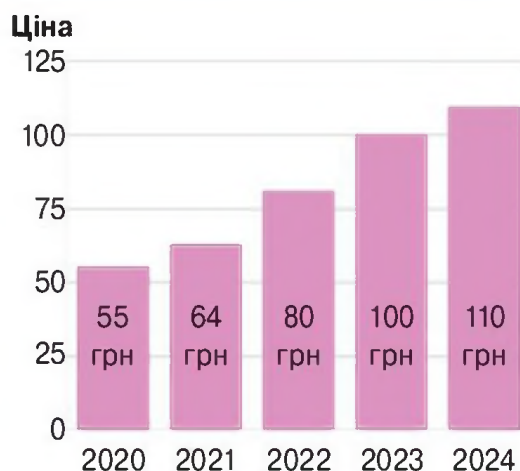
1189. Трейдер купив скульптуру за 500 \$, а потім продав її за 700 \$. Який відсоток прибутку він отримав?

1190. Проаналізуй діаграму цін тарілки борщу у закладах харчування в Україні (мал. 23.4).

а) Знайди, на скільки відсотків зросла ціна тарілки борщу:

- 1) з 2020 року до 2024 року;
- 2) з 2022 року до 2024 року.

б) Дізнайся про ціну тарілки борщу в закладах на даний момент. Як вона змінилася порівняно з 2024 роком?



Мал. 23.4

1191. Ціна книжки в інтернет-магазинах коливається від 166 до 220 грн.

а) На скільки відсотків максимальна ціна більша за мінімальну?

б) На скільки відсотків мінімальна ціна менша від максимальної?

Відповіді округліть до цілих відсотків.

1192. У волонтерській організації на даний момент 2 незакритих збори загальною сумою 100 000 грн. 25 % першого збору дорівнює шостій частині другого збору. Яка сума кожного збору? Склади рівняння за планом.

1. Познач суму одного зі зборів за x .
2. Вирази суму другого збору через x .
3. Склади рівняння, знаючи, що 25 % першого збору дорівнює шостій частині другого збору.

1193. Власник галереї купив 2 скульптури за 4500 \$. Продавши ці скульптури, він отримав прибуток у 40 % від вартості. Прибуток від продажу першої скульптури склав 25% її вартості, а від другої — 50% її вартості. Знайди початкову ціну кожної скульптури. Склади план розв'язання задачі та розв'яжи її.

1194. На дискотеці дівчат було на 6 більше, ніж хлопців. Якщо кількість дівчат збільшити на 100 %, а кількість хлопців на 150 %, то дівчат і хлопців стане порівну. Постав запитання до задачі та розв'яжи її.

1195. В одному американському бутіку кепка Руслана Багінського коштує на 150 \$ менше, ніж в іншому. Якщо перший бутік підвищить ціну на 20 %, а другий знизить її на 25 %, то кепка коштуватиме однаково. Знайди початкові ціни на цю кепку в обох бутіках.

1196. Для технічних цілей в лабораторії змішали 15 % кислоту та 25 % кислоту й отримали 50 мл 20 % кислоти. Скільки мілілітрів кожної кислоти взяли при цьому?

1197. Сплав міді та цинку масою 16 кг містить 55 % міді. Скільки міді потрібно додати у сплав, щоб новий сплав містив 60 % міді?

1198. У якому відношенні треба взяти 10 % та 20 % розчини солі, щоб після їх змішування отримати 16 % розчин солі?

А 1 : 1

Б 2 : 3

В 1 : 2

Г 3 : 4

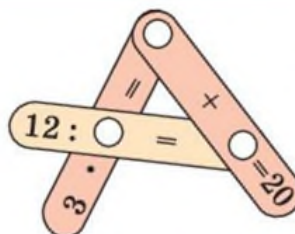
1199. **ЗНО** У лабораторії є два сплави міді з оловом: перший масою 50 кг містить 10 % міді, другий масою 100 кг містить 25 % міді. Добери до кожного запитання (1–4) правильну відповідь (А–Д).

- | | |
|--|------|
| 1 Скільки кілограмів міді міститься в першому сплаві? | А 5 |
| 2 Скільки кілограмів міді міститься у двох сплавах разом? | Б 15 |
| 3 Якщо із даних сплавів утворити новий сплав, то скільки відсотків міді міститиме цей сплав? | В 20 |
| 4 Скільки кілограмів другого сплаву треба додати до першого, щоб утворити сплав, який міститиме 15 % міді? | Г 25 |
| | Д 30 |

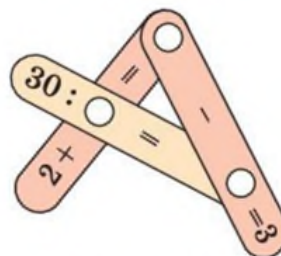
ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1200. У коледжі під час іспиту з математики 15 % студентів/студенток не розв'язали жодної задачі, 144 студенти/студентки розв'язали деякі задачі з помилками, а кількість тих, хто розв'язав усі задачі правильно, відноситься до кількості тих, хто не розв'язав жодної задачі, як 5 : 3. Скільки студентів/студенток розв'язали хоча б одну задачу?

1201. Розв'яжи ребуси, зображені на малюнках 23.5, 23.6.



Мал. 23.5



Мал. 23.6

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1202. Знайди два числа, якщо їх сума дорівнює 2,5, а різниця квадратів становить $-2,5$.

1203. Доведи, що:

а) $17^{16} + 9$ ділиться на 10;б) $33^{25} - 3$ ділиться на 6;в) $8^{10} - 10^8$ ділиться на 8;г) $23^{24} + 24^{23}$ ділиться на 5.

1204. Чи проходить графік функції $y = x^2 + 1$ через точку $A(3,5; 13,25)$? При яких значеннях x значення цієї функції дорівнює 7,25?

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що таке відсоток.
1% – це сота частина, 1% від метра – це сантиметр.
- ✓ Умію розв'язувати різні види задач на відсотки.
Задачі на відсотки:
 - задачі на знаходження відсотка від числа;
 - задачі на знаходження числа за значенням його відсотка;
 - задачі на відсоткове відношення.
- ✓ Розрізняю 3 види діаграм.

Діаграми		
лінійні	стовпчасті	кругові

- ✓ Вмію читати різні види діаграм.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

- Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:
- для аналізу значної кількості даних зручно їх систематизувати;
 - для наочного зображення числових даних використовують діаграми.

§ 24. Збирання та систематизація даних. Частотні таблиці. Діаграми

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- дані — *data*
- частотна таблиця — *frequency table*

На прийомі в офтальмолога були учасники та учасниці спортивної команди. Ось їх фото.



Як бачимо, в команді є хлопці і дівчата. У них різний колір очей. Для зручності ми можемо розкласти ці фото на дві групи.

Дівчата



Хлопці



Тепер добре видно, що в команді 6 дівчат і 4 хлопці.

Також ми могли розкласти фото за кольором очей.

Зелені очі



Сірі очі



Карі очі



Тепер добре видно, що 2 в команді мають зелені очі, 4 — сірі і 4 — карі.

Подати дані ми можемо у вигляді таблиці.

Стать	Кількість
Дівчата	6
Хлопці	4

Колір очей	Зелені	Сірі	Карі
Кількість	2	4	4

Такі таблиці називають **частотними**. В них один із рядків чи стовпців вказує на те, як часто зустрічається певна ознака серед всієї команди.

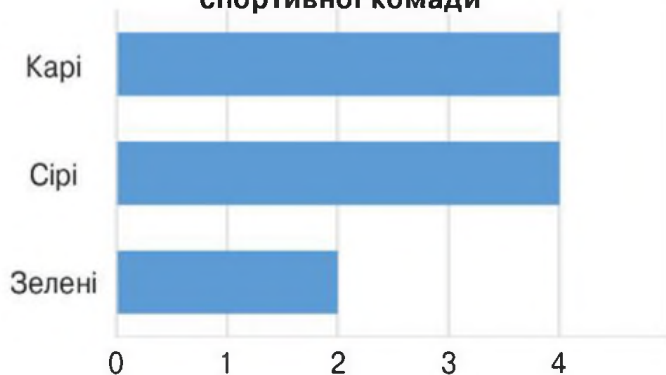
Наочно уявити результати частотної таблиці допоможе **діаграма** (лінійна, стовпчаста чи кругова).

Щоб побудувати лінійну чи стовпчасту діаграму, треба побудувати дві взаємно перпендикулярні осі. Потім визначити, на якій із них буде позначено ознаку, а на якій — кількість. На вісі «Кількість» потрібно самостійно обрати зручний одиничний відрізок.

Наприклад,

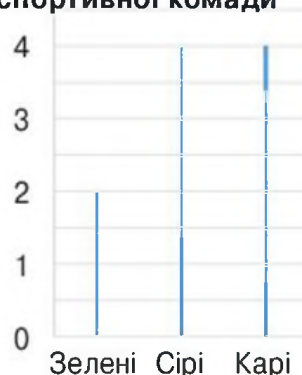
Стовпчаста діаграма

Колір очей учасників
спортивної команди



Лінійна діаграма

Колір очей учасників
спортивної команди



Щоб побудувати кругову діаграму, необхідно зрозуміти, скільки градусів припадає на кожну дитину. Якщо у спортивній команді разом 10 учасників та учасниць, то

$$360^\circ : 10 = 36^\circ$$

$x = 36^\circ$ — припадає на одного учасника / одну учасницю команди.

Оскільки зеленооких — 2, сірооких — 4, а карооких — 4, то їм відповідатимуть сектори 72° , 144° та 144° .

Будуємо круг, проводимо його радіус і відкладаємо послідовно один за одним від цього радіуса кути градусною мірою 72° , 144° та 144° (мал. 24.1).

Колір очей учасників
спортивної команди



■ Зелені ■ Сірі ■ Карі

Мал. 24.1

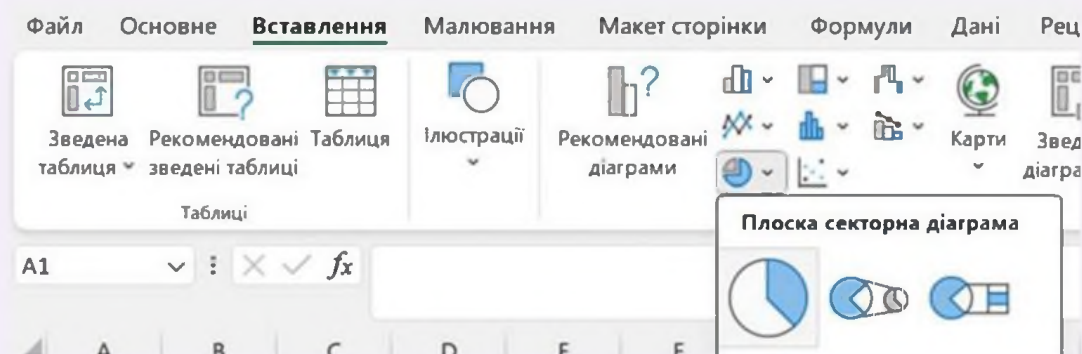
ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Зручно будувати діаграми в Excel. Для цього потрібно:

- створити в документі частотну таблицю;

	A	B
1	Колір	Кількість
2	Зелені	2
3	Сірі	4
4	Карі	4

- виділити її й обрати вид діаграми;



- підписати діаграму.



ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Які таблиці називають частотними?
2. Як побудувати: а) лінійну; б) стовпчасту; в) кругову діаграму?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!



1. У власників одноповерхових будинків однієї з вулиць запитали про кількість вікон у їхньому будинку. Отримали такі дані.

4, 6, 4, 8, 10, 12, 9, 4, 6, 5, 6, 6, 10, 9, 8, 6, 7, 6, 14, 12, 6, 8, 7.

Побудуй відповідну частотну таблицю.

Розв'язання. Впорядкуємо вибірку:

4, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 10, 10, 12, 12, 14.

Полічимо, скільки разів зустрічається кожне з чисел у вибірці, і побудуємо відповідну частотну таблицю.

К-сть вікон	4	5	6	7	8	9	10	12	14
Частота	3	1	7	2	3	2	2	2	1

ВИКОНАЙ УСНО



- 1205.** В аеропорту на паспортному контролі в базі у прикордонників / прикордонниць формується частотна таблиця громадян / громадянок, що перетинають кордон. Проаналізуй дані таблиці за останню годину і дай відповіді на запитання.

а) Скільки українців / українок протягом цієї години пройшли паспортний контроль?

б) Громадян / громадянок якої країни пройшло через контроль за цю годину: 1) найбільше; 2) найменше?

Громадянство	Частота
Іспанці	32
Італійці	45
Українці	38
Німці	52

- 1206.** В результаті опитування виявилось, що 150 користувачів / користувачок комп'ютерної техніки ніколи не встановлювали антивірус на пристрої, яким зараз користуються. Зараз використовують антивірус 130 користувачів / користувачок і ще 80 користувачів / користувачок встановлювали антивірус раніше, але зараз його не активували. Чи правильною є частотна таблиця цієї ситуації?

Ніколи не встановлювали антивірус	Мали, але зараз він не активований	Мають зараз активований антивірус
150	80	130

1207. Знайди помилку в частотній таблиці, створеній на основі балів, які отримали учні / учениці за самостійну роботу: 8, 6, 10, 5, 9, 9, 8, 10, 5, 10.

Бали	5	6	7	8	9	10
Частота	2	1	1	2	2	3

1208. На основі опитування учнів / учениць класу дізналися, яким транспортом вони приїжджають до школи. Чи відповідає частотна таблиця побудованій діаграмі (мал. 24.2)?

Вид транспорту	Частота
Велосипед	8
Автобус	10
Трамвай	9
Електросамокат	5



Мал. 24.2

1209. У частотній таблиці подано масу підручників. Поясни помилку.

Маса	Від 100 г до 200 г	Від 200 г до 300 г	Від 300 г до 400 г
Частота	4	3	2

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А

1210. Розгляньте записи на дошці. Знайдіть кількість од-
ночленів, двочленів і тричленів та побудуйте в зошиті частотну таблицю.

$5 + k$	$x^2 + 2x - 1$	a	$4 - x$
$0,5x^2 + 1$	$7 - 3x^2 - x$	$b + c$	$4p - 1,21$
$8 - p$	$5b - x^2 - 1$	$7a$	$2c - c^3$
$9x^6 + x^3$	$-0,2k^2 - 1 + k$	3	$4 - 0,64k^4$

1211. Проаналізуй квадратні рівняння, наведені нижче. Знайди кількість повних і неповних квадратних рівнянь та створи частотну таблицю.

$a^2 - 4 = 0$	$x^2 + 2x - 1 = 0$	$p^2 + 3p = 0$	$4b^2 + 2b = 1$
$16 - c^2 = 0$	$-5b^2 - 10b = 20$	$7 = c^2$	$k^2 - 12k + 36 = 0$
$5a^2 = 3a$	$t^2 + 20 = 0$	$-12 - 4p^2 = 0$	

- 1212.** Частотна таблиця описує кількість відповідних семестрових балів з математики учнів класу. На основі цієї частотної таблиці побудуй в зошиті лінійну діаграму.

Семестрові бали	Кількість
7	2
8	10
9	12
10	8
11	2

- 1213.** The frequency table describes the number of matches in which a given number of goals were scored. Use this frequency table to build a bar graph.

