# Основні правила комбінаторики

**„У математиці варто пам’ятати не формули,**
**а процеси мислення”.**

Представникам різних професій доводиться розв'язувати задачі, в яких з деякої множини об'єктів потрібно вибирати елементи, що мають ті або інші властивості, розміщувати ці елементи в певному порядку. Так керівнику цеху потрібно розподілити кілька видів робіт між працівниками, агроному — розмістити посіви сільськогосподарських культур на кількох полях, хіміку — розглянути можливі зв'язки між атомами і молекулами тощо. Оскільки в таких задачах йде мова про комбінування об'єктів, їх називають комбінаторними задачами, а **розділ математики, в якому вивчаються питання про те, скільки різних комбінацій, що відповідають тим чи іншим умовам можна скласти із заданих об'єктів, називається комбінаторикою.**

**Термін «комбінаторика» походить від латинського слова «combina» , що в перекладі « сполучати», «з’єднувати».**

Термін «комбінаторика» був введений в математичну мову німецьким філософом, математиком Лейбніцем, який в 1666 році опублікував свою працю «Дисертація про комбінаторне мистецтво».

В наш час комбінаторні задачі приходиться розв'язувати фізикам, хімікам, біологам, економістам, спеціалістам самих різних професій.

В основі розв’язування більшості комбінаторних задач лежать два правила: правило суми і правило добутку.

Розглянемо такий приклад.

У корзині лежать 6 яблук і 4 груші. Скількома способами можна взяти з корзини один фрукт?

Зрозуміло, що один фрукт можна взяти 6+4=10 способами, оскільки всього фруктів у корзині 10.

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

**Правило суми. Якщо елемент *a* можна вибрати *k* способами, а елемент *b* можна вибрати m способами , то вибір «*a* або *b*» можна здійснити *k* +*m* способами.**

Це правило поширюється на три і більше елементів.

Знову повернемося до нашої задачі, але, при цьому, змінимо запитання.

У корзині лежить 6 яблук і 4 груші. Скількома способами можна взяти з корзини яблуко і грушу?

Складемо таблицю, в якій покажемо, якими способами можна здійснити такий вибір.

| Г \ Я | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **(1;1)** | **(1;2)** | **(1;3)** | **(1;4)** | **(1;5)** | **(1;6)** |
| **2** | **(2;1)** | **(2;2)** | **(2;3)** | **(2;4)** | **(2;5)** | **(2;6)** |
| **3** | **(3;1)** | **(3;2)** | **(3;3)** | **(3;4)** | **(3;5)** | **(3;6)** |
| **4** | **(4;1)** | **(4;2)** | **(4;3)** | **(4;4)** | **(4;5)** | **(4;6)** |

Якщо виберемо одне яблуко то парою до нього може бути одна із чотирьох груш. Оскільки яблук 6, то для кожного із шести яблук парою може бути одна із чотирьох груш, тому всього можна вибрати яблуко і грушу $6 \cdot 4 = 24$ способами.

Узагальненням цього прикладу є таке правило.

**Правило добутку. Якщо елемент *a* можна вибрати *k* способами і після кожного такого вибору елемент *b* можна вибрати *m* способами, то вибір «*a* і *b*» в указаному порядку, тобто вибір упорядкованої пари (*a* ; *b*) можна зробити *k·m* способами.**

Це правило поширюється на три і більше елементів.

Особлива прикмета всіх комбінаторних задач – це питання, яке може починатися словами «***Скільки способів?***»

***Приклад 1.***

З Києва до Одеси можна дістатися поїздом, автобусом, літаком; з Одеси до Ялти – пароплавом і автобусом. Скількома способами можна здійснити подорож Київ – Одеса – Ялта?

*Розв'язання.* Очевидно, число різних шляхів з Києва до Ялти дорівнює $3 \cdot 2 = 6$, бо обравши один з трьох можливих способів подорожі від Києва до Одеси, ми маємо два можливих способи подорожувати від Одеси до Ялти.

*Відповідь.* 6.

***Приклад 2.***

У розіграші першості країни з волейболу бере участь 14 команд. Яким числом способів можуть бути розподілені золота і срібна медалі?

*Розв'язання.* Золоту медаль може одержати одна з 14 команд. Після того як визначимо володаря золотої медалі, срібну модель може мати одна з 13 команд. Отже, загальне число способів розподілення золотої і срібної медалей дорівнює $14 \cdot 13 = 182$.

*Відповідь.182.*

***Приклад 3.***

Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, причому так,щоб у кожному числі всі цифри були різними?

*Розв'язання.* Першою цифрою в такому чотиризначному числі може бути будь-яка з чотирьох цифр: 1, 2, 3, 4. Маємо чотири варіанти.

Оскільки всі цифри в такому чотиризначному числі різні, то другою цифрою числа може бути будь-яка з тих трьох цифр, що лишилися. Отже, для кожного з 4 варіантів першої цифри існує 3 варіанти для другої цифри. Використовуючи правило добутку, маємо, що перші дві цифри чотирицифрового числа можна вибрати $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Після того, як вибрали перші дві цифри, залишилося всього дві цифри, якими можна записати третю цифру чотиризначного числа. Тому для кожного з 12 варіантів вибору перших двох цифр існує два варіанти вибору третьої цифри і, один варіант вибору четвертої цифри.

Таким чином, щоб скласти чотиризначне число, яке б задовольняло умову задачі існує $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способи.

Відповідь. 24.