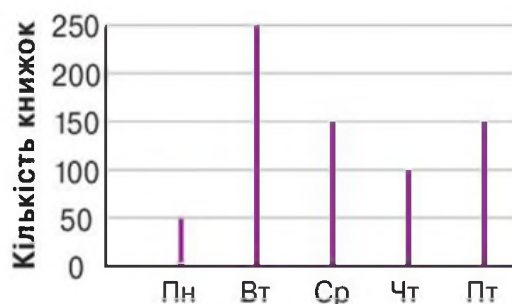
Number of goals	Number of matches
0	5
1	11
2	7
3	3
4	2
5	1

- 1214.** Управління охорони здоров'я збирає дані про час, проведений пацієнтами / пацієнтками у терапевта за тиждень. Кількість часу, проведеного у терапевта, подано у частотній таблиці.

Час візиту	Частота
До 20 хв включно	8
Від 20 хв до 30 хв включно	17
Від 30 хв до 40 хв включно	16
Від 40 хв до 50 хв включно	6
Від 50 хв до 60 хв включно	4
Від 60 хв до 70 хв включно	5
Від 70 хв до 80 хв включно	4

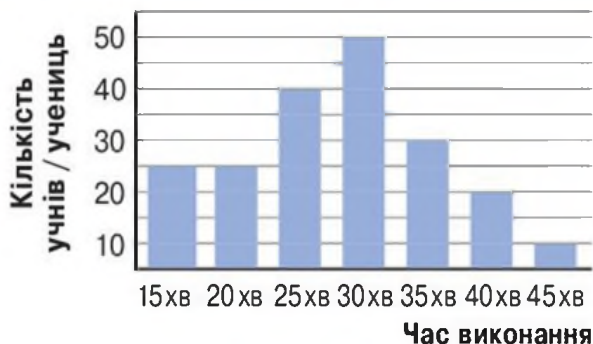
- а) Скільки людей провели у терапевта менше 40 хвилин включно?
 б) Скільки людей провели у терапевта більше години?
 в) Кого було більше: пацієнтів / пацієнок, які провели не більше 40 хвилин, чи тих, хто провів від 40 до 60 хвилин?
 г) Побудуй в зошиті кругову діаграму, а потім діаграму за допомогою Excel. Порівняй час, витрачений на це. В чому переваги і недоліки кожного зі способів?

- 1215.** На діаграмі (мал. 24.3) зображено кількість книжок у бібліотеці, які брали її відвідувачі / відвідувачки щодня. За лінійною діаграмою побудуй частотну таблицю.



Мал. 24.3

- 1216.** Усім учням / ученицям 8 класу запропонували виконати однакове завдання з алгебри. На діаграмі (мал. 24.4) зображено кількість часу, протягом якого учні / учениці виконали це завдання. Побудуй за діаграмою частотну таблицю.



Мал. 24.4

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

- 1217.** Розглянь фігури (мал. 24.5).
 а) Знайди кількість різносторонніх і рівнобедрених трикутників. Побудуй частотну таблицю.
 б) Побудуй лінійну діаграму.



Мал. 24.5

- 1218.** Розглянь гобелен «Великодній спів» ручного ткацтва Ольги Пілюгіної (мал. 24.6).
 а) Знайди кількість: птахів; квітів; гілок дерев; ягід. Побудуй відповідну частотну таблицю.
 б) Побудуй стовпчасту діаграму.



Мал. 24.6

- 1219.** У різних учнів / учениць гімназії питали про тривалість їх останнього короткого відео в соціальних мережах. Отримали такі дані:

25 с, 15 с, 35 с, 20 с, 15 с, 30 с,
 20 с, 25 с, 40 с, 25 с, 22 с, 20 с.

Побудуй в зошиті відповідну частотну таблицю і кругову діаграму.

- 1220.** У власників / власниць котів на виставці запитали про кількість корму, що їдять їх улюбленці протягом одного дня. Отримали такі дані: 65 г, 60 г, 50 г, 50 г, 60 г, 65 г, 50 г, 50 г, 60 г, 70 г.
 Побудуй в зошиті відповідну частотну таблицю і кругову діаграму.

- 1221.** Соціологи, проводячи дослідження, вирішили фіксувати, як чоловіки і жінки використовують телефон, заходячи в мегамаркет. Доповни пропуски в таблиці.

а) Знайди приблизний відсоток жінок, які брали участь у цьому дослідженні.

б) Який відсоток людей використовували телефон для селфі?

в) Який відсоток серед всіх людей, що вели переписку, становили жінки?

г) Побудуй в Ексел кругову діаграму, що відображатиме співвідношення чоловіків і жінок, що розмовляли.

Поведінка	Чоловік	Жінка	Разом
Селфі	18	45	
Фото	5	21	
Переписка	45		130
Розмова	82	240	
GPS		5	
Загалом	165		

Відвідування гуртків учнями



Мал. 24.7

- 1222.** Проаналізуй діаграму відвідування гуртків учнями / ученицями всіх 8 класів (мал. 24.7). Виконай завдання.

а) Який кут відповідає сектору «Йога»?

б) Скільки учнів / учениць було опитано, якщо відомо, що йогою займаються 11 учнів?

в) Побудуй частотну таблицю цього опитування.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

- 1223.** Мобільний телефон дорожчав двічі. Після другого підвищення ціни він став коштувати у 6 разів більше, ніж до подорожчання. На скільки відсотків збільшили ціну другого разу, якщо відомо, що спочатку вона була збільшена на 50 %?

- 1224.** Продовж послідовність: а) 8, -4, 2, -1, ... б) 1, 3, 7, 15, 31, ...

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

- 1225.** При яких значеннях змінних вираз не матиме змісту?

а) $\frac{a}{x}$; б) $\frac{m}{n^2}$; в) $-\frac{a}{c^2}$.

- 1226.** Виконай множення. а) $\frac{a+1}{x} \cdot \frac{4x^2}{a^2-1}$; б) $\frac{1-a}{3x} \cdot \frac{x}{1-a^2}$; в) $\frac{a^2-1}{c} \cdot \frac{3c}{a+1}$.

1227. У двох різних інтернет-магазинах різні ціни на зошити. Другий магазин надає знижки.

Рахунок на оплату № 33 від 11 червня 2024 р.

№	Назва товару	Од.	Кількість	Ціна, грн	Сума, грн
1	Зошит з мінної безпеки	шт.	33	66,50	2 194,50
2	Зошит з фінансової грамотності	шт.	33	84,00	2 772,00
3	Зошит з раціонального харчування	шт.	33	112,00	3 696,00
4	Зошит STEM	шт.	34	84,00	2 856,00
5	Зошит з етики	шт.	33	84,00	2 772,00

Замовлення покупця № 775 від 11 червня 2024 р.

№	Товар	Кількість, шт.	Ціна, грн	Сума без знижки, грн	Знижка, грн	Сума, грн
1	Зошит з фінансової грамотності	32	120,00	3 840,00	1 536,00	2 304,00
2	Зошит з мінної безпеки	32	95,00	3 040,00	1 216,00	1 824,00
3	Зошит з раціонального харчування	33	160,00	5 280,00	2 112,00	3 168,00
4	Зошит STEM	33	120,00	3 960,00	1 584,00	2 376,00
5	Зошит з етики	33	120,00	3 960,00	1 584,00	2 376,00

- Який відсоток знижки надає другий магазин?
- Де вигідніше замовити зошити?
- На основі даних з таблиць сформулюй задачу для однокласників / однокласниць.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю, що таке частотна таблиця.
В частотній таблиці один із рядків чи стовпців вказує на те, як часто зустрічаються певні дані.
- ✓ Умію будувати 3 різних види діаграм від руки і за допомогою різних сервісів.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- середнє арифметичне кількох чисел дорівнює сумі цих чисел, поділеній на їх кількість;
середнє арифметичне чисел 7, 8 і 12 буде $(7 + 8 + 12) : 3 = 9$;
- зібрані числові результати досліджень називають вибіркою.
Наприклад, вибірка: 7, 8, 12.
Найменше значення цієї вибірки 7, а її найбільше значення — 12.

§ 25. Вибірка. Середнє значення, мода вибірки

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- вибірка — *sample*
- середнє значення вибірки — *sample mean*
- мода — *mode*

Часто в різних сферах життя проводяться різноманітні дослідження і збираються різні дані. Наприклад, можуть проводитися опитування учнівства щодо відвідування ними різних гуртків, можуть опитувати людей про рівень їх доходів чи певні уподобання тощо.

Сукупність зібраних даних, на основі яких проводиться дослідження, називають **вибіркою**.

Вибірки можуть складатися з числових та нечислових даних.

Приклад.

В учнівства одного класу запитали про улюблений день тижня і отримали такі відповіді: Нд, Сб, Сб, Пн, Пт, Вт, Сб, Нд, Сб, Сб, Нд. Це приклад вибірки з нечисловими даними.

У вчительства гімназії запитали про кількість годин тижневого навантаження й отримали такі результати: 9, 18, 24, 18, 18, 9, 15, 18, 24, 18, 18. Це приклад вибірки з числовими даними.

Щоб було зручніше працювати з числовими вибірками, їх впорядковують. Вибірку 9, 18, 24, 18, 18, 9, 15, 18, 24, 18, 18 записують: 9, 9, 15, 18, 18, 18, 18, 18, 24, 24.

Щоб робити певні висновки про дослідження, вибірки часто характеризують. Наприклад, для вибірки з числовими даними зазначають найбільше значення вибірки, найменше значення вибірки, вказують її середнє значення, моду.

Для вибірки 0,2, 1, 2,2, 0,5, 1,7, 0,9, 2 найменшим значенням є 0,2, а найбільшим — 2,2.

Середнє значення вибірки — середнє арифметичне всіх її значень.

Щоб знайти середнє значення вибірки, треба знайти суму всіх значень і поділити її на кількість значень.

Для вибірки 9, 7, 5, 7, 6 середнє значення дорівнює

$$(9 + 7 + 5 + 7 + 6) : 5 = 6,8.$$

Модою вибірки називають ті дані, які зустрічаються у вибірці найчастіше.

Для вибірки 9, 7, 5, 7, 6 модою є число 7, бо воно зустрічається двічі, а всі інші — лише один раз.

Якщо таких даних у вибірці кілька, то кожне з них є модою цієї вибірки.

У вибірці 0,7, 1, 0,5, 0,7, 1, 0,8 є дві моди. Це 0,7 та 1.

Якщо всі дані вибірки мають однакову частоту, то вибірка моди не має.

У вибірці 0,7, 1, 0,7, 1, 0,7, 1 моди немає.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Зверни увагу, що середнє значення вибірки можна визначати лише для числових вибірок, на відміну від моди.

Проаналізуємо частотну таблицю купівлі напоїв у кав'ярні продовж деякої години.

Напій	Чай	Кава	Какао	Лимонад
Частота	30	35	25	20

Найчастіше купували у кав'ярні продовж цієї години каву. Тому саме кава є модою цієї вибірки. А от середнє значення для такої вибірки визначити неможливо.

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Що називають вибіркою?
2. Які характеристики вибірки ти вже знаєш?
3. Що називають: а) середнім значенням вибірки; б) модою вибірки?

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. Учні та учениці класу взяли участь в опитуванні про кількість домашніх улюбленців у їхній родині. Отримали такі дані:

1, 2, 1, 3, 2, 1, 2, 0, 2, 0, 1, 3, 1, 2, 0, 2, 1, 1, 3, 3, 1, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 3.

Знайди найменше, найбільше та середнє значення вибірки, а також моду цієї вибірки.



Розв'язання. Упорядкуємо вибірку:

0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3.

Найменше значення: 0.

Найбільше значення: 3.

Мода: 1 і 2, бо ці числа зустрічаються найбільшу кількість разів (10 разів).

Середнє значення: $(3 \cdot 0 + 10 \cdot 1 + 10 \cdot 2 + 5 \cdot 3) : 28 \approx 1,6 \approx 2$.

ВИКОНАЙ УСНО



1228. Підкидають гральний кубик і щоразу фіксують кількість очок, що випали. Знайди за діаграмою (мал. 25.1) моду вибірки.

1229. Знайди моду вибірки:
17, 19, 12, 23, 17, 25, 19, 17.
А 12 Б 17 В 23 Г 19

1230. Знайди моду вибірки.
а) 5, 6, 3, 5, 8, 3, 5;
б) -3, -8, -9, -4, -6, -9, -3;
в) 1, 0, 2, 2, 3, 1;
г) 1, 8, 4, 8, 0, 0, 1, 4;
ґ) 7,1, 7,1, 7,1, 7,1.



Мал. 25.1

1231. Чи відрізняються моди двох вибірок? А середні арифметичні вибірок?

11, 7, 4, 3, 15, 22, 18, 17, 11, 8
11, 7, 4, 3, 15, 22, 18, 17, 11, 48

1232. Чи може найбільшому числу вибірки дорівнювати: а) середнє арифметичне; б) мода?

1233. Виміряли зріст 5 різних учнів / учениць. За яких умов будуть знаходити для цієї вибірки: а) середнє арифметичне; б) моду?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



1234. Гра. Один із учнів / одна з учениць називає число, а інший / інша має записати вибірку, для якої це число є модою.

1235. Знайди моду вибірки.
а) 3,1, 8,6, 9,2, 4,4, 6,6, 9,2, 3,1 3,1;
б) 5, 3, 6, 3, 5, 8, 3, 5.

1236. Знайди найменше значення, найбільше значення, середнє значення та моду вибірки.

а) 84, 90, 91, 93, 97, 84, 91, 89;

б) 1,18, 1,42, 12,5, 16,1, 16,2, 11,9, 11,1.

1237. Знайди найменше значення, найбільше значення, середнє значення та моду вибірки.

а) 30, 116, 114, 112, 30, 120;

б) 12,4, 14,5, 13,8, 13,6, 12,9, 13,2, 14,1.

1238. **ЗНО** Лучник здійснив 11 пострілів по мішені і набрав відповідно 6, 5, 7, 9, 6, 9, 10, 8, 7, 9, 10 очок. Знайди моду цього ряду даних.

А 5

Б 7

В 8

Г 9

Д 10

1239. У частотній таблиці зазначено кількість працівників /працівниць у коворкінгу (спільному просторі для роботи). Знайди за таблицею моду вибірки.

День тижня	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт
Частота	40	45	45	50	40

1240. У частотній таблиці зазначено кількість продажів одиниць товару протягом п'яти місяців. Знайди за таблицею моду вибірки.

Січень	Лютий	Березень	Квітень	Травень
150	90	100	150	110

1241. У частотній таблиці зазначено вік лотів на аукціоні. Знайди за таблицею моду вибірки та її середнє значення.

Частота	20	20	5	4	1
Вік	50	80	100	120	150

1242. У частотній таблиці зазначено зріст працівників /працівниць одного з офісів. Знайди за таблицею моду вибірки та її середнє значення.

Зріст	165	170	173	175	177	180
Частота	3	4	10	6	5	4

1243. Зібрано дані про те, скільки годин спали тридцять студентів / студенток у ніч перед іспитом:

7, 5, 8, 9, 4, 10, 7, 9, 9, 6, 5, 11, 6, 5, 9,

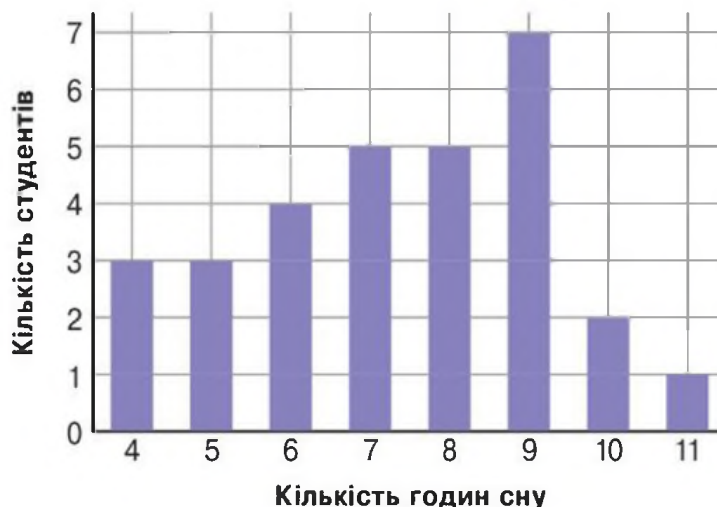
9, 8, 6, 9, 7, 9, 8, 4, 7, 8, 7, 6, 10, 4, 8.

а) Перевір, чи правильно побудовано частотну таблицю і стовпчасту діаграму для відображення цієї інформації (мал. 25.2).

б) Визнач найменше значення, найбільше значення, середнє арифметичне та моду вибірки.

в) Побудуй в Excel відповідну кругову діаграму.

К-ть год	Частота
4	3
5	3
6	4
7	5
8	5
9	7
10	2
11	1



Мал. 25.2

1244. Опитали групу людей у спортивному залі щодо кількості склянок води, яку вони випивають протягом тренування:

0, 1, 1, 3, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 3, 0, 1, 2, 2, 1, 1.

а) Побудуй частотну таблицю.

б) Знайди найменше значення, найбільше значення, середнє арифметичне та моду вибірки.

1245. We surveyed the families of one building in the city about the number of cars and got the following results:

4, 3, 2, 0, 3, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 2.

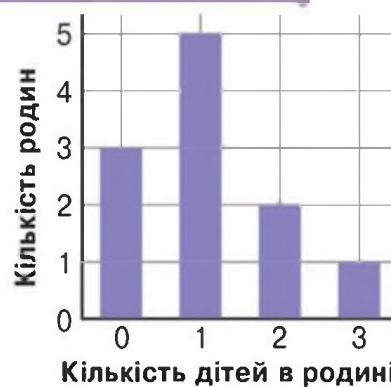
а) construct a frequency table;

б) find the smallest value, the largest value, the arithmetic mean, and the mode of the sample.

1246. На діаграмі (мал. 25.3) відображено результати опитування родин щодо кількості у них дітей.

а) Скільки родин опитали?

б) Знайди за діаграмою найменше значення, найбільше значення, середнє арифметичне та моду вибірки.

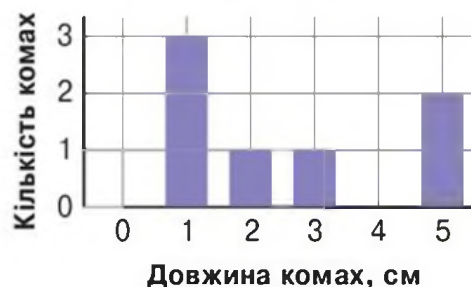


Мал. 25.3

1247. На діаграмі відображено кількість комах різної довжини, знайденої учнівством (мал. 25.4).

а) Довжину скількох комах виміряли?

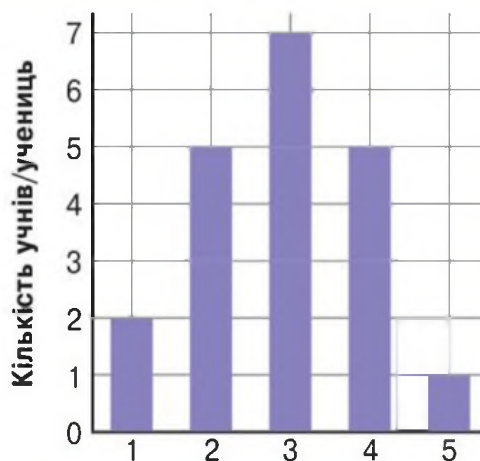
б) Знайди за діаграмою найменше значення, найбільше значення, середнє арифметичне та моду вибірки.



Мал. 25.4

- 1248. ЗНО** У групі з 20 учнів / учениць 11 класу провели анкетування, щоб з'ясувати, скільки приблизно годин на день кожен із них / кожна з них користується інтернетом. Відповіді учнів / учениць відображено на діаграмі (мал. 25.5). Визнач, скільки у середньому часу на день (у год) учні / учениці цієї групи користуються інтернетом.

А 2,9 Б 2,5 В 2
Г 3 Д 3,2



Час користування інтернетом, години

Мал. 25.5

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

- 1249.** В Excel було створено частотну таблицю про час ви-

конання домашнього завдання учнівством класу. Для знаходження середнього значення вибірки використали команду AVERAGE. Яке число має стояти у виділеній комірці?

B7 fx =AVERAGE(B2:B6)					
	A	B	C	D	E
1	Час	Частота			
2	20	9			
3	25	3			
4	30	6			
5	35	4			
6	40	1			
7					

- 1250.** Продовж 30 хвилин у банкоматі

було знято наступні суми:

100, 200, 500, 1000, 2000, 100, 2000, 500, 1000, 1000, 2000, 1000, 200, 1000. Побудуй в Excel частотну таблицю та знайди середнє значення вибірки за допомогою команди AVERAGE.

- 1251.** Середня висота дерев на ділянці дорівнює 4 м. Яка висота п'ятого дерева, якщо висота перших чотирьох дерев відповідно 5 м, 3 м, 3 м та 4 м?

- 1252.** Середній вік жіночого квінтету — 36 років. Вік чотирьох учасниць: 35, 42, 34 і 40 років. Якого віку п'ята учасниця?

- 1253.** У фірмі працюють 9 осіб. Двоє отримають зарплатню 22 000 грн, троє — по 25 000, ще четверо — по 31 000. Місячна зарплатня власника фірми — 58 000 грн.

а) Обчисли середнє значення та моду цієї вибірки.

б) Який відсоток працівників / працівниць разом з власником мають зарплатню, менше середньої?

- 1254.** На виставці котів є 8 представників бенгальської породи. Двоє з них мають довжину хвоста 37 см, ще двоє — по 36 см, троє — по 38 см і один — 40 см.

а) Обчисли середнє значення та моду цієї вибірки.

б) Який відсоток котів має хвіст, довший за середнє значення?



- 1255.** **ЗНО** Андрій у понеділок, вівторок та п'ятницю витрачав по 16 грн на день, у середу і четвер — по 11 грн на день, у суботу — 35 грн, а в неділю грошей не витрачав. Скільки гривень на день витрачав Андрій цього тижня?

- 1256.** У змішаній волейбольній команді з шести осіб середній вік двох дівчат становить 14 років, а чотирьох хлопців — 17 років. Який середній вік всіх гравців / гравчинь команди?

А 14 років Б 15 років В 16 років Г 17 років

- 1257.** У класі 12 дівчат і 13 хлопців. Середній зріст дівчат — 161,5 см, хлопців — 176,5 см. Обчисли середній зріст учнівства цього класу.

- 1258.** Середнє арифметичне маси m кавунів становить x кг, а середнє арифметичне маси n днів становить y кг. Знайди середнє арифметичне маси всіх кавунів і днів.

- 1259.** Середній бал за тематичну роботу 25 учнів / учениць становить 7,8. Який став би середній бал, якби троє осіб, які отримали 4, написали б роботу на 6 балів?

- 1260.** Виробник продав 25 % урожаю вишні по 60 грн за кілограм, 40 % — по 55 грн за кілограм, 5 % — по 40 грн за кілограм і 30 % — по 35 грн за кілограм. Якою була середня ціна за кілограм врожаю вишні?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

- 1261.** В офісі працюють вісім осіб. Їм платять 12 000 грн, 15 000 грн, 15 000 грн, 14 000 грн, 13 000 грн, 14 000 грн, 13 000 грн, 13 000 грн. Знайди середнє значення і моду цієї вибірки. Яку б характеристику могли б використати, щоб стверджувати, що загалом співробітники / співробітниці в офісі мають: а) гарну зарплатню; б) погану зарплатню.



- 1262.** *Практичне завдання.* Знаючи, що маса M Землі у 81,5 раза більша за масу m Місяця і що сила взаємного притягання двох космічних тіл прямо пропорційна добутку їх мас і обернено пропорційна квадрату відстані між ними, знайди на прямій Земля–Місяць точки, у яких сили тяжіння Землі й Місяця зрівноважені.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ



1263. Розв'яжи рівняння.

а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;

б) $(x - 1)^4 - 5(x - 1)^2 + 4 = 0$.

1264. Спрости вираз. а) $(\sqrt{17} - \sqrt{2})(\sqrt{17} + \sqrt{2})$; б) $(\sqrt{23} - \sqrt{19})(\sqrt{19} + \sqrt{23})$.

1265. В опитуванні про улюблені жанри книжок взяли участь усі учні/учениці класу. 25 % сказали, що їм подобається науково-популярна література, 20 % — пригодницька, 20 % — історична, 30 % — детективи і один учень любить автобіографічні книжки. Скільки учнів/учениць у цьому класі? Побудуй частотну таблицю цього опитування.

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Знаю такі характеристики вибірки: найменше, найбільше та середнє значення вибірки, мода вибірки.
- ✓ Середнє значення вибірки — середнє арифметичне всіх її значень. Для вибірки 8, 6, 4, 6, 5 середнє значення дорівнює $(8 + 6 + 4 + 6 + 5) : 5 = 5,8$.
- ✓ Модою вибірки називають ті дані, які зустрічаються у вибірці найчастіше. Для вибірки 8, 6, 4, 6, 5 модою є число 6.

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- в комбінаторних задачах підраховуються різні комбінації заданих об'єктів;
- найпростіші види комбінаторних задач розв'язуються за допомогою дії додавання або множення.

§ 26. Комбінаторні задачі

КЛЮЧОВІ СЛОВА

комбінаторні задачі — *combinatorial problems*

Задача 1. Оленка побачила в бібліотеці 3 книжки, що її зацікавили. Це «Гессі» (Г) Наталії Матолінець, «Вісім крафтових історій» (В) Андрія Бачинського та «Зграя» (З) Анастасії Нікуліної. Але за один

раз можна брати лише одну книжку. Скільки є різних послідовностей прочитати ці 3 книжки?

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язати методом перебору всіх варіантів. Візуалізувати всі варіанти допомагає дерево.



Проаналізувавши дерево, бачимо, що є 6 різних послідовностей (ГВЗ, ГЗВ, ЗГВ, ЗВГ, ВГЗ, ВЗГ).

Такі задачі називають **комбінаторними**. В них зазвичай запитують про кількість способів, якими можна щось здійснити.

В основі розв'язування більшості комбінаторних задач лежать два правила: правило суми та правило добутку.

Правило суми.

Якщо об'єкт *A* можна вибрати *k* способами, а об'єкт *B* можна вибрати *p* способами, то вибір «*A* або *B*» можна здійснити $k + p$ способами.

Задача 2. В магазині є 3 види кулькових ручок і 4 види гелевих. Скільки є варіантів для покупки ручки?

Розв'язання. Є 3 різних варіанти придбати кулькову ручку.

Є 4 різних варіанти придбати гелеву ручку.

Якщо не принципово, який вид ручки купувати, то є $3 + 4 = 7$ варіантів покупки.

Відповідь. 7 варіантів.

Правило добутку.

Якщо об'єкт *A* можна вибрати *k* способами і після кожного такого вибору об'єкт *B* можна вибрати *p* способами, то вибір «*A* і *B*» у вказаному порядку можна здійснити $k \cdot p$ способами.

* Обкладинки подано з навчальною метою.

Задача 3. В магазині є 3 види кулькових ручок і 4 види гелевих. Скільки у Діани є варіантів наборів з 1 кулькової та 1 гелевої ручки?

Розв'язання. Є 3 різних варіанти придбати кулькову ручку.

Є 4 різних варіанти придбати гелеву ручку.

Якщо Діана хоче купити набір з 1 кулькової та 1 гелевої ручки, то у неї є $3 \cdot 4 = 12$ варіантів покупки.

Відповідь. 12 варіантів.

В деяких задачах доводиться використовувати і правило суми, і правило добутку (див. «Виконаємо разом!»).

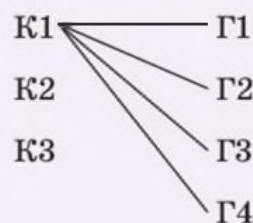
ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Розв'язування комбінаторних задач можна унаочнювати схемами, які називають деревами.

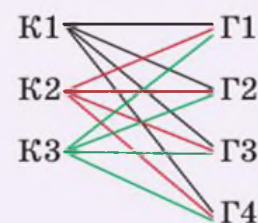
Побудуємо дерево варіантів для задачі 3.

В пару до кожної кулькової ручки можна обрати 1 із 4 гелевих ручок (мал. 26.1). Тому загальну кількість наборів на дереві відображатимуть 12 відрізків (мал. 26.2).

З другого малюнка видно, що існує 12 варіантів для покупки набору з 1 кулькової та 1 гелевої ручки.



Мал. 26.1



Мал. 26.2

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Наведи приклад комбінаторної задачі.
2. За допомогою яких двох правил можна розв'язати найпростіші комбінаторні задачі? Сформулюй їх.

ВИКОНАЄМО РАЗОМ!

1. На гроші, що є в Олі, вона може купити пиріжок і чай або ж лише батончик. Скільки існує варіантів покупки, якщо у їдальні є 4 види пиріжків, 2 види чаю і 5 видів батончиків.

Розв'язання. Є 4 різних варіанти придбати в їдальні пиріжок.

Є 2 різних варіанти придбати чай.

Отже, придбати пиріжок і чай є $4 \cdot 2 = 8$ варіантів.

Але в Олі є також 5 варіантів придбати один батончик.

Тому загалом для покупки пиріжка і чаю або ж лише батончика у неї є $4 \cdot 2 + 5 = 13$ варіантів.

Відповідь. 13 варіантів.