Під час розв'язання задачі ми знаходили добуток $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. У комбінаторних задачах добуток послідовних натуральних чисел від 1 до $n$ зустрічається так часто, що отримав спеціальну назву «факторіал» і позначається $n!$.

За означенням $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ ( запис $n!$ Читають «ен факторіал»)

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n!$ | 1 | 2 | 6 | 24 | 120 | 720 | 5040 | 40320 | 362880 | 3628800 |

***Приклад 4.***

Скільки чотирицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4?

*Розв'язання.* Так як в задачі не сказано, що в записі числа всі цифри повинні бути різними,то це значить, що кожна цифра може повторюватися, тобто число 1111 і число 1234 задовольняють умову задачі.

Першою цифрою в такому чотиризначному числі може бути будь-яка з чотирьох цифр:1, 2, 3, 4. Маємо чотири варіанти.

Другою цифрою може бути будь-яка з чотирьох цифр: 1, 2, 3, 4. Маємо чотири варіанти.

Третьою цифрою може бути будь-яка з чотирьох цифр: 1, 2, 3, 4. Маємо чотири варіанти.

Четвертою цифрою може бути будь-яка з чотирьох цифр: 1, 2, 3, 4. Маємо чотири варіанти.

Оскільки в записі числа використовуємо і першу і другу і третю і четверту цифру, то застосуємо правило добутку.

$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^4 = 256$ (чисел)

Відповідь. 256.

***Приклад 5.*** Учень має 7 книг з математики, 4 книги з фізики і 2 книги з астрономії. Скількома способами він може розставити ці книги на полиці так , щоб книги з одного предмета стояли поруч?

*Розв’язання.*

1.Спочатку будемо розставляти підручники за предметом: математика фізика, астрономія. Як ці книги можуть стояти на полиці? Складемо таблицю.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Математика | Фізика | Астрономія |
| 2 | Математика | Астрономія | Фізика |
| 3 | Фізика | Математика | Астрономія |
| 4 | Фізика | Астрономія | Математика |
| 5 | Астрономія | Математика | Фізика |
| 6 | Астрономія | Фізика | Математика |

Як бачимо таких способів 6. Можна було використати правило добутку:

На перше місце можна поставити підручник з одного предмета трьома способами, на другу – двома, а третє – трьома способами. Тому розставити підручники за предметом можна $3{\cdot}2{\cdot}1=3!$ способами.

2.Так як підручників з математики 7 то на перше місце поставити підручник можна 7-маспособами, на друге – 6-ма способами, на третє – 5-ма способами, на четверте – 4-ма способами, на п’яте – 3-ма способами, на шосте – 2-ма способами і на сьоме – одним способом. Використовуючи правило множення маємо, що сім підручників з математики можна розставити $7{\cdot}6{\cdot}5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1=7!$ способами.

3. Міркуючи аналогічно, маємо, що 4 книги з фізики можна розставити 4! способами, а 2 книги з астрономії – 2! способами.

4. Потрібно розставити і книги з математики і книги з фізики і книги з астрономії і всі книги по предметам між собою , то для знаходження всіх можливих способів розстановки книг використовуємо правило множення $(7!{\cdot}4!{\cdot}2!){\cdot}3!$.

Можна відповідь залишити в такому вигляді, а можна знайти точне числове значення $5040{\cdot}24{\cdot}2{\cdot}6=155520$ (способів).

Відповідь. $(7!{\cdot}4!{\cdot}2!){\cdot}3!$.

***Приклад 6.*** У книжковому магазині є 4 різних видання поеми «Енеїда», 3 різних видання п'єси «Наталка Полтавка» і 2 різних видання п'єси «Москаль-чарівник» . Крім того,є 5 різних книг, у яких містяться поєма « Енеїда» і п'єса

«Наталка Полтавка», і 6 різних книг, у яких містяться п'єси «Наталка Полтавка» і «Москаль-чарівник». Скількома способами можна зробити покупку, яка б містила по одному екземпляру кожного з цих творів?

*Розв'язання.*

1.Розглянемо скількома способами можна зробити покупку, яка б містила по одному екземпляру кожного з цих творів , купуючи книги, які містять кожна окремо даний твір.

Поему «Енеїда» можна вибрати 4 способами, п'єсу «Наталка Полтавка» - 3 способами, п'єсу «Москаль-чарівник» - 2 способами. Нам потрібно вибрати всі твори, тому використовуємо правило множення: $4\cdot3\cdot2= 24$ способи.

2. Розглянемо скількома способами можна здійснити покупку, якщо купуємо книгу, яка містить поєму « Енеїда» і п'єсу «Наталка Полтавка». Так як таких книг є 5, то є 5 способів вибрати книгу і потрібно ще вибрати книгу, у якій міститься п'єса «Москаль-чарівник». За умовою є .2 різних видання п'єси, тобто є 2 способи виботу. Тому такий набір книг можна здійснити $5\cdot2 =10$ способами.

3. Розглянемо скількома способами можна здійснити покупку, якщо купуємо книгу, у якій містяться п'єси «Наталка Полтавка» і «Москаль-чарівник». Таких книг 6, маємо 6 способів. Вибираємо книгу, у якій міститься поема «Енеїда», таких видань 4, тому і чотири способи вибору книги. Отже існує $6\cdot4=24$ способи вибрати твори таким набором книг.

4 Потрібно купити по одному примірнику кожного твору, тому ми можемо скористатися або першим або другим або третім способом вибору книг. Тому застосовуємо правило додавання $24+10+24=58$ способи.

Відповідь. 58 способи.