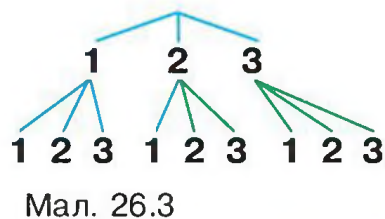
ВИКОНАЙ УСНО



- 1266.** Скільки існує варіантів придбати 1 блокнот, якщо в про-
дажі є 5 видів блокнотів у лінійку і 8 видів блокнотів у клітинку?
- 1267.** У кошику є 4 яблука, 8 груш та 10 персиків. Скільки існує варі-
антів вибору 1 фрукта?
- 1268. Гра.** Один із гравців / одна з гравчинь має придумати задачу, що
розв'язується за допомогою правила суми, а другий / друга має її
розв'язати. Потім учні / учениці міняються ролями.
- 1269.** Оля, розв'язуючи задачу «У Марійки є 4 спідниці і 6 кофт. Скіль-
ки існує способів одягнути спідницю і кофту?», отримала відповідь
10. Чи правильна ця відповідь?
- 1270.** Для пошиття сумок є 3 види фетру, кожен із яких у 7 кольорах.
Скільки існує варіантів пошиття сумки сталого дизайну з цього
матеріалу?
- 1271.** Із 3 учнів потрібно обрати капітана і його заступника. Капітан
Заступник

Капітан

Заступник



ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



- 1272.** Від будинку до озера ведуть 2 стежки через ліс і 3 стежки через луг. Скількома способами можна ді-
статися від будинку до озера? Накресли схему до задачі
та розв'яжи її.
- 1273.** З населеного пункту А ведуть 3 дороги до населеного пункту Б і 5 доріг з пункту Б до населеного пункту В. Скільки є доріг, щоб
дістатися від пункту А до В через Б? Накресли схему до задачі та
розв'яжи її.
- 1274.** Скільки двоцифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3,
4, 5, якщо цифри в числі можуть повторюватись? Побудуй дерево
можливих варіантів.
- 1275.** How many two-digit numbers can be formed from the digits 5, 6,
7, 8, 9 if the digits in the number can be repeated? Build a tree of
possible options.

1276. У спортивній студії є такий розклад.

Напрямок	Час	Зал 1	Зал 2	Зал 3
Pilates	17:00	Олена	Марина	
Yoga	18:00	Олена	Марина	Іван
Streching	19:00		Марина	Іван

Скільки є способів відвідати:

а) одне тренування о 17:00; б) одне тренування о 18:00; в) два тренування поспіль з 17:00 до 19:00; г) три тренування поспіль?

1277. В їдальні на обід можна замовити 2 види супу, 3 види основної страви і 2 види напоїв. Скільки є способів придбати обід, що складається:

а) лише з основної страви; б) із супу та основної страви; в) із супу, основної страви і напою?

1278. Для пошиття взуття є білий, молочний, чорний і сірий кольори підосви та білий, молочний, чорний і сірий кольори шкіри. Кожен колір шкіри є в лакованій і замшевій текстурі. Скільки є варіантів для пошиття взуття, у якого колір підосви і шкіри не співпадатимуть?

Розв'язання: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$ варіанти.

Чи правильно розв'язано задачу?

1279. В магазині є 10 різних варіантів подарункових пакетів, футболки білого, зеленого, синього, жовтого, чорного кольорів та акрилова фарба для нанесення зображень на футболку таких самих кольорів. Скільки є варіантів створити подарунковий набір з пакету, футболки та фарби так, щоб кольори футболки і фарби не співпадали?

1280. Гра. «Обірвалася розмова телефоном, і пан Олексій не встиг записати необхідний йому номер телефону. Скільки варіантів має перебрати пан Олексій, якщо він не встиг записати a останніх цифр?» Один із гравців/одна із гравчинь має задати значення для a , а другий/друга має розв'язати задачу. Потім учні міняються ролями.

1281. **ЗНО** Скільки всього існує різних двоцифрових чисел, у яких перша цифра є парною, а друга — непарною?

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б



1282. Пані Марія хоче зробити ремонт в кухні (поклеїти шпалери та купити стіл) чи коридорі (пофарбувати стіни та замінити тумбу для взуття). Скільки варіантів ремонту в неї є, якщо у магазині є 12 видів шпалер, 3 види столів, 10 видів фарби і 4 види тумби?

- 1283.** На гроші, що є в Олі, вона може взяти квитки на літак та поселитися на тиждень в готелі біля моря або зняти будинок в Україні на місяць в горах. Скільки варіантів відпочинку є у неї, якщо є 6 різних варіантів квитків до моря, 20 готелів і 5 будинків для оренди на місяць?
- 1284.** **ЗНО** У магазині в продажу є 6 видів тарілок, 8 видів блюдець та 12 видів чашок. Олена збирається купити бабусі в подарунок у цьому магазині або чашку та блюдо, або лише тарілку. Скільки всього є способів у Олені купити бабусі такий подарунок?
- 1285.** Склади за деревом задачу (мал. 26.4).



Мал. 26.4

- 1286.** На полиці стоять 4 різні книжки з алгебри і 2 книжки з геометрії. Скільки є способів розставити їх на полиці, щоб всі книжки з алгебри стояли разом і всі книжки з геометрії стояли разом?
- 1287.** Пані Катерина хоче розставити 4 різні табуретки та 3 різні розкладні стільці вздовж стіни. Скільки є варіантів їх розставити в ряд, щоб стільці стояли поруч і всі табуретки стояли поруч?
- 1288.** Кілька точок розміщено на площині так, що жодні три з них не лежать на одній прямій. Якщо кожен з них сполучити відрізками зі всіма іншими даними точками, то утвориться 153 відрізки. Скільки дано точок?
- 1289.** Скільки сторін має опуклий багатокутник, якщо у ньому всього 135 діагоналей?
- 1290.** На першості району з футболу зіграно 56 матчів, причому кожна команда грала з кожною по два рази. Скільки команд брало участь у грі?
- 1291.** У шаховому турнірі було зіграно 66 партій. Знайди кількість учасників турніру, якщо відомо, що кожний учасник зіграв з кожним по одній партії.

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

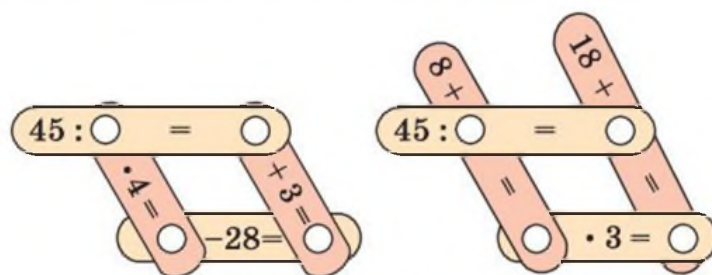
- 1292.** Три спонсори забезпечили грошову винагороду переможцям математичних олімпіад. Вклад першого становив 25 % всього фонду і 3000 грн, другого — третина суми



і 2000 грн, а третього — на $16\frac{2}{3}\%$ менше першого спонсора. Який

був грошовий фонд для винагороди переможцям?

1293. Розв'яжи математичні кросворди (мал. 26.5).



Мал. 26.5

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1294. Спрости вираз.

а) $\frac{4a}{a-b} + \frac{2b}{a+b} - 1$;

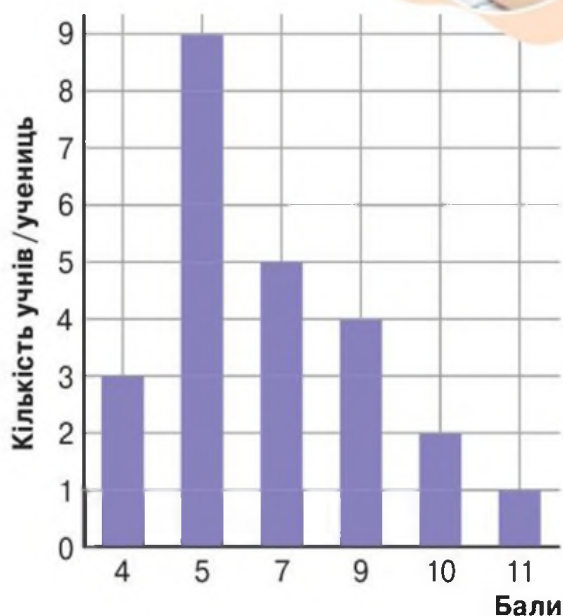
б) $\frac{x}{x-z} + \frac{3x}{x+z} - \frac{2xz}{x^2 - z^2}$.

1295. Обчисли значення виразу.

а) $\sqrt{10\frac{9}{16}}$; б) $\sqrt{10\frac{6}{25}}$; в) $\sqrt{31\frac{93}{121}}$.

1296. На діаграмі (мал. 26.6) зображено результати тематичної роботи з математики. Оціни істинність наведених нижче тверджень.

- а) Середній бал становить 8.
б) Мода становить 6.



Мал. 26.6

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

✓ Вмію застосовувати правила додавання і множення до розв'язування комбінаторних задач.

Якщо об'єкт *A* можна вибрати 2 способами, а об'єкт *B* можна вибрати 5 способами, то вибір «*A* або *B*» можна здійснити $2 + 5$ способами.

Якщо об'єкт *A* можна вибрати 2 способами і після кожного такого вибору об'єкт *B* можна вибрати 5 способами, то вибір «*A* і *B*» у вказаному порядку можна здійснити $2 \cdot 5$ способами.

«Математика — справа не тільки розуму, але й фантазії...»

Ф. Клейн

ВИКОРИСТОВУЮ НАБУТІ КОМПЕТЕНТНОСТІ

Щоб зрозуміти і добре засвоїти нову тему, пригадаємо:

- подія — те, що діється, відбувається, трапляється;
- ступінь упевненості в тому, що подія відбудеться, можна характеризувати числом.

§ 27. Поняття ймовірності

КЛЮЧОВІ СЛОВА

- ймовірність — *probability*
- випадкова подія — *probably event*
- неможлива подія — *impossible event*
- достовірна подія — *certain event*

Щосекунди навколо нас відбуваються різні події, наприклад, починає дощити, на підвіконня сідає голуб, дзвонить мобільний телефон тощо.

Подію, яка при кожному експерименті обов'язково відбувається, називають **достовірною**.

Наприклад, обрати навмання з перших 9 натуральних чисел одноцифрове число є достовірною подією.

Подію, що не може відбутися при жодному експерименті, називають **неможливою**.

Наприклад, обрати навмання з перших 9 натуральних чисел двоцифрове число є неможливою подією.

Випадковою подією називають подію, яка може відбутися або не відбутися під час здійснення певного експерименту.

Наприклад, обрати навмання з перших 9 натуральних чисел парне число є випадковою подією.

Ступінь упевненості в тому, що подія відбудеться, можна характеризувати числом.

Ймовірністю події називають відношення кількості сприятливих для цієї події результатів до кількості всіх можливих результатів.

Ймовірність події A позначають так: $P(A)$.

$$P(A) = \frac{\text{кількість сприятливих для події } A \text{ результатів}}{\text{кількість всіх можливих результатів}}$$

Наприклад,
подія A — вибір навмання з перших 9 натуральних чисел парного числа.

2, 4, 6 чи 8 — сприятливі для події A результати. Їх 4.
 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 — всі можливі результати. Їх 9.

$$P(A) = \frac{4}{9}.$$

Ймовірність завжди невід’ємна і не перевищує 1, тобто $0 \leq P(A) \leq 1$.
 Ймовірність неможливої події дорівнює 0, а достовірної події — 1.

ХОЧЕШ ЗНАТИ ЩЕ БІЛЬШЕ?

Рівноможливі події — події, кожна з яких не має ніяких переваг, щоб з’являтися частіше за іншу під час багаторазових випробувань.

Наприклад, при підкиданні грального кубика всі шість можливих наслідків є рівноможливими.

Сума ймовірностей рівноможливих подій експерименту дорівнює 1.

A — випаде 1 очко.

C — випаде 3 очки.

E — випаде 5 очок.

B — випаде 2 очки.

D — випаде 4 очки.

F — випаде 6 очок.

$$P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) + P(F) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1.$$

ПЕРЕВІР СЕБЕ

1. Наведи приклад:
 - а) неможливої;
 - б) достовірної;
 - в) випадкової події.
2. Що називають ймовірністю події?
3. Якою може бути ймовірність випадкової події?

ВИКОНАЙ УСНО



1297. Перелічи всі можливі результати таких подій:

- а) монету підкидають один раз;
- б) кубик підкидають один раз;
- в) з колоди карт 7 кольорів веселки вибирають одну.

1298. В мішечку лежать кульки (мал. 27.1). Навмання обирають одну.

- а) Яка кількість сприятливих результатів для події «витягнути жовту кульку»?
- б) Яка кількість всіх можливих результатів?
- в) Яка ймовірність витягнути жовту кульку?
- г) Яка ймовірність витягнути синю кульку?



Мал. 27.1

1299. 3D-принтер надрукував окремі літери для слова СВОБОДА. Їх склали у мішок. Яка ймовірність дістати навмання з цього мішку літеру: а) О; б) А або Б?

1300. Визнач, якими (достовірними, випадковими чи неможливими) є події:

- а) дістати навмання серед набору кісточок доміно кісточку з 13 очками;
- б) дістати навмання серед набору шахових фігур ферзя;
- в) дістати навмання серед набору шашок білу або чорну шашку.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ А



1301. Яка ймовірність навмання дістати з коробки з шаховими фігурами: а) пішака; б) білого пішака?

1302. Яка ймовірність навмання витягнути з кишені саме жовту картку з тих, що є на малюнку 27.2?



Мал. 27.2

1303. У Богдана в наплічнику лежать лише зошити. Є зелені зошити, а саме 4 зошити у клітинку і 2 в лінійку. Також є жовті зошити, із них 3 в клітинку і 7 в лінійку. Яка ймовірність навмання витягнути з наплічника: а) зошити в клітинку; б) червоні зошити; в) зелений зошит в лінійку; г) зошити в клітинку чи лінійку?

1304. У фіналі обласного конкурсу талантів беруть участь 3 дівчини і 2 хлопця з Красноградського району та 4 дівчини і 5 хлопців з Лозівського району. Яка ймовірність, що переможцем буде: а) учасник / учасниця з Лозівського району; б) дівчина; в) хлопець з Красноградського району; г) дівчина чи хлопець?

1305. **ЗНО** У коробці є 80 цукерок, з яких 44 — з чорного шоколаду, а решта — з білого. Визнач ймовірність того, що навмання взята цукерка з коробки буде з білого шоколаду.

1306. Гральний кубик підкидають двічі. Змоделюй усі можливі результати.

1307. Монету підкидають двічі. Змоделюй усі можливі результати.

1308. Одночасно кидають 2 гральних кубики. Яка ймовірність, що на кубиках випаде однакова кількість очок?

1309. Підкидають два гральних кубики. Знайди ймовірність того, що сума очок на двох гранях, що випали, дорівнює 7.

ВИКОНАЙ ПИСЬМОВО РІВЕНЬ Б

- 1310.** В барабані пральної машини 10 пар шкарпеток, із яких 3 пари червоні, 5 пар чорні і 2 пари сірі. Яка ймовірність витягнути навмання з пральної машини: а) сіру шкарпетку; б) чорну і сіру шкарпетки; в) пару чорних; г) не чорну шкарпетку?
- 1311.** На кожній картці записано по одному з чисел 4, 6, 10, 12, 15 та 24. Витягають одночасно 2 картки. Яка ймовірність того, що: а) НСД цих двох чисел 5; б) НСД цих двох чисел 2; в) НСД цих двох чисел не 7; г) НСД цих двох чисел 10?
- 1312.** У колоді 36 гральних карт. Яка ймовірність навмання взяти з колоди: а) короля або даму; б) карту червоної або чорної масті; в) туза або карту чорної масті?
- 1313.** Яка ймовірність, що при підкиданні грального кубика випаде число: а) кратне 4 або менше 4; б) непарне або більше за 6; в) парне або непарне?
- 1314.** Ймовірність витягнути навмання браковану деталь з партії становить 0,2. Скільки бракованих деталей в цій партії з: а) 100 деталей; б) 2300 деталей? Яка ймовірність витягнути навмання не браковану деталь?
- 1315.** В купці 35 листівок. Ймовірність витягнути з цієї купки навмання підписану листівку становить 0,4. Скільки в цій купці підписаних листівок? Яка ймовірність витягнути навмання непідписану листівку?
- 1316.** На фабриці працюють 5 чоловіків і 15 жінок, які виготовляють сумки з двох видів шкіри: А і Б. З кожних 20 сумок 14 виготовляють зі шкіри А. Є також два різних типи сумок: сумка через плече і сумка в руці. Обидва типи виробляють у рівній кількості. Представниця деякого бренду має відвідати фабрику. Менеджер хоче подарувати їй одну із сумок, але представниця не може вирішити, яку сумку хотіла б забрати на згадку про свій візит, тому менеджер вибирає сумку навмання.
- Намалюй дерево, яке показує всі можливі варіанти виготовлення сумки (буде виготовлена чоловіком / жінкою зі шкіри типу А/Б і буде сумкою через плече / сумкою в руці).
 - Обчисли ймовірність того, що жінка отримає сумку зі шкіри типу А, виготовлену чоловіком.
 - Знайди ймовірність того, що вона отримає або сумку через плече, виготовлену чоловіком зі шкіри типу Б, або сумку, виготовлену жінкою зі шкіри типу А.
- 1317.** На змаганнях зі стрибків з жердиною є три спроби для того, щоб подолати встановлену висоту. Змоделюй всі можливі результати.
- 1318.** Тричі підкидають симетричну монету. Що ймовірніше: а) випаде тричі герб; б) випаде тричі число; в) випаде один раз герб та двічі число?

ЦІКАВІ ЗАДАЧІ

1319. Під час придбання товару на суму від 600 грн покупець отримує знижку 10 %. На яку найбільшу суму зможе придбати товарів покупець, якщо в нього 594 грн?

1320. Катер пройшов за течією 90 км за певний час. За той самий час він пройшов би проти течії 70 км. Яку відстань за цей час пропливе пліт?

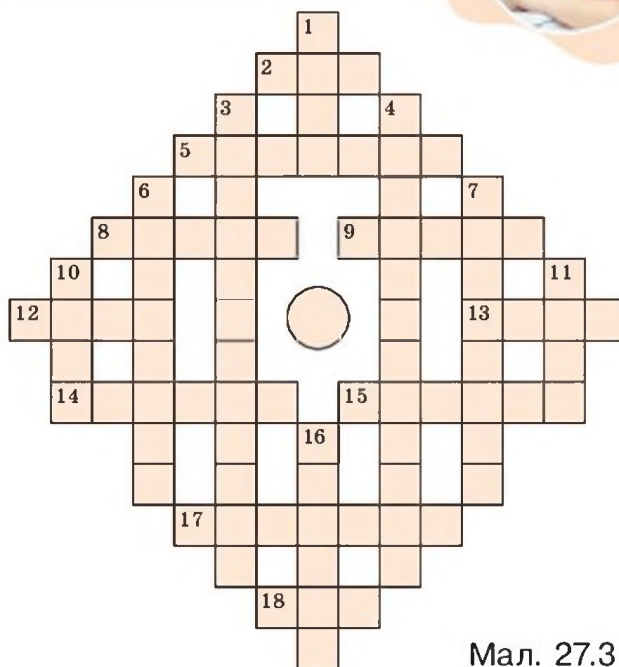
ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1321. Із 3,2 т руди, що містить 32,4 % заліза, відділили шматок 1200 кг, що містить 12 % заліза. На скільки відсотків збільшився вміст заліза?

1322. Розв'яжи кросворд (мал. 27.3).

По горизонталі: 2. Третій степінь. 5. Компонент ділення. 8. Куб числа. 9. Система штрихів на вимірювальному приладі. 12. Нахил на бік корабля. 13. Перше натуральне число. 14. Первоначало, найпростіша неподільна єдність. 15. Те, чим міряють що-небудь. 17. Вираз виду a^n . 18. Латинська буква.

По вертикалі: 1. Ціле число. 3. Натуральне число, менше від 20. 4. Вираз $b^2 - 4ac$ для рівняння $ax^2 + bx + c = 0$. 6. Рівність із невідомою змінною. 7. Сукупність операцій, яка призводить до розв'язування певного виду задач. 10. Одиниця маси. 11. Податок, сплачуваний за перевезення товарів за кордон. 16. Німецький математик і астроном, який відкрив закон руху планет.



Мал. 27.3

СКАРБНИЧКА ДОСЯГНЕНЬ

- ✓ Я вмію визначати, достовірною, неможливою чи випадковою є подія.
- ✓ Я вмію знаходити ймовірність події:

$$P(A) = \frac{\text{кількість сприятливих для події } A \text{ результатів}}{\text{кількість всіх можливих результатів}}.$$

Перейди за посиланнями та

- підсумуй головне в розділі <https://vse.ee/crwt>
- виконай навчальні проекти <https://vse.ee/crwr>

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**ВАРІАНТ I**

1. Підприємець витрачає на виготовлення одиниці своєї продукції 760 грн. Він хоче отримати 30 % прибутку. За якою ціною він має продавати одиницю свого товару?
2. Дано вибірку: 3, 7, 6, 7, 3, 7, 7, 6, 1, 7, 1. Вкажи найбільше значення, найменше значення, моду і середнє значення цієї вибірки.
3. У магазині є 6 видів зошитів в клітинку, 10 видів зошитів у лінійку і 7 видів загальних зошитів. Андрій хоче купити 1 зошит у клітинку і 1 зошит в лінійку або 1 загальний зошит. Скільки варіантів покупки є в Андрія?
4. У ящику лежить 9 білих кульок, 12 чорних і 7 сірих. Яка ймовірність того, що вибрана навмання 1 кулька буде: а) сірою; б) не білою; в) червоною?

ВАРІАНТ II

1. Фермер підрахував, що на вирощення 1 кг картоплі він витратив 18 грн. Він хоче отримати 45 % прибутку. За якою ціною він має продавати 1 кг картоплі?
2. Дано вибірку: 13, 22, 41, 13, 16, 13, 22. Вкажи найбільше значення, найменше значення, моду і середнє значення цієї вибірки.
3. Мама купила 12 слив, 10 персиків і 5 бананів. Галинка хоче взяти персик і сливу або банан. Скільки варіантів вибору є у Галинки?
4. У ящику лежить 7 зелених карток, 10 жовтих і 5 червоних. Яка ймовірність того, що вибрана навмання 1 картка буде: а) жовтою; б) не зеленою; в) чорною?

ВАРІАНТ III

1. Підприємець витрачає на виготовлення одиниці своєї продукції 950 грн. Він хоче отримати 60 % прибутку. За якою ціною він має продавати одиницю свого товару?
2. Дано вибірку: 12, 36, 12, 4, 52, 12, 4, 36. Вкажи найбільше значення, найменше значення, моду і середнє значення цієї вибірки.
3. У магазині є 8 видів лінійок, 6 видів косинців і 5 видів наборів з лінійки і косинця. Артем хоче купити 1 лінійку і 1 косинець або 1 набір. Скільки варіантів покупки є в Артема?
4. У ящику лежить 10 синіх кульок, 6 білих і 12 червоних. Яка ймовірність того, що вибрана навмання 1 кулька буде: а) червоною; б) не білою; в) чорною?

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ



Тестові завдання № 7

1. На полиці стоїть 8 пакетів яблучного соку і 6 пакетів сливового. Яка ймовірність першим взяти пакет зі сливовим соком?
А $\frac{4}{7}$ Б $\frac{1}{6}$ В $\frac{3}{7}$ Г $\frac{1}{8}$
2. У кошику лежить 9 яблук і 5 груш. Скільки існує варіантів взяти яблуко і грушу?
А 45 Б 14 В 40 Г 16
3. Стіл коштує 7000 грн. Скільки буде коштувати стіл, якщо його ціну зменшити на 10 %?
А 7700 грн Б 770 грн В 630 грн Г 6300 грн
4. Знайди моду вибірки: 46, 15, 17, 28, 46, 15, 17, 28, 46.
А 17 Б 15 В 46 Г 28,6
5. Змішали 5 г солі і 95 г води. Якою буде концентрація розчину?
А 19 % Б $\frac{1}{19}$ % В 5 % Г $5\frac{5}{19}$ %
6. У коробці лежить 5 зелених олівців, 6 жовтих і 7 рожевих. Яка ймовірність взяти зелений олівець?
А $\frac{5}{18}$ Б $\frac{13}{18}$ В 1 Г 0
7. На картках написані числа від 1 до 19. Яка ймовірність витягнути картку з парним числом?
А $\frac{9}{19}$ Б $\frac{10}{19}$ В $\frac{11}{19}$ Г $\frac{8}{19}$
8. На тарілці лежить 8 шоколадних цукерок, 7 карамельок і 6 льодяників. Скількома способами можна взяти 1 карамельку або 1 льодяник?
А 21 Б 13 В 15 Г 42
9. Знайди середнє значення вибірки: 12, 4, 6, 12, 4, 4.
А 42 Б 4 В 6 Г 7
10. На виготовлення деталі підприємець витратив 620 грн, а продати її хоче за 868 грн. Який прибуток хоче отримати підприємець?
А 20 % Б 40 % В 120 % Г 140 %

ТИПОВІ ЗАВДАННЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ № 7



1. У класі 10 дівчат і 8 хлопців. Скількома способами можна обрати пару (хлопця і дівчину) для участі у танцювальному конкурсі?
 А 40 Б 80 В 18 Г 9
2. Яка з подій випадкова?
 А наступним днем після понеділка буде четвер
 Б у тижні 7 днів В у середу буде вітер
 Г у кожному місяці 30 днів
3. Фермер привіз на продаж 120 кг огірків і помідорів. Огірки становили 60 % привезених овочів. Скільки помідорів привіз фермер?
 А 72 кг Б 70 кг В 50 кг Г 48 кг
4. На таці лежить 12 пиріжків з м'ясом, 9 пиріжків з капустою і 6 солодких пиріжків з яблуками. Установи відповідність між подіями (1–3) і ймовірністю виконання цієї події (А–Д).

1 Взяти пиріжок з капустою	А $\frac{2}{9}$	Б $\frac{1}{3}$	В $\frac{7}{9}$
2 Взяти не солодкий пиріжок			
3 Взяти пиріжок з маком	Г 1	Д 0	

5. Для замовлення нових костюмів уточнили зріст учасників / учасниць танцювального колективу. Отримали такі дані: 172, 163, 168, 160, 163, 160, 178, 163, 172, 172, 168, 160, 163, 178, 168, 163, 168, 163, 172, 168. За результатами цієї вибірки: а) побудуй частотну таблицю; б) знайди моду і середнє значення; в) побудуй стовпчасту діаграму.
6. Із 1000 деталей 0,4 % — браковані. Яка ймовірність першою взяти не браковану деталь?
7. У пеналі лежить 10 ручок (4 синіх, 3 чорних, 2 зелених і 1 червона), 3 олівці (2 чорних і 1 червоний) та дві гумки (прямокутна й овальна). Скількома способами можна вибрати: а) синю ручку і чорний олівець; б) синю ручку, зелену ручку, червоний олівець і прямокутну гумку; в) чорну ручку, червоний олівець і овальну гумку або синю ручку і прямокутну гумку?
8. Змішали 30-відсотковий і 70-відсотковий розчини кислоти та отримали 500 г 58-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину змішали?

Додаткове завдання

9. В один пакет поклали 2 кг цукерок по 240 грн, 3 кг по 280 грн і ще цукерки по 345 грн за кілограм. Середня ціна цукерок у пакеті становила 300 грн за кілограм. Скільки було в пакеті цукерок по 345 грн?

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Раціональні вирази

Знайди, при яких значеннях змінних не має значення дріб (1323, 1324).

1323. а) $\frac{1}{a-3}$; б) $\frac{5}{2a-6}$; в) $\frac{ac^2}{x(x-3)}$.
1324. а) $\frac{a+2}{a(3-a)}$; б) $\frac{x+1}{(x-2)(x+3)}$; в) $\frac{x+7}{(x^2-4)(x^2-9)}$.

Виконай ділення (1325–1329).

1325. а) $7a^3 : a^2$; б) $8c^4 : c^3$; в) $5x^8 : x^7$.
1326. а) $12a^5 : 3a^4$; б) $15x^{12} : 5x^7$; в) $4c^{13} : 2c^{10}$.
1327. а) $-8c^{10} : 4c^5$; б) $-25x^{12} : x^{12}$; в) $16n^{18} : 16$.
1328. а) $(-2c)^6 : 8c^5$; б) $36x^{13} : (-3x)^2$; в) $2x^4 : (-2x)^3$.
1329. а) $1,5x^5 : (0,5x)^3$; б) $2,7a^7 : (-0,3a)^3$; в) $(-2,1n^2)^2 : (0,7n)^2$.

1330. Знайди значення виразу:

- а) $(3-x)^4 : (3-x)^3$, якщо $x = 1,4$;
б) $(2a-b)^5 : (2a-b)^3$, якщо $a = 2,3$ і $b = 5$.

1331. Знайди значення дробу:

- а) $\frac{a+0,5}{a^2-0,25}$, якщо $a = 2,5$;
б) $\frac{x-y}{x^2-y^2}$, якщо $x = 0,63$ і $y = 0,37$.

Скороти дріб (1332–1336).

1332. а) $\frac{5a}{10}$; б) $\frac{3x}{x}$; в) $\frac{8m}{2n}$; г) $\frac{7a}{14a}$.
1333. а) $\frac{ax}{2a}$; б) $\frac{mn}{3n^2}$; в) $\frac{cz^2}{2cz}$; г) $\frac{6a^2}{12a}$.
1334. а) $\frac{4a^2-b^2}{6a^3c+3a^2bc}$; б) $\frac{3cx^3-6x^2}{9c^2x-18c}$; в) $\frac{8a^3z^2-6a^2z^3}{16a^2z^2-12az^3}$.
1335. а) $\frac{9-4a^2x^2}{18-12ax}$; б) $\frac{15n^2z^3-5n^3z^2}{15n^2z^4}$; в) $\frac{10a^2c+8a^2c^3}{15ac+12ac^3}$.
1336. а) $\frac{(a+x)^2}{(a+x)^3}$; б) $\frac{(2-x)^7}{(2-x)^6}$; в) $\frac{(3+c)^5}{(3+c)^4}$; г) $\frac{(a-1)^3}{(a-1)^5}$.

Спрости вираз (1337–1339).

1337. $\frac{2x^2 + 7xy - 9y^2}{x^2 - y^2} + \frac{11x^2 - 7xy - 4y^2}{x^2 - y^2}$.

1338. $\frac{x+2y}{2x-y} + \frac{2x-2y}{2x-y} - \frac{6x-8y}{2x-y} + \frac{x-7y}{2x-y}$.

1339. $\frac{5x^2 + 20xy + 10y^2}{3x-15y} + \frac{6x^2 - 30xy}{3x-15y} - \frac{10x^2 - 5xy + 10y^2}{3x-15y}$.

1340. Доведи тотожність.

а) $\frac{4a}{a-5} - \frac{20}{a-5} = 4$;

б) $\frac{x^2}{x^2+1} + \frac{2x^2}{x^2+1} + \frac{3}{x^2+1} = 3$.

1341. Доведи, що значення виразу $\frac{a^2}{a^2+1} - \frac{2a}{a^2+1} + \frac{1}{a^2+1}$ не може бути від'ємним числом.

Зведи до спільного знаменника вирази (1342–1344).

1342. а) $\frac{1}{a}$ і $\frac{3}{2a}$; б) $\frac{x}{a+x}$ і $\frac{m}{3(a+x)}$; в) $\frac{1}{3c}$ і $\frac{5}{7c}$.

1343. а) $\frac{1}{3a^2x}$ і $\frac{1}{5ax^3}$; б) $\frac{c}{5b^3z}$ і $\frac{c^2}{2az^3}$; в) $\frac{4}{3ab^4z}$ і $\frac{5}{4a^2bz^3}$.

1344. а) $\frac{1}{a-x}$ і $\frac{1}{(a-x)^2}$; б) $\frac{m}{a-c}$ і $\frac{n}{a^2-c^2}$; в) $\frac{1}{x^3-1}$ і $\frac{1}{x-1}$.

1345. Додай дробі.

а) $\frac{a}{3m}$ і $\frac{3}{4m}$;

б) $\frac{a-x}{2ax}$ і $\frac{1-x}{4x}$;

в) $\frac{1}{2n}$ і $\frac{3-n}{4n^2}$.

1346. Знайди різницю дробів.

а) $\frac{x}{5a}$ і $\frac{1}{a}$;

б) $\frac{2}{3c}$ і $\frac{c-2}{2c}$;

в) $\frac{x^2+2}{3x}$ і $\frac{2}{3}$.

Спрости вираз (1347–1349).

1347. а) $\frac{1}{3a} + \frac{1}{9a}$; б) $\frac{c}{x} + \frac{5}{2x}$; в) $\frac{1}{5c} + \frac{4}{c}$.

1348. а) $\frac{1}{m} - \frac{5}{4m}$; б) $\frac{a}{2x} - \frac{4a}{x}$; в) $\frac{1}{0,5c} - \frac{2}{c}$.

1349. а) $\frac{1}{3ax^2} + \frac{2}{5az^2}$; б) $\frac{4m}{3p^2x} - \frac{1}{5m^2x}$; в) $\frac{4}{a} - \frac{3}{2ac^2x}$.

1350. При яких значеннях m і n є тотожністю рівність

$$\frac{7}{(x-6)(x+1)} = \frac{m}{x-6} + \frac{n}{x+1}?$$

Виконай множення дробів (1351–1354).

1351. а) $\frac{5ab^2}{3x} \cdot \frac{9x^2}{10a^2}$; б) $\frac{4an^3}{5c^2x} \cdot \frac{c^3x}{8an^4}$; в) $\frac{7xz^3}{9ac^2} \cdot \frac{3ac}{14xz}$.
1352. а) $\frac{-2x^2}{3ac} \cdot \frac{6a^2}{4x^3}$; б) $\frac{5an^3}{-4x} \cdot \frac{8x^3}{10an}$; в) $\frac{-ax^4}{3m^4} \cdot \frac{9m^3}{-2x^5}$.
1353. а) $\frac{2a}{3c} \cdot \frac{6ac^2}{5m} \cdot \frac{15m^2}{4a^2}$; б) $\frac{6n^2}{7c^2} \cdot \frac{14c^3}{15n^3} \cdot \frac{5n^2}{8c^2}$.
1354. а) $\frac{a^2 - ax}{c^2 - cx} \cdot \frac{cx - x^2}{a}$; б) $\frac{a^3 + a^2}{c^3 - c^2} \cdot \frac{ac - a}{ax + x}$.

Виконай ділення дробів (1355–1357).

1355. а) $\frac{2ax}{3c^2} : \frac{4ax^2}{9c^3}$; б) $\frac{a^3c^2}{5xy} : \frac{2a^2c^3}{3x^2y}$; в) $\frac{12mn^3}{5ac^2} : \frac{3mn^2}{10a^2}$.
1356. а) $\frac{1,5a}{2x^2} : \frac{3a^2}{4x^3}$; б) $-\frac{2ac^2}{3mn} : \frac{4a^2}{15m^3}$; в) $-\frac{4nx}{3ac} : \left(-\frac{4x^2}{9c^2}\right)$.
1357. а) $\frac{a^2 - x^2}{a^3 - x^3} : \frac{a + x}{a^2 - x^2}$; б) $\frac{2a + 2n}{3a - 3n} : \frac{6a + 6n}{5a - 5n}$.

Спрости вираз (1358–1362).

1358. а) $\frac{a^2b - 4b^3}{3ab^2} \cdot \frac{a^2b}{a^2 - 2ab}$; б) $\frac{4p^2 - 9q^2}{p^2q^2} : \frac{2ap + 3aq}{2pq}$.
1359. а) $\frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{a^4}{(a+b)^2}$; б) $\frac{a^2 - 25}{a^2 - 3a} : \frac{a^2 + 5a}{a^2 - 9}$.
1360. а) $\frac{a^2 - b^2}{(a+b)^2} \cdot \frac{3a + 3b}{4a - 4b}$; б) $\frac{5 - 5a}{(1+a)^2} : \frac{10 - 10a^2}{3 + 3a}$.
1361. а) $\left(\frac{a}{4b} - \frac{b}{4a}\right) \cdot \left(\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} - 1\right)$; б) $\left(\frac{a^2b^3}{6c}\right)^3 : \left(\frac{a^3b^5}{9c}\right)^2$.
1362. $\frac{m^3 - mn^2}{m^2 + n^2} \cdot \left(\frac{n}{m^3 - m^2n + mn^2} + \frac{m - 2n}{m^3 + n^3}\right)$.

Квадратні корені та дійсні числа

Винеси множник з-під знака кореня (1363, 1364).

1363. а) $\sqrt{50}$; б) $\sqrt{300}$; в) $\sqrt{405}$.
1364. а) $\sqrt{1960}$; б) $\sqrt{2890}$; в) $\sqrt{1083}$.

1365. Внеси множник під знак кореня.

- а) $5\sqrt{10}$; б) $8\sqrt{5}$; в) $10\sqrt{13}$; г) $30\sqrt{11}$.

Обчисли значення виразу (1366–1369).

1366. а) $\sqrt{64 \cdot 900}$; б) $\sqrt{25 \cdot 196}$; в) $\sqrt{49 \cdot 676}$.

1367. а) $\sqrt{0,01 \cdot 121}$; б) $\sqrt{0,04 \cdot 169}$; в) $\sqrt{0,09 \cdot 441}$.

1368. а) $\sqrt{6 \cdot 10 \cdot 15}$; б) $\sqrt{15 \cdot 21 \cdot 35}$; в) $\sqrt{20 \cdot 28 \cdot 35}$.

1369. а) $\sqrt{\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{15} \cdot \frac{10}{49}}$; б) $\sqrt{\frac{3}{5} \cdot \frac{7}{36} \cdot \frac{35}{27}}$; в) $\sqrt{1\frac{1}{5} \cdot 2\frac{7}{10}}$.

Обчисли добуток (1370–1372).

1370. а) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{12} \cdot \sqrt{150}$; б) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{60}$.

1371. а) $\sqrt{44,1} \cdot \sqrt{12,1}$; б) $\sqrt{28,9} \cdot \sqrt{32,4}$.

1372. а) $\sqrt{\frac{12}{25}} \cdot \sqrt{\frac{80}{135}}$; б) $\sqrt{8\frac{1}{9}} \cdot \sqrt{1\frac{8}{73}}$.

Спрости вираз (1373–1377).

1373. а) $(\sqrt{3} - 2)^2 + 4\sqrt{3}$; б) $(3 + \sqrt{5})^2 - 6\sqrt{5}$.

1374. а) $(2\sqrt{7} - 1)(2\sqrt{7} + 1)$; б) $(3\sqrt{11} - 2\sqrt{7})(3\sqrt{11} + 2\sqrt{7})$.

1375. а) $8 - (\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$; б) $10 - (\sqrt{7} + \sqrt{3})^2$.

1376. а) $(\sqrt{6} + \sqrt{3}) : \sqrt{3}$; б) $(\sqrt{15} - \sqrt{5}) : \sqrt{5}$.

1377. а) $(7 - 5) : (\sqrt{7} - \sqrt{5})$; б) $(13 - 7) : (\sqrt{13} + \sqrt{7})$.

1378. Скороти дріб.

а) $\frac{2 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1}$; б) $\frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{10} - 5}{\sqrt{5}}$.

1379. Звільни від ірраціональності знаменник дробу.

а) $\frac{6}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{10}{3\sqrt{5}}$; в) $\frac{18}{5 - \sqrt{7}}$; г) $\frac{c}{2 + \sqrt{15}}$.

Квадратні рівняння

1380. Розв'яжи рівняння.

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $x^2 - 8x - 20 = 0$;

в) $4z^2 + z - 3 = 0$;

г) $3y^2 - 2y - 8 = 0$;

г) $0,25x^2 - 2x + 3 = 0$;

д) $2z^2 - 3z + 0,75 = 0$.

1381. Розклади на множники тричлен.

а) $x^2 - 7x + 10$;

б) $x^2 - 9x + 18$;

в) $y^2 - 2y - 35$;

г) $y^2 - 4y - 60$;

г) $a^2 - a - 56$;

д) $c^2 - 5c - 24$.

1382. Скороти дріб.

а) $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$;

б) $\frac{z^2 + z - 6}{z^2 - 2z - 15}$;

в) $\frac{a^2 - 5a + 6}{a^2 + 3a - 10}$.

1383. Склади квадратне рівняння за його коренями.

а) 1 і 3;

б) -2 і 7;

в) 3 і $\frac{2}{3}$;

г) $\sqrt{2} - 1$ і $\sqrt{2} + 1$.

Розв'яжи рівняння (1384–1392).

1384. а) $\frac{x-1}{x+5} + \frac{x-1}{x-5} = 2$;

б) $\frac{2x-1}{x+2} = \frac{1-2x}{x-2} + 4$;

в) $\frac{x-1}{x+4} - 2 = \frac{1-x}{x-4}$;

г) $\frac{2x-1}{2x+4} = \frac{1-2x}{2x-4} + 2$.

1385. а) $\frac{2x+2}{x^2-4} - \frac{x^2+2x+4}{x^3+2x^2+4x+8} = \frac{x^2-2x+4}{x^3-2x^2+4x-8}$;

б) $\frac{x+10}{x^2+x-10} - \frac{x+10}{x^2-x-10} = \frac{50}{x^4-21x^2+100}$.

1386. а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

б) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$.

1387. а) $3x^4 - 2x^2 - 40 = 0$;

б) $5y^4 + 7y^2 - 12 = 0$.

1388. а) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$;

б) $z^6 - 19z^3 - 216 = 0$.

1389. а) $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$;

б) $2x - 3\sqrt{x} - 9 = 0$.

1390. а) $(x^2 - x)^2 - 11(x^2 - x) + 18 = 0$; б) $(\sqrt{x} - 2)^2 - 6(\sqrt{x} - 2) + 8 = 0$.

1391. а) $x + 2 - 13\sqrt{x+2} + 42 = 0$;

б) $x - 3 + 4\sqrt{x-3} - 12 = 0$.

1392. а) $(2x - 1)^4 - (2x - 1)^2 - 12 = 0$; б) $(x + 3)^2 - 13 + \frac{36}{(x + 3)^2} = 0$.

Розв'яжи рівняння (1393, 1394).

1393. а) $\sqrt{x} + 9 = 11$;

б) $12 - \sqrt{x} = 0$.

1394. а) $3 + \sqrt{x-2} = 7$;

б) $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 3$.

1395. Розв'яжи систему рівнянь.

а) $\begin{cases} 2x^2 - y = 2, \\ x - y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = 8, \\ x^2 + y^2 = 40; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - y = 14, \\ y + 2 = x. \end{cases}$

Перейди за посиланнями <https://vse.ee/crws> та розв'яжи задачі і вправи підвищеної складності

ВІДПОВІДІ

33. а) $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -2$; б) $x \neq 0,5$, $x \neq 4$, $x \neq -4$; в) $x \neq -0,5$, $x \neq 7$; г) x — будь-яке число. 35. а) $x \neq 0$, $x \neq -7$, $x \neq 2$; б) $x \neq -0,5$; в) a — будь-яке число; г) $m \neq 4$. 40. а) $x = \frac{2(a+3)}{a(3-a)}$, $a \neq 0$, $a \neq 3$; б) $x = \frac{a-4}{a-7}$, $a \neq 7$. 85. а) $\frac{y+1}{y-1}$; б) $\frac{1}{x+1}$; в) $\frac{x-1}{x+1}$. 86. а) $\frac{2a+5b}{4a-3b}$; б) $\frac{2(a+3)}{a+5}$; в) $1 - xy$. 87. а) -2 ; б) $0,1$. 88. а) 4 ; б) -5 .
96. а) Якщо $a = 3$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 3$, то $x = a$. 97. а) Якщо $a = -5$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq -5$, то $x = 2a$; б) якщо $a = 0$, то коренів немає, якщо $a = -6$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$ і $a \neq -6$, то $x = \frac{a-6}{a}$. 98. а) $\frac{x+c}{y+2x}$; б) $\frac{x-a}{x^2+a}$; в) $\frac{x+a-z-c}{x+z-a-c}$. 99. а) $\frac{x+z}{(1-y)^2}$; б) $\frac{x^2+c^2-ax}{x^2+ax-c^2}$; в) $\frac{ac}{(a+c-b)(a+c+b)}$. 133. а) $1,5$; в), г) коренів немає. 134. а) 0 ; б) -1 , 1 ; в) 0 ; г) коренів немає. 140. 20 км/год. 170. в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{a+b}{ab}$; д) $\frac{c-9}{9c}$. 171. а) $\frac{3}{a+5}$; б) $\frac{1}{4}$; в) $\frac{4x-3y}{xy}$; г) $\frac{x-4y}{y}$. 173. а) 3 ; б) -5 ; в) коренів немає; г) $0,5$. 174. а) 2 ; б) $-7,5$; в) -2 ; г) 2 . 176. а) $c - 1$; б) 1 ; в) $2a + b$; г) $\frac{3a}{a-2}$. 178. а) 3 ; в) $m - 4$; 179. в) $\frac{1}{a-1}$; г) $\frac{3}{(a-b)^2}$. 180. а) $\frac{a+3}{a-3}$; б) $\frac{1}{a-b}$. 189. а) $\frac{4b}{a+b}$; б) 0 . 190. а) $\frac{2}{x-2a}$; в) $\frac{1}{a+2}$; г) $\frac{1}{(x-a)(x-c)}$. 191. Г, Д, А. 192. а) $\frac{1}{12}$; б) 5 ; в) $-0,25$. 193. а) -1 ; б) -4 .
201. а) $\frac{x-2}{2x(x-3y)}$; б) 0 . 202. а) $\frac{1}{b}$; б) 0 . 203. а) -15 . 204. а) -6 ; б) $\frac{1}{5}$; в) 0 ; г) 6 . 205. а) Коренів немає; б) 0 . 206. а) -1 ; б) $-\frac{1}{9}$. 241. а) $\frac{x}{y}$; б) $\frac{(x+3)(x+2)}{6}$; в) $\frac{2(x-y)}{x+y}$; г) $\frac{y(5-x)}{3(5+x)}$. 242. а) $\frac{y}{x}$; б) $\frac{(x-6)(x+4)}{x}$; в) $\frac{y(x+y)}{x-y}$; г) $\frac{2(x+9)}{x+7}$. 247. а) $\frac{9+x^2}{6x}$; б) $\frac{2a}{(2a+b)^2}$. 248. а) $\frac{a^2+b^2}{8}$; б) $\frac{(x+1)(x-4)}{6}$. 249. а) 2 ; б) -24 . 250. а) 20 ; б) $-1,5$. 275. а) $1,5$; б) $\frac{2}{3m^2x}$; в) $\frac{9a}{5b^2}$; г) $-\frac{y}{5c}$. 276. а) $-\frac{5}{2c^2}$;

- б) $-\frac{25a^5}{3c}$. 278. а) $x-y$; б) $\frac{a+2b}{3}$; в) $\frac{4(x-2)}{x+3}$; г) $\frac{a+3}{6-a}$. 279. а) $\frac{x(x+y)}{y(y-x)}$;
 б) $\frac{y(x+y)}{x(y-x)}$; в) $\frac{x^2-xy+y^2}{5(x-y)}$; г) $x(x+2y)$. 280. а) $\frac{3(a^2-1)}{5}$; г) $-\frac{1}{(x+3)^2}$. 281.
 а) $\frac{a}{12b}$; б) $\frac{4xy}{(2x-3y)}$. 282. а) $\frac{(3-x)(3+2x)}{2}$; б) $\frac{x+1}{a-x}$. 283. а) $4(a+2)(a-3)$;
 б) $-(b+4a)$; в) $\frac{3(x+y)}{(x+1)(x+2)}$. 284. а) $\frac{(a+1)^2}{ab(a+2b)}$; б) $2x^2$. 292. а) $a+b$; б) $c-x$.
 293. а) $a-2$; б) a^2-2 . 294. а) $2a^2b+3c^2x$; б) $16a-5c$.

322. В, Г, Д. 327. б) $\frac{a+b}{a-b}$. 328. а) 1; б) $-\frac{1}{a+2}$. 329. а) $2a(a+b)$; б) $\frac{3}{1-c}$.
 330. а) x ; б) 1. 331. а) -1; б) 3. 332. а) 1; б) $a(b+c)$. 333. а) $\frac{b(a+c)}{2ac}$; б) -3.
 334. а) $\frac{a+c}{a}$. 335. а) $-\frac{m}{n}$; б) $\frac{x-z}{y-z}$. 336. а) $\frac{10x+3}{7x+2}$. 337. а) $\frac{1}{n(n-1)}$; б) $(a+c)^2$.
 338. а) $\frac{c-a}{xac}$; б) $\frac{a-x}{a}$. 342. 13. 357. а) $\frac{a^2}{b^2}$; г) $\frac{a+b}{ab}$. 359. а) 0; б) 1. 380. 0,6.
 382. 18 м. 383. 27 і 21 рік. 384. 38 і 12. 385. 62 роки. 386. а) -1; б) 5;
 г) -1, 1; д) коренів немає. 387. а) 2; б) -1; в) 1; г) -1, 1; д) коренів немає.
 388. а) Коренів немає; в) 8; г) -2, 2. 389. а), в) коренів немає; г) -2.
 390. а) 4; в) -3, 0; г) 10. 391. а) 2; б) -0,25, 0; в) 10, 0; г) -2,5. 392. В, А,
 Д. 393. -8,5. 394. $-\frac{2}{3}$. 395. а) 4; б) 0, $\frac{9}{16}$. 396. а) 5; б) 8. 398. 3. 399. 4.

401. а) (0,1; 4); б) (2; 1). 402. а) (5; 3); б) (10; -3). 405. 2 км/год.
 406. $35\frac{1}{3}$ км/год. 407. 20 днів і 30 днів. 408. 10 днів і 15 днів. 409. 2 кг.
 410. 40 г. 411. 2 год і 4 год. 414. а) Якщо $a=3$, то $x=8$, якщо $a=8$, то
 $x=3$, якщо $a \neq 3$, $a \neq 8$, то $x=3$ або $x=8$; б) якщо $a=2$ або $a=-9$, то рів-
 няння коренів не має, якщо $a \neq -2$ і $a \neq -9$, то $x=a$. 416. а) $a=-2$ або
 $a=4$; б) $a=-10$ або $a=0$. 454. а) 0,5; б) 0; в) -25; г) 2. 456. а) 0,09; б) 25;
 в) 300; г) 2,25. 458. а) $2x$; в) $-3a^4b^3$; г) $8x^4y^2$; є) $3a^4c^3$. 460. а) 1; б) -0,5;
 в) 1,5. 465. в) a^{20} ; г) x^{10} . 466. а) $-\frac{1}{a+c}$; б) $\frac{2a^6x^3}{x^6-a^6}$; в) $\frac{2(m^2+n^2)}{m^2n^2}$; г) c^4 .
 467. а) $\frac{x+y}{x-y}$; б) $\frac{2a^6b^3}{b^6-a^6}$; в) $\frac{4}{ab}$; г) p^6 . 468. а) 1; б) b . 469. а) 1; б) $2b$.
 471. а) 0,5; б) 1; в) 1. 472. а) -2, 2; б) 1.

559. а) $-2, 1$; б) $2, 4$; в) $2, 5$. 561. а) $(-4; -1), (1; 4)$; б) $(1; 6), (-1; -6)$.
 565. а) $k = 8, b = 0$; б) $k = -4, b = 6$.

655. б) $30,1$; в) $-13,6$; г) -274 . 656. а) 27 ; б) 30 ; в) -1 ; г) 10 . 657. а) $1,4$; б) $1,8$. 658. а) $1,5$; б) $0,5$. 669. б) -38 ; д) 11 . 670. в) 86 ; г) 64 ; д) коренів немає.

762. а) $a - 1$; б) $|a - 1|$; в) $-|a - 1|$. 764. а) $-4m$; б) x ; в) $1,6a^8$; г) $-0,9a^3b^3$.
 796. а) $-\sqrt{3m}$; г) $7\sqrt{7n}$.

801. а) $1 + \sqrt{7}$; г) -41 . 802. а) 2 ; г) 47 . 804. б) $17 - 4\sqrt{15}$; г) 4 . 805. В, Д, Г, Б. 816. а) $8\sqrt{3}$; б) 0 ; в) -63 ; г) $28 - \sqrt{2}$. 817. а) 12 ; б) 30 ; в) $19\sqrt{2}$; г) $\sqrt{2} + 6$.
 818. а) 9 ; б) 580 ; в) 1 ; г) 4 . 819. а) -15 ; б) 25 ; в) 5 ; г) 2 . 827. а) $\sqrt{7}(\sqrt{5} - 1)$; г) $(a - \sqrt{5})(a + \sqrt{5})$; д) $(3x - \sqrt{y})(3x + \sqrt{y})$; е) $(x - 3\sqrt{c})^2$. 829. а) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$; в) $2a + \sqrt{x}$; е) 2 ; ж) -2 . 830. а) 14 ; б) 9 ; в) 7 ; г) 12 . 831. а) $12\sqrt{5}$; б) 16 ; в) 4 ; г) 4 . 832. а) -83 ; б) 7 . 838. а) $\sqrt{3} - 1$; б) $\sqrt{6} + 1$; в) $4 - \sqrt{5}$. 839. а) $\sqrt{11} + 1$; б) $2 - \sqrt{2}$; в) $2 + 3\sqrt{7}$. 840. а) $\sqrt{2} - a$; б) 1 ; в) $-\frac{1}{x}$; г) 2 . 841. а) $\sqrt{a}$; б) 3 ; в) 2 .

906. а) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$; б) $-3, 3$; в) коренів немає. 907. а) $-2,5, 2,5$; б) коренів немає; в) 0 . 908. б) $-5, 5$; г) $0, -4$. 909. а) $-3, 3$; б) $-\sqrt{10}, \sqrt{10}$. 915. а) $-2, 2$; б) $-12, 0$; в) $-1, 1$. 916. а) $-4, 4$; б) $-3, 0$; в) $4, 0$. 920. б) $2, 6$; в) $4, 10$; г) 5 .
 921. а) $-3\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$; б) $-4, 4$; в) $-0,5, 0$; г) $0, 26$. 922. а) $0, 3$; б) $-10, 10$; г) $-2, 2$. 925. 10 см. 927. 15 і 16 . 928. $10, 11, 12$. 929. $0,16$. 936. 216 см. 938. а) $0, -7, 7$; б) 2 . 939. а) 0 ; б) коренів немає. 972. 12 . 973. $0,8$ і $0,2$. 974. 16 і 17 . 975. 16 і 17 . 981. б) 9 ; г) коренів немає. 982. б) 4 ; г) коренів немає.
 986. а) $2, 4$; б) $3, -0,2$; в) $-\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1$; г) $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$. 987. а) $-0,25, 1$; б) $0,5, 4$; в) $\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{\sqrt{6}}{2}$. 989. а) 4 ; б) 4 ; в) $-10, 3$; г) $2, 0,75$; д) $13, 5$. 990. а) $-1, \frac{2}{3}$; б) $2, 7$; в) $3, 1\frac{1}{3}$; г) $2, -\frac{4}{7}$. 991. б) $1, \frac{2}{3}$; в) $2, 4,5$; г) $-6, 1$. 993. б) $(-6; -3), (2; 5)$. 994. а) $-6, -5, 0, 1$; б) $-0,5, 2, 0, 1,5$; в) $-4, -6, 4, 6$; д) $0,5$; е) $-7, 7$; е) 6 .
 995. а) $-2, -5, -7, 0$; б) $-1,5, 2, 0, 0,5$; в) $-6, -2, 2, 6$; д) 4 ; е) $-1, 1$; е) 3 . 996. а) -2 ; -4 ; г) 81 ; д) $-2, 2$. 997. а) $-1, 2, 0, 1$; б) $-1, 1$; г) 4 ; г) $-1, 3$; д) $-3, 3$. 998. а) $-4, 3$; в) $-4, 1$; г) $-1, 3$; д) $-4, 1$. 999. а) $-5, 1$; б) $-1, -2$; в) $1, 3, 2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}$; д) $1, 3, 2 + \sqrt{33}, 2 - \sqrt{33}$.

1000. б) $-3, -1$. 1001. а) $-5, -0,2$; б) $-1,2$. 1002. а) 4 ; б) $-4, 4$; г) $-10, 10$.
 1003. а) $0,2$; б) $-6, 6$; в) 1 ; г) $0, 4$. 1004. $-3,75$. 1006. а) $-4, 4, 5, -7\frac{4}{15}$; б) $9, -1\frac{6}{25}, 2\frac{3}{4}$. 1007. а) $x = 2$ або $x = a + 1$; б) $x = -1$ або $x = 1 - a$.

1008. а) $x = 3$ або $x = a + 2$; б) якщо $a = 0$, то $x = 1$, якщо $a \neq 0$, то $x = 1$ або $x = \frac{a+1}{a}$. 1033. а) $q = 30$, $x_1 = 5$; б) $q = -27$, $x_1 = -9$. 1034. а) $k = 5$, $x_1 = 0,2$; б) $k = 3$, $x_1 = 4\frac{1}{3}$. 1036. б) $x^2 + 2x - 8 = 0$; г) $x^2 - 6x + 4 = 0$. 1039. а) Ні; б) так. 1040. а) $2x^2 - 3x + 1 = 0$; г) $9x^2 + 12x - 1 = 0$. 1041. а) $3x^2 - 7x + 2 = 0$; г) $2x^2 - 6x + 1 = 0$. 1044. а) $x^2 + 6x - 765 = 0$; б) $2x^2 - 18x + 27 = 0$. 1045. а) $5x^2 - 14x + 1 = 0$. 1046. а) $x_1 = -2$, $x_2 = 12$, $q = -24$. 1047. а) $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $k = -7$ або $x_1 = -5$, $x_2 = -2$, $k = 7$; б) $x_1 = -2$, $x_2 = 10$, $k = -20$. 1049. $x_1 = 0,5$, $x_2 = -2$, $c = -2$. 1051. а) $10\frac{2}{3}$; б) -12 . 1052. 6. 1053. а) -12 ; в) 52; г) 368. 1054. а) -18 ; б) 22. 1056. 4. 1058. а) $b = 0$; б) $c = 0$. 1059. $a = -6$. 1060. $a = -3$. 1061. $a = 9$. 1062. $a = -1$. 1063. $a = 3,5$. 1064. $m = 7$. 1085. а) $0,2(a-1)(3a+8)$; б) $(c+\sqrt{2})(c-2\sqrt{2})$. 1086. $0,2(n-6) \times (n+10)$; в) $(m-\sqrt{2})(m-2\sqrt{2})$. 1087. д) $\frac{2-3x}{x+1}$; е) $\frac{a+2}{a+3}$; ж) $\frac{c+2\sqrt{5}}{c-2\sqrt{5}}$. 1088. д) $\frac{2x-1}{3x-1}$; е) $\frac{x+\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}}$; ж) $\frac{c-3}{c+3}$. 1096. а) Коренів немає; б) $-0,25$; в) 0. 1097. а) Коренів немає; б) $-1, 2$; в) 0. 1098. а) -1 ; б) a ; в) 1. 1099. а) 1; б) $\frac{1}{x+4}$.

1104. а) 1 при $x = 3$; б) -19 при $x = -4$. 1105. а) 12 при $x = 2$; б) 4 при $x = 1$. 1124. 2 км і 1 км. 1125. б) 256. 1127. 6 і 8. 1128. 11 і 12. 1129. 11, 12, 13. 1131. 7 см і 9 см. 1135. 20 км/год. 1136. 10 км/год. 1137. 2 км/год. 1138. 60 км/год. 1139. 60 км/год. 1140. 12 км/год. 1141. 10 год. 1142. 200 км або 160 км. 1143. 2,4 км/год або 3 км/год. 1144. 3 км/год. 1145. 60 см і 80 см. 1146. 6 днів і 12 днів. 1147. 5 год і 7 год. 1148. 14 днів і 11 днів. 1149. 45 днів і 54 дні. 1150. 30 год і 40 год. 1151. 48 або 16. 1152. 25 гілок, 8 бджілок. 1153. 8 днів. 1154. 10 деталей. 1155. 8 год. 1156. 8 а і 5 а або 9 а і 6 а. 1157. 160 г, 20 %. 1158. 16 кг, 20%. 1159. 120 г. 1160. 8,8 г/см³, 7,8 г/см³. 1178. а) 31136 грн; в) 28,5 %. 1180. 11040 грн. 1182. 200000 грн. 1189. 40 %. 1190. а) 100 %; б) 37,5 %. 1192. 40000 грн і 60000 грн. 1193. 1800 грн, 2700 грн. 1195. 250 \$ і 400 \$. 1196. 25 мл і 25 мл. 1197. 2 кг. 1198. Б. 1199. А, Д, В, Г.

1252. 29 р. 1257. 169,3 см. 1259. 8,04. 1260. 49,5 грн. 1277. а) 3; б) 6; в) 12. 1279. 200. 1281. 20. 1282. 76. 1283. 125. 1284. 102. 1286. 96. 1287. 288. 1288. 18. 1289. 18. 1290. 8 команд. 1291. 12.

1308. $\frac{1}{6}$. 1309. $\frac{1}{6}$. 1310. а) $\frac{1}{5}$; б) $\frac{7}{10}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$. 1311. а) $\frac{1}{15}$; б) $\frac{1}{3}$; в) 1; г) 0. 1312. а) $\frac{2}{9}$; б) 1; в) $\frac{5}{9}$. 1313. а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1. 1315. 14, $\frac{3}{5}$. 1316. б) $\frac{7}{40}$; в) $\frac{9}{16}$. 1318. а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{3}{8}$.

Задачі та вправи для повторення

1331. а) 0,5; б) 1. 1337. 13. 1338. -1. 1350. $m = 1$, $n = -1$. 1358. а) $\frac{a+2b}{3}$.
 1360. а) $\frac{3}{4}$. 1361. а) $\frac{a+b}{a-b}$. 1362. $\frac{m-n}{m^2+n^2}$. 1373. а) 7; б) 14. 1375. а) $2\sqrt{15}$;
 б) $-2\sqrt{21}$. 1376. а) $\sqrt{2}+1$; б) $\sqrt{3}-1$. 1377. а) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$; б) $\sqrt{13}-\sqrt{7}$.
 1378. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{3}+1$; в) $\sqrt{2}-\sqrt{5}$. 1379. а) $2\sqrt{3}$; в) $5+\sqrt{7}$. 1384. а) 25; б) 8;
 в) 16. 1385. а) Коренів немає; б) -5. 1391. а) 34; 47; б) 7. 1392. а) -0,5, 1,5;
 б) -5, -1, -6, 0. 1394. а) 18; б) -2, 4. 1395. а) (1; 0), (-0,5; -1,5); б) (6; 2),
 (2; 6); в) (4; 2), (-3; -5).

Задачі та вправи підвищеної складності

1396. а) $\frac{203}{405}$; в) $\frac{999}{1001}$. 1397. а) Ці числа рівні. 1399. 0,999.
 1400. а) $\frac{x^2+ax+a^2}{x+a}$. Розклади на множники чисельник: $x^4+a^2x^2+a^4 =$
 $= x^4+2a^2x^2+a^4-a^2x^2 = (x^2+a^2)^2-a^2x^2 = (x^2+a^2-ax)(x^2+a^2+ax)$;
 б) $\frac{2x+1}{x(4x^2+2x+1)}$; в) a^2-2a+2 . 1403. Існують. 1404. Раціональне.
 1405. Покажи, що $4\pm 2\sqrt{3} = (1\pm\sqrt{3})^2$. 1406. 34, 334, 3334. 1407. Перша
 різниця більша. 1408. 99. 1410. а) -1, $-\frac{3}{2008}$; розклади на множники ліву
 частину рівняння; б) -1, $\frac{1}{1005}$. 1411. а) -6, $-6\pm\sqrt{5}$; б) -1, 3. 1412. а) 1;
 б) $\pm\sqrt{3}$. 1414. $\pm\sqrt{5}$. 1415. $m=\pm 2$. 1416. $m=\pm\sqrt{3}$. 1417. 3 при $m = 1$.
 1418. Щоб корені даного рівняння були раціональними, необхідно, щоб
 виконувалась рівність $p^2-4q=m^2$, де m — ціле непарне число. Покажи,
 що такого m не існує. 1419. 3 км/год. 1420. 121 км. 1421. 3 км/год.
 1422. 5%. 1423. 10,5 бу і 24,5 бу. 1424. 40 або 60 пістолів. 1425. 3,5.
 1426. б) -9, 11. Дане рівняння рівносильне рівнянню $(x-11)(x+9) \times$
 $\times (x^2+2x+101) = 0$; в) 2, 3, 4. 1427. 37. 1428. 27. 1430. $\frac{2}{2005}$. 1431. Звер-
 ни увагу на те, що $3(14n+3)-2(21n+4)=1$. 1434. а) 1; б) 4 або -1,2.
 1436. а) 193^3 .

- Абсциса точки 102
 Аргумент функції 102
 Вершина параболи 117
 Вибірка 238
 Виділення квадратного тричлена 200
 Винесення за знак кореня 148
 Вирази дробові 25
 — з коренями 148, 150
 — цілі 25
 Відсотки 221
 Віднімання дробів 32
 Властивості
 — степенів 87
 — функцій 117
 Внесення під знак кореня 148
 Гіпербола 103
 Графік функції 103
 Графічне розв'язування рівнянь 160
 Дані 229
 Дискримінант 179
 Діаграми
 — лінійні 222, 230
 — стовпчасті 222, 230
 — кругові 222, 230
 Ділення дробів 55
 Добування квадратного кореня 124
 Додавання дробів 32
 Дроби 5
 — числові 5
 — зі змінними 5
 — звичайні 5
 — нескінченні періодичні десяткові 132
 Елементи множини 131
 Звільнення дробу від ірраціональності 149
 Знаменник дробу 5
 Ірраціональні вирази 150
 Ймовірність 252
 Квадрат двочлена 201
 Квадратний тричлен 200
 Комбінаторні задачі 245
 Корінь арифметичний
 — з добутку 140
 — з дробу 140
 — зі степеня 140
 — квадратний 123, 139
 Математична модель 208
 Множина 131
 — дійсних чисел 132
 — порожня 131
 — раціональних чисел 131
 — цілих чисел
 Мода вибірки 239
 Основна властивість дробу 15
 — степеня 87
 Подія
 — випадкова 252
 — достовірна 252
 — неможлива 252
 Показник степеня 86
 Порядок числа 95
 Правило
 — суми 246
 — добутку 246
 Раціональні вирази 25
 Рівняння
 — дробово-раціональні 74
 — квадратні 170, 208
 — зведені 192
 — лінійні 74
 — неповні 170
 — раціональні 73
 Середнє значення вибірки 239
 Скорочення дробів 15
 Спосіб виділення квадрата двочлена 179
 Стандартний вигляд числа 95
 Степінь числа 86
 — з від'ємним показником 86
 — з нульовим показником 86
 — з цілим показником 86
 Таблиці частотні 230
 Теорема Вієта 192
 Тотожні вирази 6
 — перетворення виразів 6, 62
 Тотожність 6
 Формула коренів квадратного рівняння 178
 Функція 102
 — $y = x^2$ 116
 — $y = \sqrt{x}$ 158
 Функції обернені 102
 Чисельник дробу 5

ЗМІСТ

Розділ 1. РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ	4
§ 1. Ділення і дробу.....	5
§ 2. Основна властивість дробу.....	14
§ 3. Раціональні вирази.....	25
§ 4. Додавання і віднімання дробів.....	32
§ 5. Множення дробів	47
§ 6. Ділення дробів	55
§ 7. Перетворення раціональних виразів	62
§ 8. Раціональні рівняння	73
§ 9. Степені з цілими показниками	86
§ 10. Стандартний вигляд числа	95
§ 11. Функція $y = \frac{k}{x}$	102
Розділ 2. КВАДРАТНІ КОРЕНІ І ДІЙСНІ ЧИСЛА.....	114
§ 12. Функція $y = x^2$	116
§ 13. Квадратні корені	123
§ 14. Числові множини	131
§ 15. Квадратний корінь з добутку, дробу, степеня	139
§ 16. Перетворення виразів, які містять квадратні корені	148
§ 17. Функція $y = \sqrt{x}$	158
Розділ 3. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ	168
§ 18. Неповні квадратні рівняння	170
§ 19. Формула коренів квадратного рівняння	178
§ 20. Теорема Вієта	192
§ 21. Квадратний тричлен	200
§ 22. Квадратне рівняння як математична модель прикладної задачі	208
Розділ 4. СТОХАСТИКА	220
§ 23. Відсотки. Задачі на відсотки. Діаграми	221
§ 24. Збирання та систематизація даних. Частотні таблиці. Діаграми	229
§ 25. Вибірка. Середнє значення, мода вибірки	238
§ 26. Комбінаторні задачі.....	245
§ 27. Поняття ймовірності.....	252
Задачі і вправи для повторення	260
Відповіді	265
Предметний покажчик	270

Навчальне видання

БЕВЗ Григорій Петрович
БЕВЗ Валентина Григорівна
ВАСИЛЬЄВА Дарина Володимирівна
ВЛАДІМІРОВА Наталія Григорівна

АЛГЕБРА

Підручник для 8 класу
закладів загальної середньої освіти

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Підручник відповідає Державним санітарним нормам і правилам
«Гігієнічні вимоги до друкованої продукції для дітей»

Редактор *Т. П. Єресько*
Технічний редактор *Л. І. Аленіна*
Комп'ютерна верстка *Д. Д. Карачов*
Коректор *В. Д. Уреньова*
Дизайн обкладинки *Ю. В. Миргородська*

Формат 70х100 $\frac{1}{16}$.
Ум. друк. арк. 22,032 + 0,324 форзац.
Обл.-вид. арк. 18,48 + 0,55 форзац.
Наклад 27 862 пр.
Зам. .

У підручнику використано малюнки художника І. В. Денисова, зображення @shutterstock таких авторів: Naci Yavuz, Natata, GreenSkyStudio, Emil Timplaru, PeopleImages.com - Yuri A. GoXxu Chocolate, OLGA RAZUMOWSKA, Africa Studio, Julija Sapic, Prostock-studio, wee deizgn, LightField Studios

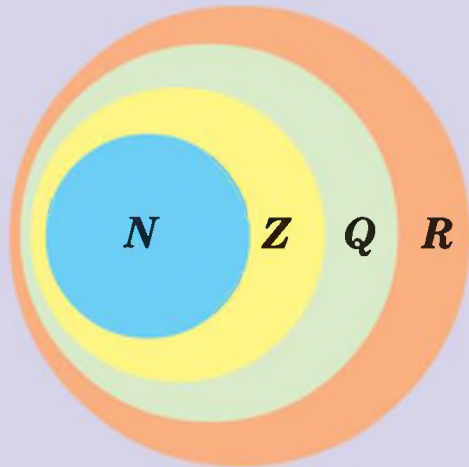
ТОВ «ВИДАВНИЧИЙ ДІМ «ОСВІТА»

Свідоцтво «Про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої продукції»
Серія ДК № 6109 від 27.03.2018 р.

Адреса видавництва: 04053, м. Київ, О. Довженка, 3
www.osvita-dim.com.ua

Віддруковано
в АТ «ХАРКІВСЬКА КНИЖКОВА ФАБРИКА «ГЛОБУС»
61011, м. Харків, вул. Різдвяна, 11.
Свідоцтво ДК № 7032 від 27.12.2019 р.
www.globus-book.com

Числа



N — натуральні,
 Z — цілі,
 Q — раціональні,
 R — дійсні

ЗАКони дії

$$\begin{aligned}a + b &= b + a, \\(a + b) + c &= a + (b + c), \\ab &= ba, \\(ab)c &= a(bc), \\a(b + c) &= ab + ac\end{aligned}$$

Властивості степенів

$$\begin{aligned}a^m a^n &= a^{m+n}, \\a^m : a^n &= a^{m-n}, \\(a^m)^n &= a^{mn}, \\(ab)^n &= a^n b^n, \\\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}\end{aligned}$$

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$\begin{aligned}(a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\(a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\(a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\(a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3, \\a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2), \\a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2), \\(a + b + c)^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc\end{aligned}$$

ВЛАСТИВОСТІ ДРОБІВ

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{a}{m} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \pm b}{m},$$

$$\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n} = \frac{ab}{mn},$$

$$\frac{a}{m} : \frac{b}{n} = \frac{an}{bm}$$

ВЛАСТИВОСТІ КОРЕНІВ

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b},$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}},$$

$$\sqrt{a^{2n}} = |a^n|,$$

$$(\sqrt{a})^2 = a,$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Області допустимих значень цих рівностей указано в тексті підручника

СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ЧИСЛА

$$x = a \cdot 10^n, \text{ де } 1 \leq a < 10,$$

n — порядок числа x

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ — рівняння,}$$

$$D = b^2 - 4ac \text{ — дискримінант,}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2);$$

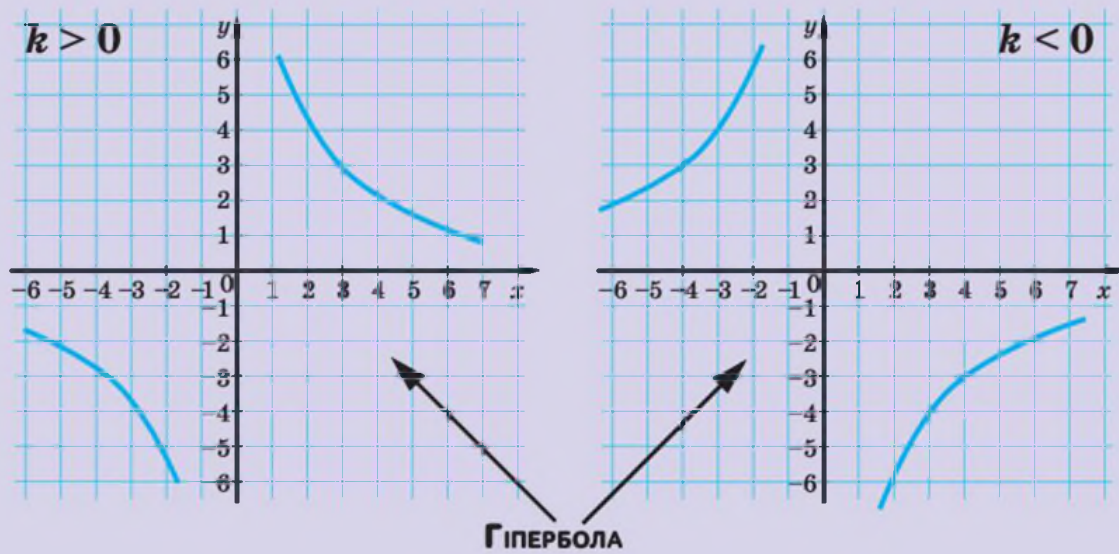
$$x^2 + px + q = 0 \text{ — зведене рівняння,}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \text{ — його корені,}$$

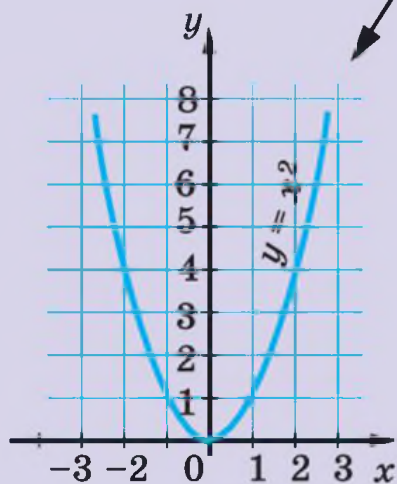
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q \end{cases} \text{ — теорема Вієта}$$

Функції

$y = \frac{k}{x}$ — обернена пропорційність, $x \neq 0$



ПАРАБОЛА



КВАДРАТИ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Де- сятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

СТЕПЕНІ ЧИСЕЛ 2 І 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049